ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова"
Механико-математический факультет

На правах рукописи

ШИТОВ Ярослав Николаевич

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА НАД ПОЛУКОЛЬЦАМИ

Специальность 01.01.06: математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант —
доктор физико-математических наук,
профессор А. Э. Гутерман

Москва, 2015 г.

Оглавление

Введение **4**

1 Основные понятия **35**
1.1 Полукольца и линейная зависимость 36
1.2 Ранг матрицы 43
1.3 Тропическая линейная алгебра 49

2 Линейная алгебра и структура полуколец **59**
2.1 Полумодули и линейные отображения 59
2.2 Факторизация и ранг матрицы 67
2.3 О рангах произведения и суммы матриц 75

3 Полугруппа матриц над полукольцом **89**
3.1 Отношения Грина и ранговые функции 89
3.2 Подгруппы полугруппы матриц 95
3.3 Тождества в полугруппе матриц 98

4 О ранговых функциях булевых матриц **107**
4.1 Вычисление ранговых функций 108
4.2 О факторизации булевых матриц 110
4.3 Взаимное поведение ранговых функций 118

5 Ранговые функции тропических матриц **134**
5.1 Шаблон тропической матрицы 135
5.2 О ранге Гондрана–Мину матрицы 143
5.3 Приложения метода шаблонов 152

6 Когда миноры порядка r образуют тропический базис? **158**
6.1 Предварительные результаты 159
6.2 Миноры порядка 4 матрицы размера $6 \times n$ 165
6.3 Доказательство основного результата 208

7 Факторизация тропических матриц **211**
7.1 Предварительные сведения 211
7.2 Факторизация и ранги подматриц 215
7.3 Распознавание матриц ранга три 224
7.4 Вычислительная сложность факторизации 251

8 Факторизация неотрицательных матриц **269**
8.1 Неотрицательный ранг 269
8.2 Факторизация матриц ранга три 272
8.3 Нижние оценки сложности расширенных представлений 281

Заключение **288**

Введение

Полукольцом называется множество с заданными на нем операциями сложения и умножения, которое является абелевым моноидом по сложению и полугруппой по умножению, а также удовлетворяет свойству дистрибутивности. Иными словами, основное отличие полуколец от колец проявляется в том, что не всякий элемент полукольца может быть обратим по сложению.

На первый взгляд определение полукольца может показаться чрезмерно общим и охватывающим слишком большой класс структур. Тем не менее, это не совсем так: среди алгебраических структур, естественным образом возникающих в результате исследования различных явлений окружающего мира, многие объекты обладают структурой полукольца, но на них нельзя задать структуру кольца или тем более поля. Например, одним из первых объектов, с которым сталкивается начинающий изучать математику, является множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$; это множество является полукольцом относительно заданных естественным образом операций сложения и умножения, но такое задание не обеспечивает структуры кольца, — ведь положительные целые числа оказываются необратимыми по сложению.

Другими важнейшими примерами числовых полуколец являются целые, рациональные, вещественные и комплексные числа; более того, любое кольцо в силу определения также является и полукольцом. Наиболее простые примеры полуколец, не являющихся кольцами, дают числовые множества: например, приведенное выше множество натуральных чисел, также как и множество неотрицательных вещественных чисел, являются полукольцами относительно обычных сложения и умножения. В различных приложениях возникает необходимость рассмотрения полуколец, не связанных с числовыми множествами: к ним относятся, например, дистрибутивные решетки, булевы алгебры и алгебры Клини. Отметим, что в качестве примера полукольца, не являющегося числовым множеством, можно привести множество всех идеалов заданного кольца: на этом множестве корректно определены операции суммы и произведения идеалов, но не существует, вообще говоря, возможности вычитать идеалы друг из друга или делить один из них на другой.

Исторический обзор

Как указано в монографии [63], впервые понятие полукольца неявно использовалось в работе Дедекинда [41] как раз для изучения множества идеалов числовых колец; с теми же целями изучения алгебраических структур полукольца использовались в работах Нетер [111], Крулля [96] и других математиков начала XX века. Непосредственно понятие полукольца было впервые введено, вероятно, Вандивером в работе [134], посвященной проблемам, связанным с аксиоматизацией натуральных чисел. Впоследствии на протяжении многих лет полукольца изучались многими математиками с различных точек зрения и в связи с различными теоретическими и прикладными задачами.

Развитие методов линейной алгебры над полукольцами началось во второй половине XX века, и одной из первых работ на эту тему была статья Воробьева [138], посвященная исследованию неотрицательных матриц и описанию возможных их приложений к задачам оптимизации. Дальнейшее развитие линейной алгебры над полукольцами происходило в работах Канингем-Грина [37], Симона [129], Гондрана и Мину [67] и многих других авторов. Наибольшее внимание в этих работах уделяется разработке методов линейной алгебры над отдельно взятыми полукольцами и описанию приложений построенных теорий: работа [37] посвящена построению и описанию приложений линейно-алгебраической теории для минимаксных алгебр. В работе [129] исследуются линейно-алгебраические свойства полуколец чисел с нестандартными операциями: в качестве сложения берется операция взятия минимума из двух чисел, а в качестве умножения — обычная операция суммы. Теория таких полуколец вызывает большой интерес в настоящее время, и они часто называются *тропическими полукольцами* в знак признания заслуг Имре Симона и других математиков бразильской школы [118]. В работах Гондрана и Мину [67, 68] строится обобщение теорий минимаксных алгебр и тропических полуколец, и они изучаются с точки зрения более общих структур — идемпотентных полуколец и диоидов. Не остались в стороне и булевы полукольца и структуры нечеткой логики — разработке методов линейной алгебры над ними посвящены работы Кима и Рауша [84] и некоторые другие. Построение общей линейно-алгебраической теории над полукольцами началось, вероятно, в 80-е годы XX века, и в этом отношении стоит отметить работы Бисли и Пуллмана [14, 15]. Заметную роль в развитии методов полукольцевой линейной алгебры играет теория неотрицательных матриц. В 1979 году была опубликована монография Бермана и Племмонса [16] по этой теме; другим заметным событием стал выход в свет в 1993 году статьи Коэна и Ротблума [33], в которой были описаны многочисленные приложения проблем, связанных с неотрицательными матрицами. В последнее десятилетие наблюдается особен-

но бурный рост активности исследования проблем теории неотрицательных матриц [54, 55, 53, 58, 135], связанный во многом с задачей неотрицательной факторизации. Внимание к этой задаче привлечено благодаря многочисленным приложениям в анализе данных, обработке информации, комбинаторной оптимизации, дискретной геометрии и многих других областях, — особого внимания заслуживает публикация Ли и Сеунгом [99] в 1999 году в журнале *Nature* статьи об обработке изображений с помощью алгоритмов факторизации неотрицательных матриц.

Приложения линейной алгебры над полукольцами

В последнее время в прикладной математике все более значительной становится роль методов полукольцевой линейной алгебры, что становится возможным не в последнюю очередь благодаря развитию тропической математики и теории неотрицательных матриц. Более подробно мы остановимся на описании некоторых приложений этих теорий, но перед этим укажем многочисленные приложения методов линейной алгебры над различными полукольцами.

Отметим сначала некоторые приложения методов линейной алгебры над различными идемпотентными полукольцами и диоидами [68]. Эти методы находят применение при изучении дискретно-временных динамических систем [67] и исследовании проблем оптимизации. В частности, алгоритмы вычисления произведения матриц над полукольцом $([0,1], \min, \max)$ играют важную роль в проблемах сетевой оптимизации; отметим также, что указанное полукольцо играет фундаментальную роль в нечеткой логике и теории нечетких множеств [62]. Более широкий класс полуколец рассматривается при изучении *идемпотентного анализа*, раздела теории полуколец, возникшего в связи с проблемами квантовой механики [102, 107], теории дискретных динамических систем [94] и некоторыми другими приложениями. В идемпотентном анализе изучаются обобщения различных понятий классической линейной алгебры, таких как линейные операторы и собственные векторы [92]; разработанные к настоящему времени методы также находят применение в оптимизации и теории вычислений [88]. Еще более широкий класс *антинегативных полуколец* в настоящее время тоже подвергается изучению с точки зрения линейной алгебры в связи с некоторыми приложениями [126]; заметным направлением современных исследований также является построение линейно-алгебраической теории над полукольцами самого общего вида [51, 142].

Чтобы рассказать о приложениях тропической линейной алгебры, напомним, что ее основным объектом является *тропическое полукольцо*, то есть, множество вещественных чисел, пополненное бесконечно большим положи-

тельным элементом ∞. Операция тропического сложения $\oplus$ ставит в соответствие паре элементов минимальный из них, а операция тропического умножения $\otimes$ — их обычную сумму. Появление методов тропической математики было обусловлено не в последнюю очередь приложениями их в теории оптимизации: тропический подход в этой теории основан во многом на том, что многие важные задачи оптимизации, не являющиеся линейными в классическом смысле, принимают линейный вид, если формализовать их с использованием тропической нотации. Иными словами, они сводятся к линейным задачам, таким как решение системы линейных уравнений или вычисление ранга для матриц над тропическим полукольцом.

Чтобы продемонстрировать такой подход в теории оптимизации, рассмотрим следующую проблему. Дано множество населенных пунктов $(1), \ldots, (n)$, связанных железнодорожной сетью и тропическая матрица A размера $n \times n$, характеризующая стоимость проезда между этими пунктами. А именно, элемент A_{ij} полагается равным стоимости проезда на прямом поезде от станции (i) до станции (j), если такой поезд существует, и полагается равным ∞ в противном случае. Рассмотрим проблему поиска оптимального (то есть, требующего наименьших затрат) пути между станциями p и q. Если ограничиться рассмотрением маршрутов, не требующих пересадок, то, конечно, стоимость маршрута между этими станциями окажется равной A_{pq}. Но что делать в тех случаях, когда прямое сообщение между станциями (p) и (q) отсутствует или стоимость соответствующего путешествия неоправданно завышена? Естественно ожидать, что пассажир, столкнувшейся с такой проблемой, составит сложный маршрут, содержащий пересадку в станции (t), и в этом случае общая стоимость его путешествия составит $A_{pt} + A_{tq}$. Поскольку интерес пассажира состоит в минимизации расхода, станция (t) будет выбрана таким образом, чтобы минимизировать значение $A_{pt}+A_{tq}$. Таким образом, стоимость маршрута между станциями (p) и (q), содержащего одну пересадку, оказывается равной $\min_{t=1}^{n}\{A_{pt} + A_{tq}\}$, или же, в тропической нотации, $\bigoplus_{t=1}^{n}(A_{pt} \otimes A_{tq})$. Иными словами, стоимость этого маршрута оказывается равным $[A \otimes A]_{pq}$, то есть, элементу, стоящему в p-й строке и q-м столбце результата $A^{\otimes 2}$ тропического умножения матрицы A на саму себя.

Приведенные рассуждения не только проявляют связь задач теории оптимизации и линейной алгебры над тропическим полукольцом, но и указывают на важность задачи вычисления произведения тропических матриц. В настоящее время эта задача вызывает без преувеличения огромный интерес в передовых исследованиях прикладной математики, — отметим только вышедшие за последние три года работы [29, 30, 72] и опубликованную в журнале *Journal of the ACM* статью Цвика [143]. Среди результатов, полученных в этой области, отметим алгоритм, построенный в работе [72] и позволяющий

осуществлять тропическое умножение двух матриц размера $n \times n$ за время $O(n^3 \log\log n / \log^2 n)$, тогда как наивный алгоритм для такого вычисления требует $O(n^3)$ временных ресурсов.

Отметим еще одно приложение тропической линейной алгебры к теории дискретно-временных динамических систем, проиллюстрировав его на том же примере железнодорожной сети. Предположим теперь, что нас интересует составление расписания движения поездов, причем заданная тропическая матрица B размера $n \times n$ характеризует время движения поездов между станциями. А именно, элемент B_{ij} полагается равным времени движения поезда от станции (i) до станции (j) (и равным ∞, если прямое сообщение между этими станциями отсутствует). Мы предполагаем, что число поездов в сети равно числу пар станций, между которыми установлено прямое сообщение; требуется также, чтобы составленное расписание было удобным для пассажиров, то есть, чтобы от каждой станции все поезда отправлялись одновременно и с одинаковыми (настолько малыми, насколько возможно) перерывами. Оказывается, что эти перерывы оказываются одинаковыми для всех станций [74] и могут быть описаны как тропическое собственное значение матрицы B. Множественные публикации последнего времени на эту тему также показывают важную роль спектральной теории тропических матриц в изучении дискретно-временных динамических систем [26, 32, 42]. В связи с приложениями в теории оптимизации вызывает интерес исследование экстремальных свойств тропических собственных значений, как показывает, например, недавняя работа Кривулина [95]. Методы спектральной теории также играют важную роль при моделировании так называемых систем массового обслуживания [5, 60, 91].

Тропический подход к алгебраической геометрии основан на понимании тропического полукольца как образа поля с вещественным неархимедовым нормированием [45]. Говорят, что функция val элементов поля $\mathcal{F}$ со значениями из тропического полукольца задает такое нормирование, если она принимает конечное значение на ненулевых элементах поля и только на них и удовлетворяет условиям $val(xy) = val(x) + val(y)$ и $val(x + y) \geqslant \min\{val(x), val(y)\}$ для всех элементов x и y поля $\mathcal{F}$. Непосредственные примеры полей с неархимедовыми нормированиями могут быть построены с помощью конструкции *колец Мальцева–Неймана*, исследование которой было проведено в работе [119]. Оказывается, что изучение алгебраической геометрии над полем $\mathcal{F}$ позволяет не только ввести тропические аналоги понятий линейного пространства, поверхности, многообразия, стандартного базиса и заложить основы тропической алгебраической геометрии [123], но и представляет собой полезный инструмент для исследований в классической алгебраической геометрии. Использование методов тропической математики привело

к решению нескольких важных проблем в этой области [35, 109].

Опишем еще одно приложение методов линейной алгебры, опять таки связанное с понятием тропического произведения матриц. Снова рассмотрим множество населенных пунктов $(1), \ldots, (n)$ и заданную матрицей A метрику на этом множестве. Классическая задача комбинаторной оптимизации — *задача коммивояжера* — требует найти оптимальный путь, выходящий и заканчивающийся в одном из этих городов и проходящий через каждый из них ровно по одному разу. Задача коммивояжера является одним из широко известных примеров NP-трудных задач, то есть, в частности, пока не разработано ни одного быстрого алгоритма ее решения. Предположим теперь, что кроме населенных пунктов также имеются несколько складов $[1], \ldots, [k]$, и обозначим стоимость путешествия от города (i) до склада $[t]$ через B_{it}, а путешествия от склада $[t]$ до города (j) — через C_{tj}. В этом случае стоимость путешествия из города (i) в город (j) с посещением склада $[t]$ будет равна $B_{it} + C_{tj}$. Предположим, что перед тем, как войти в каждый новый город, коммивояжеру действительно требуется посетить один из складов для обновления ассортимента товара; сформулированная таким образом задача называется *задачей коммивояжера со складами*. В этом случае стоимость оптимального пути из города (i) в город (j) окажется равной $\min_{t=1}^{n}\{B_{it}+C_{tj}\}$, и мы приходим к заключению, что матрица A в новой задаче равна тропическому произведению матриц $B \otimes C$. Оказывается, что для задачи коммивояжера с k складами существуют [8] быстрые (то есть, полиномиальные по времени) алгоритмы решения при всех фиксированных k, и этот факт обусловливает интерес к задаче тропической *факторизации матриц*. А именно, задача поиска матриц $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$, тропическое произведение $B \otimes C$ которых равно заданной матрице A, обсуждалась в работах [7, 28, 45, 44, 76], и были сформулированы несколько интересных проблем, связанных с этой задачей.

Рассмотрим задачу факторизации матриц с более общей точки зрения, то есть, предположим, что матрицы A, B и C в ее формулировке не являются обязательно тропическими и состоят из элементов произвольного полукольца. Минимальное k, при котором найдутся матрица B размера $m \times k$ и матрица C размера $k \times n$, удовлетворяющие условию $A = B \otimes C$ для заданной матрицы A, назовем *факторизационным рангом* матрицы A. Отметим, что в силу базового результата классической линейной алгебры обычный ранг матрицы A над полем равен ее факторизационному рангу. Таким образом, задача факторизации является естественным обобщением классической проблемы вычисления ранга матрицы на тропический случай. Рассмотрим теперь факторизацию матриц над *булевым полукольцом*, то есть, множеством $\{0, 1\}$, операции на котором заданы обычным образом, за исключением условия $1 \oplus 1 = 1$. Понятие факторизационного ранга булевой матрицы оказывается полезным

для современных исследований в теории сложности, поскольку дает важную нижнюю оценку сложности информационных протоколов, индуцированных этой матрицей [46, 53]. Также важным для приложений является тот факт, что факторизационный ранг матрицы смежностей двудольного графа G равен [57] *двудольной размерности* графа G, то есть, минимальной мощности покрытия G полными двудольными подграфами [10, 71]. Двудольная размерность графа в свою очередь находит применение в решении проблем компьютерной безопасности [128] и задач вычислительной математики [48].

Особое внимание задача факторизации привлекает в случае матриц над полукольцом $\mathbb{R}_+$ неотрицательных чисел. Эта задача находит приложения в многочисленных разделах науки, таких как анализ данных, статистика, теория сложности, квантовая механика и многие другие [33]. Чтобы продемонстрировать идеи применения метода факторизации неотрицательных матриц, мы приведем пример из области анализа данных. Рассмотрим задачу построения алгоритма получения вычислительной машиной высококачественной информации из базы текстовых документов, написанных на естественном языке. На первом шаге мы выделяем множество ключевых слов, встречающихся в этих документах и составляем матрицу "*термин-документ*", индексами строк которой являются ключевые слова, а индексами столбцов — отдельные документы заданной базы; элемент этой матрицы, стоящий в строке с индексом i и столбце с индексом j, зададим как частоту встречания термина i в документе j. Матрица "термин-документ" является неотрицательной, и она может быть записана в виде произведения неотрицательных матриц B и C, причем число столбцов матрицы B может оказаться значительно меньше числа ее строк, то есть, числа ключевых слов. Указанные матрицы B и C называются, соответственно, матрицей "*термин-признак*" и матрицей "*признак-документ*" и позволяют вычислительной машине получать полезную информацию, удобную для хранения и дальнейшей обработки. В частности, множество признаков может быть теперь описано с помощью матрицы "термин-признак", и в этом случае матрица "признак-документ" будет описывать *кластеры данных* исходной базы, то есть наборы близких по содержанию документов этой базы. На сходной идее основаны и другие многочисленные приложения задачи факторизации матриц, в том числе методы распознавания речи [125], обработки изображений [99], решения задач аналитической химии [113], исследования топологии компьютерных сетей [106] и многие другие. Кроме того, существуют и некоторые другие идеи использования факторизации неотрицательных матриц в различных приложениях, в частности, в комбинаторной оптимизации [141], дискретной геометрии [53], статистике [33] и других разделах науки.

