

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Богданов Олег Николаевич

**МЕТОДИКА СОГЛАСОВАННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ИЗМЕРЕНИЙ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ ДАТЧИКОВ,  
ТРАЕКТОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ  
ОБЪЕКТА С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ЗАДАЧАМ  
ИНЕРЦИАЛЬНОЙ И СПУТНИКОВОЙ НАВИГАЦИИ**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва, 2015

Работа выполнена на кафедре прикладной механики и управления механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

**Научный руководитель:** Голован Андрей Андреевич,  
доктор физико-математических наук

**Официальные оппоненты:** Егоров Юрий Григорьевич,  
доктор технических наук,  
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
Каршаков Евгений Владимирович,  
кандидат физико-математических наук,  
Институт проблем управления  
имени В.А. Трапезникова РАН

**Ведущая организация:** Закрытое акционерное общество  
«Инерциальные технологии  
«Технокомплекса»

Защита диссертации состоится 18 сентября 2015г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Ломоносовский проспект, д. 27.

Автореферат разослан 18 августа 2015г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 501.001.22,  
кандидат физико-математических наук,  
доцент

Прошкин В.А.

## Общая характеристика работы

### **Актуальность темы.**

Методы математического моделирования широко используются при исследовании прикладных задач навигации, соответствующие имитаторы (аппаратные, компьютерные) являются важной составляющей разработки и тестирования бортового программно-математического обеспечения.

В работе значительное внимание уделено разработке и обоснованию методики согласованного численного моделирования первичной навигационной информации бескарданных инерциальных навигационных систем (БИНС) – показаний идеальных инерциальных датчиков – ньютонометров (акселерометров) и гироскопов (датчиков угловой скорости). На основе такой имитации, последующем моделировании (компьютерном, полунатурном) инструментальных погрешностей инерциальных датчиков возможно моделирование широкого спектра задач инерциально-спутниковой навигации для БИНС любого класса точности, от точных лазерных до грубых МЭМС-систем. Задача моделирования показаний инерциальных датчиков рассмотрена для всех типов опорных навигационных систем координат.

Алгоритмы имитации адаптированы к случаю, когда опорная траектория задается телеметрической информацией, зарегистрированной в процессе испытаний (наземных, морских, воздушных) конкретного навигационного комплекса. Это позволяет осуществлять моделирование на конкретном классе движений объекта. Для имитации достаточно располагать позиционной, угловой информацией с невысокой частотой регистрации, например, 1 Гц.

Методика разрабатывалась и тестировалась на приложениях, представляющих самостоятельный научный интерес. К этим приложениям относятся:

1) задача согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков двух БИНС, установленных на одном объекте для последующего исследования задачи начальной выставки на подвижном основании резервной БИНС по информации базовой БИНС;

2) задача точного моделирования показаний инерциальных датчиков для тестирования численных алгоритмов определения ориентации БИНС;

3) задача сравнительного анализа численных алгоритмов определения ориентации в условии вибрационного воздействия на этапе начальной выставки БИНС;

4) задача имитации процедуры калибровки инерциальных датчиков БИНС на одноосном поворотном стенде с целью последующего тестирования алгоритмов калибровки;

5) задача моделирования параметров движения в полярных районах.

Из области спутниковой навигации рассмотрены следующие задачи:

1) задача уточнения траекторных параметров спутников ГЛОНАСС и GPS с помощью данных сервиса IGS в режиме постобработки;

2) задача моделирования ионосферной задержки спутникового радиосигнала при помощи данных CODE и двухчастотных фазовых измерений.

Вышеизложенное обосновывает актуальность выбранной темы исследования.

### **Цель работы.**

Основной целью работы является:

- разработка методики согласованного моделирования показаний идеальных инерциальных датчиков и траекторных параметров при использовании разных опорных навигационных систем координат;

- применение методики для исследования: задачи имитации плана калибровки инерциальных датчиков на одноосном стенде с целью тестирования алгоритмов калибровки; чувствительности численных алгоритмов задачи ориентации к вибрационным воздействиям на этапе начальной выставки БИНС;

- решение задачи оценивания траекторных параметров спутников систем GPS и ГЛОНАСС при помощи данных сервиса IGS;

- решение задачи моделирования ионосферных задержек радиосигналов при помощи двухчастотных фазовых измерений и данных сервиса CODE.

### **Методы исследований.**

Используются методы и модели теоретической механики, теории инерциальной и спутниковой навигации, численные методы, элементы линейной алгебры, оптимального оценивания, теории случайных процессов, элементы радиофизики и физики атмосферы.

### **Достоверность результатов.**

Представленные модели и алгоритмы проверены либо с помощью экспериментальных данных, либо путем тестового моделирования. Представлены теоретические обоснования предлагаемых алгоритмов.

### **Научная новизна.**

В работе получены следующие результаты.

1. Разработана и обоснована методика согласованного моделирования показаний идеальных инерциальных датчиков, включающая согласованное моделирование основных траекторных параметров движения объекта.

2. Разработана и обоснована методика сравнительного анализа численных методов задачи ориентации на этапе начальной выставки БИНС в условиях

вибрационных воздействий.

3. Решена задача моделирования ионосферных задержек спутниковых измерений на основе двухчастотных фазовых измерений и данных центра CODE.

### **Теоретическая и практическая ценность.**

Теоретическую ценность работы представляют обоснованные модели алгоритмов согласованного моделирования показаний идеальных инерциальных датчиков. Неотъемлемым свойством согласованного моделирования является обеспечение выполнения нулевого теста, когда алгоритмы навигации по полученным значениям инерциальных датчиков воспроизводят исходную траекторию с высокой точностью. Другой важный результат – решение задачи оценивания в режиме постобработки траекторных параметров спутников GPS, ГЛОНАСС при помощи данных сервиса IGS.

Разработанные алгоритмы могут быть полезны при проведении соответствующих научно-исследовательских, опытно-конструкторских работ в таких организациях как: ЗАО "Инерциальные Технологии Технокомплекса", ФГУП "ГосНИИАС", ОАО "ЦНИИАГ", ОАО "Пермская научно-производственная приборостроительная компания" и др.

В частности, совместные работы с ОАО "МИЭА" проводились по моделированию показаний инерциальных датчиков на основе телеметрических полетных данных и по моделированию вибрации на этапе начальной выставки БИНС. Это позволило сформулировать требования по доработке бортового программного обеспечения, которое и было осуществлено.

Существенная часть алгоритмов имитации внедряется в аппаратный спутниковый Имитатор ИМ - 2 разработки ОАО "МКБ "Компас".

### **Апробация работы.**

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих научных конференциях:

1. Компьютерная имитация показаний инерциальных датчиков бескарданных инерциальных навигационных систем. Международная конференция по интегрированным навигационным системам, ЦНИИ "Электроприбор", 2013.

2. Analysis of Kepler's elements of the navigation satellite's orbits on the base of precise IGS position information. Международная конференция по последним достижениям космических технологий, Стамбул, 2013.

3. Precise orbit determination for GPS and GLONASS satellites on the basis of IGS data. Международная конференция по последним достижениям космических технологий, Стамбул, 2011.

4. Повышение точности навигации с использованием системы ГЛОНАСС в режиме постобработки. Международный научно-технический семинар "Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации". МАИ, 2009.

5. Моделирование ионосферной погрешности при помощи измерений двухчастотного приемника и данных центра CODE. Конференция молодых ученых, ЦНИИ "Электроприбор", 2007.

6. О возможности повышения точности аэрогравиметрии за счет уточнения данных об эфемеридах навигационных спутников и состоянии ионосферы. Симпозиум Международной ассоциации по геодезии, ЦНИИ "Электроприбор", 2007.

7. Уточнение траекторных параметров навигационных спутников при помощи данных сервиса IGS. Конференция молодых ученых, ЦНИИ "Электроприбор", 2006.

#### **Публикации.**

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах автора, из которых 2 – в журналах перечня ВАК. Список работ приведен в конце автореферата. Работа над диссертацией выполнялась при поддержке РФФИ (проекты 07-01-00430-а, 10-01-00703-а, 13-01-00604-а).

#### **Личный вклад.**

Результаты, выносимые на защиту, получены лично автором. Научному руководителю принадлежат постановки задач и общее научное руководство.

#### **Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 72 наименований, включая работы автора. В диссертации приведено 23 рисунка, общий объем диссертации составляет 142 страницы.

## **Содержание диссертации**

**Во введении** формулируется цель диссертационной работы как разработка методики согласованного моделирования измерений идеальных инерциальных датчиков, траекторных параметров объекта для последующего исследования широкого круга задач инерциально-спутниковой навигации для инерциальных систем разного типа, разного класса точности, разных сфер применения. Описывается структура работы и приводится обзор

основных профильных публикаций, присутствующих в открытой печати.

