ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова"

На правах рукописи

ШИТОВ Ярослав Николаевич

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА НАД ПОЛУКОЛЬЦАМИ

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва, 2015 г.

Работа выполнена в ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова" на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор ГУТЕРМАН Александр Эмилевич
Официальные оппоненты:	ВЕЧТОМОВ Евгений Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики (ФГБОУ ВПО "Вятский государственный гуманитарный университет")
	КОЖУХОВ Игорь Борисович доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики N1 (ФГБОУ ВО "Московский институт электронной техники")
	КРИВУЛИН Николай Кимович доктор физико-математических наук, профессор кафедры статистического моделирования математико-механического факультета (ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский государственный университет")
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО "Московский педагогический государственный университет"

Защита состоится 25 декабря 2015 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова, по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова" (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и по адресам http://mech.math.msu.su/∼snark/files/diss/0076diss.pdf, http://istina.msu.ru/dissertations/9654035/.

Автореферат разослан 25 ноября 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени
М. В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук, профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Диссертация представляет собой фундаментальное исследование в области линейной алгебры. Благодаря разработанным новым подходам, основанным на анализе базовых структур линейной алгебры с точки зрения теории полуколец, автору удалось получить решения ряда крупных открытых проблем. Для того, чтобы перейти к формулировке и обсуждению этих результатов, а также указать на их теоретическую значимость и их возможные практические применения, потребуется напомнить некоторые основные определения.

Итак, полукольцом называется множество с заданными на нем операциями сложения и умножения, которое является абелевым моноидом по сложению и полугруппой по умножению, а также удовлетворяет свойству дистрибутивности. Иными словами, основное отличие полуколец от колец проявляется в том, что не всякий элемент полукольца может быть обратим по сложению.

На первый взгляд определение полукольца может показаться чрезмерно общим и охватывающим слишком большой класс структур. Тем не менее, это не совсем так: среди алгебраических структур, естественным образом возникающих в результате исследования различных явлений окружающего мира, многие объекты обладают структурой полукольца, но на них нельзя задать структуру кольца или тем более поля. Например, одним из первых объектов, с которым сталкивается начинающий изучать математику, является множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$; это множество является полукольцом относительно заданных естественным образом операций сложения и умножения, но такое задание не обеспечивает структуры кольца, — ведь положительные целые числа оказываются необратимыми по сложению.

Другими важнейшими примерами числовых полуколец являются целые, рациональные, вещественные и комплексные числа; более того, любое кольцо в силу определения также является и полукольцом. Наиболее простые примеры полуколец, не являющихся кольцами, дают числовые множества: например, приведенное выше множество натуральных чисел, также как и множество неотрицательных вещественных чисел, являются полукольцами относительно обычных сложения и умножения. В различных приложениях возникает необходимость рассмотрения полуколец, не связанных с числовыми множествами: к ним относятся, например, дистрибутивные решетки, булевы алгебры и алгебры Клини. Отметим, что в качестве примера полукольца, не являющегося числовым множеством, можно привести множество всех идеалов заданного кольца: на этом множестве корректно определены операции суммы и произведения идеалов, но не существует, вообще говоря, возможности вычитать идеалы друг из друга или делить один из них на другой.

Исторический обзор. Как указано в монографии Голана[1], впервые понятие полукольца неявно использовалось в работе Дедекинда[2] как раз для изучения множества идеалов числовых колец; с теми же целями изучения алгебраических структур полукольца использовались в работах Нетер[3], Крулля[4] и других математиков начала XX века. Непосредственно понятие полукольца было впервые введено, вероятно, Вандивером[5] в связи с проблемами, связанными с аксиоматизацией натуральных чисел. Впоследствии на протяжении многих лет полукольца изучались многими математиками с различных точек зрения и в связи с различными теоретическими и прикладными задачами.

Развитие методов линейной алгебры над полукольцами началось во второй половине XX века, и одной из первых работ на эту тему была статья Воробьева[6], посвященная исследованию неотрицательных матриц и описанию возможных их приложений к задачам оптимизации. Дальнейшее развитие методов линейной алгебры над полукольцами происходило в работах Канингем-Грина[7], Симона[8], Гондрана и Мину[9] и многих других авторов. Наибольшее внимание в этих работах уделяется разработке методов линейной алгебры над отдельно взятыми полукольцами и описанию приложений построенных теорий: упомянутая работа Канингем-Грина посвящена построению и описанию приложений линейно-алгебраической теории для минимаксных алгебр. В указанной работе Симона исследуются линейно-алгебраические свойства полуколец чисел с нестандартными операциями: в качестве сложения берется операция взятия минимума из двух чисел, а в качестве умножения — обычная операция суммы. Теория таких полуколец вызывает большой интерес в настоящее время, и они часто называются *тропическими полукольцами* в знак признания заслуг Имре Симона и других математиков бразильской школы[10]. В работах Гондрана и Мину[11] строится обобщение теорий минимаксных алгебр и тропических полуколец, и они изучаются с точки зрения более общих структур — идемпотентных полуколец и диоидов. Не остались в стороне и булевы полукольца и структуры нечеткой логики — исследованию в области

---

[1] J. S. Golan, Semirings and their applications, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[2] R. Dedekind. Uber die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, Supplement XI to P.G. Lejeune Dirichlet, Vorlesungen ber Zahlentheorie, 4te Aufl. Druck und Verlag, Braunschweig, 1894.

[3] E. Noether, Abstrakter Aufbau der idealtheorie in algebraischen Zahl-und Funktionenkörpern, *Math. Ann.*, **96(1)** (1927) 26–61.

[4] W. Krull, Die verschiedenen Arten der Hauptidealringe, *Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss.*, 1924.

[5] H. S. Vandiver, Note on a simple type of algebra in which cancellation law of addition does not hold, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40** (1934) 914–920.

[6] N. N. Vorobyev, Extremal algebra of positive matrices, *Elektron. Informationsverarbeitung und Kybernetik*, **3** (1967) 39–71.

[7] R. A. Cuninghame-Green, Minimax Algebra, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, **166**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[8] I. Simon, Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring. *Lecture Notes in Comput. Sci.*, **324**, Springer, Berlin, 1988, 107–120.

[9] M. Gondran, M. Minoux, Graphs and Algorithms, Wiley-Interscience, New York, 1984.

[10] J.-E. Pin, Tropical semirings, *Idempotency*, Publ. Newton Inst., **11**, Cambridge, 1998, 50–69.

[11] M. Gondran, M. Minoux. Graphs, Dioids and Semirings: New Models and Algorithms, Springer Science+Business Media, LLC, 2008.

линейной алгебры над ними посвящены работы Кима и Рауша[12] и некоторые другие. Построение общей линейно-алгебраической теории над полукольцами началось, вероятно, в 80-е годы XX века, и в этом отношении стоит отметить работы Бисли и Пуллмана[13]. Заметную роль в развитии методов полукольцевой линейной алгебры играет теория неотрицательных матриц: ее развитие началось примерно в то же время, когда стала развиваться и линейно-алгебраическая теория над полукольцами в самом общем случае. В 1979 году была опубликована монография Бермана и Племмонса[14] по этой теме; другим заметным событием стал выход в свет в 1993 году статьи Коэна и Ротблума[15], в которой были описаны многочисленные приложения проблем, связанных с неотрицательными матрицами. В последнее десятилетие наблюдается особенно бурный рост активности исследования проблем теории неотрицательных матриц[16], связанный во многом с задачей неотрицательной факторизации. Внимание к этой задаче привлечено благодаря многочисленным приложениям в анализе данных, обработке информации, комбинаторной оптимизации, дискретной геометрии и многих других областях, — особого внимания заслуживает публикация Ли и Сеунгом[17] в 1999 году в журнале *Nature* статьи об обработке изображений с помощью алгоритмов факторизации неотрицательных матриц.

Приложения линейной алгебры над полукольцами. В последнее время в прикладной математике все более значительной становится роль методов полукольцевой линейной алгебры, что становится возможным не в последнюю очередь благодаря развитию тропической математики и теории неотрицательных матриц. Более подробно мы остановимся на описании некоторых приложений этих теорий, но перед этим укажем многочисленные приложения методов линейной алгебры над различными полукольцами.

Отметим сначала некоторые приложения методов линейной алгебры над различными идемпотентными полукольцами и диоидами[9]. Эти методы находят применение при изучении дискретно-временных динамических систем[11] и исследовании проблем оптимизации. В частности, алгоритмы вычисления произведения матриц над полукольцом $([0,1], \min, \max)$ играют важную роль в проблемах сетевой оптимизации; отметим также, что указанное полукольцо играет фундаментальную роль в нечеткой логике и теории нечетких множеств[18]. Более широкий класс полуколец рассматривается при изучении

[12] K. H. Kim, F. W. Roush, Generalized fuzzy matrices, *Fuzzy sets and systems*, **4(3)** (1980) 293–315.

[13] L. B. Beasley, N. J. Pullman, Semiring rank versus column rank, *Lin. Alg. Appl.*, **101** (1988), 33–48.

[14] A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative matrices*, 1979.

[15] J. E. Cohen, U. G. Rothblum, Nonnegative ranks, decompositions, and factorizations of nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.*, **190** (1993) 149–168.

[16] S. Fiorini, S. Massar, S. Pokutta, H. R. Tiwary, R. de Wolf, Linear vs. semidefinite extended formulations: exponential separation and strong lower bounds, in *Proc. 44th Symp. on Th. of Comp.*, 95–106, 2012, ACM.

[17] D. D. Lee, H. S. Seung, Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization, *Nature*, **401** (1999) 788–791.

[18] J. Goguen, The logic of inexact concepts, *Synthese*, **19** (1968/9) 325–373.

идемпотентного анализа, раздела теории полуколец, возникшего в связи с проблемами квантовой механики[19]. В идемпотентном анализе изучаются в том числе обобщения различных понятий классической линейной алгебры на широкий класс полуколец, и разработанные к настоящему времени методы находят применение в оптимизации и теории вычислений[20]. Еще более широкий класс *антинегативных полуколец* в настоящее время тоже подвергается изучению с точки зрения линейной алгебры в связи с некоторыми приложениями[21]; заметным направлением современных исследований также является построение линейно-алгебраической теории над полукольцами самого общего вида[22].

Чтобы рассказать о приложениях тропической линейной алгебры, напомним, что ее основным объектом является *тропическое полукольцо*, то есть, множество вещественных чисел, пополненное бесконечно большим положительным элементом ∞. Операция тропического сложения $\oplus$ ставит в соответствие паре элементов миинимальный из них, а операция тропического умножения $\otimes$ — их обычную сумму. Появление методов тропической математики было обусловлено не в последнюю очередь приложениями их в теории оптимизации: тропический подход в этой теории основан во многом на том, что многие важные задачи оптимизации, не являющиеся линейными в классическом смысле, принимают линейный вид, если формализовать их с использованием тропической нотации. Иными словами, они сводятся к линейным задачам, таким как решение системы линейных уравнений или вычисление ранга для матриц над тропическим полукольцом.