Цель работы

Развитие линейно-алгебраической теории над полукольцами; разработка методов изучения структуры полуколец и различных алгебраических инвариантов матриц; применение полученных результатов к решению проблем линейной алгебры, дискретной геометрии, тропической математики, комбинаторной оптимизации, теории полугрупп и теории полуколец.

Научная новизна

Полученные в работе результаты являются новыми. Следующие результаты работы являются основными и выносятся на защиту.

- Разработаны методы изучения структуры полуколец и полугрупп матриц над ними, благодаря которым были получены следующие результаты:
  - решена проблема Уайлдинга, Джонсон и Камбитеса [140] о кольцах, которые допускают продолжение линейных функций с конечно порожденных подмодулей на свободный модуль;
  - решена проблема Тан [132] о мощности базиса свободного полумодуля;
  - доказано, что всякая подгруппа полугруппы тропических матриц порядка n содержит нормальную абелеву подгруппу индекса, не большего $n!$, что доказывает гипотезу, сформулированную в работе [80];
  - получена характеризация матричных полугрупп, ранговые функции на которых монотонны относительно порядков Грина; в частности, доказана монотонность ранговых функций тропических матриц.
- Построена теория, связывающая понятия линейной алгебры над полукольцами с важными результатами дискретной математики, что позволило получить следующие результаты о ранговых функциях матриц:
  - разработать метод шаблонов, основанный на изучении комбинаторной структуры матриц методами булевой линейной алгебры; как следствие этого метода получен быстрый алгоритм распознавания тропических матриц фиксированного ранга Гондрана–Мину и тем самым дано решение проблемы Бутковича, сформулированной в [25];
  - в качестве приложения метода шаблонов получить ответ на вопрос, заданный в 2005 году Девелином, Сантосом и Штурмфельсом [45]: показано, что факторизационный ранг и ранг Капранова не допускают характеризации в терминах смешанного разбиения симплекса, индуцируемого тропической матрицей;

– разработать методы исследования вычислительной сложности ранговых функций булевых и тропических матриц; доказать, что задачи вычисления следующих функций являются NP-трудными: тропического ранга (это дает решение проблемы Бутковича, сформулированной в 1994 году в статье [22]), детерминантного ранга (это дает решение проблемы, которая была поставлена в 1996 году Де Шуттером [42] и в 1997 году Гобером [60] и также оставалась открытой) и изоляционного числа матрицы (этот результат был содержанием гипотезы Фризен и Тайса, сформулированной в работе [58]);

– доказать гипотезу о связи граничного и классического рангов вещественных матриц, сформулированную Ли и соавторами в работе [100];

– получить достаточные условия для существования факторизации булевых матриц в терминах числа нулевых элементов; как приложение этого результата получена оценка размера матрицы полного факторизационного ранга в терминах других ранговых функций.

- Разработаны методы комбинаторного анализа инвариантов тропической линейной алгебры, что позволило автору диссертации получить следующие результаты из области тропической математики:

  – решить проблему о тропическом базисе идеала, порожденного минорами фиксированного порядка матрицы переменных; эта проблема была сформулирована Чан, Йенсеном и Рубеи в работе [31];

  – показать, что симметрический ранг тропической матрицы не допускает характеризации в терминах так называемого графа различий этой матрицы; этот результат позволил решить проблему Картрайта и Чан, сформулированную в работе [27];

  – исследовать взаимное поведение ранговых функций тропических матриц; показано, что функции тропического и детерминантного ранга и рангов Гондрана–Мину остаются ограниченными, если ограничена хотя бы одна из них; приведены примеры тропических матриц минимального размера с различными тропическим рангом и рангом Капранова, а также с различными строчным и столбцовым рангами Гондрана–Мину; последний из этих результатов дает ответ на вопрос Акян, Гобера и Гутермана [1].

- Получены важные результаты, относящиеся к проблеме факторизации матриц над полукольцами и ее приложениям:

– решена проблема, поставленная Барвинком в 1996 году в статье [7]: показано, что задача распознавания тропических матриц, допускающих представление в виде произведения матриц размеров $m \times k$ и $k \times n$, является NP-трудной при ограниченном k;

– получено решение проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса [45]: разработан полиномиальный по времени алгоритм распознавания матриц факторизационного ранга три;

– построен контрпример к гипотезе Бисли и Лаффи [12]: приведен пример серии неотрицательных симметрических матриц ранга три, имеющих ровно по одному отрицательному собственному значению, не все из которых допускают представление в виде произведения неотрицательных матриц размеров $n \times k$ и $k \times n$ при фиксированном k;

– получена верхняя оценка неотрицательного ранга матрицы в терминах ее классического ранга; в качестве приложения этого результата показано, что всякий выпуклый n-угольник допускает описание с помощью не более, чем $6(n+1)/7$ линейных неравенств с точностью до линейной проекции.

Основные методы исследования

Наряду с классическими методами и результатами линейной алгебры и теории полуколец используются методы комбинаторной алгебры, ориентированные на исследование различных матричных инвариантов и развитые автором. Особую роль играет метод сведения вычислительных задач линейной алгебры к проблемам теории графов, разработанный автором; этот метод позволил получить полезную информацию о взаимном поведении различных матричных инвариантов, а также доказать важные результаты, связанные со сложностью вычисления этих инвариантов. Среди новых методов, разработанных автором, также следует отметить метод шаблонов, основанный на изучении комбинаторной структуры матриц методами булевой линейной алгебры; этот метод позволил решить ряд проблем, связанных с исследованием взаимного поведения и сложности вычисления некоторых линейно-алгебраических и геометрических инвариантов.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для исследования проблем и решения задач линейной алгебры, дискретной геометрии, тропической математики, комбинаторной оптимизации, теории полугрупп и теории полуколец.

Значение полученных соискателем результатов для практики подтверждается тем, что результаты исследований, приведенные в диссертации, используются в учебных пособиях, монографиях и научных статьях других авторов. В частности, результаты соискателя были использованы Б. Штурмфельсом при чтении курса прикладной алгебраической геометрии в Корейском Специализированном институте науки и технологий (KAIST) в 2014 году; в учебнике по тропической геометрии [105] Д. Маклаган и Б. Штурмфельса теорема 1.3.35 из текста диссертации упомянута как "теорема Шитова".

Апробация результатов

Результаты диссертации в период с 2007 по 2015 год неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, на семинарах "Кольца и модули" и "Теория матриц" механико-математического факультета МГУ. Также результаты докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- XVII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", МГУ, Москва, 12–15 апреля 2010 года;
- международный алгебраический симпозиум, посвященный 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалева, МГУ, Москва, 15–18 ноября 2010 года;
- XVIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", МГУ, Москва, 11–15 апреля 2011 года;
- международная конференция по матричным методам в математике и приложениях "MMMA-2011", Институт вычислительной математики РАН, Москва, 22–25 июня 2011 года;
- научная конференция "Ломоносовские чтения", МГУ, Москва, 14 ноября 2011 года;
- семинар "Гомологические и гомотопические методы в геометрии", НИУ ВШЭ, Москва, 29 февраля 2012;
- XIX международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", МГУ, Москва, 9–13 апреля 2012 года;

- международная конференция "Communication Complexity, Linear Optimization and Lower Bounds for Nonnegative Ranks of Matrices", Schloss Dagstuhl, Вадерн, Германия, 17–22 февраля 2013 года;
- научная конференция "Ломоносовские чтения", МГУ, Москва, 15 апреля 2013 года;
- международная конференция "Optimization and Algebraic Geometry", Национальный институт математических наук, Тэджон, Корея, 16–20 июня 2014 года;
- международная конференция "Limitations of convex programming: Lower bounds on extended formulations and factorization ranks", Schloss Dagstuhl, Вадерн, Германия, 15–20 февраля 2015 года;
- международный научный семинар "Large Structures Seminar", Университет Аалто, Хельсинки, Финляндия, 22 июня 2015 года;
- международная конференция "SIAM Conference on Applied Algebraic Geometry", Национальный институт математических наук, Тэджон, Корея, 3–7 августа 2015 года;
- международная конференция по матричным методам в математике и приложениях "MMMA-2015", SkolTech, Сколково, Москва, 24–28 августа 2015 года.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, восьми глав, разбитых на разделы, списка литературы и списка публикаций автора по теме диссертации. Общий объем работы составляет 302 страницы. Общий список литературы включает 170 наименований.

Публикации

Список публикаций автора по теме диссертации составляет 27 наименований; все работы из этого списка опубликованы в журналах, которые рекомендованы ВАК РФ и индексируются в базе цитирования *Web of Science*. Тезисы докладов в список публикаций автора не входят. Статья [164] написана в соавторстве, и из них в текст этой работы включены только результаты автора диссертации.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору Гутерману Александру Эмилевичу за помощь в работе. Автор признателен всему коллективу кафедры высшей алгебры за создание доброжелательной творческой атмосферы, способствующей научной работе.

Краткое содержание работы

Глава 1 посвящена обсуждению понятий, которым посвящена диссертационная работа. Мы приводим базовые понятия теории полуколец и излагаем основы линейной алгебры с точки зрения этой теории. Оказывается, что такие фундаментальные понятия, как размерность пространства, линейная зависимость векторов и ранг матрицы, допускают различные трактовки в полукольцевой линейной алгебре; в самом деле, для различных приложений оказывается полезным рассматривать различные понятия размерности и линейной зависимости, а также различные ранговые функции матриц [1, 45]. В главе приведены определения этих понятий и изучены их основные свойства. Напомним, что *полукольцом* называется множество $\mathcal{S}$ с операциями $\oplus$ и $\otimes$, называемыми *сложением* и *умножением*, и выделенными элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, называемыми нулем и единицей, которое является абелевым моноидом по сложению и полугруппой с единицей по умножению, а также удовлетворяет свойству дистрибутивности, причем любой элемент x полукольца $\mathcal{S}$ должен удовлетворять условию $\mathbf{0} \otimes x = x \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Отметим, что часто бывает полезным рассматривать несколько более общие, но похожие на полукольца алгебраические структуры [136]. Полукольцо называется *коммутативным*, если умножение в нем коммутативно, и в нашей работе рассматриваются только такие полукольца.

В разделе 1.1 обсуждаются классы полуколец, изучению которых посвящена значительная часть работы. Полукольцо $\mathcal{S}$ называется *идемпотентным по сложению* или просто *идемпотентным*, если для любого элемента $a \in \mathcal{S}$ верно равенство $a \oplus a = a$. Отметим, что иногда бывает полезно рассматривать и полукольца, идемпотентные по умножению [137]. Полукольцо называется *селективным*, если условие $a \oplus b \in \{a, b\}$ выполнено для любых элементов полукольца. Идемпотентное полукольцо $\mathcal{S}$ называется *квазиселективным справа*, если для любых элементов $a, b \in \mathcal{S}$ найдется элемент $c \in \mathcal{S}$, отличный от нуля, для которого выполнено условие $(a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \in \{a \otimes c, b \otimes c\}$. В различных приложениях важную роль играют полукольцо неотрицательных чисел $\mathbb{R}_+$ с обычными операциями сло-

жения и умножения, а также так называемое *тропическое полукольцо*, то есть, множество $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ с бинарными операциями минимума и суммы чисел. Очень полезным примером является также бинарное булево полукольцо, его можно воспринимать как множество $\{0, 1\}$, операции на котором заданы обычным образом, за исключением условия $1 + 1 = 1$.

В разделе 1.2 обсуждаются различные способы определения понятий линейной зависимости, размерности и ранга матрицы. Как показывают приведенные примеры, наиболее естественным понятием линейной зависимости в полукольцевой алгебре представляется *зависимость в смысле Гондрана–Мину*: векторы $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{S}^m$ называются зависимыми, если для некоторых значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, отличных от нуля, и множеств $I, J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнены условия $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J \neq \emptyset$ и $\bigoplus_{i \in I} \lambda_i \otimes a_i = \bigoplus_{j \in J} \lambda_j \otimes a_j$. *Рангом Гондрана–Мину (строчным)* матрицы называется максимальная мощность линейно независимой системы строк.

Среди других ранговых функций, находящих применения в исследованиях различных проблем, следует также отметить функции, основанные на понятии вырожденности матрицы. Квадратная матрица $A \in \mathcal{S}^{n \times n}$ называется *тропически вырожденной*, если для некоторого подмножества $\mathcal{I}$ симметрической группы $\mathcal{S}_n$ множества $\{1, \ldots, n\}$ выполнено условие $\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{I}} A_{1,\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes A_{n,\sigma(n)} = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{I}} A_{1,\tau(1)} \otimes b_{2,\tau(2)} \otimes A_{n,\tau(n)}$. Тропически вырожденная матрица называется также *d-вырожденной*, если в определении в качестве множества $\mathcal{I}$ можно взять знакопеременную группу множества $\{1, \ldots, n\}$. *Тропическим* и *детерминантным рангами* матрицы называются, соответственно, размеры ее наибольших тропически невырожденной и d-невырожденной подматриц. Также приведем понятие *факторизационного ранга* матрицы A над полукольцом $\mathcal{S}$: он равен наименьшему k, при котором существуют матрицы $B \in \mathcal{S}^{m \times k}$ и $C \in \mathcal{S}^{k \times n}$, удовлетворяющие условию $B \otimes C = A$. Приведены примеры, иллюстрирующие основные свойства каждой из рассматриваемых функций для матриц над разными полукольцами и их взаимное поведение.

В разделе 1.3 мы приводим и обсуждаем основные понятия тропической геометрии, которые являются обобщениями классических понятий многообразия, поверхности, идеала и стандартного базиса на тропический случай. В качестве основы для построения тропической геометрии, следуя работам [19, 31, 45], выбрано кольцо Мальцева–Неймана над группой вещественных чисел. Иными словами, мы определяем поле $\mathbf{H}_{\mathbb{F}}$ как множество формальных сумм вида $a(t) = \sum_{e \in \mathbb{R}} a_e t^e$, где t — переменная, *коэффициенты* $\{a_e\}$ принадлежат *базовому* полю $\mathbb{F}$, а *носитель* $E(a) = \{e \in \mathbb{R} : a_e \neq 0\}$ является вполне упорядоченным подмножеством множества $\mathbb{R}$. *Степенью* ненулевой суммы $a \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}$ называется показатель степени ее *главного члена*, то есть, $\deg a = \min E(a)$; степень нулевой суммы из $\mathbf{H}_{\mathbb{F}}$ полагается равной ∞. В крат-

ком изложении содержания главы 1 мы не будем давать полных определений понятий тропического многообразия и тропического базиса; мы остановимся на определении ранговой функции, возникающей в связи с различными геометрическими проблемами. *Рангом Капранова* тропической матрицы B *относительно базового поля* $\mathbb{F}$ называется наименьший из рангов матриц A над полем $\mathbb{F}$, удовлетворяющих условию $B = \deg A$.

Глава 2 посвящена обсуждению поведения основных объектов линейной алгебры над полукольцами в самом общем случае. Мы иллюстрируем основные понятия линейной алгебры над полукольцами, введенные в первой главе, и применяем понятия линейной зависимости, размерности и ранга к изучению свойств различных полуколец. Несмотря на отсутствие столь же богатого описания структуры полуколец, как то, которое известно для колец, новая интересная информация может быть получена с помощью подхода, основанного на точке зрения линейной алгебры. В некоторых случаях удается полностью описать классы полуколец, удовлетворяющие тем или иным свойствам, характеризующим линейную алгебру над ними, и изучение этих новых классов может оказаться интересным и с точки зрения структурной теории [169].

В разделе 2.1 исследуются базисы и линейные отображения полумодулей. В первой части раздела доказывается гипотеза о мощности базиса свободного полумодуля, поставленная Тан в работе [132]. Получен следующий результат: если наибольшая мощность базиса коммутативного полукольца R, рассматриваемого как модуль над собой, конечна и равна q, то для базисов полумодуля R^n возможны мощности $n, n+1, \ldots, qn$ и только они.

Во второй части раздела 2.1 приводится решение проблемы Вайлдинга, Джонсон и Камбитеса о *локально самоинъективных* кольцах. Кольцо R называется *локально самоинъективным слева*, если для любого конечнопорожденного левого подмодуля $M \subset R^n$ и любой R-линейной функции $\varphi : M \to R$ найдется R-линейная функция $\psi : R^n \to R$, удовлетворяющая условию $\varphi(x) = \psi(x)$ для любого $x \in S$. В работе [140] было показано, что любое самоинъективное кольцо также является локально самоинъективным, и был поставлен вопрос о том, верно ли обратное. Ответ на этот вопрос оказывается положительным, и он дается в разделе 2.1. Также мы доказываем, что групповое кольцо $R[G]$ является локально самоинъективным слева в том и только том случае, когда кольцо R локально самоинъективно слева и группа G локально конечна.

В разделе 2.2 обсуждается задача факторизации матриц над различными полукольцами. Эта задача восходит к базовому результату классической линейной алгебры: ранг матрицы A с элементами из некоторого поля равен наименьшему числу k, для которого найдутся матрица B размера $m \times k$

и матрица C размера $k \times n$, удовлетворяющие условию $A = BC$. Целью раздела 2.1 является описание полуколец, для матриц над которыми верна аналогичная характеризация ранговой функции. Классическая линейная алгебра обычно исходит из определения ранга как наибольшей мощности набора линейно независимых строк матрицы, для матриц же над полукольцами существует несколько различных подходов к определению понятия линейной зависимости. Эти подходы были изложены в первой главе, и в разделе 2.1 особое внимание уделено понятию зависимости по Гондрану–Мину, которое в силу рассуждений первой главы можно считать одним из наиболее подходящих определений линейной зависимости для произвольных полуколец. Иными словами, в разделе 2.1 изучаются полукольца, факторизационный ранг матриц над которыми совпадает с рангом Гондрана–Мину. Одним из основных результатов раздела является следующая теорема.