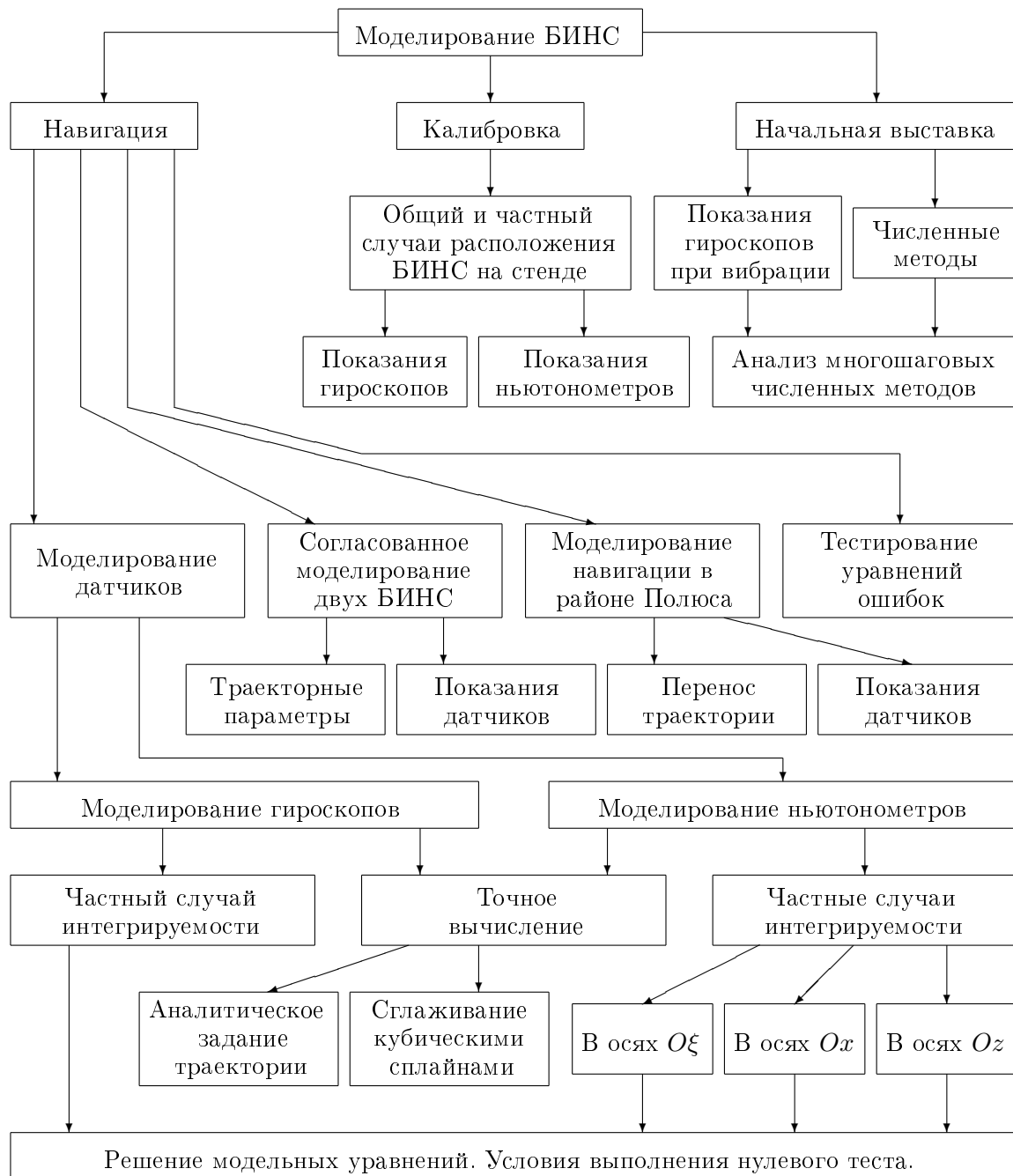
**Первая глава** является вводной, реферативной. В ней приводятся необходимые сведения о моделях инерциальной навигации для самодостаточности изложения. Приводится описание используемых систем координат, параметров и матриц ориентации, кинематических, динамических уравнений движения и ориентации и т.п. (§§ 1.1-1.6).

В § 1.7 обсуждаются два подхода к моделированию траекторных параметров объекта. Первый подход использует аналитические формулы для задания траекторных параметров. Приводится пример простого аналитического имитатора. Во втором подходе для задания опорной траектории используется телеметрическая информация, зарегистрированная в процессе испытаний (наземных, морских, воздушных) конкретного навигационного комплекса. Это позволяет осуществлять моделирование на классе движений объекта. Указывается на практическое преимущество "телеметрического" подхода. Подчеркивается, что требования по составу и частоте обновления телеметрической информации минимальны: достаточно располагать позиционной (географическая широта  $\varphi$ , долгота  $\lambda$ , высота  $h$ ) и угловой (угол курса  $\psi$ , угол тангажа  $\vartheta$ , угол крена  $\gamma$ ) информацией с невысокой частотой регистрации, например, 1 Гц. Обсуждаются основные этапы предварительной обработки телеметрических данных, связанные с диагностикой и исключением возможных сбоев информации, сглаживанием, интерполяцией данных и т.п.

**Вторая глава** посвящена созданию методики, охватывающей вопросы моделирования в инерциальной навигации на всех этапах функционирования бескарданных инерциальных навигационных систем (БИНС).

Глава состоит из четырех разделов (**Разделы 2-5**) и ее содержание иллюстрируется нижеследующей блок-схемой.

Центральным является **Раздел 2**, в котором детально изложена методика моделирования показаний идеальных инерциальных датчиков, в том числе, интегрирующих датчиков. В § 2.1 приводится краткая характеристика БИНС, ее чувствительных элементов – инерциальных датчиков – ньютонометров (акселерометров) и гироскопов (датчиков угловой скорости). Используется понятие приборной системы координат  $Mz$  БИНС (точка  $M$  совпадает с положением чувствительной массы пространственного ньютонометра БИНС), жестко связанной с корпусом объекта и осями чувствительности идеально установленных ньютонометров БИНС.



Блок-схема исследуемых задач и алгоритмов, описанных в главе II.

Гироскопы измеряют абсолютную угловую скорость объекта  $\omega_z$  в осях  $Mz$ , ньютонометры измеряют удельную внешнюю силу  $f_z$ , действующую на точку  $M$ . Обычно инерциальные датчики являются интегрирующими датчиками и измеряют интегралы от  $\omega_z(t), f_z(t)$  на интервале съема измерений  $[t_j, t_{j+1}]$ .

В § 2.2 описана методика моделирования показаний гироскопов. Предполагаются известными координаты объекта и параметры его ориентации



в моменты времени  $t_j$ , где  $j = 0, \dots, n$ . Требуется вычислить показания идеальных гироскопов на каждом интервале  $[t_j, t_{j+1}]$  ( $j = 0, \dots, n - 1$ ).

Рассмотрены два подхода. **Первый** подход основан на частном случае интегрируемости кинематического уравнения Пуассона. Введем правую декартову инерциальную систему координат  $O\xi$ : точка  $O$  – условный центр Земли, ось  $O\xi_3$  совпадает с осью вращения Земли, оси  $O\xi_1, O\xi_2$  лежат в экваториальной плоскости и направлены на неподвижные звезды. Уравнение Пуассона для матрицы ориентации  $A_z$  приборной системы  $Oz$  относительно  $O\xi$  имеет вид:

$$\dot{A}_z = \hat{\omega}_z A_z, \quad \hat{\omega}_z = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{z3} - \omega_{z2} \\ -\omega_{z3} & 0 & \omega_{z1} \\ \omega_{z2} - \omega_{z1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь  $\omega_z = (\omega_{z1}, \omega_{z2}, \omega_{z3})^T$  – вектор абсолютной угловой скорости системы  $Mz$ ,  $\hat{\omega}_z$  – кососимметрическая матрица, поставленная в соответствие вектору  $\omega_z$ .

Если вектор  $\omega_z$  не меняет своего направления на  $[t_j, t_{j+1}]$ , то точное решение уравнения Пуассона имеет вид:

$$A_z(t_{j+1}) = \left( E + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \hat{\gamma}_z + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_z^2 \right) A_z(t_j). \quad (2)$$

Здесь  $\gamma_z$  – вектор конечного поворота приборной системы  $Mz$  на интервале  $[t_j, t_{j+1}]$ ,  $\gamma$  – его модуль.

Элементы матрицы  $A_z$  считаются известными, поскольку зависят от координат объекта и углов его ориентации. Из соотношения (2) находятся компоненты вектора  $\gamma_z$  в явном виде. Среднее значение вектора  $\omega_z$  на отрезке  $[t_j, t_{j+1}]$  определяется так:  $\gamma_z = \omega_z \Delta t$ ,  $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ .

**Второй** подход предполагает моделирование показаний интегрирующих гироскопов на основе численного интегрирования вектора  $\omega_z$ . Рассматриваются два способа формирования реализаций вектора  $\omega_z$ . **В первом случае** координаты и углы ориентации объекта задаются как аналитические непрерывные функции времени:  $\varphi(t), \lambda(t), h(t), \psi(t), \vartheta(t), \gamma(t)$ , где  $t \in [t_0, t_n]$ . Требуется определить показания гироскопов на каждом интервале времени  $[t_j, t_{j+1}]$ , ( $j = 0, \dots, n - 1$ ).