Чтобы продемонстрировать такой подход в теории оптимизации, рассмотрим следующую проблему. Дано множество населенных пунктов $(1), \ldots, (n)$, связанных железнодорожной сетью и тропическая матрица A размера $n \times n$, характеризующая стоимость проезда между этими пунктами. А именно, элемент A_{ij} полагается равным стоимости проезда на прямом поезде от станции (i) до станции (j), если такой поезд существует, и полагается равным ∞ в противном случае. Рассмотрим проблему поиска оптимального (то есть, требующего наименьших затрат) пути между станциями p и q. Если ограничиться рассмотрением маршрутов, не требующих пересадок, то, конечно, стоимость маршрута между этими станциями окажется равной A_{pq}. Но что делать в тех случаях, когда прямое сообщение между станциями (p) и (q) отсутствует или стоимость соответствующего путешествия неоправданно завышена? Естественно ожидать, что пассажир, столкнувшейся с такой проблемой, составит сложный маршрут, содержащий пересадку в станции (t), и в этом случае общая стоимость его путешествия составит $A_{pt} + A_{tq}$. По-

[19] В. П. Маслов, О новом принципе суперпозиции для задач оптимизации, *УМН*, **42:3(255)** (1987) 39–48.

[20] V. N. Kolokol'tsov, V. P. Maslov, Idempotent Analysis and Applications, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[21] Q.-Y. Shu, X.-P. Wang, Bases in semilinear spaces over zerosumfree semirings, *Linear Algebra Appl.*, **435** (2011) 2681–2692.

[22] S. Zhao, X.-P. Wang, Invertible matrices and semilinear spaces over commutative semirings, *Information Sciences*, **180** (2010) 5115–5124.

скольку интерес пассажира состоит в минимизации расхода, станция (t) будет выбрана таким образом, чтобы минимизировать значение $A_{pt}+A_{tq}$. Таким образом, стоимость маршрута между станциями (p) и (q), содержащего одну пересадку, оказывается равной $\min_{t=1}^{n}\{A_{pt}+A_{tq}\}$, или же, в тропической нотации, $\bigoplus_{t=1}^{n}(A_{pt}\otimes A_{tq})$. Иными словами стоимость этого маршрута оказывается равным $[A\otimes A]_{pq}$, то есть, элементу, стоящему в p-й строке и q-м столбце результата $A^{\otimes 2}$ тропического умножения матрицы A на саму себя.

Приведенные рассуждения не только проявляют связь задач теории оптимизации и линейной алгебры над тропическим полукольцом, но и указывают на важность задачи вычисления произведения тропических матриц. В настоящее время эта задача вызывает без преувеличения огромный интерес в передовых исследованиях прикладной математики: отметим опубликованную в журнале *Journal of the ACM* статью Цвика[23].

Отметим еще одно приложение тропической линейной алгебры к теории дискретно-временных динамических систем, проиллюстрировав его на том же примере железнодорожной сети. Предположим теперь, что нас интересует составление расписания движения поездов, причем заданная тропическая матрица B размера $n\times n$ характеризует время движения поездов между станциями. А именно, элемент B_{ij} полагается равным времени движения поезда от станции (i) до станции (j) (и равным ∞, если прямое сообщение между этими станциями отсутствует). Мы предполагаем, что число поездов в сети равно числу пар станций, между которыми установлено прямое сообщение; требуется также, чтобы составленное расписание было удобным для пассажиров, то есть, чтобы от каждой станции все поезда отправлялись одновременно и с одинаковыми (настолько малыми, насколько возможно) перерывами. Оказывается, что эти перерывы оказываются одинаковыми для всех станций[24] и могут быть описаны как тропическое собственное значение матрицы B. Множественные публикации на эту тему[25] также показывают важную роль спектральной теории тропических матриц в изучении дискретно-временных динамических систем.

Тропический подход к алгебраической геометрии основан на понимании тропического полукольца как образа поля с вещественным неархимедовым нормированием[26]. Говорят, что функция val элементов поля $\mathcal{F}$ со значениями из тропического полукольца задает такое нормирование, если она принимает конечное значение на ненулевых элементах поля и только на них и удовлетворяет условиям $val(xy)=val(x)+val(y)$ и $val(x+y)\geqslant\min\{val(x),val(y)\}$ для всех элементов x и y поля $\mathcal{F}$. Непосредственные примеры полей с неархимедо-

[23]U. Zwick, All pairs shortest paths using bridging sets and rectangular matrix multiplication, *Journal of the ACM*, **49(3)** (2002) 289–317.

[24]B. Heidergott, G. J. Olsder, J. van der Woude. Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems, Princeton Univ. Press, 2006.

[25]G. Cohen, S. Gaubert, J.-P. Quadrat, Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now, *Ann. Rev. Control*, **23** (1999) 207–219.

[26] M. Develin, F. Santos, B. Sturmfels, On the rank of a tropical matrix, *MSRI Publications* **52**, Cambridge Univ. Press, 2005, 213–242.

выми нормированиями могут быть построены с помощью конструкции *колец Мальцева–Неймана*, исследование которой было проведено Пооненом[27]. Оказывается, что изучение алгебраической геометрии над полем $\mathcal{F}$ позволяет не только ввести тропические аналоги понятий линейного пространства, поверхности, многообразия, стандартного базиса и заложить основы тропической алгебраической геометрии[28], но и представляет собой полезный инструмент для исследований в классической алгебраической геометрии. Использование методов тропической математики привело к решению нескольких важных проблем в этой области[29].

Опишем еще одно приложение методов линейной алгебры, опять таки связанное с понятием тропического произведения матриц. Снова рассмотрим множество населенных пунктов $(1), \ldots, (n)$ и заданную матрицей A метрику на этом множестве. Классическая задача комбинаторной оптимизации — *задача коммивояжера* — требует найти оптимальный путь, выходящий и заканчивающийся в одном из этих городов и проходящий через каждый из них ровно по одному разу. Задача коммивояжера является одним из широко известных примеров NP-трудных задач, то есть, в частности, пока не разработано ни одного быстрого алгоритма ее решения. Предположим теперь, что кроме населенных пунктов также имеются несколько складов $[1], \ldots, [k]$, и обозначим стоимость путешествия от города (i) до склада $[t]$ через B_{it}, а путешествия от склада $[t]$ до города (j) — через C_{tj}. В этом случае стоимость путешествия из города (i) в город (j) с посещением склада $[t]$ будет равна $B_{it} + C_{tj}$. Предположим, что перед тем, как войти в каждый новый город, коммивояжеру действительно требуется посетить один из складов для обновления ассортимента товара; сформулированная таким образом задача называется *задачей коммивояжера со складами.* В этом случае стоимость оптимального пути из города (i) в город (j) окажется равной $\min_{t=1}^{n}\{B_{it}+C_{tj}\}$, и мы приходим к заключению, что матрица A в новой задаче равна тропическому произведению матриц $B \otimes C$. Оказывается, что для задачи коммивояжера с k складами существуют[30] быстрые (то есть, полиномиальные по времени) алгоритмы решения при всех фиксированных k, и этот факт обусловливает интерес к задаче тропической *факторизации матриц.* Задача поиска матриц $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$, тропическое произведение $B \otimes C$ которых равно заданной матрице A, обсуждалась ранее[31], и были сформулированы несколько интересных проблем, связанных с этой задачей.

Рассмотрим задачу факторизации матриц с более общей точки зрения, то

[27] B. Poonen, Maximally complete fields, *Enseign. Math.*, **39(1–2)** (1993) 87–106.

[28] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, T. Theobald, First steps in tropical geometry, *Contemporary Mathematics*, AMS, **377**(2004), 1–38. 289–318.

[29] F. Cools, J. Draisma, S. Payne, E. Robeva, A tropical proof of the BrillЦNoether Theorem, *Adv. Math.*, **230(2)** (2012) 759–776.

[30] A. Barvinok, E. Kh. Gimadi, A. I. Serdyukov. The maximum traveling salesman problem, in *The Traveling Salesman problem and its variations*, (G. Gutin and A. Punnen, eds.), Kluwer, 2002.

[31] A.I. Barvinok. Two Algorithmic Results for the Traveling Salesman Problem, *Mathematics of Operations Research*, **21(1)** (1996), 65–84.

есть, предположим, что матрицы A, B и C в ее формулировке не являются обязательно тропическими и состоят из элементов произвольного полукольца. Минимальное k, при котором найдутся матрица B размера $m \times k$ и матрица C размера $k \times n$, удовлетворяющие условию $A = B \otimes C$ для заданной матрицы A, назовем *факторизационным рангом* матрицы A. Отметим, что в силу базового результата классической линейной алгебры обычный ранг матрицы A над полем равен ее факторизационному рангу. Таким образом, задача факторизации является естественным обобщением классической проблемы вычисления ранга матрицы на тропический случай. Рассмотрим теперь факторизацию матриц над *булевым полукольцом*, то есть, множеством $\{0, 1\}$, операции на котором заданы обычным образом, за исключением условия $1 \oplus 1 = 1$. Понятие факторизационного ранга булевой матрицы оказывается полезным для современных исследований в теории сложности, поскольку дает важную нижнюю оценку сложности информационных протоколов, индуцированных этой матрицей[32]. Также важным для приложений является тот факт, что факторизационный ранг матрицы смежностей двудольного графа G равен *двудольной размерности* графа G, то есть, минимальной мощности покрытия G полными двудольными подграфами[33]. Двудольная размерность графа в свою очередь находит применение в решении проблем компьютерной безопасности и задач вычислительной математики[34].

Особое внимание задача факторизации привлекает в случае матриц над полукольцом $\mathbb{R}_+$ неотрицательных чисел. Эта задача находит приложения в многочисленных разделах науки, таких как анализ данных, статистика, теория сложности, квантовая механика и многие другие [15]. Различные идеи теории факторизации неотрицательных матриц также находят применение в комбинаторной оптимизации[35], дискретной геометрии[36] и других разделах науки.

Цель работы

Развитие линейно-алгебраической теории над полукольцами; разработка методов изучения структуры полуколец и различных алгебраических инвариантов матриц; применение полученных результатов к решению проблем линейной алгебры, дискретной геометрии, тропической математики, комбинаторной оптимизации, теории полугрупп и теории полуколец.

---

[32] M. Dietzfelbinger, J. Hromkovic, G. Schnitger, A comparison of two lower-bound methods for communication complexity, *Theor. Comp. Sci.*, **168(1)** (1996) 39–51.

[33] L. B. Beasley, Isolation number versus Boolean rank, *Linear Algebra Appl.*, **436** (2012), 3469–3474.

[34] G. Shu, D. Lee, M. Yannakakis, A note on broadcast encryption key management with applications to large scale emergency alert systems, in *Proceedings of the 20th International Parallel and Distributed Processing Symposium*, IEEE Computer Society, Washington, 2006.

[35] M. Yannakakis, Expressing combinatorial optimization problems by linear programs, *Comput. System Sci.*, **43** (1991) 441–466.

[36] S. Fiorini, V. Kaibel, K. Pashkovich, D. O. Theis, Combinatorial bounds on nonnegative rank and extended formulations, *Discrete Math.*, **313(1)** (2013) 67–83.

Научная новизна

Полученные в работе результаты являются новыми. Следующие результаты работы являются основными и выносятся на защиту.

- Разработаны методы изучения структуры полуколец и полугрупп матриц над ними, благодаря которым были получены следующие результаты:

  – решена проблема Уайлдинга, Джонсон и Камбитеса[37] о кольцах, которые допускают продолжение линейных функций с конечно порожденных подмодулей на свободный модуль;

  – решена проблема Тан[38] о мощности базиса свободного полумодуля;

  – доказано, что всякая подгруппа полугруппы тропических матриц порядка n содержит нормальную абелеву подгруппу индекса, не большего $n!$, что доказывает гипотезу, сформулированную Джонсон и Камбитесом[39];

  – получена характеризация матричных полугрупп, ранговые функции на которых монотонны относительно порядков Грина; в частности, доказана монотонность ранговых функций тропических матриц.