Теорема (2.2.9). *Пусть полукольцо $\mathcal{S}$ таково, что для любой матрицы A над $\mathcal{S}$ верно $f(A) = GMc(A)$. Тогда $\mathcal{S}$ вложено в некоторое поле.*

Итак, для совпадения ранга Гондрана–Мину и факторизационного ранга над полукольцом $\mathcal{S}$ необходимо существование вложения этого кольца в некоторое поле. В том частном случае, когда $\mathcal{S}$ является также кольцом, мы доказываем равенство ранга Гондрана–Мину классическому рангу матрицы; вопрос о равенстве ранга Гондрана–Мину и факторизационного ранга матриц над целостным кольцом $\mathcal{S}$ оказывается равносилен следующему вопросу: для любой ли матрицы A над $\mathcal{S}$ существует *оптимальная факторизация*, то есть, представление вида $A = BC$, где $B \in \mathcal{S}^{m\times k}$, $C \in \mathcal{S}^{k\times n}$, а через k обозначен классический ранг матрицы A? Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным для некоторых целостных колец $\mathcal{S}$, как показывает приведенный в тексте диссертации пример.

В разделе 2.3 исследуются обобщения на полукольцевой случай следующих свойств классической функции ранга матриц над полем:

$$\text{если } A \otimes B = C, \text{ то } GMr(C) \leqslant \min(GMr(A), GMr(B)), \tag{1}$$

$$\text{если } A \oplus B = C, \text{ то } GMr(C) \leqslant GMr(A) + GMr(B), \tag{2}$$

$$\text{если } (A|B) = C, \text{ то } GMr(C) \leqslant GMr(A) + GMr(B). \tag{3}$$

Аналогичные неравенства исследовались ранее для различных ранговых функций. Для факторизационного ранга они выполняются над любым полукольцом: неравенства для произведения и суммы матриц были доказаны в работе [11], а неравенство для матричного объединения — в работе [121].

В работе [1] показано, что указанные неравенства выполняются для детерминантного и тропического рангов, но не выполняются для максимального

слабого ранга матриц над тропическим полукольцом. В разделе 2.3 исследуется выполнение этих неравенств для ранга Гондрана–Мину, которое было открытой проблемой даже для тропических матриц до публикации автором диссертации статьи [169]. Доказывается следующая теорема.

Теорема (2.3.20). *Пусть $\mathcal{S}$ — идемпотентное полукольцо, не содержащее делителей нуля. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) условие (1) выполняется для матриц с элементами из $\mathcal{S}$;

2) условие (2) выполняется для матриц с элементами из $\mathcal{S}$;

3) условие (3) выполняется для матриц с элементами из $\mathcal{S}$;

4) полукольцо $\mathcal{S}$ является квазиселективным.

Также в разделе 2.3 показано, что теорема 2.3.20 не может быть обобщена на случай полуколец с делителями нуля; приведен пример селективного полукольца, для матриц над которым условия (1)–(3) не выполняются.

В **главе 3** обсуждается структура полугруппы квадратных матриц фиксированного порядка над заданным полукольцом. Отметим, что в отличие от классического случая матриц над полем или кольцом множество таких матриц не обладает структурой кольца, что в значительной мере затрудняет их изучение. С другой стороны, интерес вызывают многие вопросы, связанные с полугрупповой структурой множества матриц, в том числе описание отношений Грина, подгрупп, идемпотентов и некоторые другие [81, 118, 129]. Изучение этих вопросов, с одной стороны, позволяет получить полезную информацию о свойствах множества матриц с точки зрения полугрупп, и с другой стороны, доказать ряд результатов о структуре полуколец, матрицы над которыми удовлетворяют тем или иным условиям, рассмотрение которых связано с приложениями теории полугрупп.

В разделе 3.1 мы изучаем связь отношений Грина на полугруппе матриц размера $n \times n$ над полукольцом и ранговых функций этих матриц. Напомним, как определяются отношения Грина $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{J}$ на произвольной полугруппе S. Для элементов $a, b \in S$ мы пишем $a \leqslant_{\mathcal{R}} b$, если $a = b$ или $a = bc$ для некоторого $c \in S$, а также $a \leqslant_{\mathcal{L}} b$, если $a = b$ или $a = db$ для некоторого $d \in S$. Мы также пишем $a \leqslant_{\mathcal{J}} b$, если $a \leqslant_{\mathcal{L}} b$ или $a \leqslant_{\mathcal{R}} b$, или $a = s_1 b s_2$ для некоторых $s_1, s_2 \in S$. В силу определений отношения $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{J}$ рефлексивны и транзитивны, то есть, задают предпорядки на полугруппе S. Назовем функцию f на полугруппе S, принимающую вещественные значения, монотонной относительно отношения $\mathcal{J}$, если условие $a \leqslant_{\mathcal{J}} b$ влечет $f(a) \leqslant f(b)$. Ранее связь отношений Грина и ранговых функций исследовалась в работе [81], где была доказана монотонность тропического, детерминантного и факторизационного рангов и ранга Гондрана–Мину относительно отношения $\mathcal{J}$ на полугруппе матриц над тропическим полукольцом. Оказывается, что

функция ранга Гондрана–Мину, тем не менее, является монотонной относительно отношений $\mathcal{L}$ и $\mathcal{J}$ для матриц далеко не над всеми полукольцами, и следующая теорема дает характеризацию таких полуколец.

Теорема (3.1.2). *Рассмотрим идемпотентное полукольцо $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ и целое число $n \geqslant 6$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) полукольцо $\mathcal{S}$ квазиселективно;

(ii) функция GMr монотонна относительно отношения $\mathcal{J}$ на $(\mathcal{S}^{n\times n}, \otimes)$;

(iii) функция GMr монотонна относительно отношения $\mathcal{L}$ на $(\mathcal{S}^{n\times n}, \otimes)$.

Необходимость проведения исследования связи отношений Грина и функции ранга Капранова тропических матриц была отмечена в работе [81], и в разделе 3.1 мы проводим такое исследование. В качестве основного его результата можно выделить следующую теорему.

Теорема (3.1.11). *Если базовое поле содержит по крайней мере $n+2$ элемента, то функция ранга Капранова монотонна относительно отношений Грина $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{J}$ на полугруппе тропических матриц порядка n. Если же базовое поле содержит менее n элементов, то функция ранга Капранова не монотонна ни относительно одного из этих отношений на полугруппе тропических матриц порядка n.*

Таким образом, в наиболее важном случае бесконечно базового поля мы доказали монотонность ранга Капранова относительно отношений Грина. В случае конечных базовых полей доказано отсутствие монотонности этого ранга для матриц достаточно большого размера.

В разделе 3.2 мы продолжаем изучать тропические матрицы с точки зрения теории полугрупп. Целью этого раздела является доказательство гипотезы, сформулированной Джонсон и Камбитесом в работе [80]. А именно, основным результатом раздела является следующая теорема.

Теорема (3.2.5). *Если группа $\mathcal{G}$ обладает точным представлением тропическими матрицами порядка n, то $\mathcal{G}$ содержит нормальную абелеву подгруппу без кручения индекса, не превосходящего $n!$.*

Более того, в разделе 3.2 получена полная характеризация подгрупп полугруппы тропических матриц в терминах мономиальных матриц. Назовем тропическую матрицу P *мономиальной*, если найдется перестановка σ, для которой $P_{ij} \neq \infty$ в том и только том случае, когда $i = \sigma(j)$. В тексте диссертации доказан следующий результат.

Теорема (3.2.4). *Всякая подгруппа полугруппы тропических матриц порядка n допускает точное представление тропическими мономиальными матрицами порядка n.*

Наконец, в разделе 3.2 мы улучшаем результат Д'Алессандро и Паску [3], утверждающий, что любая периодическая подгруппа полугруппы тропических матриц порядка n конечна. Напомним, что группа H называется *периодической*, если она состоит из элементов конечного порядка.

Теорема (следствие 3.2.6). *Порядок любой периодической подгруппы полугруппы тропических матриц порядка n не превосходит $n!$.*

В разделе 3.3 мы обращаемся к проблеме тождества в полугруппе тропических матриц порядка n, ранее изучавшейся Изхакяном и Марголисом в статье [79] и Изхакяном в [78]. В этих работах была высказана гипотеза, утверждающая наличие тождества в полугруппе тропических матриц порядка n при любом n, но были доказаны только частные случаи этого утверждения. А именно, в работе [79] в явном виде приведено тождество полугруппы тропических матриц порядка 2, а в статье [78] было построено тождество для верхнетреугольных тропических матриц порядка n.

В этом разделе разработаны методы, которые оказываются полезными для решения сформулированной проблемы. Полученные результаты позволяют разрешить проблему Изхакяна и Марголиса о тождестве для матриц порядка три, которая оставалась открытой в этом случае.

Теорема (3.3.13). *Рассмотрим матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ и положим $\overline{A} = A^6B^6$, $\overline{B} = B^6A^6$; положим также $\mathcal{U}(x,y) = x^2y^4x^2x^2y^2x^2y^4x^2$ и $\mathcal{V}(x,y) = x^2y^4x^2y^2x^2x^2y^4x^2$. Обозначим через $w_1, \ldots, w_8$ набор всех слов длины 3 и положим $\Gamma(x,y) = w_1 \ldots w_8$. Положим*

$$\mathcal{A} = \Gamma\left(\overline{A}^{146}, \overline{B}^{146}\right)\, \Gamma^3\left(\overline{A}, \overline{B}\right)\, \overline{A}\, \Gamma^3\left(\overline{A}, \overline{B}\right),$$

$$\mathcal{B} = \Gamma\left(\overline{A}^{146}, \overline{B}^{146}\right)\, \Gamma^3\left(\overline{A}, \overline{B}\right)\, \overline{B}\, \Gamma^3\left(\overline{A}, \overline{B}\right).$$

Тогда $\mathcal{U}(\mathcal{AA}, \mathcal{AB})\,\mathcal{A} = \mathcal{V}(\mathcal{AA}, \mathcal{AB})\,\mathcal{A}$.

Глава 4 посвящена исследованию ранговых функций над бинарным булевым полукольцом. В силу вложения бинарного полукольца в тропическое полукольцо изучение ранговых функций булевых матриц представляет интерес с точки зрения тропической линейной алгебры. В самом деле, понятие тропического ранга булевой матрицы оказывается полезным в различных задачах тропической геометрии [45]. Функция детерминантного ранга как тропических, так и булевых матриц оказывается интересной в связи с приложениями в области дискретных динамических систем [21, 42, 60]. С другой стороны, многие важные инварианты булевых матриц не являются обобщениями функций тропических матриц. Такова, например, функция изоляционного числа матрицы, вызывающая интерес в современных исследованиях,

связанных с проблемами комбинаторной оптимизации [53], сложности информационных протоколов [46] и некоторыми иными.

В разделе 4.1 мы изложим результаты, описывающие сложность вычисления ранговых функций булевых матриц. Исследование этой сложности было, в частности, мотивировано вопросом Бутковича [22] о том, может ли тропический ранг матрицы быть найден за полиномиальное время. Кроме того, вызывал интерес также вопрос Де Шуттера [42] о вычислительной сложности детерминантного ранга, который был также упомянут в работах [21] и [60] и оставался открытым. Наконец, была открытой проблемой недавняя гипотеза Фризен и Тайса [58] о вычислении изоляционного числа булевой матрицы.

В разделе 4.1 получен ответ на указанные вопросы и доказано, что задачи вычисления детерминантного и тропического рангов и изоляционного числа булевой матрицы являются NP-трудными. Чтобы сформулировать основной результат, приведем определение нового для нашей работы понятия. Элементы $(i_1, j_1), \ldots, (i_n, j_n)$ булевой матрицы B называются *изолированным множеством*, если условие $B_{i_s,j_t} = B_{i_t,j_s} = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $t = s$. *Изоляционным числом* матрицы называется максимальная мощность ее изолированного множества.

Теорема (4.1.3). *Даны булева матрица A и целое число k. Задача распознавания того, больше ли изоляционное число (или детерминантный ранг, или тропический ранг) матрицы A, чем k, является NP-полной.*

Отметим также важность проблемы факторизации булевых матриц, изучению которой посвящен раздел 4.2: необходимость ее изучения обусловлена приложениями в комбинаторике, вычислительной математике и других областях науки. А именно, проблема факторизации булевой матрицы предоставляет линейно-алгебраическую характеризацию понятия двудольной размерности [57] графа, поскольку факторизационный ранг матрицы смежностей двудольного графа G равен минимальной мощности покрытия графа G полными двудольными подграфами этого графа [10, 71]. Двудольная размерность графа представляет собой важный комбинаторный инвариант и в свою очередь находит широкое применение в приложениях, в частности, для решения проблем компьютерной безопасности [128] и задач вычислительной математики [48]. В разделе 4.2 мы доказываем существование факторизации булевых матриц с достаточно большим количеством единичных элементов. Отметим, что *булевым рангом* $(0,1)$-матрицы называется ее факторизационный ранг над бинарным булевым полукольцом.

Теорема (4.2.10). *Если булев ранг матрицы $A \in \{0,1\}^{n\times m}$ равен n, то некоторый столбец матрицы A содержит по крайней мере $\frac{\sqrt{n}}{2} - 1$ нулей.*

В разделе 4.2 нами также доказана асимптотическая оптимальность ре-

зультата приведенной теоремы.

Теорема (следствие 4.2.12). *Каково бы ни было целое положительное число n, найдется $(0,1)$-матрица булева ранга n размера $n \times m$, любой столбец которой содержит не более, чем $\sqrt{2n}$ нулевых элементов.*

В качестве приложения полученных результатов мы получаем верхнюю оценку размера матрицы полного булева ранга в терминах тропического и детерминантного рангов и изоляционного числа булевой матрицы.

Теорема (4.2.14). *Пусть матрица $A \in \{0,1\}^{n \times m}$ имеет полный булев ранг. Если детерминантный или тропический ранги или число изоляции матрицы A меньше k, то* $\min\{n,m\} < 16^{2^k-1}$.

Раздел 4.3 посвящен комбинаторному анализу свойств ранговых функций, и многие результаты этого раздела находят применение в последующих главах. Кроме того, рассматривается понятие граничного ранга матрицы и решается одна из проблем о связи граничного и классического рангов вещественных матриц, которая до публикаций автора диссертации была открытой. Напомним, что *граничным рангом* матрицы A называется минимальное число t, для которого существует набор из t *линий* (то есть, строк или столбцов), покрывающий все ненулевые элементы матрицы A. В разделе 4.3 получено доказательство гипотезы, поставленной в работе [100] и доказано следующее утверждение: если вещественная матрица A имеет классический ранг r и граничный ранг $r+2$, то найдется рациональная матрица с такими же рангом и знаковым шаблоном, как у матрицы A.

Глава 5 посвящена исследованию свойств ранговых функций тропических матриц. Особое внимание уделено тем функциям, которые важны для различных приложений тропической линейной алгебры: детерминантному и тропическому рангам, рангам Капранова и Гондрана–Мину и факторизационному рангу. Указанные ранговые функции возникают из рассмотрения проблем комбинаторной оптимизации [22], алгебраической геометрии [47], дискретных динамических систем [60], теории расписаний [36], алгоритмов кластеризации [64] и ряда других. Для доказательства основных результатов главы важен метод шаблонов тропических матриц, который в целом описан в первом разделе и обоснованию которого посвящен второй раздел этой главы. Коротко, суть метода состоит в том, что некоторые ранговые функции тропической матрицы оказываются (с точностью до умножения строк и столбцов матрицы на ненулевые элементы) равными рангу некоторой булевой матрицы, которая определяется специальным образом с помощью исходной.

В разделе 5.1 вводится понятие шаблона тропической матрицы и показывается его связь с понятием смешанного разбиения суммы Минковско-

го выпуклых многогранников. Напомним, что *суммой Минковского* $\sum_{i=1}^{k} P_i$ множеств $P_1, \ldots, P_k \subset \mathbb{R}^d$ называется множество всевозможных сумм вида $x_1 + \ldots + x_k$ при $x_1 \in P_1, \ldots, x_k \in P_k$. Рассмотрим теперь набор $B = (B_1, \ldots, B_k)$ выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^d$ и предположим, что размерность их суммы Минковского равна d. Набор выпуклых многогранников $(B_1, \ldots, B_k)$ из $\mathbb{R}^d$ называется *ячейкой Минковского* для набора $(P_1, \ldots, P_k)$, если вершины многогранника B_i образуют подмножество вершин многогранника P_i при всех значениях i, а также выполнены еще несколько дополнительных условий, указанных в тексте диссертации и также в [45, 124].

Рассмотрим стандартный $(d-1)$-мерный симплекс Δ^{d-1} в пространстве $\mathbb{R}^d$, то есть выпуклую оболочку множества $\{e_1, \ldots, e_d\}$. Обозначим через $n\Delta^{d-1}$ сумму Минковского $\Delta^{d-1} + \ldots + \Delta^{d-1}$, в которой n слагаемых. *Типом вектора* $x \in \mathbb{R}^d$ относительно столбцов матрицы $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ называется набор из d множеств $(S_1, \ldots, S_d)$, где множества S_j составлены из тех индексов $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $\theta = j$ доставляет минимум выражению $V_{\theta i} - x_\theta$. Этот тип мы будем обозначать через $type_V(x)$. Введем в рассмотрение понятие *смешанного разбиения* суммы симплексов $n\Delta^{d-1}$, *индуцированного матрицей* $M \in \mathbb{R}^{d \times n}$, взяв за основу следующую его характеризацию.