Введем географическую систему координат  $Mx$ :  $Mx_3$  – географическая вертикаль, оси  $Mx_1, Mx_2$  лежат в плоскости горизонта, ось  $Mx_1$  направлена на Восток, ось  $Mx_2$  – на Север. Запишем выражение для вектора  $\omega_z$ :

$$\omega_z = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma \\ \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\vartheta} \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma \end{pmatrix} + L\omega_x. \quad (3)$$

Здесь  $\omega_x$  – абсолютная угловая скорость системы  $Mx$ ,  $L$  – матрица ориентации приборной системы  $Mz$  относительно географической  $Mx$ .

Вектор  $\omega_z$  представляет собой выражение, зависящее от координат, углов ориентации объекта и их первых производных, поскольку элементы матрицы  $L$  и компоненты вектора  $\omega_x$  выражаются через эти параметры.

Разобьем интервал времени  $[t_j, t_{j+1}]$  на  $m$  равных отрезков,  $m \gg 1$ . Будем приближенно вычислять интеграл  $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega_z(t) dt$  как интегральную сумму:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega_z(t) dt \cong \sum_{k=1}^m \omega_{zk}^* \cdot \Delta\tau, \quad \tau_k = t_j + k\Delta\tau, \quad \Delta\tau = \Delta t/m. \quad (4)$$

Здесь  $\omega_{zk}^*$  – некоторое значение  $\omega_z(t)$  на  $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ .

Выбирая величину  $m$ , можно вычислять интеграл сколь угодно точно.

**Во втором случае** координаты и углы ориентации задаются дискретным набором данных  $\psi(t_j), \vartheta(t_j), \gamma(t_j), \varphi(t_j), \lambda(t_j), h(t_j)$  из телеметрической информации. Для сведения задачи к первому аналитическому случаю, т.е. для формирования координат и углов ориентации объекта как непрерывных известных функций времени, осуществим сглаживание дискретных реализаций при помощи кубических сплайнов.

Разобьем отрезок времени  $[t_0, t_n]$  на  $l$  отрезков равной длины,  $p = n/l$  – количество узлов  $t_i$  в каждом отрезке. Для каждого отрезка  $[t_{ip}, t_{(i+1)p}]$  введем безразмерное время  $\tau$ :

$$\tau = \frac{t - t_{ip}}{t_{(i+1)p} - t_{ip}}, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (5)$$

Введем базисные функции:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= \frac{1}{4}(1 - \tau)^3, & \varphi_2(\tau) &= 1 - \frac{3}{4}(2 - \tau)\tau^2, \\ \varphi_3(\tau) &= 1 - \frac{3}{4}(1 + \tau)(1 - \tau)^2, & \varphi_4(\tau) &= \frac{1}{4}\tau^3. \end{aligned} \quad (6)$$

Набор коэффициентов для каждой реализации будем обозначать, соответственно  $c_i^\varphi, c_i^\lambda, c_i^h, c_i^\psi, c_i^\vartheta, c_i^\gamma$ , где  $i = 0, \dots, l + 2$ . На каждом интервале  $[t_{ip}, t_{(i+1)p}]$  для  $f = \{\varphi, \lambda, h, \psi, \vartheta, \gamma\}$  имеем:

$$f(t) = c_i^f \varphi_1(\tau) + c_{i+1}^f \varphi_2(\tau) + c_{i+2}^f \varphi_3(\tau) + c_{i+3}^f \varphi_4(\tau) \quad (7)$$

и  $\tau$  определяется соотношением (5). Выражения для производных имеют вид:

$$\dot{f}(t) = c_i^f \dot{\varphi}_1(\tau) + c_{i+1}^f \dot{\varphi}_2(\tau) + c_{i+2}^f \dot{\varphi}_3(\tau) + c_{i+3}^f \dot{\varphi}_4(\tau), \quad (8)$$

где производные базисных функций с учетом (5) таковы:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1(\tau) &= -\frac{1}{p\Delta t} \cdot \frac{3}{4}(1-\tau)^2, & \dot{\varphi}_2(\tau) &= \frac{1}{p\Delta t} \left[ \frac{3}{4}\tau^2 - \frac{3}{2}(2-\tau)\tau \right], \\ \dot{\varphi}_3(\tau) &= \frac{1}{p\Delta t} \left[ -\frac{3}{4}(1-\tau)^2 + \frac{3}{2}(1+\tau)(1-\tau) \right], & \dot{\varphi}_4(\tau) &= \frac{1}{p\Delta t} \cdot \frac{3}{4}\tau^2.\end{aligned}\quad (9)$$

Таким образом, на отрезке  $[t_0, t_n]$  определены следующие функции:  $\varphi(t), \lambda(t), h(t), \psi(t), \vartheta(t), \gamma(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\lambda}(t), \dot{\psi}(t), \dot{\vartheta}(t), \dot{\gamma}(t)$ . После применения аппарата кубических сплайнов задача сводится к первому случаю.

Изложенный подход предназначен для исследования многошаговых численных методов решения уравнения Пуассона.

В § 2.3 описана аналогичная методика моделирования показаний ньютонометров. Также рассматриваются два подхода. **Первый** подход базируется на частных случаях интегрируемости уравнений навигации. Задача ставится следующим образом. Предполагаются известными координаты объекта, параметры ориентации в моменты времени  $t_j$  ( $j = 0, \dots, n$ ), а также скорость объекта в момент  $t_0$ . Требуется вычислить показания идеальных ньютонометров и значение вектора скорости на каждом интервале  $[t_j, t_{j+1}]$  ( $j = 0, \dots, n-1$ ).

В работе также рассматриваются два подхода. **Первый** подход базируется на частных случаях интегрируемости кинематических и динамических уравнений БИНС. Рассмотрены три варианта записи уравнений движения: в осях инерциальной, географической и приборной систем координат. Первые две системы координат чаще всего используются в качестве опорных при реализации алгоритмов инерциального счисления БИНС.

Рассмотрим, для определенности, уравнения движения в географической системе координат:

$$\dot{A}_x = \hat{\omega}_x A_x, \quad \dot{v}_x = \hat{\omega}_x v_x + f_x + g_x^0. \quad (10)$$

Здесь  $A_x$  – матрица ориентации географической системы относительно инерциальной,  $v_x$  – вектор абсолютной скорости объекта,  $g_x^0$  – вектор удельной силы тяготения,  $f_x$  – вектор внешних сил, действующих на объект.

Будем считать, что векторы  $f_x, g_x^0$  и  $\omega_x$  постоянны на интервале времени  $[t_j, t_{j+1}]$ . Тогда можно показать, что точное решение системы уравнений (10)

запишется в виде:

$$\begin{aligned}
A_x(t_{j+1}) &= \left( E + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \hat{\gamma}_x + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_x^2 \right) A_x(t_j), \\
v_x(t_{j+1}) &= \left( E + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \hat{\gamma}_x + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_x^2 \right) v_x(t_j) + \\
&+ \left( E + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_x + \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma^3} \hat{\gamma}_x^2 \right) \Delta F_x,
\end{aligned} \tag{11}$$

где  $\gamma_x$  – вектор поворота географической системы на интервале  $[t_j, t_{j+1}]$ , а

$$\Delta F_x = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (f_x(t) + g_x^0(t)) dt. \tag{12}$$

Вектор  $\gamma_x$  определяется в явном виде из первого соотношения (11) и  $\omega_x = \gamma_x / \Delta t$ . С помощью вектора  $\omega_x$  вычисляется вектор линейной скорости объекта  $v_x$ . Показано, что для обеспечения вычислительной устойчивости значение вектора скорости следует отнести к моменту  $t_{j+1}$ . В результате:

$$f_x = \frac{1}{\Delta t} C_2^{-1}(\gamma_x) [v_x(t_{j+1}) - C_1(\gamma_x) v_x(t_j)] - g_x^0, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
C_1(\gamma_x) &= E + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \hat{\gamma}_x + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_x^2, \\
C_2(\gamma_x) &= E + \frac{1 - \cos \gamma}{\gamma^2} \hat{\gamma}_x + \frac{\gamma - \sin \gamma}{\gamma^3} \hat{\gamma}_x^2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Далее вектор  $f_x$  перепроектируется на оси приборной системы координат  $Mz$ . В осях инерциальной и приборной систем координат задача моделирования показаний ньютометров решается похожим образом с учетом обеспечения вычислительной устойчивости.

**Второй** подход предполагает моделирование интегрирующих ньютометров и представляет собой численное интегрирование вектора удельной силы  $f_z$ . Как и при моделировании показаний гироскопов в работе рассматриваются два способа задания траекторных параметров.

**В первом** случае координаты и углы ориентации объекта задаются как аналитические непрерывные функции времени:  $\varphi(t), \lambda(t), h(t), \psi(t), \vartheta(t), \gamma(t)$ , где  $t \in [t_0, t_n]$ . Выражение для вектора удельной силы таково:

$$f_z = L(\dot{v}_x - \hat{\omega}_x v_x - g_x^0). \tag{15}$$

Вектор силы тяготения  $g_x^0$  в явном виде зависит от координат объекта, вектор скорости  $v_x$  выражается через координаты объекта и их первые производные.