- Построена теория, связывающая понятия линейной алгебры над полукольцами с важными результатами дискретной математики, и получены следующие результаты о ранговых функциях матриц:

  – разработан метод шаблонов, основанный на изучении комбинаторной структуры матриц методами булевой линейной алгебры; как следствие этого метода получен быстрый алгоритм распознавания тропических матриц фиксированного ранга Гондрана–Мину и тем самым дано решение проблемы Бутковича[40];

  – в качестве приложения метода шаблонов получен ответ на вопрос, заданный в 2005 году Девелином, Сантосом и Штурмфельсом[41]: показано, что факторизационный ранг и ранг Капранова не допускают характеризации в терминах смешанного разбиения симплекса, индуцируемого тропической матрицей;

---

[37] D. Wilding, M. Johnson, M. Kambites, Exact rings and semirings, J. Algebra 388 (2013): 324–337.

[38] Yi-Jia Tan, Bases in semimodules over commutative semirings, Linear Algebra Appl. 443 (2014) 139–152.

[39] M. Johnson, M. Kambites, Multiplicative structure of 2×2 tropical matrices, *Linear Algebra Appl.* 435 (2011) 1612–1625.

[40] P. Butkovic, *Max-linear Systems: Theory and Algorithms*, Springer Monographs in Mathematics **151**, Springer-Verlag London Limited, 2010.

[41] M. Develin, F. Santos, B. Sturmfels, On the rank of a tropical matrix, *MSRI Publications*, **52**, Cambridge Univ., Press, 2005, 213–242.

– разработан методы исследования вычислительной сложности ранговых функций булевых и тропических матриц; доказать, что задачи вычисления следующих функций являются NP-трудными: тропического ранга (это дает решение проблемы Бутковича 1994 года[42]), детерминантного ранга (это дает решение проблемы, которая была поставлена в 1996 году Де Шуттером[43] и в 1997 году Гобером[44] и также оставалась открытой) и изоляционного числа матрицы (этот результат был содержанием гипотезы Фризен и Тайса[45]);

– доказана гипотезу о связи граничного и классического рангов вещественных матриц[46];

– получены достаточные условия для существования факторизации булевых матриц в терминах числа нулевых элементов; как приложение этого результата получена оценка размера матрицы полного факторизационного ранга в терминах других ранговых функций.

- Разработаны методы комбинаторного анализа инвариантов тропической линейной алгебры, и получены следующие результаты из области тропической математики:

  – решена проблема о тропическом базисе идеала, порожденного минорами фиксированного порядка матрицы переменных; эта проблема была сформулирована Чан, Йенсеном и Рубеи[47];

  – показано, что симметрический ранг тропической матрицы не допускает характеризации в терминах так называемого графа различий этой матрицы; этот результат позволил решить проблему Картрайта и Чан[48];

  – исследовано взаимное поведение ранговых функций тропических матриц; показано, что функции тропического и детерминантного ранга и рангов Гондрана–Мину остаются ограниченными, если ограничена хотя бы одна из них; приведены примеры тропических матриц минимального размера с различными тропическим рангом и рангом Капранова, а также с различными строчным и столбцо-

[42]P. Butkovic, Strong regularity of matrices - a survey of results, *Discrete Applied Math.*, **48** (1994) 45–68.

[43]B. De Schutter, *Max-algebraic system theory for discrete event systems*, Ph.D. thesis, Katholieke Univ. Leuven, 1996.

[44]S. Gaubert, Methods and applications of (max,+) linear algebra, *STACS 97*, Springer Berlin Heidelberg (1997) 261–282.

[45]M. Friesen, D. O. Theis, *Fooling-sets and rank in nonzero characteristic*, arXiv:1305.2468.

[46]Z. Li, Y. Gao, M. Arav, F. Gong, W. Gao, F. J. Hall, H. van der Holst, Sign patterns with minimum rank 2 and upper bounds on minimum ranks, *Lin. Mult. Alg.* **61(7)** (2013) 895–908.

[47] M. Chan, A. N. Jensen, E. Rubei, The 4x4 minors of a 5xn matrix are a tropical basis, *Linear Algebra Appl.*, **435(7)** (2011) 1598–1611.

[48]D. Cartwright, M. Chan, Three notions of tropical rank for symmetric matrices, *Combinatorica*, **32(1)** (2012), 55–84.

вым рангами Гондрана–Мину; последний из этих результатов дает ответ на вопрос Акян, Гобера и Гутермана[49].

- Получены важные результаты, относящиеся к проблеме факторизации матриц над полукольцами и ее приложениям:
  - решена проблема, поставленная Барвинком в 1996 году[50]: показано, что задача распознавания тропических матриц, допускающих представление в виде произведения матриц размеров $m \times k$ и $k \times n$, является NP-трудной при ограниченном k;
  - получено решение проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса[51]: разработан полиномиальный по времени алгоритм распознавания матриц факторизационного ранга три;
  - построен контрпример к гипотезе Бисли и Лаффи[52]: приведен пример серии неотрицательных симметрических матриц ранга три, имеющих ровно по одному отрицательному собственному значению, не все из которых допускают представление в виде произведения неотрицательных матриц размеров $n \times k$ и $k \times n$ при фиксированном k;
  - получена верхняя оценка неотрицательного ранга матрицы в терминах ее классического ранга; в качестве приложения этого результата показано, что всякий выпуклый n-угольник допускает описание с помощью не более, чем $6(n+1)/7$ линейных неравенств с точностью до линейной проекции.

Основные методы исследования

Наряду с классическими методами и результатами линейной алгебры и теории полуколец используются методы комбинаторной алгебры, ориентированные на исследование различных матричных инвариантов и развитые автором. Особую роль играет метод сведения вычислительных задач линейной алгебры к проблемам теории графов, разработанный автором; этот метод позволил получить полезную информацию о взаимном поведении различных матричных инвариантов, а также доказать важные результаты, связанные со сложностью вычисления этих инвариантов. Среди новых методов, разработанных автором, также следует отметить метод шаблонов, основанный на изучении комбинаторной структуры матриц методами булевой линейной

---

[49] M. Akian, S. Gaubert, A. Guterman, Linear independence over tropical semirings and beyond, *Contemporary Mathematics*, AMS, **495** (2009), 1–38.

[50] A.I. Barvinok. Two Algorithmic Results for the Traveling Salesman Problem, *Mathematics of Operations Research*, **21(1)** (1996), 65–84.

[51] DSS

[52] L. B. Beasley, T. J. Laffey, Real rank versus nonnegative rank, *Linear Algebra Appl.*, **431** (2009), 2330–2335.

алгебры; этот метод позволил решить ряд проблем, связанных с исследованием взаимного поведения и сложности вычисления некоторых линейно-алгебраических и геометрических инвариантов.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для исследования проблем и решения задач линейной алгебры, дискретной геометрии, тропической математики, комбинаторной оптимизации, теории полугрупп и теории полуколец.

Значение полученных соискателем результатов для практики подтверждается тем, что результаты исследований, приведенные в диссертации, используются в учебных пособиях, монографиях и научных статьях других авторов. В частности, результаты соискателя были использованы Б. Штурмфельсом при чтении курса прикладной алгебраической геометрии в Корейском Специализированном институте науки и технологий (KAIST) в 2014 году; в учебнике[53] по тропической геометрии Б. Штурмфельса и Д. Маклаган теорема 1.3.35 из текста диссертации упомянута как "теорема Шитова". Следующие авторы также цитируют результаты автора диссертации: Л. Бисли, Г. Браун, А. Ванделе, Ш. Вельтге, Ф. Глинер, Ж. Гоувейя, М. Джонсон, З. Изхакян, Н. Жиллис, М. Камбитес, Х. Клаук, Т. Ли, Я. Окнински, К. Пашкович, А. Падрол, Ю. Пфайфле, Р. Робинсон, О. Сапир, Д. О. Тайс, Р. Томас, Д. Туйттенс, Т. Уотсон, М. Фризен, А. Хамед и другие.

Апробация результатов

Результаты диссертации в период с 2007 по 2015 год неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, на семинарах "Кольца и модули" и "Теория матриц" механико-математического факультета МГУ. Также результаты докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- XVII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", МГУ, Москва, 12–15 апреля 2010 года;
- международный алгебраический симпозиум, посвященный 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалева, МГУ, Москва, 15–18 ноября 2010 года;
- XVIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", МГУ, Москва, 11–15 апреля 2011 года;

[53] D. Maclagan, B. Sturmfels, *Introduction to tropical geometry*, volume **161** of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2015.

- международная конференция по матричным методам в математике и приложениях "MMMA-2011", Институт вычислительной математики РАН, Москва, 22–25 июня 2011 года;

- научная конференция "Ломоносовские чтения", МГУ, Москва, 14 ноября 2011 года;

- семинар "Гомологические и гомотопические методы в геометрии", НИУ ВШЭ, Москва, 29 февраля 2012;

- XIX международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", МГУ, Москва, 9–13 апреля 2012 года;

- международная конференция "Communication Complexity, Linear Optimization and Lower Bounds for Nonnegative Ranks of Matrices", Schloss Dagstuhl, Вадерн, Германия, 17–22 февраля 2013 года;

- научная конференция "Ломоносовские чтения", МГУ, Москва, 15 апреля 2013 года;

- международная конференция "Optimization and Algebraic Geometry", Национальный институт математических наук, Тэджон, Корея, 16–20 июня 2014 года;

- международная конференция "Limitations of convex programming: Lower bounds on extended formulations and factorization ranks", Schloss Dagstuhl, Вадерн, Германия, 15–20 февраля 2015 года;

- международный научный семинар "Large Structures Seminar", Университет Аалто, Хельсинки, Финляндия, 22 июня 2015 года;

- международная конференция "SIAM Conference on Applied Algebraic Geometry", Национальный институт математических наук, Тэджон, Корея, 3–7 августа 2015 года;

- международная конференция по матричным методам в математике и приложениях "MMMA-2015", SkolTech, Сколково, Москва, 24–28 августа 2015 года.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, восьми глав, разбитых на разделы, списка литературы и списка публикаций автора по теме диссертации. Общий объем работы составляет 302 страницы. Общий список литературы включает 170 наименований.

Публикации

Список публикаций автора по теме диссертации составляет 27 работ, и все они опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК РФ и индексируемых базой цитирования *Web of Science*. Тезисы докладов в список публикаций автора не входят. Статья [21] написана в соавторстве, и из нее в текст диссертации включены только результаты ее автора.