Теорема (теорема 5.2 работы [45]). *Рассмотрим матрицу* $M \in \mathbb{R}^{d \times n}$ *и семейство подмножеств* $S = (S_1, \ldots, S_d)$ *множества* $\{1, \ldots, n\}$. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) найдется вектор $x \in \mathbb{R}^d$, *удовлетворяющий условию* $type_M(x) = S$;

(2) смешанное разбиение $n\Delta^{d-1}$, *индуцированное матрицей* M, *содержит ячейку Минковского* $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, *где через* τ_i *обозначена выпуклая оболочка множества* $\{e_j \,|i \in S_j\}$.

Оказывается, что смешанные разбиения, индуцируемые тропическими матрицами, находят важные приложения в линейной алгебре: в работе [45] была получена характеризация тропического ранга матрицы в терминах ее смешанного разбиения. В той же работе формулируется вопрос об аналогичной характеризации для факторизационного ранга и ранга Капранова: если две тропические матрицы индуцируют одинаковые смешанные разбиения суммы симплексов, обязательно ли они имеют одинаковые факторизационные ранги и ранги Капранова? Мы получаем отрицательный ответ на этот вопрос, доказывая следующий результат.

Пример (предложение 5.1.10, лемма 5.1.11). *При* $\varepsilon \in (0, 0.5)$ *матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{и} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

индуцируют одинаковые смешанные разбиения суммы симплексов $6\Delta^5$. *Факторизационный ранг и ранг Капранова матрицы* A *не превосходят* 4, *а на матрице* B *эти функции принимают значения, не меньшие пяти.*

В разделе 5.1 также вводится понятие шаблона тропической матрицы, одно из ключевых понятий главы.

Определение (5.1.5). *Тропическим шаблоном* матрицы A называется булева матрица B, определенная как (1) $B_{uv} = 1$, если $A_{uv} = \min_i\{A_{iv}\} < \infty$; (2) $B_{uv} = 0$, если $A_{uv} > \min_i\{A_{iv}\}$ или если $A_{uv} = \infty$. Тропический шаблон матрицы A обозначается через $\mathcal{P}(A)$.

Получена характеризация понятия шаблона в терминах смешанного разбиения суммы симплексов, индуцированного тропической матрицей. Тропические матрицы M и M' одного размера называются *эквивалентными*, если найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, для которых $M_{ij} = M'_{ij} + \alpha_i + \beta_j$ при всех i и j.

Теорема (5.1.7). *Пусть* $M \in \mathbb{R}^{d\times n}$. *Рассмотрим набор подмножеств* $S = (S_1, \ldots, S_d)$ *множества* $\{1, \ldots, n\}$. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) матрица M *эквивалентна матрице* M', *элементы шаблона* P' *которой удовлетворяют условию* $P'_{ji} = 1$ *тогда и только тогда, когда* $j \in S_i$;

(2) смешанное разбиение $n\Delta^{d-1}$, *индуцированное матрицей* M, *содержит ячейку Минковского* $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, *где через* τ_i *обозначена выпуклая оболочка множества* $\{e_j \,|i \in S_j\}$.

Теорема 5.1.7 показывает, что смешанное разбиение, индуцированное матрицей M, определяется однозначно множеством тропических шаблонов матриц из класса эквивалентности M, и наоборот, множество таких тропических шаблонов однозначно определяет смешанное разбиение.

В дальнейших рассуждениях главы метод тропических шаблонов применяется для исследования различных инвариантов тропических матриц. В разделе 5.2 этот метод используется для получения характеризации ранга Гондрана–Мину; приведем основной результат.

Теорема (5.2.13). *Строчный ранг Гондрана–Мину тропической матрицы A равен наибольшему строчному рангу Гондрана–Мину среди шаблонов всех матриц, эквивалентных A.*

Отметим, что эта теорема 5.2.13 в силу приведенной выше теоремы (5.1.7) гарантирует характеризацию ранга Гондрана–Мину матрицы в терминах смешанного разбиения суммы симплексов, и в этом ранг Гондрана–Мину проявляет отличие от факторизационного ранга и ранга Капранова.

Раздел 5.3 посвящен обсуждению приложений метода тропических шаблонов. В частности, исследуется взаимное поведение ранга Гондрана–Мину и других ранговых функций. Ранее аналогичные вопросы рассматривались для факторизационного ранга [1, 45], и было показано, что факторизационный ранг тропических матриц может быть сколь угодно большим, даже если тропический ранг и ранг Гондрана–Мину ограничены. Случай ранга Капранова и тропического ранга рассматривался в работе [86], было показано, что и ранг Капранова тропических матриц может быть сколь угодно большим, даже если их тропический ранг ограничен. Мы докажем, что ни ранг Гондрана–Мину, ни детерминантный ранг тропических матриц не могут быть сколь угодно большими, если ограничен тропический ранг.

Теорема (5.3.4 и 5.3.6). *Для любой тропической матрицы A выполнены неравенства $trop(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$ и $trop(A) \geqslant \frac{d(A)+2}{3}$, где через $trop(A)$, $d(A)$ и $GMr(A)$ обозначены, соответственно, тропический и детерминантный ранги и ранг Гондрана–Мину матрицы A.*

Еще одно из своих приложений метод тропических шаблонов находит при изучении вычислительной сложности функции ранга Гондрана–Мину тропических матриц. Вопросам исследования этой сложности посвящена проблема, поставленная Бутковичем в 2008 году в статье [24]: даны k тропических векторов, существует ли полиномиальный по времени алгоритм распознавания линейной GM-зависимости этих векторов? Напомним, что в силу известного результата 1984 года (теоремы 1.2 работы [87]) указанная задача NP-трудна даже для 0-1 матриц, если число k является частью входных данных. Проблема существования полиномиального алгоритма, однако, оставалась открытой в предположении постоянства значения числа k и была вновь сформулирована в монографии [25]; ее положительное решение было получено автором диссертации в работе [164] и изложено в подразделе 5.3.

Теорема (5.3.10). *Пусть k — фиксированное целое число. Тогда задача распознавания свойства $GMr(A) < k$ решается за полиномиальное по размеру тропической матрицы A время.*

Наконец, метод тропических шаблонов позволяет получить полиномиаль-

ный по времени алгоритм вычисления ранга Гондрана–Мину матриц ограниченного тропического ранга.

Теорема (5.3.11). *Пусть t — фиксированное целое число. Тогда задача вычисления GM-ранга матрицы тропического ранга, не большего t, решается за полиномиальное время.*

В главе 6 построена теория, позволяющая решить, в частности, проблему из области тропической алгебраической геометрии, которая была сформулирована в статье [31] и интерес в рассмотрении которой связан с работами [45] и [47]. Теория основана на результатах тропической линейной алгебры и использует разработанный в предыдущей главе метод шаблонов, а также новые методы комбинаторного анализа тропических инвариантов. Чтобы сформулировать проблемы, которым посвящена глава 6, и основные результаты главы, приведем кратко основные понятия тропической геометрии.

Тропическим полиномом будем называть выражение вида $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \min_{h=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathcal{A}} \{c_h + h_1\xi_1 + \ldots + h_n\xi_n\}$, где $c_h \in \mathbb{R}$, а $\mathcal{A}$ — конечное подмножество множества $(\mathbb{Z}_+)^n$. Тропический многочлен F обозначается через $\deg f$, если многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{h=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathcal{A}} C_h \cdot x_1^{h_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{h_n}$ над полем $\mathbf{H}_\mathbb{C}$ удовлетворяет условиям $C_h \neq 0$ и $c_h = \deg C_h$ при всяком $h \in \mathcal{A}$. *Аффинным многообразием, порожденным идеалом* $I \subset \mathbf{H}_\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, называется множество $V(I) = \{(u_1, \ldots, u_n) \in (\mathbf{H}_\mathbb{C}^*)^n \mid \forall f \in I \;\; f(u_1, \ldots, u_n) = 0\}$. *Тропическим многообразием, порожденным идеалом* I, называется образ множества $V(I)$ при отображении deg, то есть, $\deg V(I) = \{(\deg u_1, \ldots, \deg u_n) \in \mathbb{R}^n \mid (u_1, \ldots, u_n) \in V(I)\}$. *Тропической гиперповерхностью, соответствующей* тропическому многочлену F, называется множество всех точек $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, для которых минимум в выражении для этого многочлена достигается как минимум два раза. Пусть $f \in \mathbf{H}_\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $J \subset \mathbf{H}_\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Тропическая гиперповерхность, соответствующая многочлену $\deg f$, обозначается через $\mathcal{T}(f)$; введем также обозначение $\mathcal{T}(J) = \bigcap_{g\in J} \mathcal{T}(g)$. Множество $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset I$ называется *тропическим базисом* идеала I, если $I = \langle f_1, \ldots, f_k\rangle$ и $\mathcal{T}(I) = \mathcal{T}(f_1) \cap \ldots \mathcal{T}(f_k)$.

Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{C}[x_{11}, \ldots, x_{dn}]$ от dn переменных, которые образуют матрицу $X = (x_{ij})$ размера $d \times n$. Через $H_r^{d,n}$ обозначим множество всех миноров порядка r матрицы X, то есть полиномов вида $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (-1)^\sigma x_{s_1,c_{\sigma(1)}} \ldots x_{s_r,c_{\sigma(r)}}$, где в каждой из последовательностей $(s_1, \ldots, s_r)$ и $(c_1, \ldots, c_r)$ индексы возрастают. Через $J_r^{d,n} \subset \mathbb{C}[x_{11}, \ldots, x_{dn}]$ обозначим идеал, порожденный многочленами семейства $H_r^{d,n}$. Теперь мы можем сформулировать проблему, решению которой посвящена глава 6: при каких d, n и r миноры порядка r матрицы переменных размера $d \times n$ образуют тропический базис порождаемого ими идеала? Иными словами, при каких d,

n и r многочлены $H_r^{d,n}$ являются тропическим базисом идеала $J_r^{d,n}$? В главе 6 приведено решение этой проблемы и доказана следующая теорема.

Теорема (1.3.35). *Рассмотрим целые положительные числа d, n и r, удовлетворяющие условию $r \leqslant \min\{d, n\}$. Миноры порядка r матрицы переменных размера $d \times n$ образуют тропический базис в том и только том случае, когда выполнено какое-либо из следующих условий: (1) $r \leqslant 3$; (2) $r = \min\{d, n\}$; (3) $r = 4$ и $\min\{d, n\} \leqslant 6$.*

Отметим, что условие $r \leqslant \min\{d, n\}$ фигурирует в приведенной теореме, чтобы исключить вырожденный случай $r > \min\{d, n\}$. В самом деле, в этом случае множество миноров порядка r является пустым, и потому в силу определений является тропическим базисом порождаемого им нулевого идеала.

В **главе 7** изучается проблема факторизации тропических матриц и свойства связанной с этой проблемой функции факторизационного ранга. Исследование факторизации матриц над тропическим полукольцом началось в 90-е годы прошлого века в связи с приложениями в комбинаторной оптимизации [6] и продолжалось впоследствии [8]. Последнее десятилетие было отмечено бурным развитием методов тропической математики, и были найдены новые приложения тропической факторизации в линейной алгебре [45] и алгебраической геометрии [44]. Отметим, что факторизационный ранг тропической матрицы в некоторых источниках также называется *комбинаторным рангом* [7] и *рангом Барвинка* [45]. Также понятие факторизационного ранга участвует в формулировках ряда проблем оптимизации, например в так называемой *задаче коммивояжера со складами* [8]. С точки зрения тропической геометрии факторизационный ранг можно понимать как минимальную слабую размерность полумодуля, содержащего столбцы заданной матрицы [44]. Изложенные в главе 7 результаты основаны на развитии тропических методов и позволяют получить решения ряда открытых проблем, возникших в связи с приложениями в комбинаторной оптимизации, тропической математике, дискретной геометрии и линейной алгебре.

Важной проблемой, связанной с изучением факторизационного ранга, является его вычислительная сложность [6, 44, 45]. Несложно видеть, что проблема вычисления факторизационного ранга разрешима алгоритмически: в самом деле, определение 7.1.1 может быть сформулировано на языке логики первого порядка теории вещественных чисел с порядком и сложением, и потому вычисление факторизационного ранга может быть проведено применением алгоритма элиминации кванторов для этой теории [56].

Крайне высокая вычислительная сложность алгоритма элиминации кванторов делает упомянутый алгоритм непригодным для практического применения. Другой алгоритм был разработан Девелином в работе [44], в которой

была развита теория тропических касательных многообразий. В этой работе была получена характеризация факторизационного ранга с точки зрения тропической геометрии, и эта характеризация позволила получить алгоритм вычисления ранга. К сожалению, ни алгоритм Девелина, ни какой-либо другой алгоритм, видимо, не позволят вычислять факторизационный ранг тропической матрицы за полиномиальное время. В самом деле, проблема вычисления этого ранга оказывается NP-сложной даже для тропических 01-матриц [45]. Другими словами, общая *проблема тропической факторизации матриц* — существуют ли матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$, удовлетворяющие условию $A = B \otimes C$, для данных матрицы A и числа k? — оказывается NP-трудной.

Помимо общей проблемы вычисления факторизационного ранга большой интерес вызывает проблема распознавания матриц фиксированного ранга. Этот интерес вызван во многом приложениями в комбинаторной оптимизации: некоторые важные проблемы комбинаторной оптимизации допускают быстрые решения в тех случаях, когда матрицы данных имеют ограниченный факторизационный ранг [6, 7]. В частности, задача коммивояжера допускает быстрое решение, если факторизационный ранг матрицы расстояний ограничен наперед заданным числом; такой вариант имеет название *задачи коммивояжера со складами* [8]. Матрицы ограниченного факторизационного ранга естественным образом возникают также и в других вопросах комбинаторной оптимизации [6] и тропической геометрии [45]. Эти замечания приводят нас к следующему вопросу о тропических факторизациях матриц.

Проблема (7.1.4). *Существует ли алгоритм, решающий задачу факторизации матриц за полиномиальное время при любом фиксированном k?*

В работе [6] Барвинок предполагал, что проблема 7.1.4 допускает положительное решение и также упомянул эту проблему в работе [7]. Дальнейшие исследования проблемы распознавания матриц фиксированного факторизационного ранга проводились в работах [28, 43, 44, 45, 76], но проблема оставалась открытой даже в случае $k = 3$ и была снова сформулирована в [45].

С проблемой быстрого распознавания матриц фиксированного факторизационного ранга связана проблема характеризации таких матриц в терминах рангов их подматриц, поставленная в работе [45]. Она формулируется так: существует ли число $\Theta(k)$, для которого любая матрица факторизационного ранга k содержит подматрицу факторизационного ранга k размера, ограниченного числом $\Theta(k)$? Предположим, что при некотором k удалось найти такое $\Theta(k)$. Чтобы решить проблему распознавания матриц факторизационного ранга, меньшего k, нам достаточно в этом случае посчитать ранги всех подматриц размера, не большего $\Theta(k) \times \Theta(k)$. Число таких подматриц, как несложно видеть, имеет полиномиальный характер роста при увеличении

размера матрицы, а ранг каждой из таких подматриц может быть посчитан за ограниченное время с помощью алгоритма элиминации кванторов. Таким образом, мы увидели, что существование функции $\Theta(k)$ влекло бы положительное решение проблемы 7.1.4. К сожалению, как показывают результаты раздела 7.2, такого значения $\Theta(k)$ не существует при $k \geqslant 5$.

Теорема (7.2.10). *Для целых чисел $k \geqslant 5$ и ν существует матрица факторизационного ранга k, содержащая более ν строк и столбцов, факторизационные ранги всех собственных подматриц которой меньше k.*

Также получено необходимое и достаточное условие характеризации матриц факторизационного ранга k в терминах рангов миноров порядка k.

Теорема (7.2.4) *Если факторизационный ранг тропической матрицы A равен $r \leqslant 3$, то матрица A содержит подматрицу размера $r \times r$ полного факторизационного ранга. Для любого целого числа $r > 3$ найдется матрица факторизационного ранга r, все подматрицы размера $r \times r$ которой имеют факторизационные ранги, меньшие r.*

В разделе 7.3 приведено полное решение проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса о характеризации матриц фиксированного факторизационного ранга в терминах рангов их подматриц; приведем основной результат.

Теорема (7.3.32). *Положим $\Theta(1) = 1$, $\Theta(2) = 2$, $\Theta(3) = 3$ и $\Theta(4) = 1539$. Если целое число k не превосходит четырех, то любая тропическая матрица факторизационного ранга, не меньшего k, содержит подматрицу факторизационного ранга, не меньшего k, и содержащую не более $\Theta(k)$ строк и не более $\Theta(k)$ столбцов. Если $k \geqslant 5$, то найдутся матрицы факторизационного ранга k сколь угодно большого размера, все собственные подматрицы которых имеют факторизационные ранги, меньшие k.*

Как следствие теоремы (7.3.32) получено решение еще одной проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса — вопроса о вычислительной сложности распознавания матриц факторизационного ранга три.

Теорема (7.3.31). *Существует полиномиальный по времени алгоритм распознавания тропических матриц факторизационного ранга три.*

Раздел 7.4 посвящен решению проблемы 7.1.4. Доказывается, что задача распознавания матриц, факторизационный ранг которых не превосходит 7, является NP-трудной, даже если предполагать, что матрицы состоят из целых чисел. Формально эта задача может быть описана следующим образом.

Задача (7.4.1). k-ФАКТОРИЗАЦИЯ ТРОПИЧЕСКИХ МАТРИЦ (k-ФТМ).
Дана тропическая матрица $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$.

Вопрос: существуют ли тропические матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$, удовлетворяющие условию $B \otimes C = A$?

Основным результатом раздела 7.4 является доказательство NP-полноты задачи k-ФТМ при всех $k \geqslant 7$. Чтобы получить этот результат, нам требуется построить полиномиальное сведение задачи k-ФТМ к какой-либо задаче, NP-полнота которой известна. Метод построения такого сведения, использованный в доказательстве, может быть коротко описан следующим образом.

Сначала мы изучаем частный случай задачи факторизации, который мы назвали *факторизацией промежуточных матриц*. Эта новая задача состоит в поиске матрицы M, факторизационный ранг которой не превосходит заданного числа k и которая удовлетворяет условию $A \leqslant M \leqslant B$ для заданных матриц A и B. Заметим, что при $A = B$ задача факторизации промежуточных матриц равносильна обычной факторизации, и мы показываем, что промежуточные факторизации могут быть в свою очередь сведены к обычным. Ключевым для нашего доказательства является сведение классической NP-полной задачи о раскраске графа к задаче промежуточной факторизации; разработанные методы приводят к следующим результатам.