Таким образом, вектор  $f_z$  можно выразить через координаты, их первые и вторые производные, и углы ориентации объекта. Интегрирование вектора  $f_z$  осуществляется каким-либо численным способом сколь угодно точно.

**Во втором** случае координаты и углы ориентации задаются дискретным набором  $\psi(t_j), \vartheta(t_j), \gamma(t_j), \varphi(t_j), \lambda(t_j), h(t_j)$  телеметрических данных. Для сведения задачи к первому случаю осуществляется сглаживание дискретных реализаций при помощи кубических сплайнов. Запишем выражения для вторых производных базисных функций:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1(\tau) &= \frac{3}{2}(1 - \tau) \cdot \frac{1}{p^2 \Delta t^2}, & \ddot{\varphi}_2(\tau) &= \frac{3}{2}(3\tau - 2) \cdot \frac{1}{p^2 \Delta t^2}, \\ \ddot{\varphi}_3(\tau) &= \frac{3}{2}(1 - 3\tau) \cdot \frac{1}{p^2 \Delta t^2}, & \ddot{\varphi}_4(\tau) &= \frac{3}{2}\tau \cdot \frac{1}{p^2 \Delta t^2}.\end{aligned}\quad (16)$$

Тогда вторые производные от географических координат точки  $M$  на каждом отрезке  $[t_{ip}, t_{(i+1)p}]$  вычисляются по формулам:

$$\ddot{f}(t) = c_i^f \ddot{\varphi}_1(\tau) + c_{i+1}^f \ddot{\varphi}_2(\tau) + c_{i+2}^f \ddot{\varphi}_3(\tau) + c_{i+3}^f \ddot{\varphi}_4(\tau), \quad f = \{\varphi, \lambda, h\}. \quad (17)$$

Таким образом, на отрезке  $[t_0, t_n]$  определены следующие функции:  $\psi(t), \vartheta(t), \gamma(t), \varphi(t), \lambda(t), h(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\lambda}(t), \dot{h}(t), \ddot{\varphi}(t), \ddot{\lambda}(t), \ddot{h}(t)$ . Как и ранее задача сведена к первому случаю.

Далее в работе приводятся результаты исследования разноплановых задач инерциальной навигации, для которых в той или иной форме необходимо осуществлять моделирование показаний инерциальных датчиков.

В § 2.4 приводится построение моделей согласованного моделирования для двух БИНС, расположенных в разных местах на одном объекте. Такое моделирование востребовано для исследования задачи начальной выставки БИНС на подвижном основании при помощи данных базовой БИНС.

Исходными данными для моделирования служат параметры траекторного движения приведенной чувствительной массы базовой БИНС  $(\lambda^{(1)}, \varphi^{(1)}, h^{(1)})$ , углы ориентации корпуса объекта  $(\psi, \vartheta, \gamma)$ , а также геометрические параметры, характеризующие относительное расположение  $\bar{l}_{12}$  приведенных чувствительных масс БИНС  $(M_1, M_2)$  и матрицу  $C_{z_2 z_1}$  взаимной ориентации их приборных осей  $M_1 z_1$  и  $M_2 z_2$ . Алгоритмы согласованного моделирования выходной информации двух БИНС сводятся к применению описанных ранее алгоритмов.

В § 2.5 исследуется вопрос выполнения так называемого нулевого теста при моделировании. Суть нулевого теста сводится к проверке точности

воспроизведения исходной траектории путем решения уравнений навигации по вычисленным показаниям идеальных датчиков.

Подробно рассмотрены возможные сочетания условий моделирования показаний датчиков и алгоритмов навигационного счисления. Если моделирование показаний ньютометров осуществляется в быстро вращающейся приборной системе  $Mz$ , а уравнения навигации решаются в осях другой, например, медленно вращающейся географической системы  $Mx$  или неподвижной инерциальной системы  $O\xi$ , то нулевой тест полностью выполняться не будет. Это связано с перепроектировкой показаний ньютометров  $f$  и вектора силы тяготения  $g^0$  из одной системы в другую.

Показано, что для минимизации ошибок нулевого теста следует проектировать удельную силу  $f$  и силу тяготения  $g^0$  при помощи матриц ориентации, соответствующих половине вектора поворота за интервал времени  $[t_j, t_{j+1}]$ . А именно, матрицы ориентации  $A_x(t_j + \frac{\Delta t}{2})$ ,  $A_z(t_j + \frac{\Delta t}{2})$  географической  $Mx$  и приборной  $Mz$  систем координат должны вычисляться через углы  $\gamma_x$  и  $\gamma_z$  по формулам:

$$\begin{aligned} A_x\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}\right) &= \left(E + \frac{\sin \frac{\gamma_x}{2}}{\gamma_x} \hat{\gamma}_x + \frac{1 - \cos \frac{\gamma_x}{2}}{\gamma_x^2} \hat{\gamma}_x^2\right) A_x(t_j). \\ A_z\left(t_j + \frac{\Delta t}{2}\right) &= \left(E + \frac{\sin \frac{\gamma_z}{2}}{\gamma_z} \hat{\gamma}_z + \frac{1 - \cos \frac{\gamma_z}{2}}{\gamma_z^2} \hat{\gamma}_z^2\right) A_z(t_j). \end{aligned} \quad (18)$$

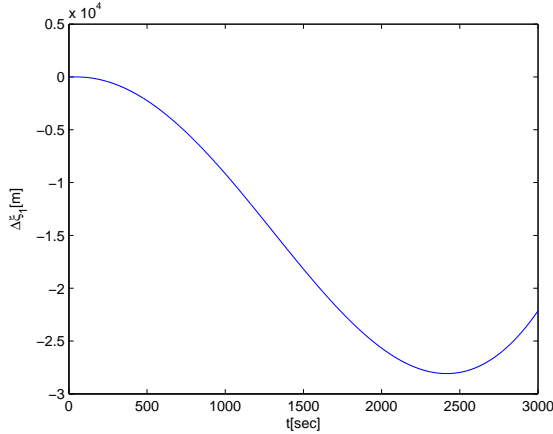


Рис. 1: График ошибки местоположения по оси  $O\xi_1$ . Матрица перепроектировки –  $A_z(t_j)$ .

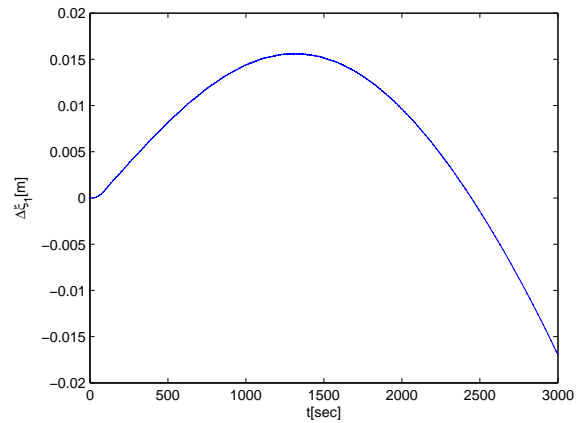


Рис. 2: График ошибки местоположения по оси  $O\xi_1$ . Матрица перепроектировки –  $A_z(t_j + \frac{\Delta t}{2})$ .

На Рис. 1,2 для полетных данных представлены графики ошибки решения уравнений навигации по оси  $O\xi_1$  при моделировании показаний

ньютонетров в инерциальной системе и решении уравнений навигации в приборной системе координат. В первом случае, векторы  $f$  и  $g^0$  проектируются при помощи матриц, отнесенных к моменту времени  $t_j$ , во втором – при помощи матриц, отнесенных к моменту  $t_j + \frac{\Delta t}{2}$ . В первом случае ошибка достигает десятков километров, а во втором случае не превышает нескольких сантиметров, что говорит о практически полном выполнении нулевого теста.

В § 2.6 решается задача моделирования траекторных параметров в полярных областях, которая возникла из практики аэрогравиметрических съемок. Существующие гравиметрические комплексы платформенного типа, например, GT2A (ЗАО "Гравиметрические технологии"), Чекал-АМ (Концерн "Электроприбор"), имеют особенности алгоритмов навигации и гиостабилизации в высоких широтах. Последнее связано с тем, что в точках Северного и Южного полюсов неопределена долгота  $\lambda$  и угол курса  $\psi$ . Кроме того, при движении объекта строго через полюс долгота  $\lambda$  и угол курса  $\psi$  меняются скачком на 180 градусов. Разработчики аэрогравиметра GT2A стали использовать систему разнесенных спутниковых антенн, как источник курсовой информации, модифицируя алгоритмы функционирования. Для тестирования новых алгоритмов и оказалась востребованной задача имитации типового полета в высоких широтах.

Задача ставится следующим образом: смоделировать согласованные значения траекторных параметров для типовых аэрогравиметрических профилей в районах с умеренным значением широты, затем "перенести" эти траектории в полярные районы. Задача "переноса" распадается на две подзадачи: "перенос" координат и "перенос" ориентации. Задачу "переноса" удобно решать, используя гринвичские координаты точки.