Краткое содержание работы

Глава 1 посвящена обсуждению понятий, которым посвящена диссертационная работа. Мы приводим базовые понятия теории полуколец и излагаем основы линейной алгебры с точки зрения этой теории. Оказывается, что такие фундаментальные понятия, как размерность пространства, линейная зависимость векторов и ранг матрицы, допускают различные трактовки в полукольцевой линейной алгебре; в самом деле, для различных приложений оказывается полезным рассматривать различные понятия размерности и линейной зависимости, а также различные ранговые функции матриц[49]. В главе приведены определения этих понятий и изучены их основные свойства. Напомним, что *полукольцом* называется множество $\mathcal{S}$ с операциями $\oplus$ и $\otimes$, называемыми *сложением* и *умножением*, и выделенными элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, называемыми нулем и единицей, которое является абелевым моноидом по сложению и полугруппой с единицей по умножению, а также удовлетворяет свойству дистрибутивности, причем любой элемент x полукольца $\mathcal{S}$ должен удовлетворять условию $\mathbf{0} \otimes x = x \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Полукольцо называется *коммутативным*, если умножение в нем коммутативно, и в нашей работе рассматриваются только такие полукольца.

В разделе 1.1 обсуждаются классы полуколец, изучению которых посвящена значительная часть работы. Полукольцо $\mathcal{S}$ называется *идемпотентным*, если для любого элемента $a \in \mathcal{S}$ верно равенство $a \oplus a = a$; оно называется *селективным*, если условие $a \oplus b \in \{a, b\}$ выполнено для любых элементов полукольца. Идемпотентное полукольцо $\mathcal{S}$ называется *квазиселективным справа*, если для любых элементов $a, b \in \mathcal{S}$ найдется элемент $c \in \mathcal{S}$, отличный от нуля, для которого выполнено условие $(a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \in \{a \otimes c, b \otimes c\}$. В различных приложениях важную роль играют полукольцо неотрицательных чисел $\mathbb{R}_+$ с обычными операциями сложения и умножения, а также так называемое *тропическое полукольцо*, то есть, множество $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ с бинарными операциями минимума и суммы чисел. Очень полезным примером является также бинарное булево полукольцо, его можно воспринимать как множество $\{0, 1\}$, операции на котором заданы обычным образом, за исключением условия $1 + 1 = 1$.

В разделе 1.2 обсуждаются различные способы определения понятий линейной зависимости, размерности и ранга матрицы. Как показывают приведенные примеры, наиболее естественным понятием линейной зависимости в полукольцевой алгебре представляется *зависимость в смысле Гондрана–Мину*: векторы $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{S}^m$ называются зависимыми, если для некоторых значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, отличных от нуля, и множеств $I, J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнены условия $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J \neq \emptyset$ и $\bigoplus_{i \in I} \lambda_i \otimes a_i = \bigoplus_{j \in J} \lambda_j \otimes a_j$. *Рангом Гондрана–Мину (строчным)* матрицы называется максимальная мощность линейно независимой системы строк.

Среди других ранговых функций, находящих применения в исследованиях различных проблем, следует также отметить функции, основанные на понятии вырожденности матрицы. Квадратная матрица $A \in \mathcal{S}^{n \times n}$ называется *тропически вырожденной*, если для некоторого подмножества $\mathcal{I}$ симметрической группы $\mathcal{S}_n$ множества $\{1, \ldots, n\}$ выполнено условие $\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{I}} A_{1,\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes A_{n,\sigma(n)} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{I}} A_{1,\tau(1)} \otimes b_{2,\tau(2)} \otimes A_{n,\tau(n)}$. Тропически вырожденная матрица называется также *d-вырожденной*, если в определении в качестве множества $\mathcal{I}$ можно взять знакопеременную группу множества $\{1, \ldots, n\}$. *Тропическим* и *детерминантным рангами* матрицы называются, соответственно, размеры ее наибольших тропически невырожденной и d-невырожденной подматриц. Также приведем понятие *факторизационного ранга* матрицы A над полукольцом $\mathcal{S}$: он равен наименьшему k, при котором существуют матрицы $B \in \mathcal{S}^{m \times k}$ и $C \in \mathcal{S}^{k \times n}$, удовлетворяющие условию $B \otimes C = A$. Приведены примеры, иллюстрирующие основные свойства каждой из рассматриваемых функций для матриц над разными полукольцами и их взаимное поведение.

В разделе 1.3 мы приводим и обсуждаем основные понятия тропической геометрии, которые являются обобщениями классических понятий многообразия, поверхности, идеала и стандартного базиса на тропический случай. В качестве основы для построения тропической геометрии[41] выбрано кольцо Мальцева–Неймана над группой вещественных чисел. Иными словами, мы определяем поле $\mathbf{H}_{\mathbb{F}}$ как множество формальных сумм вида $a(t) = \sum_{e \in \mathbb{R}} a_e t^e$, где t — переменная, *коэффициенты* $\{a_e\}$ принадлежат *базовому* полю $\mathbb{F}$, а *носитель* $E(a) = \{e \in \mathbb{R} : a_e \neq 0\}$ является вполне упорядоченным подмножеством множества $\mathbb{R}$. *Степенью* ненулевой суммы $a \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}$ называется показатель степени ее *главного члена*, то есть, $\deg a = \min E(a)$; степень нулевой суммы из $\mathbf{H}_{\mathbb{F}}$ полагается равной ∞. В кратком изложении содержания главы 1 мы не будем давать полных определений понятий тропического многообразия и тропического базиса; мы остановимся на определении ранговой функции, возникающей в связи с различными геометрическими проблемами. *Рангом Капранова* тропической матрицы B *относительно базового поля* $\mathbb{F}$ называется наименьший из рангов матриц A над полем $\mathbb{F}$, удовлетворяющих условию $B = \deg A$.

Глава 2 посвящена обсуждению поведения основных объектов линейной алгебры над полукольцами в самом общем случае. Мы иллюстрируем основные понятия линейной алгебры над полукольцами, введенные в первой главе, и применяем понятия линейной зависимости, размерности и ранга к изучению свойств различных полуколец. Несмотря на остутствие столь же богатого описания структуры полуколец, как то, которое известно для колец, новая интересная информация может быть получена с помощью подхода, основанного на точке зрения линейной алгебры. В некоторых случаях удается полностью описать классы полуколец, удовлетворяющие тем или иным свойствам, характеризующим линейную алгебру над ними, и изучение этих новых классов может оказаться интересным и с точки зрения структурной теории[54].

В разделе 2.1 исследуются линейные отображения полумодулей. Вводится следующее понятие: кольцо R называется *локально самоинъективным слева*, если для любого конечнопорожденного левого подмодуля $M \subset R^n$ и любой R-линейной функции $\varphi : M \to R$ найдется R-линейная функция $\psi : R^n \to R$, удовлетворяющая условию $\varphi(x) = \psi(x)$ для любого $x \in S$. Ранее[37] было показано, что любое самоинъективное кольцо также является локально самоинъективным, и был поставлен вопрос о том, верно ли обратное. Ответ на этот вопрос оказывается положительным, и он дается в разделе 2.1. Также мы доказываем, что групповое кольцо $R[G]$ является локально самоинъективным слева в том и только том случае, когда кольцо R локально самоинъективно слева и группа G локально конечна.

В разделе 2.2 обсуждается задача факторизации матриц над различными полукольцами. Эта задача восходит к базовому результату классической линейной алгебры: ранг матрицы A с элементами из некоторого поля равен наименьшему числу k, для которого найдутся матрица B размера $m \times k$ и матрица C размера $k \times n$, удовлетворяющие условию $A = BC$. Целью раздела 2.1 является описание полуколец, для матриц над которыми верна аналогичная характеризация ранговой функции. Классическая линейная алгебра обычно исходит из определения ранга как наибольшей мощности набора линейно независимых строк матрицы, для матриц же над полукольцами существует несколько различных подходов к определению понятия линейной зависимости. Эти подходы были изложены в первой главе, и в разделе 2.1 особое внимание уделено понятию зависимости по Гондрану–Мину, которое в силу рассуждений первой главы можно считать одним из наиболее подходящих определений линейной зависимости для произвольных полуколец. Иными словами, в разделе 2.1 изучаются полукольца, факторизационный ранг матриц над которыми совпадает с рангом Гондрана–Мину. Одним из основных результатов раздела является следующая теорема.

Теорема (2.2.9). *Пусть полукольцо $\mathcal{S}$ таково, что для любой матрицы A над $\mathcal{S}$ верно $f(A) = GMc(A)$. Тогда $\mathcal{S}$ вложено в некоторое поле.*

Итак, для совпадения ранга Гондрана–Мину и факторизационного ранга над полукольцом $\mathcal{S}$ необходимо существование вложения этого кольца в некоторое поле. В том частном случае, когда $\mathcal{S}$ является также кольцом, мы доказываем равенство ранга Гондрана–Мину классическому рангу матрицы; вопрос о равенстве ранга Гондрана–Мину и факторизационного ранга матриц

[54] Ya. Shitov, Inequalities for Gondran-Minoux rank and idempotent semirings, *Linear Algebra and its Applications*, 435(2011), 1769–1777.

над целостным кольцом $\mathcal{S}$ оказывается равносилен следующему вопросу: для любой ли матрицы A над $\mathcal{S}$ существует *оптимальная факторизация*, то есть, представление вида $A = BC$, где $B \in \mathcal{S}^{m\times k}$, $C \in \mathcal{S}^{k\times n}$, а через k обозначен классический ранг матрицы A? Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным для некоторых целостных колец $\mathcal{S}$, как показывает приведенный в тексте диссертации пример.

В разделе 2.3 исследуются обобщения на полукольцевой случай следующих свойств классической функции ранга матриц над полем:

$$\text{если } A \otimes B = C, \text{ то } GMr(C) \leqslant \min(GMr(A), GMr(B)), \tag{1}$$

$$\text{если } A \oplus B = C, \text{ то } GMr(C) \leqslant GMr(A) + GMr(B), \tag{2}$$

$$\text{если } (A|B) = C, \text{ то } GMr(C) \leqslant GMr(A) + GMr(B). \tag{3}$$

Аналогичные неравенства исследовались ранее для различных ранговых функций. Для факторизационного ранга они выполняются над любым полукольцом: ранее были доказаны неравенства для произведения и суммы матриц[55] и неравенство для матричного объединения[56].

Акян, Гобер и Гутерман[49] показали, что указанные неравенства выполняются для детерминантного и тропического рангов, но не выполняются для максимального слабого ранга матриц над тропическим полукольцом. В разделе 2.3 исследуется выполнение этих неравенств для ранга Гондрана–Мину, которое было открытой проблемой даже для тропических матриц. Доказывается следующая теорема.

Теорема (2.3.20). *Пусть $\mathcal{S}$ — идемпотентное полукольцо, не содержащее делителей нуля. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) условие (1) выполняется для матриц с элементами из $\mathcal{S}$;
2) условие (2) выполняется для матриц с элементами из $\mathcal{S}$;
3) условие (3) выполняется для матриц с элементами из $\mathcal{S}$;
4) полукольцо $\mathcal{S}$ является квазиселективным.

Также в разделе 2.3 показано, что теорема 2.3.20 не может быть обобщена на случай полуколец с делителями нуля; приведен пример селективного полукольца, для матриц над которым условия (1)–(3) не выполняются.

В **главе 3** обсуждается структура полугруппы квадратных матриц фиксированного порядка над заданным полукольцом. Отметим, что в отличие от классического случая матриц над полем или кольцом множество таких матриц не обладает структурой кольца, что в значительной мере затрудняет их изучение. С другой стороны, интерес вызывают многие вопросы, связанные с полугрупповой структурой множества матриц, в том числе описание отношений Грина, подгрупп, идемпотентов и некоторые другие[57]. Изучение

[55] L. B. Beasley, A. E. Guterman, Rank inequalities over semirings, *J. Korean Math. Soc.* **42(2)**(2005), 223–241.