Теорема (7.4.29). *Задача k-ФТМ является NP-полной при всяком $k \geqslant 7$.*

Отметим, что теорема 7.4.29 дает решение упомянутой выше проблемы 7.1.4, поставленной Барвинком в 1996 году [7]. Разработанный метод позволяет, более того, доказать следующий результат, тем самым решая проблему 3.2 из статьи [45] Девелина, Сантоса и Штурмфельса.

Теорема (7.4.30). *Задача вычисления факторизационного ранга матрицы, тропический ранг которой не превосходит семи, является NP-трудной.*

Глава 8 посвящена обсуждению важной для различных приложений и бурно развивающейся в настоящее время теории факторизации неотрицательных матриц. Задача факторизации состоит в нахождении матриц $B \in \mathbb{R}_+^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}_+^{k\times n}$, удовлетворяющих условию $A = BC$ при данных матрице A и числе k, и находит многочисленные приложения в анализе данных, статистике, квантовой механике, дискретной геометрии и многих других областях [33].

С задачей факторизации тесно связано понятие *неотрицательного ранга* матрицы $A \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$, который равен наименьшему целому числу k, для которого существуют матрицы $B \in \mathbb{R}_+^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}_+^{k\times n}$, удовлетворяющие условию $A = BC$. Как показывают современные исследования [54, 61, 82], оказывается очень важным вопрос о получении верхних и нижних оценок для неотрицательного ранга в терминах иных матричных инвариантов; основным результатом, доказательство которого приведено в разделе 8.1, является решение

одной из проблем такого вида. А именно, мы даем отрицательный ответ на вопрос 4.4 из работы Бисли и Лаффи [12] и доказываем следующую теорему.

Теорема (8.1.5). *Существуют симметрические матрицы $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ классического ранга три, имеющие ровно одно отрицательное собственное значение и сколь угодно большой неотрицательный ранг.*

Результаты, изложенные в разделе 8.2, находят важные приложения в теории расширенных представлений многогранников, поэтому мы напомним основные понятия этой теории. Рассмотрим выпуклый многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$. *Расширением* [55, 61] многогранника P называется другой многогранник $Q \subset \mathbb{R}^d$, из которого P может быть получен как образ под действием линейной проекции $\mathbb{R}^d$ на $\mathbb{R}^n$. *Расширенным представлением* [61, 82] многогранника P называется описание многогранника Q в терминах линейных уравнений и неравенств и описание проекции $\mathbb{R}^d$ на $\mathbb{R}^n$, переводящей Q в P. *Размером* [61, 82] расширенного представления Q называется число гиперграней многогранника Q. *Сложность расширения* [61, 82] многогранника P — наименьший из возможных размеров расширенных представлений этого многогранника, то есть, наименьшее из возможных число неравенств в описании многогранника Q. Отметим, что число гиперграней многогранника Q зачастую может быть значительно меньшим [55] в сравнении с числом гиперграней P; этот феномен позволяет уменьшить сложность проблем линейного программирования, важных для многочисленных приложений [34, 55, 82].

Несмотря на серьезные усилия, прилагаемые [53, 54, 61, 69] в последнее время к изучению верхних и нижних оценок на неотрицательный ранг матрицы, до недавнего времени оставался открытым вопрос о существовании какой-либо нетривиальной верхней оценки неотрицательного ранга в терминах классической ранговой функции. Легко видеть, что неотрицательный и классический ранги матрицы совпадают [33] друг с другом, если одна из этих функций не превосходит двух. Тем не менее, никакой верхней оценки неотрицательного ранга матрицы размера $m \times n$ (кроме тривиальной $\min\{m, n\}$) не было известно даже в случае, когда классический ранг матрицы равен трем.

Проблема (8.2.1; гипотеза 3.2 из работы [12]). *Фиксируем целое число $n \geqslant 3$. Существует ли матрица размера $n \times n$ классического ранга три, неотрицательный ранг которой равен n?*

В силу результатов работы [141] гипотеза 8.2.1 равносильна существованию выпуклого n-угольника, сложность расширения которого равна n. Для $n \leqslant 5$ положительное решение проблемы 8.2.1 было получено в работе [61]. В статье [69] было отмечено, что любой выпуклый шестиугольник, координаты вершин которого алгебраически независимы, имеет сложность расширения,

равную шести, и таким образом получено положительное решение проблемы 8.2.1 при $n = 6$. Для любого $n \geqslant 7$ эта проблема оставалась открытой.

Лин и Чу в работе [101] объявили о получении положительного решения проблемы 8.2.1 при любом n, но впоследствии оказалось, что их рассуждения содержат ошибку [61, 75]. Отрицательное решение проблемы 8.2.1 было получено в работе [61] в частном случае квадратных матриц, соответствующих метрикам, задаваемых конечными наборами точек прямой. Глубокое исследование таких матриц было проведено в работе [75], и были получены верхние оценки логарифмического роста для некоторых частных случаев. Подробному исследованию расширенных представлений многоугольников была посвящена работа [55], однако и она оставила вопрос о существовании n-угольника сложности расширения n открытым. Автором диссертации были разработаны методы комбинаторного анализа матриц полного неотрицательного ранга, которые привели в итоге к полному решению проблемы 8.2.1.

Теорема (8.2.17). *Если $n \geqslant 7$, то неотрицательный ранг матрицы ранга три размера $m \times n$ всегда меньше n. При $3 \leqslant k \leqslant 6$ существуют матрицы размера $k \times k$ классического ранга три, неотрицательного ранга k.*

Кроме того, разработанные методы позволили получить нетривиальную оценку неотрицательного ранга матрицы в терминах классического ранга, а также верхнюю оценку сложности расширения выпуклого многоугольника.

Теорема (8.2.16 и 8.2.18). *Неотрицательный ранг любой матрицы $A \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$ классического ранга три, равно как и сложность расширения любого выпуклого n-угольника, не превосходят $6(n+1)/7$.*

Иными словами, теорема 8.2.18 гарантирует описание любого выпуклого n-угольника с помощью $6(n+1)/7$ линейных неравенств. В разделе 8.3 исследования нижних оценок сложности расширения многогранников продолжаются с использованием тропических методов.

Глава 1

Основные понятия

В данной главе обсуждаются основные понятия теории полуколец и излагаются основы линейной алгебры с точки зрения этой теории. Во введении подробно обсуждались приложения полуколец, связанные с исследованиями в области линейной алгебры; оказывается же, что полукольца находят применения и вне контекста проблем линейной алгебры. На сегодняшний день теория полуколец является одним из важных разделов математики: полукольца оказываются полезными для исследований в области химии, в теории кодирования, инженерных науках и других разделах науки [63]. Понятие полукольца было впервые непосредственно введено американским математиком Гарри Вандивером в работе [134], посвященной проблемам, связанным с аксиоматизацией натуральных чисел. Впоследствии на протяжении многих лет полукольца изучались многими математиками с различных точек зрения и в связи с различными теоретическими и прикладными задачами. Подробное изложение истории теории полуколец и описание различных ее приложений даны в монографии [63].

Чтобы изучать полукольца с точки зрения линейной алгебры, мы должны рассмотреть обобщения классических понятий векторного пространства, линейной зависимости и ранга матрицы на случай полуколец. Отметим, что в классическом случае матриц над полем имеется ранговая функция, которая естественным образом возникает при рассмотрении основных задач линейной алгебры и приложений и имеет множество эквивалентных определений. Когда мы переходим от классического случая к линейной алгебре над полукольцами, оказывается, что одна ранговая функция не в состоянии дать достаточно полную характеризацию матриц: в связи с различными приложениями оказывается полезным рассматривать различные функции, обобщающие классическое понятие ранга на полукольцевой случай.

1.1 Полукольца и линейная зависимость

Мы начинаем наше изложение с определения понятия полукольца.

Определение 1.1.1. Множество $\mathcal{S}$ с операциями $\oplus$ и $\otimes$, называемыми соответственно *сложением* и *умножением*, называется *полукольцом*, если

1) $(\mathcal{S}, \oplus)$ — абелев моноид (нейтральный относительно операции $\oplus$ элемент будем обозначать через $\mathbf{0}$);

2) $(\mathcal{S}, \otimes)$ — полугруппа (нейтральный относительно операции $\otimes$ элемент, если он есть, будем обозначать через $\mathbf{1}$);

3) сложение справа и слева дистрибутивно по умножению;

4) для любого элемента x из $\mathcal{S}$ верно, что $x \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes x = \mathbf{0}$.

Теперь мы определим некоторые важные в нашей работе основные понятия теории полуколец. Детальное описание этих и других понятий теории полуколец может быть найдено, например, в монографии [63].

Определение 1.1.2. Полукольцо называется *коммутативным* (соответственно, *полукольцом с единицей*), если его мультипликативная полугруппа коммутативна (соответственно, содержит нейтральный элемент).

Определение 1.1.3. Элемент a полукольца $\mathcal{S}$ называется *обратимым по сложению*, если для некоторого элемента $b \in \mathcal{S}$ верно, что $a \oplus b = \mathbf{0}$.

Определение 1.1.4. Если полукольцо не содержит обратимых по сложению элементов, кроме $\mathbf{0}$, оно называется *антинегативным*.

Определение 1.1.5. Элемент a полукольца $\mathcal{S}$ называется *левым* (соответственно, *правым*) *делителем нуля*, если найдется ненулевой элемент $b \in \mathcal{S}$, для которого $a \otimes b = \mathbf{0}$ (соответственно, $b \otimes a = \mathbf{0}$).

Определение 1.1.6. Полукольцо $\mathcal{S}$ называется *идемпотентным*, если для любого элемента $a \in \mathcal{S}$ верно, что $a \oplus a = a$.

Как и определенные выше базовые понятия теории полуколец, следующее определение играет важную роль для исследования структуры полуколец и находит применения в различных приложениях [68].

Определение 1.1.7. Полукольцо $\mathcal{S}$ называется *селективным*, если для любых элементов $a, b \in \mathcal{S}$ верно, что $a \oplus b \in \{a, b\}$.

Следующее определение обобщает понятие селективного полукольца.

Определение 1.1.8. [169] Идемпотентное полукольцо $\mathcal{S}$ называется *квазиселективным справа*, если для любых элементов $a, b \in \mathcal{S}$ найдется такой элемент $c \in \mathcal{S}$, отличный от $\mathbf{0}$, для которого $(a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \in \{a \otimes c, b \otimes c\}$.

В нашей работе изучаются линейно-алгебраические свойства коммутативных полуколец; мы не будем рассматривать тривиальное полукольцо, состоящее из одного элемента $\mathbf{0}$. В дальнейшем изложении, если явно не оговорено противное, мы будем использовать слово "полукольцо" для обозначения коммутативных полуколец, содержащих по крайней мере два элемента. Символ $\mathcal{S}$ будет использоваться в работе для обозначения таких полуколец.

Кроме того, следующие обозначения используются в дальнейшем изложении: символ $\mathbb{F}$ используется для обозначения поля, $\mathbb{F}^*$ обозначает множество ненулевых элементов $\mathbb{F}$, через $\mathbb{Z}_+$ обозначается множество неотрицательных целых чисел, через $\mathcal{S}_n$ — симметрическая группа множества $\{1, \ldots, n\}$, через $|X|$ — мощность множества X, через $D^\top$ — матрица, транспонированная к матрице D. Будем использовать обозначение A_{ij} для элемента матрицы A, находящегося в строке с номером i и столбце с номером j, через $A[r_1, \ldots, r_p]$ будем обозначать матрицу, образованную строками матрицы A с номерами $r_1, \ldots, r_p$, через $A[r_1, \ldots, r_p | c_1, \ldots, c_q]$ — матрицу, образованную столбцами с номерами $c_1, \ldots, c_q$ матрицы $A[r_1, \ldots, r_p]$.

1.1.1 Примеры полуколец

В данном подразделе мы приводим примеры, иллюстрирующие определения предыдущего подраздела, а также вводим в рассмотрение некоторые полукольца, важные для дальнейшего изложения. Сначала приведем несколько утверждений, которые позволяют сравнить друг с другом рассматриваемые классы полуколец. Первое из таких утверждений следует непосредственно из определений 1.1.6, 1.1.7 и 1.1.8.

Предложение 1.1.9. *[169, замечание 1.10] Селективные полукольца квазиселективны, квазиселективные полукольца идемпотентны.*

Приведем для полноты доказательство утверждения, связывающего понятия идемпотентного и антинегативного полуколец.

Предложение 1.1.10. *[63] Пусть $\mathcal{S}$ — идемпотентное полукольцо. Тогда $\mathcal{S}$ антинегативно.*

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathcal{S}$ и $a \oplus b = 0$. Тогда $a = a \oplus (a \oplus b) = (a \oplus a) \oplus b = a \oplus b = \mathbf{0}$ и $b = \mathbf{0} \oplus b = a \oplus b = \mathbf{0}$. □

Заметим также, что несмотря на справедливость указанных включений, все перечисленные в формулировках утверждений 1.1.9 и 1.1.10 классы полуколец различны. В дальнейшем мы докажем этот факт, а пока остановимся на наиболее важных для нашей работы в целом примерах полуколец.

Пример 1.1.11. *[65] На множестве $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ вещественных чисел, пополненном бесконечно большим по модулю отрицательным элементом, зададим операции $\oplus$ и $\otimes$, полагая $a \oplus b = \max\{a, b\}$, $a \otimes b = a + b$. Множество $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ является коммутативным селективным полукольцом.*

Доказательство. Следует непосредственно из определений 1.1.1 и 1.1.7. □

Полукольцо, задаваемое примером 1.1.11, называется *макс-алгеброй*. Альтернативный способ определения макс-алгебры дает следующий пример.

Пример 1.1.12. *[45, 130] Множество $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ вещественных чисел, пополненное бесконечно большим положительным элементом, относительно операций сложения $(a, b) \to \min\{a, b\}$ и умножения $(a, b) \to a + b$ является полукольцом, изоморфным макс-алгебре $\mathbb{R}_{\max}$.*

Доказательство. Требуемый изоморфизм задает отображение, переводящее элемент $r \in \mathbb{R}_{\max}$ в $-r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. □

Полукольцо из примера 1.1.12 обычно называется *тропическим полукольцом*. Кроме классических способов определения тропического полукольца, даваемых примерами 1.1.11 и 1.1.12, полезным также оказывается следующий пример.

Пример 1.1.13. *Множество $\mathbb{R}_+$ неотрицательных вещественных чисел относительно операций сложения $(a, b) \to \min\{a, b\}$ и умножения $(a, b) \to a \cdot b$ является полукольцом, изоморфным макс-алгебре $\mathbb{R}_{\max}$.*

Доказательство. Требуемый изоморфизм задает отображение, переводящее элемент $r \in \mathbb{R}_{\max}$ в $2^r \in \mathbb{R}_+$. □

Введем в рассмотрение еще одно полукольцо, которое оказывается важным для доказательства результатов нашей работы.

Пример 1.1.14. *Множество $\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \max, \cdot)$ является коммутативным селективным полукольцом.*

Доказательство. Следует непосредственно из определений 1.1.1 и 1.1.7. □

Теперь мы будем приводить примеры, показывающие различие классов полуколец, упомянутых в утверждениях 1.1.9 и 1.1.10. В частности, согласно утверждению 1.1.9 селективные полукольца квазиселективны. Как показывает следующий пример, обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 1.1.15. *[169, пример 1.11] Пусть $\mathcal{N}$ есть множество всех конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$. Тогда множество $\mathcal{Q} = \mathcal{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ образует полукольцо относительно пересечения и объединения. $\mathcal{Q}$ есть коммутативное квазиселективное полукольцо, не являющееся селективным.*

Доказательство. Из определений 1.1.1 и 1.1.6 следует, что $\mathcal{Q}$ есть коммутативное идемпотентное полукольцо, $\mathbb{N} \in \mathcal{Q}$ есть нулевой элемент. Поскольку $\{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\}$, полукольцо $\mathcal{Q}$ не является селективным.

Пусть $I, J \in \mathcal{Q}$. Если I или J совпадает с $\mathbb{N}$, то через $K \in \mathcal{Q}$ мы обозначаем произвольное конечное множество. Если же I и J конечны, то мы обозначаем $K = I \cup J$ и получаем $(K \cup I) \cap (K \cup J) \in \{K \cup I, K \cup J\}$. Согласно определению 1.1.8 полукольцо $\mathcal{Q}$ квазиселективно. □

Далее, согласно утверждению 1.1.9 квазиселективные полукольца идемпотентны. Обратное опять же, вообще говоря, неверно, как показывает следующий пример.

Пример 1.1.16. *[169, пример 1.12] Пусть $\mathbb{N}^2$ — множество всех пар целых положительных чисел. Пусть $\mathbf{0} = (0,0)$. Положим $(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (\max\{a_1, a_2\}, \max\{b_1, b_2\})$, $(a_1, b_1) \otimes (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$. Тогда $(\mathbb{N}^2 \cup \{\mathbf{0}\}, \oplus, \otimes)$ есть коммутативное идемпотентное полукольцо, не являющееся квазиселективным.*

Доказательство. Из определений 1.1.1 и 1.1.6 следует, что $(\mathbb{N}^2 \cup \{\mathbf{0}\}, \oplus, \otimes)$ есть коммутативное идемпотентное полукольцо.

Далее, положим $a = (1,3)$, $b = (2,2)$. Положим $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{N}^2$. Получаем, что $a \otimes r = (r_1, 3r_2)$ и $b \otimes r = (2r_1, 2r_2)$, и тогда $(a \otimes r) \oplus (b \otimes r) = (2r_1, 3r_2) \notin \{a \otimes r, b \otimes r\}$. Согласно определению 1.1.8 полукольцо $(\mathbb{N}^2 \cup \{\mathbf{0}\}, \oplus, \otimes)$ не является квазиселективным. □

Наконец, согласно утверждению 1.1.10 идемпотентные полукольца антинегативны. Обратное, вообще говоря, неверно: полукольцо $(\mathbb{Z}_+, +, \cdot)$ неотрицательных целых чисел дает пример антинегативного полукольца, которое не является идемпотентным.