Введем гринвичскую систему координат  $O\eta$ . Ось  $O\eta_3$  – ось вращения Земли,  $O\eta_1\eta_2$  – плоскость экватора, ось  $O\eta_1$  лежит в плоскости нулевого гринвичского меридиана. Показано, что перенос траектории следует осуществлять, вводя матрицу переноса  $C$ :

$$\eta^P(t_j) = C^T \eta(t_j). \quad (19)$$

Здесь  $\eta(t_j)$  и  $\eta^P(t_j)$  – гринвичские координаты точки  $M$ , соответственно, до и после переноса. Отмечается необходимость коррекции значений высоты, что связано с различием значений большой и малой полуосей модельного эллипсоида Земли.

Ориентация объекта описывается соотношением:

$$B_z^P(t_j) = B_z(t_j)C, \quad (20)$$

где  $B_z(t_j)$  и  $B_z^P(t_j)$  – матрицы ориентации приборной системы относительно гринвичской, соответственно, до и после переноса. Затем по элементам матрицы  $B_z^P(t_j)$  определяются углы ориентации у "перенесенной" траектории.

Предложенные преобразования координат и углов ориентации, по сути, являются аналогом введения некоторой ортодромической системы координат, жестко связанной с Землей.

На Рис. 3,4 в качестве примера приведены графики полетной траектории (по осям – отсчеты долготы и широты), соответственно, до и после переноса, наглядно иллюстрирующие некорректность использования географических координат для моделирования траекторных параметров в полярных областях.

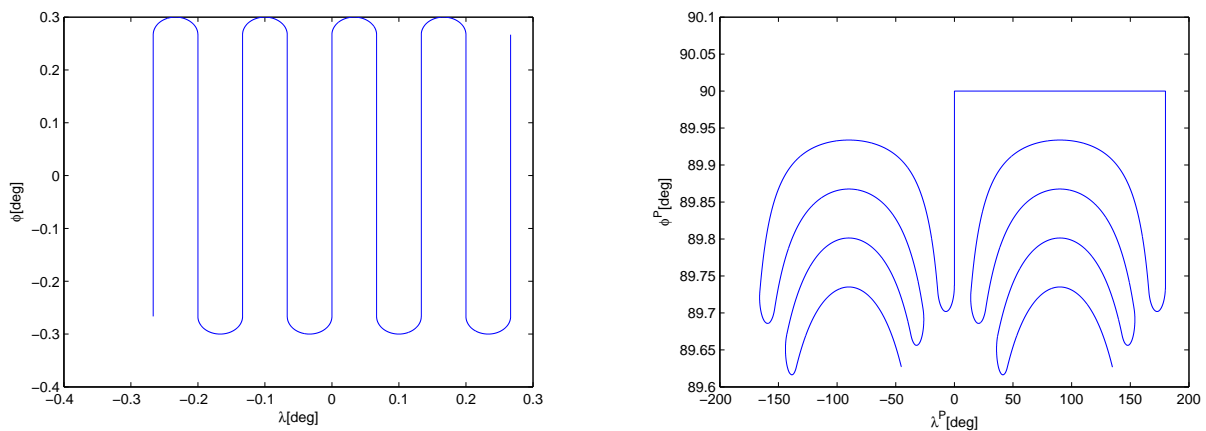


Рис. 3: Траектория, заданная в Рис. 4: Траектория, "перенесенная" в районе экватора. район Северного Полюса.

В Разделе 3 рассматривается задача тестирования уравнений ошибок инерциальной навигации. На практике используются различные виды линейных уравнений ошибок, предложенные разными авторами. Каждая модель ошибок представляет собой линеаризацию реальной траектории объекта в окрестности модельной траектории. Область применимости каждой модели уравнений ошибок БИНС обусловлена с одной стороны, характером движения объекта, а с другой стороны, шагом  $\Delta t$  и численным методом интегрирования модельных уравнений.

Показано, что корректное тестирование должно осуществляться путем сравнения решения уравнений ошибок с прямой разностью между исходной траекторией и решением уравнений навигации. Приведенное в работе тестирование демонстрирует, как правильно учитывать важные для приложений факторы: угловые ошибки начальной выставки БИНС,



разделение полных ошибок местоположения и скорости на динамические и кинематические составляющие, взаимосвязь ошибок определения абсолютной и относительной линейной скорости движения, ошибки определения углов ориентации корпуса объекта.

**Раздел 4** посвящен задаче моделирования показаний инерциальных датчиков при имитации калибровочных экспериментов. Целью такого моделирования является последующее тестирование алгоритмов калибровки, разработанных, возможно, другими авторами.

В диссертационной работе использован план калибровочных экспериментов, основанный на методике калибровки инерциальных датчиков БИНС на грубом одноосном стенде. Методика была предложена Н.А. Парусниковым.

Калибровка включает в себя несколько циклов вращения БИНС. Рассмотрен как общий случай произвольного направления оси вращения и произвольного расположения БИНС на стенде, так и частный случай, когда ось вращения стенда горизонтальна, а сама калибровка состоит из трех циклов, в каждом из которых одна из приборных осей совмещается с осью вращения.

При моделировании учитываются следующие факторы:

- внутреннее разнесение чувствительных масс ньютонометров друг относительно друга и относительно оси вращения стенда;
- внешнее отнесение корпуса БИНС относительно оси вращения стенда;
- угловые ошибки установки корпуса БИНС относительно оси вращения;
- типовые модели погрешностей инерциальных датчиков.

В § 4.1 подробно изложена процедура калибровки. Вводится подвижная система координат  $Mt$ , связанная со стендом так, что ось  $Mt_2$  – ось вращения стенда. Тогда матрица  $I_\chi$

$$I_\chi = \begin{pmatrix} \cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & \cos \chi \end{pmatrix}. \quad (21)$$

будет характеризовать поворот на угол  $\chi$  твердого тела, прикрепленного к этой оси.

Для частного случая горизонтальной оси вращения вводятся матрицы несоосности расположения корпуса БИНС на стенде:

$$I_\alpha^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3^{(k)} & -\alpha_2^{(k)} \\ -\alpha_3^{(k)} & 1 & \alpha_1^{(k)} \\ \alpha_2^{(k)} & -\alpha_1^{(k)} & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (22)$$

Здесь  $k$  – номер цикла.

В § 4.2 приводятся соотношения для вычисления показаний гироскопов. Абсолютная угловая скорость приборной системы координат складывается из угловой скорости вращения Земли и собственно угловой скорости подвижной системы  $Mt$ :

$$\omega_z = \omega_{t,z} + u_z. \quad (23)$$

Здесь  $\omega_{t,z}$  – вектор угловой скорости вращения системы  $Mt$  в проекциях на оси приборной системы координат  $Mz$ ,  $u_z$  – вектор угловой скорости Земли. Вектор  $\omega_{t,z}$  может быть получен путем перепроектировки собственно вектора угловой скорости вращения стенда  $\omega_t = \dot{\chi}$  с помощью матрицы  $C_{zt}$  ориентации приборной системы относительно системы, связанной со стендом:

$$\omega_{t,z} = C_{zt}\omega_t, \quad (24)$$

Матрица  $C_{zt}$  для описанного частного случая в  $k$ -ом цикле вычисляется по формуле:

$$C_{zt}^{(k)}(t) = I_\alpha^{(k)} I_\chi^{(k)} I_\chi, \quad (25)$$

где  $I^{(k)}$  – матрица описывающая порядок приборных осей в  $k$ -м цикле.

Для вектора угловой скорости  $u_z$  верно следующее представление:

$$u_z = C_{zt}C_{tx}u_x, \quad (26)$$

где матрица  $C_{tx}$  ориентации системы  $Mt$  относительно географической системы  $Mx$  описывает расположение стенда, а вектор  $u_x$  определяется через известную географическую широту  $\varphi$ :  $u_x = (0, u \cos \varphi, u \sin \varphi)^T$ .

В § 4.3 содержатся соотношения для моделирования показаний ньютонометров. Эти соотношения учитывают то обстоятельство, что показания ньютонометров складываются из соответствующих проекций удельной силы тяжести и сил инерции (если чувствительная масса ньютонометра не лежит на оси вращения): центробежной силы  $f^c$  и силы  $f^t$ , вызванной угловым ускорением  $\dot{\omega}_t$ . Измерения ньютонометров имеют вид:

$$f_z = L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{z1}^c \\ f_{z2}^c \\ f_{z3}^c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{z1}^t \\ f_{z2}^t \\ f_{z3}^t \end{pmatrix}, \quad f_{zi}^c = \hat{\omega}_{t,z}^2 r_i, \quad f_{zi}^t = -\hat{\dot{\omega}}_{t,z} r_i. \quad (27)$$

Здесь  $r_i$  – итоговая геометрическая характеристика, описывающая отнесение чувствительной массы  $i$ -го ньютонометра (в каждом цикле вращения) относительно оси вращения стенда и относительно чувствительных масс остальных ньютонометров.

В § 4.4 приводятся некоторые результаты моделирования.

**Раздел 5** посвящен задачам сравнительного анализа многошаговых методов численного решения задачи ориентации (решения кинематического уравнения Пуассона) на этапе начальной выставки БИНС при наличии вибрации корпуса объекта. Источником вибраций могут быть ветровые возмущения на аэродроме, работа двигателей и т.п. Влияние вибрации проявляется в накоплении ошибок углов ориентации, порождаемых свойствами численного метода интегрирования в задаче ориентации.