[56] O. A. Pshenitsyna, Factor and term ranks for matrix union over a semiring, *Fundam. Prikl. Mat.*, **9(3)** (2003) 175–197.

[57] M. Johnson, M. Kambites, Green's J-order and the rank of tropical matrices, arXiv:1102.2707v1.

этих вопросов, с одной стороны, позволяет получить полезную информацию о свойствах множества матриц с точки зрения полугрупп, и с другой стороны, доказать ряд результатов о структуре полуколец, матрицы над которыми удовлетворяют тем или иным условиям, рассмотрение которых связано с приложениями теории полугрупп.

В разделе 3.1 мы изучаем связь отношений Грина на полугруппе матриц размера $n \times n$ над полукольцом и ранговых функций этих матриц. Напомним, как определяются отношения Грина $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{J}$ на произвольной полугруппе S. Для элементов $a, b \in S$ мы пишем $a \leqslant_{\mathcal{R}} b$, если $a = b$ или $a = bc$ для некоторого $c \in S$, а также $a \leqslant_{\mathcal{L}} b$, если $a = b$ или $a = db$ для некоторого $d \in S$. Мы также пишем $a \leqslant_{\mathcal{J}} b$, если $a \leqslant_{\mathcal{L}} b$ или $a \leqslant_{\mathcal{R}} b$, или $a = s_1 b s_2$ для некоторых $s_1, s_2 \in S$. В силу определений отношения $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{J}$ рефлексивны и транзитивны, то есть, задают предпорядки на полугруппе S. Назовем функцию f на полугруппе S, принимающую вещественные значения, монотонной относительно отношения $\mathcal{J}$, если условие $a \leqslant_{\mathcal{J}} b$ влечет $f(a) \leqslant f(b)$. Ранее исследовалась связь отношений Грина и ранговых функций[57], и была доказана монотонность тропического, детерминантного и факторизационного рангов и ранга Гондрана–Мину относительно отношения $\mathcal{J}$ на полугруппе матриц над тропическим полукольцом. Оказывается, что функция ранга Гондрана–Мину, тем не менее, является монотонной относительно отношений $\mathcal{L}$ и $\mathcal{J}$ для матриц далеко не над всеми полукольцами, и следующая теорема дает характеризацию таких полуколец.

Теорема (3.1.2). *Рассмотрим идемпотентное полукольцо $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ и целое число $n \geqslant 6$. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(i) полукольцо $\mathcal{S}$ квазиселективно;
(ii) функция GMr монотонна относительно отношения $\mathcal{J}$ на $(\mathcal{S}^{n \times n}, \otimes)$;
(iii) функция GMr монотонна относительно отношения $\mathcal{L}$ на $(\mathcal{S}^{n \times n}, \otimes)$.

Необходимость проведения исследования связи отношений Грина и функции ранга Капранова тропических матриц была отмечена ранее[57], и в разделе 3.1 мы проводим такое исследование. В качестве основного его результата можно выделить следующую теорему.

Теорема (3.1.11). *Если базовое поле содержит по крайней мере $n+2$ элемента, то функция ранга Капранова монотонна относительно отношений Грина $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{J}$ на полугруппе тропических матриц порядка n. Если же базовое поле содержит менее n элементов, то функция ранга Капранова не монотонна ни относительно одного из этих отношений на полугруппе тропических матриц порядка n.*

Таким образом, в наиболее важном случае бесконечного базового поля мы доказали монотонность ранга Капранова относительно отношений Грина. В случае конечных базовых полей доказано отсутствие монотонности этого ранга для матриц достаточно большого размера.

В разделе 3.2 мы продолжаем изучать тропические матрицы с точки зрения теории полугрупп. Целью этого раздела является доказательство гипотезы, сформулированной Джонсон и Камбитесом[39]. А именно, основным результатом раздела является следующая теорема.

Теорема (3.2.5). *Если группа $\mathcal{G}$ обладает точным представлением тропическими матрицами порядка n, то $\mathcal{G}$ содержит нормальную абелеву подгруппу без кручения индекса, не превосходящего $n!$.*

Более того, в разделе 3.2 получена полная характеризация подгрупп полугруппы тропических матриц в терминах мономиальных матриц. Назовем тропическую матрицу P *мономиальной*, если найдется перестановка σ, для которой $P_{ij} \neq \infty$ в том и только том случае, когда $i = \sigma(j)$. В тексте диссертации доказан следующий результат.

Теорема (3.2.4). *Всякая подгруппа полугруппы тропических матриц порядка n допускает точное представление тропическими мономиальными матрицами порядка n.*

Наконец, в разделе 3.2 мы улучшаем результат Д'Алессандро и Паску[58], утверждающий, что любая периодическая подгруппа полугруппы тропических матриц порядка n конечна. Напомним, что группа H называется *периодической*, если она состоит из элементов конечного порядка.

Теорема (следствие 3.2.6). *Порядок любой периодической подгруппы полугруппы тропических матриц порядка n не превосходит $n!$.*

В разделе 3.3 мы обращаемся к проблеме тождества в полугруппе тропических матриц порядка n, ранее изучавшейся Изхакяном и Марголисом[??] и Изхакяном[59]. В этих работах была высказана гипотеза, утверждающая наличие тождества в полугруппе тропических матриц порядка n при любом n, но были доказаны только частные случаи этого утверждения. А именно, было приведено тождество полугруппы тропических матриц порядка 2 и построено тождество для верхнетреугольных тропических матриц порядка n.

В этом разделе разработаны методы, которые оказываются полезными для решения сформулированной проблемы. Полученные результаты позволяют разрешить проблему Изхакяна и Марголиса о тождестве для матриц порядка три, которая оставалась открытой в этом случае.

Теорема (3.3.13). *Рассмотрим матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ и положим $\overline{A} = A^6B^6$, $\overline{B} = B^6A^6$; положим также $\mathcal{U}(x,y) = x^2y^4x^2x^2y^2x^2y^4x^2$ и $\mathcal{V}(x,y) = x^2y^4x^2y^2x^2x^2y^4x^2$. Обозначим через $w_1, \ldots, w_8$ набор всех слов длины 3 и положим $\Gamma(x,y) = w_1 \ldots w_8$. Положим*

$$\mathcal{A} = \Gamma\left(\overline{A}^{146}, \overline{B}^{146}\right)\, \Gamma^3\left(\overline{A}, \overline{B}\right)\, \overline{A}\,\Gamma^3\left(\overline{A}, \overline{B}\right),$$

[58] F. d'Alessandro, E. Pasku, A combinatorial property for semigroups of matrices, *Semigroup Forum*, **67** (2003) 22–30.

[59] Z. Izhakian, Semigroup identities in the monoid of triangular tropical matrices, *Semigroup Forum*, (2013) 1–17.

$$\mathcal{B} = \Gamma\left(\overline{A}^{146}, \overline{B}^{146}\right)\ \Gamma^3\left(\overline{A}, \overline{B}\right)\ \overline{B}\,\Gamma^3\left(\overline{A}, \overline{B}\right).$$

Тогда $\mathcal{U}(\mathcal{AA}, \mathcal{AB})\,\mathcal{A} = \mathcal{V}(\mathcal{AA}, \mathcal{AB})\,\mathcal{A}$.

Глава 4 посвящена исследованию ранговых функций над бинарным булевым полукольцом. В силу вложения бинарного полукольца в тропическое полукольцо изучение ранговых функций булевых матриц представляет интерес с точки зрения тропической линейной алгебры. В самом деле, понятие тропического ранга булевой матрицы оказывается полезным в различных задачах тропической геометрии[41]. Функция детерминантного ранга как тропических, так и булевых матриц оказывается интересной в связи с приложениями в области дискретных динамических систем[60]. С другой стороны, многие важные инварианты булевых матриц не являются обобщениями функций тропических матриц. Такова, например, функция изоляционного числа матрицы, вызывающая интерес в современных исследованиях, связанных с проблемами комбинаторной оптимизации, сложности информационных протоколов и некоторыми иными[36].

В разделе 4.1 мы изложим результаты, описывающие сложность вычисления ранговых функций булевых матриц. Исследование этой сложности было, в частности, мотивировано вопросом Бутковича[42] о том, может ли тропический ранг матрицы быть найден за полиномиальное время. Кроме того, вызывал интерес также вопрос Де Шуттера[43] о вычислительной сложности детерминантного ранга, который был также упомянут в работе Гобера[44] и оставался открытым. Наконец, была открытой проблемой недавняя гипотеза Фризен и Тайса[45] о вычислении изоляционного числа булевой матрицы.

В разделе 4.1 получен ответ на указанные вопросы и доказано, что задачи вычисления детерминантного и тропического рангов и изоляционного числа булевой матрицы являются NP-трудными. Чтобы сформулировать основной результат, приведем определение нового для нашей работы понятия. Элементы $(i_1, j_1), \ldots, (i_n, j_n)$ булевой матрицы B называются *изолированным множеством*, если условие $B_{i_s,j_t} = B_{i_t,j_s} = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $t = s$. *Изоляционным числом* матрицы называется максимальная мощность ее изолированного множества.

Теорема (4.1.3). *Даны булева матрица A и целое число k. Задача распознавания того, больше ли изоляционное число (или детерминантный ранг, или тропический ранг) матрицы A, чем k, является NP-полной.*

Отметим также важность проблемы факторизации булевых матриц, изучению которой посвящен раздел 4.2: необходимость ее изучения обусловлена приложениями в комбинаторике, вычислительной математике и других областях науки. А именно, проблема факторизации булевой матрицы предоставляет линейно-алгебраическую характеризацию понятия двудольной размер-

[60] T. van den Boom, B. De Schutter, Properties of MPC for max-plus-linear systems, *Eur. J. Control*, **8(5)** (2002) 453–462.

ности графа, поскольку факторизационный ранг матрицы смежностей двудольного графа G равен минимальной мощности покрытия графа G полными двудольными подграфами этого графа[33]. В разделе 4.2 мы доказываем существование факторизации булевых матриц с достаточно большим количеством единичных элементов. Отметим, что *булевым рангом* $(0,1)$-матрицы называется ее факторизационный ранг над бинарным булевым полукольцом.

Теорема (4.2.10). *Если булев ранг матрицы $A \in \{0,1\}^{n\times m}$ равен n, то некоторый столбец матрицы A содержит по крайней мере $\frac{\sqrt{n}}{2} - 1$ нулей.*

В разделе 4.2 нами также доказана асимптотическая оптимальность результата приведенной теоремы.

Теорема (следствие 4.2.12). *Каково бы ни было целое полжительное число n, найдется $(0,1)$-матрица булева ранга n размера $n \times m$, любой столбец которой содержит не более, чем $\sqrt{2n}$ нулевых элементов.*

В качестве приложения полученных результатов мы получаем верхнюю оценку размера матрицы полного булева ранга в терминах тропического и детерминантного рангов и изоляционного числа булевой матрицы.