1.1.2 Линейная зависимость

Важнейшим объектом исследования в классической линейной алгебре является понятие линейного пространства. Модули над кольцами являются одним из обобщений этого понятия, а так называемые *полумодули* выступают в качестве естественного обобщения этого понятия в линейной алгебре над полукольцами. Следующее определение не предполагает коммутативности полукольца S.

Определение 1.1.17. Коммутативный моноид $(U, \oplus, \mathbf{0})$ называется *левым полумодулем* над полукольцом S (или просто *левым S-полумодулем*), если задана операция умножения на *скаляр* $S \times U \to U$, которая при всех $\lambda, \mu \in S$ and $a, b \in U$ удовлетворяет условиям $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$, $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$, $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$, $1a = a$ и $\mathbf{0}a = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Понятие правого S-полумодуля определяется двойственным образом. Как и в классической линейной алгебре, операции сложения и умножения на скаляр в S-полумодуле будет обозначаться также, как соответствующие операции в полукольце S. Важным примером полумодуля является свободный полумодуль S^ν, который определяется как множество строк длины ν с элементами полукольца S с покоординатными операциями сложения и умножения на скаляр. Полукольцо S само является S-полумодулем, который отождествляется с S^1. *Подполумодулем* в U называется подмножество U', замкнутое относительно операций сложения и умножения на скаляр. Минимальный подполумодуль, содержащий все элементы некоторого множества $G \subset U$, называется подполумодулем, *порожденным* этим множеством.

Как и в классическом случае, важным понятием в линейной алгебре над полукольцом является линейная зависимость. Теория линейной зависимости над полукольцами может строиться отдельно как для левых, так и для правых полумодулей, но мы возвращаемся к рассмотрению наиболее важного для нас случая коммутативных полуколец. Оказывается, что существует несколько различных полезных обобщений понятия линейной зависимости на случай полуколец. Следующее определение предоставляет наиболее простой способ такого обобщения.

Определение 1.1.18. [1] Набор элементов $u_1, \ldots, u_n$ левого S-полумодуля U называется *слабо линейно зависимым (слабо зависимым)*, если один из них линейно выражается через другие, т.е., если найдется индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$ и элементы $\lambda_j \in \mathcal{S}$, удовлетворяющие условию $u_i = \bigoplus_{j \neq i} \lambda_j \otimes u_j$.

Определение 1.1.18 является одним из важных обобщений понятия линейной зависимости на случай полумодулей, и оно играет заметную роль в

некоторых исследованиях последнего времени. Отметим работу Вагнера [139], где это понятие было положено в основу теории размерности полумодулей. Серия работ Кривулина [92, 93] доказывает важность этого понятия для исследования линейных векторных уравнений в идемпотентной алгебре. Понятие слабой линейной зависимости нашло отражение и в работах автора этого текста, отметим статью [146] о теории размерности полумодулей и публикацию [162], содержащую описание подгрупп полугруппы тропических матриц. Тем не менее, в некоторых важных частных случаях определение 1.1.18 оказывается недостаточно сильным. В частности, аналоги базовых результатов классической линейной алгебры оказываются неверными для такого определения линейной зависимости, как показывают пример 2.14 из статьи [1] и пример 1.1.27, приведенный ниже в нашей работе. Другое обобщение понятия линейной зависимости на случай полуколец было введено Гондраном и Мину и сейчас является довольно важным инструментом для изучения некоторых проблем теории оптимизации, теории графов и некоторых других разделов математики [1, 67, 68].

Определение 1.1.19. [68] Набор элементов $u_1, \dots, u_n$ левого S-полумодуля U называется *линейно зависимым в смысле Гондрана–Мину (или GM-линейно зависимым, или просто GM-зависимым)*, если найдутся множества I и J и скаляры $\lambda_i \in S$, не все равные $\mathbf{0}$, удовлетворяющие условиям $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = \{1, \dots, n\}$ и $\bigoplus_{i \in I} \lambda_i \otimes u_i = \bigoplus_{j \in J} \lambda_j \otimes u_j$.

Замечание 1.1.20. *Если набор не является GM-зависимым, то он называется GM-линейно независимым (или GM-независимым).*

Замечание 1.1.21. *В определениях 1.1.18 и 1.1.19 и далее в тексте результат суммирования по пустому множеству полагается равным элементу, нейтральному относительно соответствующей операции. Например, если в определении 1.1.19 множество I пусто, мы считаем, что $\bigoplus_{i \in I} \lambda_i \otimes u_i = \boldsymbol{0}$.*

Еще одно понятие линейной зависимости рассматривалось Изхакяном в работе [77] в связи с изучением некоторых проблем тропической математики. Мы приведем обобщение этого понятия на случай произвольного полукольца.

Определение 1.1.22. [1] Набор строк $a_1, \dots, a_n \in S^m$ называется *тропически зависимым*, если найдутся скаляры $\lambda_i \in S$, не все равные $\mathbf{0}$, и при всех $k \in \{1, \dots, m\}$ найдутся множества I_k и J_k, удовлетворяющие условиям $I_k \cap J_k = \varnothing$, $I_k \cup J_k = \{1, \dots, n\}$ и $\bigoplus_{i \in I_k} \lambda_i \otimes A_{ik} = \bigoplus_{j \in J_k} \lambda_j \otimes A_{jk}$.

Замечание 1.1.23. *Если набор строк не является тропически зависимым, он называется тропически независимым.*

Отметим простые свойства введенных понятий, которые обобщают аналогичные утверждения классической линейной алгебры на случай полуколец и следуют непосредственно из определений.

Предложение 1.1.24. *Пусть $\alpha \subset \beta$ — наборы элементов S-полумодуля U. Если система β слабо (соотв., GM-, тропически) зависима, то система α также слабо (соотв., GM-, тропически) зависима.*

Предложение 1.1.25. *Слабо зависимые системы строк GM-зависимы. GM-зависимые системы строк тропически зависимы.*

Заметим, что, в отличие от понятий слабой зависимости и зависимости в смысле Гондрана–Мину, определение 1.1.22 не сводится к классическому понятию линейной зависимости в случае, когда S является полем. Тем не менее, понятие тропической зависимости оказывается важным для исследований в области тропической математики [77, 170]. В одном из наиболее важных частных случаев, когда $S = \mathbb{R}_{\max}$, справедлив аналог одного из базовых свойств линейной зависимости векторов над полем.

Теорема 1.1.26. *[65] Пусть $a_1, \ldots, a_n \in (\mathbb{R}_{\max})^k$, $n > k$. Тогда строки $a_1, \ldots, a_n$ GM-зависимы.*

Из утверждения 1.1.25 следует теперь, что в условиях теоремы 1.1.26 строки $a_1, \ldots, a_n$ также тропически зависимы. Утверждение для слабой зависимости, аналогичное теореме 1.1.26, оказывается неверным, как показывает следующий пример.

Пример 1.1.27. *[1, пример 7.12] Система строк $(-\infty, 0, -\infty)$, $(-\infty, -\infty, 0)$, $(0, -\infty, 0)$, $(0, 0, -\infty)$ из $(\mathbb{R}_{\max})^3$ не является слабо зависимой.*

Напомним, что согласно утверждению 1.1.25 слабо зависимые системы строк всегда GM-зависимы, пример 1.1.27 показывает, что обратное, вообще говоря, неверно. Приведем еще один пример, показывающий, что тропически зависимые системы строк могут не быть GM-зависимыми.

Пример 1.1.28. *[1, пример 2.24] Система строк $(-\infty, 0, 0)$, $(0, -\infty, 0)$, $(0, 0, -\infty)$ из $(\mathbb{R}_{\max})^3$ является тропически зависимой, но не является GM-зависимой.*

Примеры 1.1.27 и 1.1.28 показывают, что утверждения о понятиях линейной зависимости, обратные утверждениям предложения 1.1.25, оказываются

неверными. Как было отмечено, понятия GM- и слабой зависимостей векторов над полем $\mathbb{F}$ соответствуют классическому понятию линейной зависимости над $\mathbb{F}$. Следующий пример показывает, что многие классические свойства линейной зависимости тем не менее могут нарушиться, если рассмотреть эти векторы как строки над некоторым полукольцом, содержащемся в $\mathbb{F}$.

Пример 1.1.29. *[147] Пусть $\zeta \in \mathbb{R}$ — трансцендентное число. Пусть $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ — полукольцо, порожденное элементами $1, \zeta \in \mathbb{R}$, иными словами, $\mathcal{S}$ — множество значений в точке ζ всевозможных многочленов с целыми неотрицательными коэффициентами. Тогда набор векторов $\overrightarrow{a} = (\zeta, 1)$, $\overrightarrow{b} = (1, 1)$, $\overrightarrow{c} = (1, 0)$, принадлежащих $\mathcal{S}^2$, линейно зависим над $\mathbb{R}$, но не является GM-зависимым над полукольцом $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Заметим сначала, что уравнение линейной зависимости

$$1 \cdot \overrightarrow{a} = 1 \cdot \overrightarrow{b} + (\zeta - 1) \cdot \overrightarrow{c},$$

хотя и доказывает линейную зависимость над $\mathbb{R}$, не влечет GM-зависимости над $\mathcal{S}$. Действительно, элемент $(\zeta - 1)$ может не лежать в полукольце $\mathcal{S}$.

Предположим, тем не менее, что строки $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ GM-зависимы над полукольцом $\mathcal{S}$. Тогда, согласно определению 1.1.19 для некоторых многочленов $f_1(t), f_2(t), f_3(t) \in \mathbb{Z}[t]$, каждый из которых имеет либо только неотрицательные, либо только неположительные коэффициенты, верно, что $f_1(\zeta)\zeta + f_2(\zeta) + f_3(\zeta) = 0$, $f_1(\zeta) + f_2(\zeta) = 0$, причем по крайней мере одно из чисел $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$, $f_3(\zeta)$ отлично от 0. Имеем $f_1(\zeta) = -f_2(\zeta)$, поэтому $f_1(\zeta) \neq 0$ и

$$f_1(\zeta)(\zeta - 1) + f_3(\zeta) = 0. \tag{1.1.1}$$

Тогда, в частности, многочлен $f_1(t)$ ненулевой, и поэтому многочлен $f_1(t)(t-1)$ содержит как положительные, так и отрицательные коэффициенты. Таким образом, целочисленный многочлен $h(t) = f_1(t)(t-1) + f_3(t)$ содержит ненулевые коэффициенты. Согласно равенству (1.1.1) число ζ является корнем многочлена $h(t)$. Полученное противоречие показывает, что строки $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ не являются GM-зависимыми над полукольцом $\mathcal{S}$. □

Отметим, что согласно утверждению 1.1.25 в условиях примера 1.1.29 набор строк $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ также не является слабо зависимым над $\mathcal{S}$.

1.2 Ранг матрицы

В этом разделе вводятся рассматриваемые в работе ранговые функции матриц над полукольцом. Матрица над полукольцом $\mathcal{S}$ называется *нулевой*, если

она состоит только из нейтральных по сложению элементов полукольца, т.е., из элементов $\mathbf{0}$. Далее будем обозначать нулевую матрицу размера $m \times n$ через $O_{m\times n}$. Аналогично, матрица $A \in \mathcal{S}^{n\times n}$, такая что $A_{ii} = \mathbf{1}$ при всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, и $A_{ij} = \mathbf{0}$ при $i \neq j$, называется *единичной* матрицей порядка n. Далее будем обозначать ее через I_n.

Введем сначала ранговые функции, связанные с понятиями линейной зависимости, которые обсуждались в подразделе 1.1.2. Наиболее простое обобщение понятия ранговой функции дает максимальный слабый ранг.

Определение 1.2.1. [1] Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{S}^n$ — система строк. Максимальное число строк в слабо независимых подсистемах системы $a_1, \ldots, a_m$ называется *максимальным слабым рангом* этой системы. Максимальный слабый ранг системы строк матрицы $A \in \mathcal{S}^{m\times n}$ обозначается через $Wr(A)$, максимальный слабый ранг системы строк транспонированной матрицы $A^\top$ (столбцов матрицы A) — через $Wc(A)$.

Пример 1.1.27 показывает, что в случае матриц над тропическим полукольцом (который является одним из важнейших в различных приложениях) функция максимального слабого ранга обладает весьма патологическим (см. также [1]) поведением. Действительно, для слабого ранга оказываются неверными обобщения многих базовых результатов классической линейной алгебры: как показывает пример 1.1.27, максимальный слабый ранг матрицы размера $m \times n$ может превосходить $\min\{m, n\}$. Поэтому наибольшее внимание в нашей работе уделяется другим ранговым функциям. Одной из таких функций является ранг Гондрана–Мину, который играет важную роль для некоторых задач теории графов и теории оптимизации [1, 68].

Определение 1.2.2. [1] Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{S}^n$ — система строк. Максимальное число строк в GM-независимых подсистемах системы $a_1, \ldots, a_m$ называется *рангом Гондрана–Мину* (или, сокращенно, *GM-рангом*) этой системы. GM-ранг системы строк матрицы $A \in \mathcal{S}^{m\times n}$ обозначается через $GMr(A)$, GM-ранг системы строк транспонированной матрицы $A^\top$ (столбцов матрицы A) — через $GMc(A)$.

В силу того, что ранг Гондрана–Мину матрицы над полем совпадает с ее классическим рангом, строчный ранг Гондрана–Мину равен столбцовому в этом случае. Отметим, что, вообще говоря, это не так: строчный ранг Гондрана–Мину матрицы может не совпадать со столбцовым. Подробное исследование этого феномена было проведено автором в работе [170]. Среди других обобщений понятия ранга отметим также те, которые связаны с аналогами понятия вырожденности матрицы.

Определение 1.2.3. [1] Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, $B \in \mathcal{S}^{n\times n}$. *Положительным определителем* матрицы B называется элемент

$$\|B\|^+ = \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{A}_n} B_{1,\sigma(1)} \otimes B_{2,\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes B_{n,\sigma(n)} \in \mathcal{S},$$

где через $\mathcal{A}_n$ обозначена знакопеременная группа множества $\{1,\ldots,n\}$. Аналогично, элемент

$$\|B\|^- = \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{S}_n\setminus\mathcal{A}_n} B_{1,\sigma(1)} \otimes B_{2,\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes B_{n,\sigma(n)} \in \mathcal{S}$$

называется *отрицательным определителем* матрицы B. Матрица B называется *d-невырожденной*, если $\|B\|^+ \neq \|B\|^-$.

Понятие d-вырожденности позволяет ввести еще одно обобщение классической ранговой функции матриц над полем.

Определение 1.2.4. [1] *Детерминантным рангом* $d(M)$ матрицы $M \in \mathcal{S}^{p\times q}$ называется максимальный размер d-невырожденного минора. Полагаем по определению $d(O_{p\times q}) = 0$.

Теперь мы будем вводить понятие тропического ранга, которое играет важную роль для изучения матриц над макс-алгеброй [45, 86, 170]. В следующем подразделе будет дана геометрическая характеризация этого понятия, а сейчас нас будет интересовать комбинаторная характеризация, основанная на понятии тропической вырожденности матрицы.

Определение 1.2.5. [1, 45] Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, $B \in \mathcal{S}^{n\times n}$. *Перманент* матрицы B определяется как

$$perm(B) = \bigoplus_{\sigma\in\mathcal{S}_n} B_{1,\sigma(1)} \otimes B_{2,\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes B_{n,\sigma(n)} = \|B\|^+ \oplus \|B\|^- \in \mathcal{S}.$$

Матрица B называется *тропически вырожденной*, если для некоторых множеств I и J выполнены условия $I \cup J = \mathcal{S}_n$, $I \cap J = \emptyset$ и $\bigoplus_{\sigma\in I} B_{1,\sigma(1)} \otimes B_{2,\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes B_{n,\sigma(n)} = \bigoplus_{\tau\in J} B_{1,\tau(1)} \otimes B_{2,\tau(2)} \otimes \ldots \otimes B_{n,\tau(n)}$. Если матрица B не является тропически вырожденной, она называется *тропически невырожденной*.

Замечание 1.2.6. *Пусть $\mathcal{S} = \mathbb{R}_{\max}$ или $\mathcal{S} = \mathbb{B}$, $k > 1$. Как показывает определение 1.1.11, матрица B в этом случае является тропически вырожденной, если и только если максимум в равенстве для перманента матрицы B достигается на двух перестановках из $\mathcal{S}_n$, т.е. если найдутся σ и φ из $\mathcal{S}_n$, такие что $\sigma \neq \varphi$ и $perm(B) = B_{1,\sigma(1)} \otimes B_{2,\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes B_{n,\sigma(n)} = B_{1,\varphi(1)} \otimes B_{2,\varphi(2)} \otimes \ldots \otimes B_{n,\varphi(n)}$.*

Определение 1.2.7. [1, 45] *Тропическим рангом* $trop(M)$ матрицы $M \in \mathcal{S}^{p\times q}$ называется максимальный размер тропически невырожденного минора. Полагаем по определению $trop(O_{p\times q}) = 0$.

Для изучения тропических матриц очень важна следующая теорема, которая была доказана различными способами Девелином, Сантосом и Штурмфельсом в работе [45], Изхакяном в статье [77], а также Акян, Гобером и Гутерманом в [2].

Теорема 1.2.8. *[2, теорема 1.4] [77, теорема 5.11] Тропический ранг матрицы* $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{m\times n}$ *равен наибольшей мощности тропически независимой системы строк матрицы* A.

Заметим, что тропический ранг матрицы инвариантен относительно ее транспонирования согласно определению 1.2.7. Это наблюдение позволяет вывести интересное следствие теоремы 1.2.8.

Следствие 1.2.9. *[2, 45, 77] Наибольшие мощности тропически независимых систем строк и систем столбцов матрицы* $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{m\times n}$ *совпадают.*

Факторизационный ранг, который для матриц над макс-алгеброй также известен как ранг Барвинка [45], также оказывается важным для изучения полуколец, а также для решения некоторых задач теории сложности и тропической геометрии [9, 15, 45].