В § 5.1 приводятся формулы для показаний инерциальных датчиков у неподвижного объекта при отсутствии вибрации. В § 5.2 представлена распространенная модель вибрации, действующей в одном направлении. Вибрация задается следующей последовательностью поворотов:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \omega^v(t-t_0) & \beta & -\omega^v(t-t_0) & & & \\
 Ox & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & & & Oz. \\
 & 3 & 1 & 3 & & & 
 \end{array} \quad (28)$$

Под каждой стрелкой помещен номер оси, вокруг которой осуществляется поворот, а над стрелкой располагается величина угла поворота. Здесь  $\beta$  – амплитуда вибрации, а величина  $\omega^v$  условно может быть названа угловой скоростью вибрации. Тогда вектор угловой скорости  $\omega_z^v$  вращения приборной системы  $Oz$ , вызванного вибрацией, имеет вид:

$$\omega_z^v = \begin{pmatrix} -\omega^v \sin \beta \sin \omega^v(t-t_0) \\ \omega^v \sin \beta \cos \omega^v(t-t_0) \\ \omega^v \cos \beta - \omega^v \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Если шаг интегрирования уравнения Пуассона  $\Delta t \ll 2\pi/\omega^v$ , то погрешность того или иного численного метода будет несущественной. Если отношение  $\frac{\Delta t}{2\pi/\omega^v}$  по порядку приближается к 1 или превосходит ее, то численное интегрирование будет неправильно учитывать поведение во времени первых двух компонент вектора  $\omega_z^v$ .

Можно оценить величину и характер ошибки, которую даст численный алгоритм решения уравнения Пуассона при шаге интегрирования  $\Delta t > 2\pi/\omega^v$ . Третья компонента постоянна и поэтому ее значение при интегрировании учитывается правильно, а интеграл по времени от первых двух компонент на одном периоде вибрации  $2\pi/\omega^v$  равен 0, т.е. они как бы осредняются и ориентация приборной системы будет вычисляться так, как будто вибрация порождает ее вращение с угловой скоростью:

$$\omega_z^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^v \cos \beta - \omega^v \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Показано, что за одну секунду будет накапливаться следующая угловая ошибка  $\Delta\psi_T$ :

$$\Delta\psi_T = -\pi f^v \beta^2, \quad f^v = \omega^v / 2\pi. \quad (31)$$

В § 5.3 дается реферативное описание многошаговых методов интегрирования (для самодостаточности изложения). Приводятся разностные схемы одношагового, двухшагового и четырехшагового алгоритма.

В § 5.4 описывается содержание методики сравнительного анализа численных методов интегрирования уравнения Пуассона. Фиксируется величину  $f^v \beta^2 = Const$ . Частота вибрации  $f^v$  меняется в некотором диапазоне, одновременно с изменением угловой амплитуды вибрации  $\beta$  так, чтобы величина  $f^v \beta^2$  оставалась постоянной.

Для исследуемого численного алгоритма строится график зависимости ошибки определения угла курса от частоты вибрации  $f^v$ . Для наглядности целесообразно строить график в нормализованных переменных: в качестве аргумента по оси абсцисс откладывать отношение  $f^v / f^m$ , а по оси ординат  $\tilde{\psi} / \Delta\psi_T$ . Здесь  $f^m$  – частота съема показаний гироскопов, а  $\tilde{\psi}$  – ошибка определения угла курса.

На Рис.5-7 приводятся графики, иллюстрирующие описанную методику для рассматриваемых в работе одношагового (пунктир с точкой), двухшагового (пунктир) и четырехшагового (сплошная линия) методов. Видно, что при малых значениях  $f^v / f^m$  ошибки у каждого численного метода незначительны. При  $f^v / f^m \gg 1$ , отношение  $\tilde{\psi} / \Delta\psi_T$  у каждого метода стремится к 1. А для промежуточных значений  $f^v$  путем сравнения безразмерных угловых ошибок  $\tilde{\psi} / \Delta\psi_T$  можно сделать вывод о том, какой численный метод более точный при данной частоте вибрации. Из Рис.7 видно, что четырехшаговый метод имеет самую высокую точность, тогда как уровень точности одношагового метода заметно ниже, чем у двухшагового и четырехшагового. Видно также, что применение двухшагового метода вполне допустимо.

В **Третьей главе** исследуются две задачи, актуальные для аэрогравиметрии, технологии точного позиционирования (Precise Point Positioning), аппаратных имитаторов спутниковых навигационных систем.

1. Задача высокоточного определения в режиме постобработки координат, вектора скорости спутников GPS, ГЛОНАСС с частотой работы спутникового приемника (например, 10Гц) при помощи достаточно редких позиционных данных (1 отсчет за 15 мин.) сервиса IGS (International Global Navigation Satellite Systems Service).

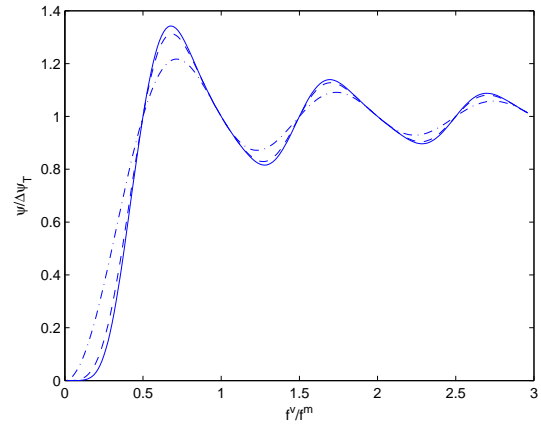
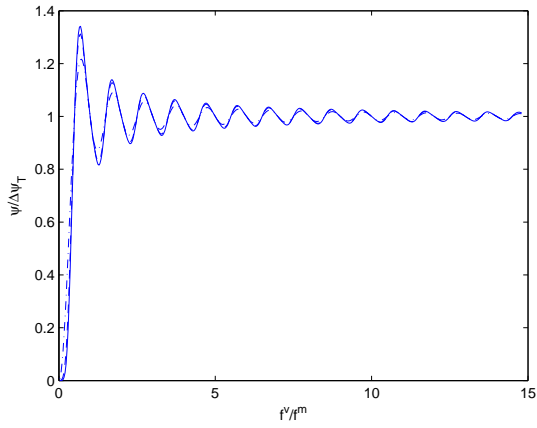


Рис. 5: Сравнение алгоритмов на вибрации с характеристикой  $f^v \beta^2 = 10^{-5}$ .  
 Рис. 6: Сравнение алгоритмов на вибрации с характеристикой  $f^v \beta^2 = 10^{-5}$ .

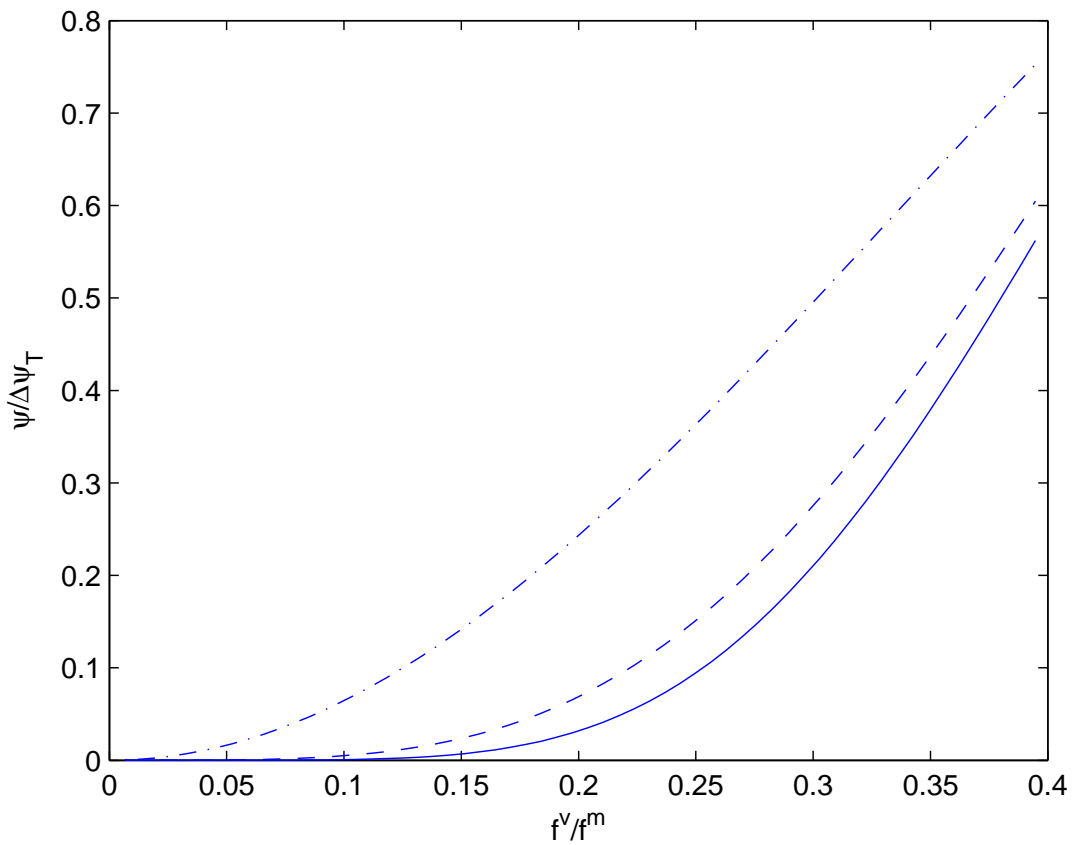


Рис. 7: Сравнение алгоритмов на вибрации с характеристикой  $f^v \beta^2 = 10^{-5}$ .