Теорема (4.2.14). *Пусть матрица $A \in \{0,1\}^{n\times m}$ имеет полный булев ранг. Если детерминантный или тропический ранги или число изоляции матрицы A меньше k, то $\min\{n,m\} < 16^{2^k-1}$.*

Раздел 4.3 посвящен комбинаторному анализу свойств ранговых функций, и многие результаты этого раздела находят применение в последующих главах. Кроме того, рассматривается понятие граничного ранга матрицы и решается одна из проблем о связи граничного и классического рангов вещественных матриц, которая до публикаций автора диссертации была открытой. Напомним, что *граничным рангом* матрицы A называется минимальное число t, для которого существует набор из t *линий* (то есть, строк или столбцов), покрывающий все ненулевые элементы матрицы A. В разделе 4.3 получено доказательство гипотезы, сформулированной Ли и соавторами[46], и доказано следующее утверждение: если вещественная матрица A имеет классический ранг r и граничный ранг $r+2$, то найдется рациональная матрица с такими же рангом и знаковым шаблоном, как у матрицы A.

Глава 5 посвящена исследованию свойств ранговых функций тропических матриц. Особое внимание уделено тем функциям, которые важны для различных приложений тропической линейной алгебры: детерминантному и тропическому рангам, рангам Капранова и Гондрана–Мину и факторизационному рангу. Указанные ранговые функции возникают из рассмотрения проблем комбинаторной оптимизации[42], алгебраической геометрии[61], теории

[61] M. Einsiedler, M. Kapranov, D. Lind. Non-Archimedean amoebas and tropical varieties, *J. Reine Angew. Math.*, **601** (2006) 139–157.

расписаний, дискретных динамических систем[44] и ряда других. Для доказательства основных результатов главы важен метод шаблонов тропических матриц, который в целом описан в первом разделе и обоснованию которого посвящен второй раздел этой главы. Коротко, суть метода состоит в том, что некоторые ранговые функции тропической матрицы оказываются (с точностью до умножения строк и столбцов матрицы на ненулевые элементы) равными рангу некоторой булевой матрицы, которая определяется специальным образом с помощью исходной.

В разделе 5.1 вводится понятие шаблона тропической матрицы и показывается его связь с понятием смешанного разбиения суммы Минковского выпуклых многогранников. Напомним, что *суммой Минковского* $\sum_{i=1}^{k} P_i$ множеств $P_1, \ldots, P_k \subset \mathbb{R}^d$ называется множество всевозможных сумм вида $x_1 + \ldots + x_k$ при $x_1 \in P_1, \ldots, x_k \in P_k$. Рассмотрим теперь набор $B = (B_1, \ldots, B_k)$ выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^d$ и предположим, что размерность их суммы Минковского равна d. Набор выпуклых многогранников $(B_1, \ldots, B_k)$ из $\mathbb{R}^d$ называется *ячейкой Минковского* для набора $(P_1, \ldots, P_k)$, если вершины многогранника B_i образуют подмножество вершин многогранника P_i при всех значениях i, а также выполнены еще несколько дополнительных условий, указанных в тексте диссертации.

Рассмотрим стандартный $(d-1)$-мерный симплекс Δ^{d-1} в пространстве $\mathbb{R}^d$, то есть выпуклую оболочку множества $\{e_1, \ldots, e_d\}$. Обозначим через $n\Delta^{d-1}$ сумму Минковского $\Delta^{d-1} + \ldots + \Delta^{d-1}$, в которой n слагаемых. *Типом вектора* $x \in \mathbb{R}^d$ относительно столбцов матрицы $V \in \mathbb{R}^{d\times n}$ называется набор из d множеств $(S_1, \ldots, S_d)$, где множества S_j составлены из тех индексов $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $\theta = j$ доставляет минимум выражению $V_{\theta i} - x_\theta$. Этот тип мы будем обозначать через $type_V(x)$. Введем в рассмотрение понятие *смешанного разбиения* суммы симплексов $n\Delta^{d-1}$, *индуцированного матрицей* $M \in \mathbb{R}^{d\times n}$, взяв за основу следующую его характеризацию.

Теорема[41]. *Рассмотрим матрицу $M \in \mathbb{R}^{d\times n}$ и семейство подмножеств $S = (S_1, \ldots, S_d)$ множества $\{1, \ldots, n\}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) найдется вектор $x \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющий условию $type_M(x) = S$;

(2) смешанное разбиение $n\Delta^{d-1}$, индуцированное матрицей M, содержит ячейку Минковского $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где через τ_i обозначена выпуклая оболочка множества $\{e_j \,|i \in S_j\}$.

Оказывается, что смешанные разбиения, индуцируемые тропическими матрицами, находят важные приложения в линейной алгебре: ранее была получена характеризация тропического ранга матрицы в терминах ее смешанного разбиения[41]. В той же работе формулируется вопрос об аналогичной характеризации для факторизационного ранга и ранга Капранова: если две тропические матрицы индуцируют одинаковые смешанные разбиения суммы симплексов, обязательно ли они имеют одинаковые факторизационные ранги и ранги Капранова? Мы получаем отрицательный ответ на этот вопрос, доказывая следующий результат.

Пример (предложение 5.1.10, лемма 5.1.11). *При* $\varepsilon \in (0, 0.5)$ *матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{и} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

индуцируют одинаковые смешанные разбиения суммы симплексов $6\Delta^5$. *Факторизационный ранг и ранг Капранова матрицы* A *не превосходят* 4, *а на матрице* B *эти функции принимают значения, не меньшие пяти.*

В разделе 5.1 также вводится понятие шаблона тропической матрицы, одно из ключевых понятий главы.

Определение (5.1.5). *Тропическим шаблоном* матрицы A называется булева матрица B, определенная как (1) $B_{uv} = 1$, если $A_{uv} = \min_i\{A_{iv}\} < \infty$; (2) $B_{uv} = 0$, если $A_{uv} > \min_i\{A_{iv}\}$ или если $A_{uv} = \infty$. Тропический шаблон матрицы A обозначается через $\mathcal{P}(A)$.

Получена характеризация понятия шаблона в терминах смешанного разбиения суммы симплексов, индуцированного тропической матрицей. Тропические матрицы M и M' одного размера называются *эквивалентными*, если найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, для которых $M_{ij} = M'_{ij} + \alpha_i + \beta_j$ при всех i и j.

Теорема (5.1.7). *Пусть* $M \in \mathbb{R}^{d \times n}$. *Рассмотрим набор подмножеств* $S = (S_1, \ldots, S_d)$ *множества* $\{1, \ldots, n\}$. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) матрица M *эквивалентна матрице* M', *элементы шаблона* P' *которой удовлетворяют условию* $P'_{ji} = 1$ *тогда и только тогда, когда* $j \in S_i$;

(2) смешанное разбиение $n\Delta^{d-1}$, *индуцированное матрицей* M, *содержит ячейку Минковского* $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, *где через* τ_i *обозначена выпуклая оболочка множества* $\{e_j \,|i \in S_j\}$.

Теорема 5.1.7 показывает, что смешанное разбиение, индуцированное матрицей M, определяется однозначно множеством тропических шаблонов матриц из класса эквивалентности M, и наоборот, множество таких тропических шаблонов однозначно определяет смешанное разбиение.

В дальнейших рассуждениях главы метод тропических шаблонов применяется для исследования различных инвариантов тропических матриц. В разделе 5.2 этот метод используется для получения характеризации ранга Гондрана–Мину; приведем основной результат.

Теорема (5.2.13). *Строчный ранг Гондрана–Мину тропической матрицы* A *равен наибольшему строчному рангу Гондрана–Мину среди шаблонов всех матриц, эквивалентных* A.

Отметим, что теорема 5.2.13 в силу приведенной выше теоремы 5.1.7 гарантирует характеризацию ранга Гондрана–Мину матрицы в терминах смешанного разбиения суммы симплексов, и в этом ранг Гондрана–Мину проявляет отличие от факторизационного ранга и ранга Капранова.

Раздел 5.3 посвящен обсуждению приложений метода тропических шаблонов. В частности, исследуется взаимное поведение ранга Гондрана–Мину и других ранговых функций. Ранее аналогичные вопросы рассматривались для факторизационного ранга[41], и было показано, что факторизационный ранг тропических матриц может быть сколь угодно большим, даже если тропический ранг и ранг Гондрана–Мину ограничены. Случай ранга Капранова и тропического ранга также рассматривался ранее[62], было показано, что и ранг Капранова тропических матриц может быть сколь угодно большим, даже если их тропический ранг ограничен. Мы докажем, что ни ранг Гондрана–Мину, ни детерминантный ранг тропических матриц не могут быть сколь угодно большими, если ограничен тропический ранг.

Теорема (5.3.4 и 5.3.6). *Для любой тропической матрицы A выполнены неравенства $trop(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$ и $trop(A) \geqslant \frac{d(A)+2}{3}$, где через $trop(A)$, $d(A)$ и $GMr(A)$ обозначены, соответственно, тропический и детерминантный ранги и ранг Гондрана–Мину матрицы A.*

Еще одно из своих приложений метод тропических шаблонов находит при изучении вычислительной сложности функции ранга Гондрана–Мину тропических матриц. Вопросам исследования этой сложности посвящена проблема, поставленная Бутковичем в 2008 году[63]: даны k тропических векторов, существует ли полиномиальный по времени алгоритм распознавания линейной GM-зависимости этих векторов? Напомним, что в силу известного результата 1984 года[64] указанная задача NP-трудна даже для 0-1 матриц, если число k является частью входных данных. Проблема существования полиномиального алгоритма, однако, оставалась открытой в предположении постоянства значения числа k. Положительное решение этой проблемы было получено автором диссертации и изложено в подразделе 5.3.

Теорема (5.3.10). *Пусть k — фиксированное целое число. Тогда задача распознавания свойства $GMr(A) < k$ решается за полиномиальное по размеру тропической матрицы A время.*

Наконец, метод тропических шаблонов позволяет получить полиномиальный по времени алгоритм вычисления ранга Гондрана–Мину матриц ограниченного тропического ранга.

Теорема (5.3.11). *Пусть t — фиксированное целое число. Тогда задача*

[62] K. H. Kim, N. F. Roush, Kapranov rank vs. tropical rank, *Proc. Amer. Math. Soc.* **134(9)**(2006), 2487–2494.

[63] P. Butkovic, *Introduction to max-algebra*, preprint, 2008.

[64] V. Klee, R. Ladner, and R. Manber. Sign-solvability revisited, *Linear Algebra Appl.*, **59** (1984) 131–158.

вычисления GM-ранга матрицы тропического ранга, не большего t, решается за полиномиальное время.

В главе 6 построена теория, позволяющая решить, в частности, проблему из области тропической алгебраической геометрии, которая была сформулирована Чан, Йенсеном и Рубеи[47]. Теория основана на результатах тропической линейной алгебры и использует разработанный в предыдущей главе метод шаблонов, а также новые методы комбинаторного анализа тропических инвариантов. Чтобы сформулировать проблемы, которым посвящена глава 6, и основные результаты главы, приведем кратко основные понятия тропической геометрии.

