

## ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

на диссертационную работу Есаулова Даниила Михайловича «Робастные GM-тесты и оценки в авторегрессионных схемах с выбросами» на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика.

Статистический анализ данных, порожденных линейными и нелинейными авторегрессионными схемами, является активно развивающейся областью математической статистики. Начиналось все, разумеется, с параметрических задач для гауссовских инноваций и процедур максимального правдоподобия. Если же распределения инноваций неизвестны, то в такой непараметрической ситуации классические методы оценивания параметров модели, проверки гипотез, различных вариантов задач о «разладке», «change-point» и т.д. основываются на процедурах наименьших квадратов и родственными им. Но есть обширный класс альтернативных процедур наименьших квадратов статистических процедур, родственных между собой и решающих все упомянутые выше задачи. Имеются в виду ранговые, знаково-ранговые, GM-процедуры (обобщенные M-процедуры) и процедуры минимального расстояния (MD-процедуры). Они родственны между собой. «Родство» их понимается здесь в том смысле, что основаны все эти процедуры на остаточных эмпирических процессах. Эти процессы в авторегрессионных схемах являются аналогами классических эмпирических и взвешенных эмпирических процессов. Свойства остаточных процессов – линейные и квадратичные равномерные разложения, слабая сходимости в подходящих метрических пространствах и т.д. – влекут свойства основанных на них процедур. Упомянутые процедуры могут быть асимптотически более эффективными, чем процедуры наименьших квадратов.

Сосредоточимся далее на GM-процедурах. Они привлекают по крайней мере двумя обстоятельствами. Во-первых, для инноваций с тяжелыми хвостами они асимптотически более эффективны, чем процедуры наименьших квадратов. Во-вторых, они могут быть устойчивыми (робастными) против грубых выбросов (засорений) в данных. Последним свойством не обладают процедуры наименьших квадратов, весьма чувствительные даже к малой доле засорений. Разумеется, робастность GM-процедур возможна лишь при специальном выборе функциональных параметров процедур.

Отысканию достаточных условий робастности GM-процедур против выбросов и посвящена основная часть диссертационной работы Д.М. Есаулова. Причем внимание сосредоточено в основном на статистических тестах в общей AR(p) модели. Это более сложная задача, чем исследование робастности оценок. Робастность GM-тестов в авторегрессии – содержательная и далекая от завершения проблема. Наряду с исследованием известных тестов автор предлагает новый статистический GM-тест для проверки гипотезы о размерности AR(p) модели. Он не требует решения громоздких нелинейных систем уравнений, как это случается для GM-процедур, а основан на предварительной оценке параметров авторегрессионной схемы. Эта оценка может быть вычислительно совсем простой.

Рассматриваемые задачи являются содержательными с теоретической точки зрения. Технически они весьма кропотливы. Прикладное значение подобного исследования

очевидно из-за широкого использования авторегрессионных моделей в приложениях. Задачи объединены единым подходом к решению, основанным на использовании остаточных эмпирических процессов. Поэтому исследования для GM-процедур могут быть использованы и в случае ранговых, знаковых и MD-процедур.

Перейдем к обсуждению непосредственно диссертации.

Первая глава является введением. Автор описывает авторегрессионную модель и дает обзор известных результатов по оцениванию параметров и проверке гипотез, в частности, гипотез о размерности модели. Рассматриваются процедуры наименьших квадратов, GM-процедуры, MD-процедуры, ранговые и знаковые процедуры в случае, когда засорений нет. Основное внимание сосредоточено на GM-процедурах, в частности, тестах. Обзор вполне репрезентативен. Далее описывается локальная схема засорения данных одиночными грубыми выбросами и ставится задача отыскания в такой ситуации локально качественно робастных и предельно качественно робастных GM-тестов (результаты для GM-оценок получаются, так сказать, попутно). Эти характеристики качественной робастности введены по аналогии с классическим определением качественной робастности тестов, данным Reider (1978) в схеме независимых данных и в нелокальной ситуации. Ранее они успешно использовались для исследования робастности знаковых процедур (Boldin (2011,2012)). Введение показывает, что автор понимает суть проблемы и место своей задачи в ряду аналогичных задач для упомянутых выше MD, ранговых, знаковых и т.д. процедур.