2. Задача моделирования ионосферных задержек в сеансе спутниковых измерений на основе L1, L2 фазовых измерений и данных сервиса CODE.

Глава состоит из двух основных разделов (**Разделы 6,7**) и приложения (**Раздел 8**).

**Раздел 6** посвящен решению первой из перечисленных задач. Численное решение задачи определения координат и вектора скорости навигационного спутника разбивается на два этапа.

1. Формирование априорной траектории движения спутника в осях гринвичской системы координат. Рассмотрено два варианта. Первый вариант использует эфемеридную информацию реального времени и стандартные алгоритмы позиционирования спутника. Второй вариант, более трудоемкий и неочевидный, предполагает использование только редких позиционных данных IGS. Второй способ востребован при отсутствии эфемеридной информации реального времени.
2. Оценивание ошибок априорной траектории при помощи сглаживающего фильтра Калмана, формирование высокоточных оценок координат и вектора скорости навигационного спутника.

Поставленная задача методически сводится к задаче калмановского оценивания и сглаживания стандартного вида

$$\dot{x} = A(t)x + q, \quad z = Hx + r. \quad (32)$$

Здесь компонентами вектора состояния  $x = (\Delta\eta^T, \Delta V_\eta^T, f_\eta^{0T})^T$  служат позиционные  $\Delta\eta = \eta' - \eta$ , скоростные  $\Delta V_\eta = V'_\eta - V_\eta$  ошибки априорной траектории спутника ( $\eta$  – истинные координаты спутника,  $\eta'$  – координаты априорной траектории,  $V_\eta$  – вектор относительной скорости (относительно гринвичской системы  $O\eta$ ),  $V'_\eta$  – вектор относительной скорости для априорной траектории);  $f_\eta^0$  – моделируемые параметры неизвестных внешних удельных сил (возмущений), действующих на спутник;  $q$  – вектор шумовых возмущений; матрица  $A$  динамической системы отражает структуру уравнений движения спутника в вариациях; измерение  $z$  формируется путем сравнения априорных координат спутника и данных сервиса IGS,  $r$  – шумовая составляющая данных сервиса IGS, характерное значение которой составляет 2-3 см.

Уравнения в вариациях имеют вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}\eta_1 &= \Delta V_1, & \dot{\Delta}\eta_2 &= \Delta V_2, & \dot{\Delta}\eta_3 &= \Delta V_3, \\
\dot{\Delta}V_1 &= 2u\Delta V_2 + f_1^0 + (g_{\eta_1}^0)'_{\eta_1} \Delta\eta_1 + (g_{\eta_1}^0)'_{\eta_2} \Delta\eta_2 + (g_{\eta_1}^0)'_{\eta_3} \Delta\eta_3 + u^2 \Delta\eta_1 + q_1, \\
\dot{\Delta}V_2 &= -2u\Delta V_1 + f_2^0 + (g_{\eta_2}^0)'_{\eta_1} \Delta\eta_1 + (g_{\eta_2}^0)'_{\eta_2} \Delta\eta_2 + (g_{\eta_2}^0)'_{\eta_3} \Delta\eta_3 + u^2 \Delta\eta_2 + q_2, \\
\dot{\Delta}V_3 &= f_3^0 + (g_{\eta_3}^0)'_{\eta_1} \Delta\eta_1 + (g_{\eta_3}^0)'_{\eta_2} \Delta\eta_2 + (g_{\eta_3}^0)'_{\eta_3} \Delta\eta_3 + q_3, \\
\dot{\Delta}f_{\eta_1}^0 &= 0, & \dot{\Delta}f_{\eta_2}^0 &= 0, & \dot{\Delta}f_{\eta_3}^0 &= 0.
\end{aligned} \tag{33}$$

Производные силы тяготения вычисляются по формулам:

$$(g_{\eta_i}^0)'_{\eta_k} = 3\frac{\mu}{r^5}\eta_i\eta_k - \frac{\mu}{r^3}\delta_{ik}, \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, \tag{34}$$

где  $r = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}$ ,  $\mu$  – гравитационная постоянная.

Численные эксперименты показали, что точность оценивания координат спутника в произвольный момент времени составляет 2-3см.

Логическим развитием описанной задачи послужила задача определения точных значений кеплеровых элементов орбиты спутника (долгота восходящего угла  $\Omega$ , наклонение орбиты  $i$ , большая полуось  $a$ , эксцентриситет  $e$ , аргумент перигея  $\omega$ ) как функций времени (§ 6.2). В основе вычислительных процедур лежат известные уравнения небесной механики с некоторыми необходимыми модификациями. Например, стандартный алгоритм определения кеплеровых элементов орбиты по трем положениям спутника  $\eta^{(1)}(t_1), \eta^{(2)}(t_2), \eta^{(3)}(t_3)$  предполагает, что эти векторы лежат в одной плоскости. В реальности это не так, поэтому было предложено осуществить регуляризацию: провести плоскость через векторы  $\eta^{(1)}$  и  $\eta^{(3)}$ , а вектор  $\eta^{(2)}$  спроектировать на эту плоскость и дальше воспользоваться стандартными формулами.

В качестве примера на Рис.8,9 приведены графики оценки угла наклона орбиты  $i$  на интервале 1 год и 1 месяц. Хорошо видны периоды колебаний, вызванных влиянием вращения Луны вокруг Земли и Земли вокруг Солнца.

**Раздел 7** посвящен вопросу моделирования во времени реализаций ионосферных задержек спутниковых измерений в конкретном сеансе спутниковых измерений. Этот раздел содержит реферативную часть (§§ 7.1-7.2), где приводятся общие сведения о ионосфере и содержится описание алгоритма моделирования величины полного электронного содержания  $E$  методом сферических гармоник, коэффициенты для которого предоставляются службой CODE (Center for Orbit Determination in Europe).

Модель на основе сферических гармоник для расчета полного

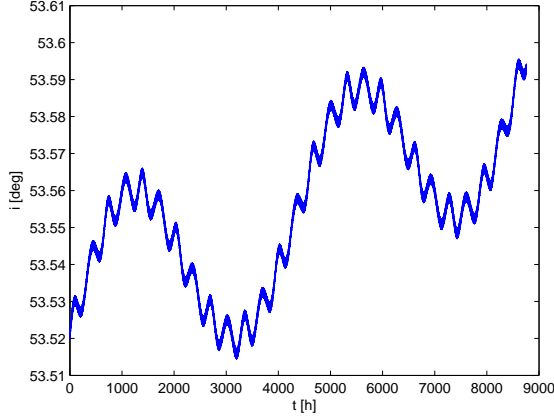


Рис. 8: График угла наклонения  $i$  на интервале 1 год.

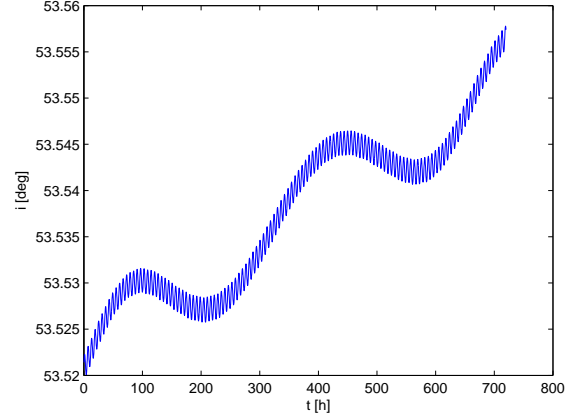


Рис. 9: График угла наклонения  $i$  на интервале 1 месяц.

электронного содержания в дискретной точке выглядит следующим образом:

$$E(\beta, s) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \tilde{P}_{nm}(\sin \beta) (a_{nm} \cos(ms) + b_{nm} \sin(ms)). \quad (35)$$

Здесь  $\beta$  - геомагнитная широта данной точки,  $s = \lambda - \lambda_0$  - разность между значением долготы данной точки и значением долготы солнца,  $n_{max}$  - максимальная степень разложения в ряд по сферическим гармоникам,  $a_{nm}$  и  $b_{nm}$  - коэффициенты разложения,  $\tilde{P}_{nm} = \Lambda_{nm} P_{nm}$  - нормализованные полиномы Лежандра степени  $n$  порядка  $m$ ,  $a_{nm}$  и  $b_{nm}$  - коэффициенты разложения, которые и содержатся в публикуемых файлах.

При вычислении величин  $E$  используются координаты навигационных спутников и координаты спутникового приемника. Обобщенная формула для вычисления ионосферной погрешности имеет вид:

$$|\Delta| = \frac{40.3 \cdot 10^{16}}{f^2} E, \quad (36)$$

где  $f$  - частота радиосигнала.