Тропическим полиномом будем называть выражение вида $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \min_{h=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathcal{A}} \{c_h + h_1\xi_1 + \ldots + h_n\xi_n\}$, где $c_h \in \mathbb{R}$, а $\mathcal{A}$ — конечное подмножество множества $(\mathbb{Z}_+)^n$. Тропический многочлен F обозначается через $\deg f$, если многочлен $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{h=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathcal{A}} C_h \cdot x_1^{h_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{h_n}$ над полем $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ удовлетворяет условиям $C_h \neq 0$ и $c_h = \deg C_h$ при всяком $h \in \mathcal{A}$. *Аффинным многообразием, порожденным идеалом* $I \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1,\ldots,x_n]$, называется множество $V(I) = \{(u_1,\ldots,u_n) \in (\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^*)^n \mid \forall f \in I \;\; f(u_1,\ldots,u_n) = 0\}$. *Тропическим многообразием, порожденным идеалом* I, называется образ множества $V(I)$ при отображении deg, то есть, $\deg V(I) = \{(\deg u_1,\ldots,\deg u_n) \in \mathbb{R}^n \mid (u_1,\ldots,u_n) \in V(I)\}$. *Тропической гиперповерхностью, соответствующей* тропическому многочлену F, называется множество всех точек $(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$, для которых минимум в выражении для этого многочлена достигается как минимум два раза. Пусть $f \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1,\ldots,x_n]$, $J \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1,\ldots,x_n]$. Тропическая гиперповерхность, соответствующая многочлену $\deg f$, обозначается через $\mathcal{T}(f)$; введем также обозначение $\mathcal{T}(J) = \bigcap_{g\in J} \mathcal{T}(g)$. Множество $\{f_1,\ldots,f_k\} \subset I$ называется *тропическим базисом* идеала I, если $I = \langle f_1,\ldots,f_k\rangle$ и $\mathcal{T}(I) = \mathcal{T}(f_1) \cap \ldots \mathcal{T}(f_k)$.

Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{C}[x_{11},\ldots,x_{dn}]$ от dn переменных, которые образуют матрицу $X = (x_{ij})$ размера $d \times n$. Через $H_r^{d,n}$ обозначим множество всех миноров порядка r матрицы X, то есть полиномов вида $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (-1)^\sigma x_{s_1,c_{\sigma(1)}} \ldots x_{s_r,c_{\sigma(r)}}$, где в каждой из последовательностей $(s_1,\ldots,s_r)$ и $(c_1,\ldots,c_r)$ индексы возрастают. Через $J_r^{d,n} \subset \mathbb{C}[x_{11},\ldots,x_{dn}]$ обозначим идеал, порожденный многочленами семейства $H_r^{d,n}$. Теперь мы можем сформулировать проблему, решению которой посвящена глава 6: при каких d, n и r миноры порядка r матрицы переменных размера $d\times n$ образуют тропический базис порождаемого ими идеала? Иными словами, при каких d, n и r многочлены $H_r^{d,n}$ являются тропическим базисом идеала $J_r^{d,n}$? В главе 6 приведено решение этой проблемы и доказана следующая теорема.

Теорема (1.3.35). *Рассмотрим целые положительные числа d, n и r, удовлетворяющие условию $r \leqslant \min\{d,n\}$. Миноры порядка r матрицы переменных размера $d \times n$ образуют тропический базис в том и только том случае, когда выполнено какое-либо из следующих условий: (1) $r \leqslant 3$; (2)*

$r = \min\{d, n\}$; *(3)* $r = 4$ *и* $\min\{d, n\} \leqslant 6$.

Отметим, что условие $r \leqslant \min\{d, n\}$ фигурирует в приведенной теореме, чтобы исключить вырожденный случай $r > \min\{d, n\}$. В самом деле, в этом случае множество миноров порядка r является пустым, и потому в силу определений является тропическим базисом порождаемого им нулевого идеала.

В **главе 7** изучается проблема факторизации тропических матриц и свойства связанной с этой проблемой функции факторизационного ранга. Исследование факторизации матриц над тропическим полукольцом началось в 90-е годы прошлого века в связи с приложениями в комбинаторной оптимизации и продолжалось впоследствии[65]. Последнее десятилетие было отмечено бурным развитием методов тропической математики, и были найдены новые приложения тропической факторизации в линейной алгебре и алгебраической геометрии[41]. Изложенные в главе 7 результаты основаны на развитии тропических методов и позволяют получить решения ряда открытых проблем, возникших в связи с приложениями в комбинаторной оптимизации, тропической математике, дискретной геометрии и линейной алгебре.

Важной проблемой, связанной с изучением факторизационного ранга, является его вычислительная сложность[41]. Несложно видеть, что проблема вычисления факторизационного ранга разрешима алгоритмически: в самом деле, определение 7.1.1 может быть сформулировано на языке логики первого порядка теории вещественных чисел с порядком и сложением, и потому вычисление факторизационного ранга может быть проведено применением алгоритма элиминации кванторов для этой теории[66].

Крайне высокая вычислительная сложность алгоритма элиминации кванторов делает упомянутый алгоритм непригодным для практического применения. Другой алгоритм был разработан Девелином[67], в которой была развита теория тропических касательных многообразий. В этой работе была получена характеризация факторизационного ранга с точки зрения тропической геометрии, и эта характеризация позволила получить алгоритм вычисления ранга. К сожалению, ни алгоритм Девелина, ни какой-либо другой алгоритм, видимо, не позволят вычислять факторизационный ранг тропической матрицы за полиномиальное время. В самом деле, проблема вычисления этого ранга оказывается NP-сложной даже для тропических 01-матриц[41]. Другими словами, общая *проблема тропической факторизации матриц* — существуют ли матрицы $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ и $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$, удовлетворяющие условию $A = B \otimes C$, для данных матрицы A и числа k? — оказывается NP-трудной.

Помимо общей проблемы вычисления факторизационного ранга большой интерес вызывает проблема распознавания матриц фиксированного ранга.

[65] A. Barvinok, D.S. Johnson, G.J. Woeginger, and R. Woodroofe. The maximum traveling salesman problem under polyhedral norms, Integer programming and combinatorial optimization, *Lecture Notes in Comput. Sci*, **1412**, Springer, Berlin, 1998.

[66] J. Ferrante, C. Rackoff. *A decision procedure for the first order theory of real addition with order*, SIAM J. Computing, **4** (1975) 69–76.

[67] M. Develin, *Tropical Secant Varieties of Linear Spaces*, Discr. Comp. Geom., **35(1)** (2006) 117–129.

Этот интерес вызван во многом приложениями в комбинаторной оптимизации: некоторые важные проблемы комбинаторной оптимизации допускают быстрые решения в тех случаях, когда матрицы данных имеют ограниченный факторизационный ранг[50]. Матрицы ограниченного факторизационного ранга естественным образом возникают также и в других вопросах комбинаторной оптимизации и тропической геометрии[41]. Эти замечания приводят нас к следующему вопросу о тропических факторизациях матриц.

Проблема (7.1.4). *Существует ли алгоритм, решающий задачу факторизации матриц за полиномиальное время при любом фиксированном k?*

Барвинок предполагал[68], что проблема 7.1.4 допускает положительное решение, и упоминал эту проблему в последующих работах[50]. Дальнейшие исследования проблемы распознавания матриц фиксированного факторизационного ранга проводились в различных работах[67], но проблема оставалась открытой даже в случае $k = 3$, как указывают Девелин, Сантос и Штурмфельс[41].

С проблемой быстрого распознавания матриц фиксированного факторизационного ранга связана проблема характеризации таких матриц в терминах рангов их подматриц[41]. Она формулируется так: существует ли число $\Theta(k)$, для которого любая матрица факторизационного ранга k содержит подматрицу факторизационного ранга k размера, ограниченного числом $\Theta(k)$? Предположим, что при некотором k удалось найти такое $\Theta(k)$. Чтобы решить проблему распознавания матриц факторизационного ранга, меньшего k, нам достаточно в этом случае посчитать ранги всех подматриц размера, не большего $\Theta(k) \times \Theta(k)$. Число таких подматриц, как несложно видеть, имеет полиномиальный характер роста при увеличении размера матрицы, а ранг каждой из таких подматриц может быть посчитан за ограниченное время с помощью алгоритма элиминации кванторов. Таким образом, мы увидели, что существование функции $\Theta(k)$ влекло бы положительное решение проблемы 7.1.4. К сожалению, как показывают результаты раздела 7.2, такого значения $\Theta(k)$ не существует при $k \geqslant 5$.

Теорема (7.2.10). *Для целых чисел $k \geqslant 5$ и ν существует матрица факторизационного ранга k, содержащая более ν строк и столбцов, факторизационные ранги всех собственных подматриц которой меньше k.*

Также получено необходимое и достаточное условие характеризации матриц факторизационного ранга k в терминах рангов миноров порядка k.

Теорема (7.2.4) *Если факторизационный ранг тропической матрицы A равен $r \leqslant 3$, то матрица A содержит подматрицу размера $r \times r$ полного факторизационного ранга. Для любого целого числа $r > 3$ найдется матрица факторизационного ранга r, все подматрицы размера $r \times r$ которой имеют факторизационные ранги, меньшие r.*

---

[68] A.I. Barvinok. *Combinatorial Optimization and Computations in the Ring of Polynomials*, DIMACS Technical Report 93-13, 1993.

В разделе 7.3 приведено полное решение проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса о характеризации матриц фиксированного факторизационного ранга в терминах рангов их подматриц; приведем основной результат.

Теорема (7.3.32). *Положим $\Theta(1) = 1$, $\Theta(2) = 2$, $\Theta(3) = 3$ и $\Theta(4) = 1539$. Если целое число k не превосходит четырех, то любая тропическая матрица факторизационного ранга, не меньшего k, содержит подматрицу факторизационного ранга, не меньшего k, и содержащую не более $\Theta(k)$ строк и не более $\Theta(k)$ столбцов. Если $k \geqslant 5$, то найдутся матрицы факторизационного ранга k сколь угодно большого размера, все собственные подматрицы которых имеют факторизационные ранги, меньшие k.*

Как следствие теоремы (7.3.32) получено решение еще одной проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса — вопроса о вычислительной сложности распознавания матриц факторизационного ранга три.

Теорема (7.3.31). *Существует полиномиальный по времени алгоритм распознавания тропических матриц факторизационного ранга три.*

Раздел 7.4 посвящен решению проблемы 7.1.4. Доказывается, что задача распознавания матриц, факторизационный ранг которых не превосходит 7, является NP-трудной, даже если предполагать, что матрицы состоят из целых чисел. Формально эта задача может быть описана следующим образом.

Задача (7.4.1). k-ФАКТОРИЗАЦИЯ ТРОПИЧЕСКИХ МАТРИЦ (k-ФТМ).
Дана тропическая матрица $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$.
Вопрос: существуют ли тропические матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$, удовлетворяющие условию $B \otimes C = A$?

Основным результатом раздела 7.4 является доказательство NP-полноты задачи k-ФТМ при всех $k \geqslant 7$. Чтобы получить этот результат, нам требуется построить полиномиальное сведение задачи k-ФТМ к какой-либо задаче, NP-полнота которой известна. Ключевым для нашего доказательства является сведение классической NP-полной задачи о раскраске графа к задаче факторизации; разработанные методы приводят к следующему результату.

Теорема (7.4.29). *Задача k-ФТМ является NP-полной при всяком $k \geqslant 7$.*

Отметим, что теорема 7.4.29 дает решение упомянутой выше проблемы 7.1.4, поставленной Барвинком в 1996 году[50]. Разработанный метод позволяет, более того, доказать следующий результат, тем самым решая проблему 3.2 из статьи Девелина, Сантоса и Штурмфельса[41].