Во второй главе исследуется AR(1) модель в упомянутой выше локальной схеме засорения. Автор начинает с равномерных линейных разложений остаточных эмпирических процессов. В отличие от стандартных ситуаций, когда засорений нет, здесь установлена равномерность еще и по неизвестному распределению засорений. Это новый и существенный момент. Он позволяет построить GM-тест без оценивания параметра, найти его распределения при гипотезе и локальных альтернативах и, главное, установить локальную качественную робастность теста. Ради полноты исследования далее автор строит GM-тест, основываясь уже на GM-оценке неизвестного параметра, и устанавливает его предельную качественную робастность. Разумеется, тесты асимптотически эквивалентны. Отдельно изучен случай гладкой целевой функции, включающий в себя оценку наименьших квадратов. В гладком случае эмпирические процессы не нужны и исследование основано на формуле Тейлора.

В главе 3 автор переносит результаты на AR(p) модель. Это основная часть работы. Рассуждения в общей ситуации гораздо кропотливее, чем для AR(1) модели. Сначала автор находит линейное разложение остаточных эмпирических процессов в AR(p) при неизвестном, но фиксированном распределении засорений (Теорема 3.4). Это новый факт. Этот факт позволяет построить новый тест для гипотезы о размерности авторегрессии и установить его предельные свойства (Теорема 3.6). В частности, предельную качественную робастность. Это новый и существенный результат (Теорема 3.7). К сожалению, установить локальную качественную робастность автору не удалось из-за технических трудностей. Найдены также значения АОЭ (Асимптотической Относительной Эффективности) по Питмэну вновь построенного теста относительно известных (в схеме без засорений).

Аналогичные результаты получены для теста, основанного на оценке неизвестного вектора параметров (Теорема 3.8).


Любопытна и содержательная четвертая глава, где опять рассматривается AR(1) модель, но цель теперь другая – указать численный алгоритм построения асимптотически оптимального теста. Дело в том, что для AR(1) модели ранее удалось найти асимптотически оптимальный робастный GM-тест, обладающий максиминными свойствами (Болдин, 2014). Автор предложил и реализовал оригинальную численную процедуру по построению таких асимптотически оптимальных тестов. Обширный числовой эксперимент подтвердил теоретические результаты.

Основные результаты работы полно представлены в публикациях, неоднократно докладывались на российских и международных научных конференциях и ряде научных семинаров, в том числе в МГУ и МИАН. Реферат полно отражает содержание работы.

Резюмируем сказанное. Работа посвящена современному и актуальному для теории и приложений разделу математической статистики. Получены новые и содержательные результаты. Они строго обоснованы теоретически и подтверждены численным экспериментом. Сами результаты и их изложение свидетельствуют о высокой математической культуре автора. Результаты опубликованы и прошли необходимую апробацию.

Считаю, что диссертационная работа Д.М. Есаулова “Робастные GM-тесты и оценки в авторегрессионных схемах с выбросами” полностью соответствует требованиям, предъявляемым к диссертационным работам на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика, а Д.М. Есаулов заслуживает присуждения указанной степени.

Научный руководитель,  
кандидат физико-математических наук  
доцент кафедры теории вероятностей  
механико-математического факультета  
МГУ им. М.В. Ломоносова

  
14.09.2015

Болдин Михаил Васильевич

Подпись Болдина М.В. удостоверяю  
и. о. декана механико-математического  
факультета МГУ им. М. В. Ломоносова  
доктор физико-математических наук,  
профессор



  
Чубариков Владимир Николаевич