Вычисленная таким образом оценка ионосферной задержки (для каждого направления антенна-спутник) характеризует ее среднее, сглаженное значение. Поэтому для моделирования реализаций ионосферных задержек в сеансе спутниковых измерений был предложен комбинированный подход, основанный на использовании фазовых измерений и данных CODE.

Описание алгоритма вычисления ионосферной погрешности с помощью фазовых измерений приведено в § 7.3. Приведем модель фазовых измерений



в следующем виде:

$$Z_\varphi = \frac{\rho}{\lambda} + f(\Delta\tau - \Delta T) + N + \Delta\varphi_{ion} + \Delta\varphi^s \quad (37)$$

Здесь  $\rho$  – расстояние между приемником и спутником,  $\lambda$  – длина волны радиосигнала,  $\Delta\tau$ ,  $\Delta T$  – погрешности часов, соответственно, приемника и спутника,  $N$  – целочисленная неопределенность фазового измерения,  $\Delta\varphi_{ion}$  – погрешность измерения, вызванная прохождением сигнала через ионосферу,  $\Delta\varphi^s$  – остаточная составляющая погрешности измерения.

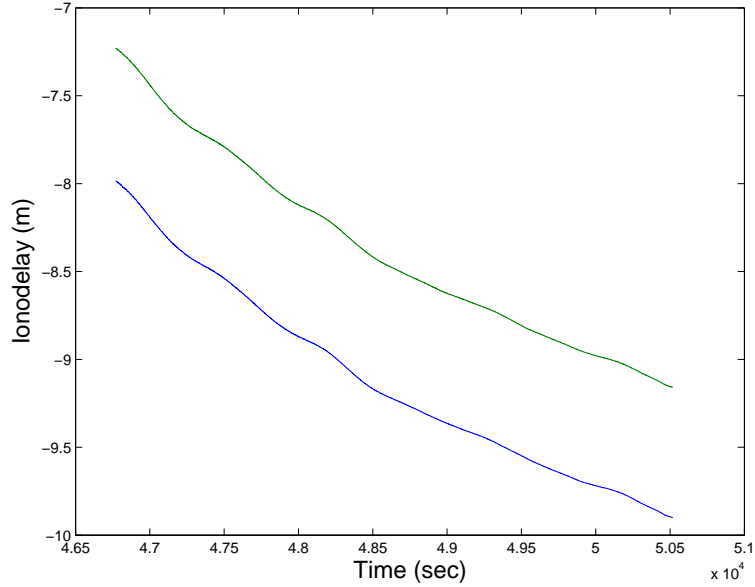


Рис. 10: Ионосферные погрешности неподвижных приемников.

Комбинируя фазовые измерения  $Z_\varphi^1$ ,  $Z_\varphi^2$ , соответственно, на частотах  $L1$ ,  $L2$ , получим выражение для оценки полного электронного содержания  $E$ :

$$E = \frac{f_1^2 f_2^2}{40.3 \cdot 10^{16} (f_1^2 - f_2^2)} (\lambda_1 Z_\varphi^1 - \lambda_2 Z_\varphi^2) - B + \Delta\varphi', \quad (38)$$

где

$$B = \frac{f_1^2 f_2^2}{40.3 \cdot 10^{16} (f_1^2 - f_2^2)} (\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2), \quad (39)$$

а через  $\Delta\varphi'$  обозначена преобразованная остаточная ошибка.

Величина  $B$  является постоянной неизвестной (смещением) и вызвана целочисленной неопределенностью фазовых измерений.

В § 7.4 описан комбинированный подход к моделированию ионосферной задержки, суть которого сводится к тому, что на основе двухчастотных

фазовых измерений формируется центрированная реализация оценки ионосферной задержки, а ее смещение оценивается при помощи данных CODE. В параграфе также приводятся результаты обработки экспериментальных данных, подтверждающие работоспособность предложенного алгоритма. На Рис.10 приведены смещенные реализации ионосферных погрешностей для двух неподвижных близко расположенных спутниковых приемников. Идентичность их поведения во времени подтверждает высокую потенциальную точность фазовых измерений.

**Раздел 8** представляет собой приложение, в котором приводятся стандартные алгоритмы позиционирования спутников GPS и ГЛОНАСС.

В **заключении** приведены основные результаты диссертационной работы. Были поставлены и решены следующие задачи.

1. Задача согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков на произвольной траектории движения объекта. Эта задача моделирования включает в себя ряд подзадач, обусловленных конкретными навигационными приложениями. К их числу относятся:
  - задача моделирования показаний инерциальных датчиков в различных опорных системах координат (инерциальной, географической, приборной), традиционно используемых в навигации;
  - задача моделирования показаний интегрирующих инерциальных датчиков с целью сравнительного анализа многошаговых численных методов интегрирования модельных уравнений движения;
  - задача согласованного моделирования показаний инерциальных датчиков и траекторных параметров двух БИНС, расположенных на одном объекте-носителе, для последующего исследования задачи выставки на подвижном основании резервной БИНС;
  - задача моделирования показаний инерциальных датчиков и траекторных параметров объекта в областях высоких широт.
2. Задача тестирования моделей уравнений ошибок инерциальной навигации для анализа возможности их использования в приложениях.
3. Задача имитации показаний инерциальных датчиков при калибровке. Разработанная математическая модель учитывает важные для приложений факторы: угловые ошибки расположения БИНС относительно калибровочного стенда и внутреннее разнесение друг относительно друга чувствительных масс ньютонометров. Указанная задача востребована

как для тестирования алгоритмов калибровки, так и для составления плана калибровочных экспериментов.

4. Задача разработки методики сравнительного анализа многошаговых методов определения ориентации объекта при наличии вибрации на этапе начальной выставки БИНС. С помощью предложенной методики легко определить, при каких частотах вибрации сравниваемые многошаговые методы дают одинаковый по точности результат, а при каких один метод предпочтительнее другого.
5. Задачи расширения функциональных возможностей аппаратного спутникового имитатора:
  - задача высокоточного определения параметров движения навигационных спутников на базе позиционной информации центра IGS;
  - задача моделирования ионосферной погрешности спутниковых сигналов на основе данных европейского центра CODE и двухчастотных фазовых измерений.

### **Работы автора по теме диссертации**

1. *Bogdanov O.N., Fomichev A.V.* Simulation of angular velocity sensor measurements using telemetry data on the motion of an object. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2014. V. 69. no.3. P. 40-47. (Реферируемый журнал из перечня ВАК).

2. *Богданов О.Н.* Уточнение траекторных параметров навигационных спутников систем GPS и ГЛОНАСС при помощи данных сервиса IGS // *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика*. 2009. Выпуск 3. С. 53-56. (Реферируемый журнал из перечня ВАК).

3. *Богданов О.Н., Фомичев А.В.* Алгоритм имитации показаний инерциальных датчиков по траекторным данным. // *Труды МИЭА*. 2013. Выпуск 6. С.46-59.

4. *Богданов О.Н., Голован А.А.* Об имитации идеальных показаний датчиков БИНС при произвольном движении объекта. // *Труды МИЭА*. 2013. Выпуск

7. С. 30-35.

5. *Bogdanov O.N., Golovan A.A.* Analysis of Kepler's elements of the navigation satellite's orbits on the base of precise IGS position information. In: Proceedings of 6th International Conference on Recent Advances in Space Technologies. 2013. P. 271-275. (Сборник входит в базу данных Scopus).

6. *Bogdanov O.N., Golovan A.A.* Simulation of measurements of strapdown inertial navigation system sensors. In: Proceedings of XX International Conference on Integrated Navigation Systems. Saint Petersburg, Concern "CSRI Elektropribor", 2013. P. 138-141.

7. *Козлов А.В., Смоллер Ю.Л., Юрист С.Ш., Богданов О.Н., Голован А.А.* Результаты испытаний на яхте бескарданного гравиметра ГТ-Х. // Труды XIX Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", Санкт-Петербург, 2012, С. 172-174.

8. *Bogdanov O.N., Сepe A.* Precise orbit determination for GPS and GLONASS satellites on the basis of IGS data. In: Proceedings of 5th International Conference on Recent Advances in Space Technologies. 2011. P. 915-919. (Сборник входит в базу данных Scopus).

9. *Богданов О.Н., Коростелева С.С., Кухтевич С.Е., Фомичев А.В.* О выборе алгоритма и тактовой частоты расчета матрицы ориентации для бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Труды МИЭА. 2010. Выпуск 2. С. 60-67.

10. *Богданов О.Н., Вавилова Н.Б., Голован А.А., Демидов О.В.* Особенности совместной обработки первичных измерений спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС и GPS в геофизических приложениях // Современные проблемы математики и механики. 2009. Том 1. С. 180-199.

11. *Bogdanov O.N., Golovan A.A.* On possibility of improvement of the airborne gravimetry using precise information on navigation satellites ephemeris and on ionosphere state. In: Proceedings of International Symposium on Terrestrial Gravimetry: static and mobile measurements. Saint Petersburg, Concern "CSRI Elektropribor", 2008. P. 39-44.