Теорема (7.4.30). *Задача вычисления факторизационного ранга матрицы, тропический ранг которой не превосходит семи, является NP-трудной.*

Глава 8 посвящена обсуждению важной для различных приложений и бурно развивающейся в настоящее время теории факторизации неотрицательных матриц. Задача факторизации состоит в нахождении матриц $B \in \mathbb{R}_+^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}_+^{k\times n}$, удовлетворяющих условию $A = BC$ при данных матрице A и числе k, и находит многочисленные приложения в анализе данных, статистике, квантовой механике, дискретной геометрии и многих других областях[15].

С задачей факторизации тесно связано понятие *неотрицательного ранга* матрицы $A \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$, который равен наименьшему целому числу k, для которого существуют матрицы $B \in \mathbb{R}_+^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}_+^{k\times n}$, удовлетворяющие условию $A = BC$. Как показывают современные исследования[69], оказывается очень важным вопрос о получении верхних и нижних оценок для неотрицательного ранга в терминах иных матричных инвариантов; основным результатом, доказательство которого приведено в разделе 8.1, является решение одной из проблем такого вида. А именно, мы даем отрицательный ответ на вопрос 4.4 из работы Бисли и Лаффи[52] и доказываем следующую теорему.

Теорема (8.1.5). *Существуют симметрические матрицы $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ классического ранга три, имеющие ровно одно отрицательное собственное значение и сколь угодно большой неотрицательный ранг.*

Результаты, изложенные в разделе 8.2, находят важные приложения в теории расширенных представлений многогранников, поэтому мы напомним основные понятия этой теории. Рассмотрим выпуклый многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$. *Расширением* многогранника P называется другой многогранник $Q \subset \mathbb{R}^d$, из которого P может быть получен как образ под действием линейной проекции $\mathbb{R}^d$ на $\mathbb{R}^n$. *Расширенным представлением* многогранника P называется описание многогранника Q в терминах линейных уравнений и неравенств и описание проекции $\mathbb{R}^d$ на $\mathbb{R}^n$, переводящей Q в P. *Размером* расширенного представления Q называется число гиперграней многогранника Q. *Сложность расширения* многогранника P — наименьший из возможных размеров расширенных представлений этого многогранника, то есть, наименьшее из возможных число неравенств в описании многогранника Q. Отметим, что число гиперграней многогранника Q зачастую может быть значительно меньшим в сравнении с числом гиперграней P; этот феномен позволяет уменьшить сложность проблем линейного программирования, важных для многочисленных приложений[70].

Несмотря на серьезные усилия, прилагаемые[71] в последнее время к изучению верхних и нижних оценок на неотрицательный ранг матрицы, до недавнего времени оставался открытым вопрос о существовании какой-либо нетривиальной верхней оценки неотрицательного ранга в терминах классической ранговой функции. Легко видеть, что неотрицательный и классический ранги матрицы совпадают[15] друг с другом, если одна из этих функций не превосходит двух. Тем не менее, никакой верхней оценки неотрицательного ранга матрицы размера $m \times n$ (кроме тривиальной $\min\{m, n\}$) не было известно

[69] V. Kaibel, Extended Formulations in Combinatorial Optimization, *Optima*, **85** (2011) 2–7.

[70] S. Fiorini, T. Rothvoß, H. R. Tiwary, Extended formulations for polygons, *Disc. Comp. Geom.*, **48(3)** (2012) 1-11.

[71] N. Gillis, F. Glineur, On the Geometric Interpretation of the Nonnegative Rank, *Linear Algebra Appl.*, **437** (2012) 2685–2712.

даже в случае, когда классический ранг матрицы равен трем[52].

Проблема[52]. (8.2.1). *Фиксируем целое число $n \geqslant 3$. Существует ли матрица размера $n \times n$ классического ранга три, неотрицательный ранг которой равен n?*

В силу результата Ианнакакиса[72] гипотеза 8.2.1 равносильна существованию выпуклого n-угольника, сложность расширения которого равна n. Для $n \leqslant 5$ положительное решение проблемы 8.2.1 было получено ранее[71]. Также ранее[73] было отмечено, что любой выпуклый шестиугольник, координаты вершин которого алгебраически независимы, имеет сложность расширения, равную шести, и таким образом получено положительное решение проблемы 8.2.1 при $n = 6$. Для любого $n \geqslant 7$ эта проблема оставалась открытой.

Автором диссертации были разработаны методы комбинаторного анализа матриц полного неотрицательного ранга, которые привели в итоге к полному решению проблемы 8.2.1.

Теорема (8.2.17). *Если $n \geqslant 7$, то неотрицательный ранг матрицы ранга три размера $m \times n$ всегда меньше n. При $3 \leqslant k \leqslant 6$ существуют матрицы размера $k \times k$ классического ранга три, неотрицательного ранга k.*

Кроме того, разработанные методы позволили получить нетривиальную оценку неотрицательного ранга матрицы в терминах классического ранга, а также верхнюю оценку сложности расширения выпуклого многоугольника.

Теорема (8.2.16 и 8.2.18). *Неотрицательный ранг любой матрицы $A \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$ классического ранга три, равно как и сложность расширения любого выпуклого n-угольника, не превосходят $6(n+1)/7$.*

Иными словами, теорема 8.2.18 гарантирует описание любого выпуклого n-угольника с помощью $6(n+1)/7$ линейных неравенств. В разделе 8.3 исследования нижних оценок сложности расширения многогранников продолжаются с использованием тропических методов; результаты этого раздела позволяют получить примеры выпуклых многогранников с большими значениями сложности расширения.

В качестве **заключения** отметим, что в силу вышесказанного диссертация вносит фундаментальный вклад в развитие линейной алгебры, структурной теории колец и полуколец и тропической математики. Автором решены крупные математические проблемы и доказаны важные гипотезы, относящиеся к указанным областям науки. Еще раз отметим следующие результаты диссертации: решена проблема Уайлдинга, Джонсон и Камбитеса 2013 года о кольцах, которые допускают продолжение линейных функций с конечно порожденных подмодулей на свободный модуль; доказана гипотеза Джонсон

[72]M. Yannakakis, Expressing combinatorial optimization problems by linear programs, *Comput. System Sci.*, **43** (1991) 441–466.

[73]J. Gouveia, P. A. Parillo, R. R. Thomas. Lifts of convex sets and cone factorizations, *Mathematics of Operations Research*, **38.2** (2013) 248–264.

и Камбитеса 2011 года о подгруппах полугруппы тропических матриц; решены проблемы Бутковича 1994 года и Гобера 1997 года о вычислительной сложности ранга булевой матрицы; решена проблема Девелина, Сантоса и Штурмфельса 2005 года о геометрической характеризации ранга Капранова тропической матрицы; решена проблема Чан, Йенсена и Рубеи 2011 года о тропическом базисе идеала, порожденного минорами фиксированного порядка; построен контрпример к гипотезе Бисли и Лаффи 2009 года о связи неотрицательного ранга и спектра симметрической матрицы; решена проблема Картрайта и Чан 2012 года о комбинаторной характеризации симметрического ранга тропической матрицы; решена проблема Барвинка 1996 года о вычислительной сложности факторизации тропических матриц; решена проблема Девелина, Сантоса и Штурмфельса 2005 года и разработан быстрый алгоритм распознавания матриц факторизационного ранга три; доказана гипотеза Ли 2013 года о связи граничного и классического рангов вещественных матриц; решена проблема Бисли и Лаффи 2009 года и показано, что всякий выпуклый n-угольник является проекцией многогранника с $[6(n+1)/7]$ гранями.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору Гутерману Александру Эмилевичу за помощь в работе. Автор признателен всему коллективу кафедры высшей алгебры за создание доброжелательной творческой атмосферы, способствующей научной работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. Ya. Shitov, Tropical lower bounds for extended formulations, *Mathematical Programming*, **153(1)** (2015), 67–74.

2. Ya. Shitov, Mixtures of star trees and deficiency graphs, *European Journal of Combinatorics*, **44** (2015), 140–143.

3. Ya. Shitov, Bases of a free semimodule are small, *Linear Algebra and Its Applications*, **466** (2015), 38–40.

4. Ya. Shitov, Two concepts of singularity for matrices over semirings, *Linear and Multilinear Algebra*, **63(1)** (2015), 201–220.

5. Ya. Shitov, Nonnegative rank of a matrix with one negative eigenvalue, *Linear and Multilinear Algebra*, **63(2)** (2015), 221.

6. Ya. Shitov, Studying nonnegative factorizations with tools from linear algebra over a semiring, *Communications in Algebra*, **43** (2015), 4359–4366.

7. Ya. Shitov, On the max-min and tropical CP-rank conjectures, *Linear and Multilinear Algebra*, DOI 10.1080/03081087.2015.1032199, 2015.

8. Ya. Shitov, How many Boolean polynomials are irreducible?, *International Journal of Algebra and Computataion*, **24** (2014), 1183–1190.

9. Ya. Shitov, Sign patterns of rational matrices with large rank, *European Journal of Combinatorics*, **42** (2014), 107–111.

10. Ya. Shitov, Group rings that are exact, *Journal of Algebra*, **403** (2014), 179–184.

11. Ya. Shitov, Tropical semimodules of dimension two, *Алгебра и Анализ*, **26(2)** (2014), 224–236.

12. Ya. Shitov, The complexity of tropical matrix factorization, *Advances in Mathematics*, **254** (2014), 138–156.

13. Ya. Shitov, An upper bound for nonnegative rank, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **122** (2014), 126–132.

14. Ya. Shitov, Mixed subdivisions and ranks of tropical matrices, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **142** (2014), 15–19.

15. Ya. Shitov, Detecting matrices of combinatorial rank three, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **126** (2014), 166–176.

16. Я. Шитов, О булевых матрицах полного факторизационного ранга, *Математический сборник*, **204(11)** (2013), 151–160.

17. Ya. Shitov, On the complexity of Boolean matrix ranks, *Linear Algebra and Its Applications*, **439** (2013), 2500–2502.

18. Ya. Shitov, When do the r-by-r minors of a matrix form a tropical basis?, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **120** (2013), 1166–1201.

19. Ya. Shitov, Tropical matrices and group representations, *Journal of Algebra*, **370** (2012), 1–4.

20. Ya. Shitov, On tropical matrices of small factor rank, *Linear Algebra and its Applications*, **437** (2012), 2727–2732.

21. A.E. Guterman, Ya.N. Shitov, Tropical patterns of matrices and the Gondran-Minoux rank function, *Linear Algebra and its Applications*, **437** (2012), 1793–1811. (Главы 2 и 3 принадлежат Шитову Я.Н.)

22. Я. Шитов, О матрицах с различными тропическим рангом и рангом Капранова, *Математические заметки*, **92** (2012), 316–320.

23. Ya. Shitov, On the Kapranov ranks of tropical matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **436** (2012), 3247–3253.

24. Я. Шитов, О совпадении факторизационного ранга и ранга Гондрана–Мину матриц над полукольцом, *Фундаментальная и прикладная математика*, **17(6)** (2011/2012), 223–232.

25. Я. Шитов, Пример матрицы размера 6x6 с различными тропическим рангом и рангом Капранова, *Вестник Московского Университета, Серия 1*, **66(5)** (2011), 58–61.

26. Ya. Shitov, Inequalities for Gondran-Minoux rank and idempotent semirings, *Linear Algebra and its Applications*, **435** (2011), 1769–1777.

27. Я. Шитов, Минимальный пример матрицы, различающей GM- и d-ранги в макс-алгебрах, *Фундаментальная и прикладная математика*, **14(4)** (2008), 231–268.