Определение 1.2.10. [1, 45] Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, $\mathbf{1} \in \mathcal{S}$, $A \in \mathcal{S}^{m\times n}$. *Факторизационным рангом* $f(A)$ матрицы A называется наименьшее число k, для которого существуют матрицы $B \in \mathcal{S}^{m\times k}$ и $C \in \mathcal{S}^{k\times n}$, для которых $A = B \otimes C$. Полагаем по определению $f(O_{p\times q}) = 0$.

Замечание 1.2.11. *Заметим, что в полукольце* $(\mathbb{Z}_+\setminus\{1\}, +, \cdot)$ *матрица* (2) *размера* 1×1 *не может быть записана в виде произведения двух матриц. Этим обусловлено требование* $\mathbf{1} \in \mathcal{S}$ *в определении 1.2.10. Действительно, если* $\mathbf{1} \in \mathcal{S}$, *то верны равенства* $I_m \otimes A = A \otimes I_n = A$ *для любой матрицы* $A \in \mathcal{S}^{m\times n}$. *В частности, эти равенства показывают, что* $f(A) \leqslant \min\{m, n\}$.

Отметим простое свойство введенных понятий, которое следует непосредственно из определений.

Лемма 1.2.12. *Максимальный слабый, факторизационный, детерминантный, тропический ранги и строчный и столбцовый ранги Гондрана–Мину матрицы* A *над полукольцом инвариантны относительно перестановок строк и столбцов матрицы* A *и относительно добавления повторяющихся или нулевых строк или столбцов к матрице* A.

Связь введенных ранговых функций исследовалась в работе [1] для матриц над макс-алгеброй. Следующие утверждения остаются в силе и в общем случае, и мы приведем их доказательства для полноты изложения.

Лемма 1.2.13. *Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, $A \in \mathcal{S}^{p\times q}$. Тогда* $\operatorname{trop}(A) \leqslant d(A)$.

Доказательство. Пусть матрица $B \in \mathcal{S}^{n\times n}$ d-вырождена. Положив в определении 1.2.5 $I = \mathcal{A}_n$, $J = \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$, получаем, что матрица B тропически вырождена. Таким образом, размер наибольшей тропически невырожденной подматрицы матрицы A не превосходит размера наибольшей d-невырожденной подматрицы. □

Лемма 1.2.14. *Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, $A \in \mathcal{S}^{p\times q}$. Тогда $f(A) \leqslant Wr(A)$.*

Доказательство. Пусть $Wr(A) = r$, тогда согласно определению 1.2.1 любые $r+1$ строк матрицы A слабо зависимы. Из определения 1.1.18 теперь следует, что строки матрицы A линейно выражаются через некоторые r ее строк (множество номеров этих строк обозначим через $K = \{k_1, \ldots, k_r\}$). Тогда для некоторых $(\lambda_{ik}) \in \mathcal{S}$ (где $i \in \{1, \ldots, p\}$, $k \in K$) верно, что $A_{ij} = \bigoplus_{k\in K} \lambda_{ik} \otimes A_{kj}$ при всех $j \in \{1, \ldots, q\}$. Поэтому $A = \Lambda \otimes A[k_1, \ldots, k_r]$, где Λ обозначает матрицу размера $p \times r$, состоящую из элементов (λ_{ik}). □

Леммы 1.2.13 и 1.2.14 устанавливают неравенства, показывающие взаимосвязь рассматриваемых ранговых функций. Задача об установлении аналогичного неравенства для понятий детерминантного ранга и ранга Гондрана–Мину оказывается значительно более сложной. Она была решена Гондраном и Мину для матриц над макс-алгеброй в работе [65], а в наиболее общей форме — впоследствии в монографии [68].

Теорема 1.2.15. *[68] Пусть $\mathcal{S}$ — селективное полукольцо, ненулевые элементы которого обратимы по умножению. Тогда следующие условия для матрицы $A \in \mathcal{S}^{k\times k}$ эквивалентны:*

(i) строки матрицы A GM-зависимы;

(ii) столбцы матрицы A GM-зависимы;

(iii) $\|A\|^+ = \|A\|^-$.

Как следствие теоремы 1.2.15 можно получить неравенство, связывающее детерминантный ранг и ранг Гондрана–Мину матрицы над макс-алгеброй.

Теорема 1.2.16. *[1, лемма 8.5] Пусть $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{m\times n}$. Тогда $f(A) \geqslant GMr(A) \geqslant d(A)$.*

Из лемм 1.2.13, 1.2.14 и теоремы 1.2.16 следует теперь теорема о сравнении ранговых функций матриц над макс-алгеброй.

Теорема 1.2.17. *[1, теорема 8.6] Пусть* $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{m\times n}$. *Тогда* $Wr(A) \geqslant f(A) \geqslant GMr(A) \geqslant d(A) \geqslant \operatorname{trop}(A)$.

Отметим, что леммы 1.2.13 и 1.2.14 гарантируют выполнение неравенств $Wr(A) \geqslant f(A)$ и $d(A) \geqslant \operatorname{trop}(A)$ для матриц над любым полукольцом. В то же время, неравенства $f(A) \geqslant GMr(A)$ и $GMr(A) \geqslant d(A)$ могут в общем случае нарушаться, как показывают следующие примеры.

Пример 1.2.18. *Пусть* $\mathcal{S}$ *— полукольцо из примера 1.1.29,*

$$B = \begin{pmatrix} \zeta & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{3\times 2}.$$

Тогда $GMr(B) = 3 > f(B)$.

Доказательство. Равенство $GMr(A) = 3$ следует из примера 1.1.29, неравенство $f(A) < 3$ — из замечания 1.2.11. □

Заметим, что пример 1.2.18 показывает также, что утверждение теоремы Гондрана–Мину (то есть, теоремы 1.2.15), вообще говоря, может не выполняться, если полукольцо $\mathcal{S}$ не является селективным. Базовым результатом линейной алгебры является эквивалентность условий (i)–(iii) из теоремы 1.2.15 для любой матрицы A над полем $\mathbb{F}$; в то же время, эта эквивалентность может нарушиться, если рассматривать ранг матрицы A относительно полукольца $\mathcal{S}$, вложенного в поле $\mathbb{F}$, как показывает пример 1.2.18.

Следующий пример показывает, что детерминантный ранг матрицы над некоторым полукольцом может превосходить ранг Гондрана–Мину. Это дает еще один пример нарушения утверждения теоремы 1.2.15 для матрицы над полукольцом, не являющимся селективным.

Пример 1.2.19. *Пусть* $\mathcal{Q}$ *— полукольцо из примера 1.1.15,*

$$A = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2\} \\ \{2\} & \{1\} \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}^{2\times 2}.$$

Тогда $d(A) = 2 > GMr(A)$.

Доказательство. Согласно определению операций в полукольце $\mathcal{Q}$ верно, что $\|A\|^+ = \{1\}$, $\|A\|^- = \{2\}$. Из определения 1.2.4 теперь следует, что $d(A) = 2$. Далее, умножив каждую строку матрицы A на $\{1, 2\}$, мы получим матрицу с равными строками. Поэтому из определения 1.1.19 следует, что строки матрицы A GM-зависимы, т.е., $GMr(A) < 2$. □

1.3 Тропическая линейная алгебра

Данный раздел посвящен основам и некоторым важным задачам тропической линейной алгебры, будут изучаться свойства ранговых функций, важных для тропической алгебраической геометрии. Тропический подход в алгебраической геометрии стал развиваться во многом благодаря работам бразильского математика Имре Симона [129]. Отметим, что, как утверждают авторы работы [131], прилагательное "тропический" было предложено французскими математиками, в частности, Жаном-Эриком Пеном, в знак признания заслуг Имре Симона в области развития тропического подхода в математике. Одной из работ, заложивших основы тропической геометрии, является также статья самого Ж.-Э. Пена [118]; отметим также работы Виктора Маслова, в которых он установил связь тропической математики и квантовой механики и разработал новый метод исследования тропических структур [104, 107]. Этот метод теперь называется деквантованием Маслова и находит широкое применение, как показывают, например, работы Григория Литвинова [102, 104]. Методы тропической геометрии полезны для изучения других разделов математики и для многочисленных приложений [1, 5, 74], в том числе для исследований в области вычислительной биологии [114].

1.3.1 Основные понятия тропической геометрии

Основным объектом тропической математики является *тропическое полукольцо*, то есть полукольцо из определения 1.1.12. Отметим, что конечные элементы тропического полукольца представляют особенную важность, поэтому часто [45] говорят о тропическом полукольце как о множестве $\mathbb{R}$ с операциями $\oplus : (a, b) \to \min\{a, b\}$ и $\otimes : (a, b) \to a + b$. Наряду с тропическим полукольцом, одним из ключевых понятий тропической геометрии является понятие поля с вещественным неархимедовым нормированием [31, 45, 47, 108].

Определение 1.3.1. [98] Пусть $\mathcal{F}$ — поле. Функция $val : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ задает *неархимедово нормирование* поля $\mathcal{F}$, если

(1) $val(x) = +\infty$ тогда и только тогда, когда $x = 0 \in \mathcal{F}$;
(2) $val(xy) = val(x) + val(y)$ для всех $x, y \in \mathcal{F}$;
(3) $val(x + y) \geqslant \min\{val(x), val(y)\}$ для всех $x, y \in \mathcal{F}$.

Важным ограничением, которое часто накладывается на поле с неархимедовым нормированием, является требование его алгебраической замкнутости [45, 47, 130]. Полезными примерами таких полей являются так называемые *кольца Мальцева–Неймана*, глубокое исследование которых было проведено в работе [119].

Определение 1.3.2. Пусть R — кольцо. Через $\mathbf{H}_R$ обозначим множество формальных сумм вида

$$a(t) = \sum_{e \in \mathbb{R}} a_e t^e, \tag{1.3.1}$$

где t — переменная, *коэффициенты* $\{a_e\}$ принадлежат кольцу R, а *носитель* $E(a) = \{e \in \mathbb{R} : a_e \neq 0\}$ является вполне упорядоченным подмножеством множества $\mathbb{R}$, т.е. любое непустое подмножество множества $E(a)$ содержит наименьший элемент. *Степенью* ненулевой суммы $a \in \mathbf{H}_R$ называется показатель степени его *главного члена*, т.е. $\deg a = \min E(a)$. Элемент $a_0 \in R$ называется *свободным членом* a. Степень нулевой суммы из $\mathbf{H}_R$ полагается равной $+\infty$.

Замечание 1.3.3. *Будем естественным образом отождествлять свободные члены сумм вида (1.3.1) и элементы $r \in R$, то есть писать просто r вместо rt^0.*

Следующее определение естественным образом задает кольцевую структуру на множестве $\mathbf{H}_R$.

Определение 1.3.4. Пусть R — кольцо, $a = \sum_{e \in \mathbb{R}} a_e t^e \in \mathbf{H}_R$, $b = \sum_{e \in \mathbb{R}} b_e t^e \in \mathbf{H}_R$. Суммой элементов a и b называется элемент $a+b = \sum_{e \in \mathbb{R}} (a_e + b_e) t^e \in \mathbf{H}_R$, их произведением — элемент

$$ab = \sum_{e \in \mathbb{R}} \gamma_e t^e \in \mathbf{H}_R, \text{ где } \gamma_e = \sum_{g+h=e} a_g b_h. \tag{1.3.2}$$

Важная для нашего исследования теорема является одним из основных результатов работы [119] и дает глубокую характеризацию колец Мальцева–Неймана.

Теорема 1.3.5. *[119, следствие 4] Кольцо $\mathbf{H}_\mathbb{F}$ является полем для любого поля $\mathbb{F}$. Кроме того, если поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, то поле $\mathbf{H}_\mathbb{F}$ также алгебраически замкнуто.*

Согласно определению 1.3.1 отображение deg задает неархимедово нормирование на поле $\mathbf{H}_\mathbb{F}$. Основные понятия и базовые результаты тропической алгебраической геометрии связаны с алгебраически замкнутыми полями с неархимедовыми нормированиями, и поле $\mathbf{H}_\mathbb{C}$ дает один из важнейших примеров таких полей [31, 45, 119]. Кроме того, полезными для дальнейших рассуждений оказываются поля $\mathbf{H}_\mathbb{F}$ и при других базовых полях $\mathbb{F}$. Чтобы продолжить изложение основ тропической геометрии, нам понадобится понятие тропического полинома, которое является естественным обобщением понятия полинома над полем.

Определение 1.3.6. [130] *Тропическим полиномом* будем называть выражение вида

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \min_{h=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathcal{A}} \{c_h + h_1\xi_1 + \ldots + h_n\xi_n\}, \qquad (1.3.3)$$

где $c_h \in \mathbb{R}$, а $\mathcal{A}$ — конечное подмножество множества $(\mathbb{Z}_+)^n$.

Отображение deg естественным образом обобщается на случай векторных и матричных аргументов, а также на случай, когда аргументом является полином.

Определение 1.3.7. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{H}^*_{\mathbb{F}})^n$, $A \in (\mathbf{H}^*_{\mathbb{F}})^{d\times n}$. Вектор $\deg x \in \mathbb{R}$ определяется как $(\deg x_1, \ldots, \deg x_n)$. Если матрица $B \in \mathbb{R}^{d\times n}$ такова, что $B_{ij} = \deg A_{ij}$ при всех $i \in \{1, \ldots, d\}$ и $j \in \{1, \ldots, m\}$, то мы пишем $B = \deg A$ и называем матрицу A *поднятием* матрицы B.

Определение 1.3.8. Рассмотрим полином

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{h=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathcal{A}} C_h \cdot x_1^{h_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{h_n} \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}[x_1, \ldots, x_n], \qquad (1.3.4)$$

где $C_h \neq 0$ при $h \in \mathcal{A}$; положим $c_h = \deg C_h$ при каждом $h \in \mathcal{A}$. В этом случае через $\deg f$ обозначается тропический многочлен F из равенства (1.3.3).

Отметим важность задачи факторизации тропических многочленов для приложений классической математики. Как указано в работе [131], представление многочлена $\deg f$ в виде произведения тропических многочленов позволяет упростить решение задачи о факторизации самого многочлена f. Возникающее в связи с этими проблемами понятие неприводимого тропического многочлена также подвергается изучению [158].

Одним из основных понятий тропической алгебраической геометрии является понятие тропического многообразия. Для того, чтобы определить это понятие, нам требуется понятие аффинного многообразия, порожденного идеалом кольца многочленов $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$. Мы будем рассматривать классическое понятие аффинного многообразия, определенного на n-мерном алгебраическом торе $(\mathbf{H}^*_{\mathbb{C}})^n$; такой выбор оказывается удобным для построения теории тропических многообразий [130, раздел 2].

Определение 1.3.9. [130] Пусть $I \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$ — идеал. *Аффинным многообразием, порожденным идеалом* I, называется множество

$$V(I) = \{(u_1, \ldots, u_n) \in (\mathbf{H}^*_{\mathbb{C}})^n \mid \forall f \in I \;\; f(u_1, \ldots, u_n) = 0\}.$$

Понятие тропического многообразия, порожденного идеалом I, определяется с помощью понятия аффинного многообразия.

Определение 1.3.10. [130] Пусть $I \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$ — идеал. *Тропическим многообразием, порожденным идеалом* I, называется образ множества $V(I)$ при отображении deg, т.е.

$$\deg V(I) = \{(\deg u_1, \ldots, \deg u_n) \in \mathbb{R}^n \mid (u_1, \ldots, u_n) \in V(I)\}.$$

Для того, чтобы сформулировать основную теорему о тропических многообразиях, нам понадобится определение тропической гиперповерхности.

Определение 1.3.11. [130] *Тропической гиперповерхностью, соответствующей* тропическому многочлену F из равенства (1.3.3), называется множество всех точек $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, для которых минимум в выражении (1.3.3) достигается как минимум два раза.

Определение 1.3.12. [130] Пусть $f \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$, $J \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$. Тропическая гиперповерхность, соответствующая многочлену $\deg f$, обозначается через $\mathcal{T}(f)$. Введем также обозначение $\mathcal{T}(J) = \bigcap_{g \in J} \mathcal{T}(g)$.

Важная характеризация пересечений тропических гиперповерхностей основана на понятии базового идеала. Для того, чтобы определить это понятие, нам потребуется ввести в рассмотрение так называемую *базовую форму* полинома.

Определение 1.3.13. [130] Пусть $f \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$ — многочлен из равенства (1.3.4), $\omega \in \mathbb{R}^n$. *ω-весом* монома $C_h \cdot x_1^{h_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{h_n}$ называется число $\deg C_h + h_1\omega_1 + \ldots + h_n\omega_n \in \mathbb{R}$. Через $\widetilde{f}$ обозначим сумму всех мономов полинома f, которые обладают наименьшим ω-весом ν. *Базовой формой* полинома f *относительно вектора* ω называется полином $in_\omega(f) = t^{-\nu}\widetilde{f}(t^{\omega_1}x_1, \ldots, t^{\omega_n}x_n) \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$.

Теперь мы можем определить понятие базового идеала.

Определение 1.3.14. [130] Пусть $I \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$ — идеал, $\omega \in \mathbb{R}^n$. *Базовым идеалом* идеала I *относительно вектора* ω называется идеал, порожденный базовыми формами многочленов идеала I, т.е.

$$in_\omega(I) = \langle in_\omega(f) : f \in I \rangle \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n].$$

Следующая теорема устанавливает связь между понятиями тропической гиперповерхности и базового идеала.

Теорема 1.3.15. *[130, теорема 2.1] Пусть $I \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$ — идеал. Множество всех $\omega \in \mathbb{R}^n$, для которых базовый идеал $in_\omega(I)$ не содержит мономов, совпадает с множеством $\mathcal{T}(I)$ из определения 1.3.12.*

Теперь сформулируем основную теорему о тропических многообразиях. В различных формулировках эта теорема встречается в работах [18, 45, 47, 130]; мы сформулируем ее, следуя способу, принятому в работах [45, 130].

