

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
НА ДИССЕРТАЦИОННУЮ РАБОТУ

ХАРИТОНОВА МИХАИЛА ИГОРЕВИЧА

“ОЦЕНКИ, СВЯЗАННЫЕ С ТЕОРЕМОЙ ШИРШОВА О
ВЫСОТЕ”

ПРЕДСТАВЛЕННУЮ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 01.01.06 — АЛГЕБРА, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Диссертационная работа М. И. Харитонова посвящена развитию одного из классических результатов комбинаторной алгебры и теории колец – теоремы Ширшова о высоте. Эта теорема утверждает, что если в конечно порожденной ассоциативной алгебре выполняется хотя бы одно тождество, то каждый элемент алгебры представим в виде произведения нескольких степеней слов ограниченной длины от порождающих (длина слов ограничена степенью тождества). Это количество степеней в произведении называется высотой; оно зависит, в частности, от степени тождества и числа порождающих алгебры. В диссертации серьезно улучшены имеющиеся оценки на высоту в зависимости от этих параметров: это дало возможность ответить на известный открытый вопрос и улучшить многие имеющиеся оценки в смежных задачах.

Первым впечатляющим результатом работы явилась оценка вида $c_1 l n^{c_2 \log n}$ для высоты l -порожденной PI алгебры с тождеством степени n . Она явилась следствием аналогичной оценки на высоту множества n -разбиваемых слов в алфавите из l букв. Для доказательства использовалась сложная и изощренная комбинаторная техника, связанная с использованием теоремы Дилсуорса. Этот результат получен в совместной работе с А.Я.Беловым, причем вклад автора диссертации не вызывает сомнений. Оценка кардинально улучшает известные ранее и дает первый субэкспоненциальный пример оценки такого рода.

С помощью развития этой комбинаторной техники автором получен еще ряд оценок в смежных задачах. Первым следствием явилась субэкспоненциальная оценка на степень нильпотентности алгебры с тождеством $x^n = 0$ в зависимости от n . Этот результат дает ответ на вопрос Е. И. Зельманова и также значительно улучшает известные оценки, в том числе асимптотически улучшает полученную независимо свежую оценку А. А. Лопатина.

Упомянутые результаты описаны в главах 3 и 4 диссертации (первые две главы составляют введение и предварительные сведения из теории колец и комбинаторики частично упорядоченных множеств). Дальнейшие, еще более тщательные комбинаторные исследования позволили автору значительно уменьшить константы в оценках на существенную высоту (которая во многих случаях равна размерности Гельфанда–Кириллова алгебры): этому посвящена глава 5.

В главе 6 дана оценка на количество полстановок длины n , не содержащих убывающих подпоследовательностей длины $k + 1$. Эта оценка — $k^{2n}/((k - 1)!)^2$ — заметно улучшает аналогичную оценку Регева k^{2n} , обычно использующуюся как экспоненциальную оценку коразмерности общего многообразия ассоциативных алгебр с тождеством степени $k + 1$. Такого рода комбинаторная техника представляется очень перспективной при оценке коразмерностей многообразий, заданных T -идеалом с конечным базисом Грёбнера, а также размерностей компонент шаффл-операт.

В главе 7 описаны перспективы дальнейшего улучшения представленных оценок, связанные, в частности, с применением графов Рози. Можно надеяться, что эти перспективы будут тщательно исследованы автором диссертации.

Диссертация не лишена и некоторых недостатков. Так, приведенное в диссертации определение (стандартной) диаграммы Юнга (определение 6.1.3) вряд ли можно считать стандартным. В связи с вопросом 6.2.2 (об элементарности производящей функции числа полилинейных слов по модулю конечного числа обструкций) было бы естественно упомянуть свежий результат Verele о том, что такие функции для всех T -идеалов голономны. Эти недостатки не снижают общее хорошее впечатление от работы и не препятствуют ее пониманию.

Диссертация написано ясно и последовательно, результаты и их доказательства изложены четко и полностью. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и значительно способствуют дальнейшему прогрессу в области применения комбинаторных и асимптотических методов в алгебре. Результаты диссертации неоднократно докладывались автором на ряде международных конференций и научных семинарах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации, все основные полученные в диссертации результаты опубликованы в центральных математических журналах.

Таким образом, в диссертации получено интересное решение известной задачи, имеющей важное значение для развития комбинаторной алгебры и теории колец. Ввиду изложенного выше, можно с уверенностью утверждать, что работа Михаила Игоревича Харитонова полностью соответствует требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а автор заслуживает присуждения ученой степени “кандидат физико-математических наук” по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

доктор физико-математических наук

Д. И. Пионтковский

подпись Д. И. Пионтковского заверяю