Теорема 1.3.16. *[45, теорема 3.1] Пусть $I \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$ — идеал. Тогда множество $\mathcal{T}(I)$ из определения 1.3.12 совпадает с тропическим многообразием $\deg V(I)$, порожденным идеалом I.*

Таким образом, мы видим, что тропическое многообразие, порожденное идеалом $I \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$, совпадает с пересечением тропических гиперповерхностей $\mathcal{T}(I) = \bigcap_{f \in I} \mathcal{T}(f)$. Рассмотрим множество I' — подмножество идеала I. Из теоремы 1.3.16 следует включение $\mathcal{T}(I) \subset \bigcap_{g \in I'} \mathcal{T}(g)$, а обратное включение может, конечно, не выполняться. Тем не менее, важную роль для вычислительных задач играет [19] случай $\mathcal{T}(I) = \bigcap_{g \in I'} \mathcal{T}(g)$, чем обусловлено рассмотрение следующего понятия.

Определение 1.3.17. [123] Пусть $I \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$ — идеал. Множество $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset I$ называется *тропическим базисом* идеала I, если $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$ и $\mathcal{T}(I) = \mathcal{T}(f_1) \cap \ldots \mathcal{T}(f_k)$.

Основной интерес представляет случай идеалов, порожденных семейством комплексных многочленов [19, 45, 130]. Нам потребуется следующее определение.

Определение 1.3.18. Пусть J — идеал кольца $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. *Тропическим базисом* идеала J называется тропический базис идеала $J' \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}[x_1, \ldots, x_n]$, порожденного многочленами из J.

В работе [19] была также доказана следующая важная теорема о существовании тропического базиса.

Теорема 1.3.19. *[19, теорема 2.9] Идеал I кольца $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ всегда имеет тропический базис.*

Самый простой пример тропического базиса дают главные идеалы кольца.

Пример 1.3.20. *[19, пример 2.7] Пусть идеал I кольца $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ порожден элементом $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда одноэлементное множество $\{f\}$ является тропическим базисом идеала I.*

Определение 1.3.17 связано с работой [130], в которой было высказано предположение, что универсальный базис Гребнера идеала $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ всегда является тропическим базисом этого идеала. Данное предположение оказалось неверным, как показывает следующий пример.

Пример 1.3.21. *[19, пример 2.8] Пусть идеал I образован пересечением идеалов $\langle x+y, z\rangle$, $\langle y+z, x\rangle$, $\langle x+z, y\rangle$ кольца $\mathbb{C}[x, y, z]$. Тогда множество*

$$\left\{x+y+z, x^2y+xy^2, y^2z+yz^2, x^2z+xz^2\right\}$$

является универсальным базисом Гребнера для I, но не является тропическим базисом.

Другие примеры тропических базисов будут обсуждаться в последующих разделах данной главы. Сейчас мы отметим только, что далеко не каждое порождающее множество образует тропический базис данного идеала. Более того, тропические базисы зачастую содержат значительно больше элементов, чем минимальные порождающие множества.

1.3.2 Ранговые функции в тропической математике

В данном подразделе рассматриваются некоторые ранговые функции тропических матриц, важные в тропической алгебраической геометрии. Отметим, что ранговые функции, рассмотренные в подразделе 1.1.2, имеют смысл для матриц над любым полукольцом и, в частности, для тропических матриц. Теперь мы остановимся на других ранговых функциях, рассмотрение которых восходит к геометрическим соображениям, — функциям тропического ранга и ранга Капранова. Как было отмечено ранее, тропический ранг допускает элементарную характеризацию в терминах арифметических операций; в данном разделе мы дадим геометрическую характеризацию тропического ранга. В свою очередь, вводимое в этом подразделе в рассмотрение понятие ранга Капранова имеет геометрическую природу, не имеет элементарной характеризации и поэтому не было приведено в подразделе 1.1.2.

Сначала мы сформулируем определения 1.2.5 и 1.2.7 в терминах тропических арифметических операций. Тропическим *перманентом* матрицы $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется число

$$\min_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\left\{S_{1,\sigma(1)}+\ldots+S_{n,\sigma(n)}\right\}, \tag{1.3.5}$$

где через $\mathcal{S}_n$ обозначена симметрическая группа множества $\{1, \ldots, n\}$. Матрица S называется *тропически вырожденной*, если минимум в выражении (1.3.5) достигается по крайней мере дважды; в противном случае матрица S называется *тропически невырожденной*.

Определение 1.3.22. *Тропический ранг* матрицы $M \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $\operatorname{trop}(M)$, есть наибольший размер тропически невырожденной квадратной подматрицы.

Введем в рассмотрение понятие ранга Капранова тропической матрицы.

Определение 1.3.23. [45] *Рангом Капранова* матрицы $B \in \mathbb{R}^{d\times n}$ *относительно базового поля* $\mathbb{F}$ называется наименьший из рангов ее поднятий, т.е.

$$\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(M) = \min\left\{\operatorname{rank}(A) \,\middle|\, A \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}^{m\times n}, \deg A = B\right\},$$

где через $\operatorname{rank}(A)$ обозначен обычный ранг матрицы A над полем $\mathbf{H}_{\mathbb{F}}$.

Отметим, что определение 1.3.23 имеет смысл для любого базового поля $\mathbb{F}$. Тем не менее, в случае конечных базовых полей функция ранга Капранова проявляет весьма неестественное поведение [45, 166]. Поэтому далее, говоря о ранге Капранова, мы будем подразумевать (если в явном виде не оговорено противное), что базовым полем служит некоторое бесконечное поле $\mathbb{F}$. Особенную же важность понятие ранга Капранова приобретает в случае $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ в связи с приложениями в алгебраической геометрии, и поэтому мы посвятим значительную часть подраздела обсуждению этого случая.

Чтобы привести характеризацию тропического ранга и ранга Капранова с точки зрения алгебраической геометрии, мы будем рассматривать кольцо многочленов $\mathbb{C}[x_{11}, \ldots, x_{dn}]$ от dn переменных. Мы считаем, что переменные образуют матрицу $X = (x_{ij})$ размера $d\times n$, и через $H_r^{d,n}$ обозначим множество всех миноров порядка r матрицы X, то есть полиномов вида

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (-1)^{\sigma} x_{s_1,c_{\sigma(1)}} \ldots x_{s_r,c_{\sigma(r)}}, \tag{1.3.6}$$

где $1 \leqslant s_1 < \ldots < s_r \leqslant d, 1 \leqslant c_1 < \ldots < c_r \leqslant n$. Через $J_r^{d,n} \subset \mathbb{C}[x_{11}, \ldots, x_{dn}]$ обозначим идеал, порожденный многочленами семейства $H_r^{d,n}$.

Следующая характеризация тропического ранга доказана в работе [45] и была использована в качестве определения тропического ранга в работе [31]. Для полноты изложения мы приведем доказательство этой теоремы.

Теорема 1.3.24. *[31, 45] Тропический ранг матрицы* $B \in \mathbb{R}^{d\times n}$ *не превосходит целого числа* $r-1$ *в том и только том случае, если матрица* B *принадлежит пересечению тропических гиперповерхностей, соответствующих многочленам семейства* $H_r^{d,n}$*, т.е. если*

$$B \in \bigcap_{h\in H_r^{d,n}} \mathcal{T}(h).$$

Доказательство. Пусть h — полином из равенства (1.3.6). Согласно определению 1.3.8 тропический многочлен $\deg h$ имеет вид

$$\min_{\sigma\in\mathcal{S}_r}\left\{x_{s_1,c_{\sigma(1)}}+\ldots+x_{s_r,c_{\sigma(r)}}\right\}. \tag{1.3.7}$$

Таким образом, согласно определению 1.3.12 матрица A принадлежит множеству $\mathcal{T}(h)$ в том и только том случае, если ее подматрица $B[s_1,\ldots,s_r|c_1,\ldots,c_r]$ тропически вырождена. Наборы индексов $s_1,\ldots,s_r$ и $c_1,\ldots,c_r$ в полиномах из множества $H_r^{d,n}$ охватывают все подматрицы размера $r\times r$ матрицы B, поэтому $\operatorname{trop}(B)<r$ в том и только том случае, когда $B\in\cap_{h\in H_r^{d,n}}\mathcal{T}(h)$. □

Основная теорема о тропических многообразиях дает следующую характеризацию ранга Капранова в случае базового поля $\mathbb{C}$. Ранее эта теорема была доказана в работе [45]. Мы также для полноты приведем ее доказательство.

Теорема 1.3.25. *[31, 45] Пусть $B\in\mathbb{R}^{d\times n}$, $r\in\mathbb{Z}$. Тогда $K_{\mathbb{C}}(B)<r$ в том и только том случае, если матрица B принадлежит тропическому многообразию $\mathcal{T}(J_r^{d,n})$.*

Доказательство. Согласно определениям 1.3.23 и 1.3.10 матрица B принадлежит множеству $\deg V(J_r^{d,n})$ в том и только том случае, если $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(B)<r$. Поэтому результат следует из теоремы 1.3.16. □

Непосредственно из определений тропического ранга и ранга Капранова также вытекают следующие утверждения.

Предложение 1.3.26. *[45] Значения $\operatorname{trop}(B)$ и $K_{\mathbb{F}}(B)$ инвариантны относительно прибавления фиксированного числа к каждому элементу некоторой строки или столбца тропической матрицы B, что соответствует тропическому умножению строки или столбца матрицы на это число.*

Теорема 1.3.27. *[45, утверждение 4.1] Для любой тропической матрицы $B\in\mathbb{R}^{d\times n}$ верно неравенство $\operatorname{trop}(B)\leqslant K_{\mathbb{F}}(B)$.*

Как видим, тропический ранг матрицы всегда меньше либо равен ее рангу Капранова. Вопрос о необходимом условии совпадения тропического ранга с рангом Капранова на самом деле является вопросом о тропическом базисе, как показывает следующая теорема [31, 45]. Для полноты мы приводим ее доказательство.

Теорема 1.3.28. *[45] Пусть d, n, r — положительные целые числа, $r\leqslant\min\{d,n\}$. Тогда неравенство $\operatorname{trop}(B)<r$ влечет неравенство $K_{\mathbb{C}}(B)<r$ для матриц $B\in\mathbb{R}^{d\times n}$ в том и только том случае, если множество $H_r^{d,n}$ является тропическим базисом идеала $J_r^{d,n}$.*

Доказательство. Из теорем 1.3.24 и 1.3.25 вытекает, что неравенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(B) < r$ следует из неравенства $\mathrm{trop}(B) < r$ для всех матриц $B \in \mathbb{R}^{d\times n}$ в том и только том случае, если $\mathcal{T}(J_r^{d,n}) = \cap_{h\in H_r^{d,n}}\mathcal{T}(h)$. Согласно определению 1.3.17 последнее равенство означает, что множество $H_r^{d,n}$ является тропическим базисом идеала $J_r^{d,n}$. □

Таким образом, теорема 1.3.28 показывает, что миноры порядка $r+1$ матрицы переменных размера $d\times n$ не образуют тропический базис порождаемого ими идеала в том и только том случае, если найдется матрица $B \in \mathbb{R}^{d\times n}$, для которой $\mathrm{trop}(B) = r < \mathrm{K}_{\mathbb{C}}(B)$. Легко видеть, что тропический ранг матрицы и ее ранг Капранова совпадают, если один из них равен 1; таким образом, миноры порядка 2 матрицы переменных образуют тропический базис порождаемого ими идеала. Аналогичное утверждение для миноров порядка 1 выполняется по тривиальным соображениям: из определения 1.3.12 следует, что тропические гиперплоскости, соответствующие минорам порядка 1, и тропическое многообразие $\mathcal{T}(J_r^{d,n})$ являются пустыми множествами. Более сложные примеры тропических базисов приведены в работе [45] и получаются как следствие следующей теоремы.

Теорема 1.3.29. *[45, теоремы 5.5 и 6.5] Пусть $\mathbb{F}$ — бесконечное поле, $B \in \mathbb{R}^{d\times n}$. Тогда если $\mathrm{trop}(B) \in \{1, 2, d-1, d\}$, то $K_{\mathbb{C}}(B) = \mathrm{trop}(B)$.*

Нетривиальный пример тропического базиса получается как следствие теорем 1.3.28 и 1.3.29.

Теорема 1.3.30. *[45, следствие 3.8] Пусть $r \leqslant 3$ или $r = \min\{d, n\}$. Тогда миноры порядка r матрицы переменных размера $d \times n$ образуют тропический базис порождаемого ими идеала.*

Теорема 1.3.29 показывает, что если $\min\{d, n\} \leqslant 4$, то $\mathrm{trop}(B) = \mathrm{K}_{\mathbb{C}}(B)$ для любой матрицы $B \in \mathbb{R}^{d\times n}$. Еще более глубокий пример тропического базиса был построен в работе [31], где была доказана следующая теорема.

Теорема 1.3.31. *[31, теорема 1.4] Пусть $n \geqslant 4$. Тогда миноры порядка 4 матрицы переменных размера $5 \times n$ образуют тропический базис.*

Следующая теорема получается как следствие теорем 1.3.30 и 1.3.31.

Теорема 1.3.32. *[31, следствие 1.5] Миноры порядка r матрицы переменных размера $5 \times n$ образуют тропический базис при любом r.*

Приведенные теоремы дают несколько достаточных условий того, чтобы миноры порядка r матрицы переменных являлись тропическим базисом. Тем

не менее, оказывается, что миноры порядка r образуют тропический базис далеко не всегда; иными словами, существуют тропические матрицы с различными тропическим рангом и комплексным рангом Капранова. Первый пример такой матрицы был приведен в работе [45].

Пример 1.3.33. *[45, раздел 7] Пусть*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.3.8}$$

Тогда $\operatorname{trop}(B) = 3$, $K_{\mathbb{C}}(B) = 4$.

Пример 1.3.33 показывает, что миноры порядка 4 матрицы переменных размера 7×7 не образуют тропического базиса. В работе [31] был в наиболее общей форме сформулирован вопрос о тропических базисах идеала, порожденного минорами матрицы переменных.

Проблема 1.3.34. *[31, Вопрос 1.1] При каких натуральных d, n, r миноры порядка r матрицы переменных размера $d \times n$ образуют тропический базис порождаемого ими идеала? Или, что эквивалентно, при каких d, n, r для любой матрицы $B \in \mathbb{R}^{d \times n}$ условие $\operatorname{trop}(B) < r$ влечет условие $K_{\mathbb{C}}(B) < r$?*

Решение проблемы 1.3.34, полученное автором диссертации в работе [161], может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 1.3.35. *[161, теорема 1.11] Рассмотрим целые положительные числа d, n и r, удовлетворяющие условию $r \leqslant \min\{d, n\}$. Миноры порядка r матрицы переменных размера $d \times n$ образуют тропический базис в том и только том случае, когда выполнено какое-либо из следующих условий:*

(1) $r \leqslant 3$;

(2) $r = \min\{d, n\}$;

(3) $r = 4$ *и* $\min\{d, n\} \leqslant 6$.

Отметим, что условие $r \leqslant \min\{d, n\}$ фигурирует в теореме 1.3.35, чтобы исключить вырожденный случай $r > \min\{d, n\}$. В самом деле, в этом вырожденном случае множество миноров порядка r является пустым, и потому в силу определений является тропическим базисом порождаемого им нулевого идеала. Доказательство теоремы 1.3.35 оказывается весьма сложным, поэтому мы откладываем его рассмотрение до главы 6, целиком посвященной этому доказательству и решению проблемы 1.3.34.

Глава 2

Линейная алгебра и структура полуколец

Эта глава посвящена обсуждению поведения основных объектов линейной алгебры над полукольцами в самом общем случае. Как было отмечено во введении к этой работе, разработка линейно-алгебраических методов важна не только в наиболее изученных случаях тропического полукольца, полукольца неотрицательных чисел и некоторых других, но и с более общей точки зрения. В главе 1 мы привели ряд естественных обобщений классических понятий размерности, линейной зависимости и ранга и описали основные понятия линейной алгебры над полукольцами, и в этой главе мы иллюстрируем эти понятия применением их к изучению свойств различных полуколец.

Отметим, что различия между полукольцами и кольцами с точки зрения структурной теории оказываются очень значительными ввиду отсутствия обратимости сложения среди аксиом полукольца [63]. Все же, несмотря на отсутствие столь же богатого описания структуры полуколец, как то, которое известно для колец, новая интересная информация может быть получена с помощью подхода, основанного на точке зрения линейной алгебры. В некоторых случаях удается полностью описать классы полуколец, удовлетворяющие тем или иным свойствам, характеризующим линейную алгебру над ними, и изучение этих новых классов может оказаться интересным и с точки зрения структурной теории [169].

2.1 Полумодули и линейные отображения

Линейные отображения в классической математике имеют довольно простую структуру. Напомним, что стандартным результатом линейной алгебры является возможность дополнения произвольной линейно независимой системы

векторов до базиса линейного пространства над полем. Это позволяет продолжить любое линейное отображение из подпространства $V \subset S^n$ в поле S до линейного отображения из S^n в S. Аналогичное утверждение оказывается неверным в линейной алгебре над полукольцами; более того, такое продолжение не всегда возможно даже в случае, когда S является кольцом. В самом деле, как легко заметить, отображение $2r \to r$ подмодуля $2\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$ не продолжается до линейного отображения $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$. Этот феномен был подвергнут глубокому исследованию в работе [140]. Прежде чем определить связанное с этим феноменом понятие, напомним, что отображение φ левого S-полумодуля U в левый S-полумодуль V является *S-линейным* (или *S-линейным слева*), если для любых элементов $s_1, s_2 \in S$ и $u_1, u_2 \in U$ выполнено условие $\varphi(s_1u_1 + s_2u_2) = s_1\varphi(u_1) + s_2\varphi(u_2)$. В этом разделе мы не ограничиваемся рассмотрением коммутативных полуколец, а под кольцом мы понимаем ассоциативное кольцо с отличной от нуля единицей.

Определение 2.1.1. Кольцо R называется *локально самоинъективным слева*, если для любого конечнопорожденного левого подмодуля $M \subset R^n$ и любой R-линейной функции $\varphi : M \to R$ найдется R-линейная функция $\psi : R^n \to R$, удовлетворяющая условию $\varphi(x) = \psi(x)$ для любого $x \in S$.

Напомним, что кольцо R называется *самоинъективным слева*, если оно инъективно как левый R-модуль; иными словами, если любая R-линейная функция из подмодуля X левого R-модуля Y в R может быть продолжена до R-линейной функции из Y в R. Понятие кольца, *(локально) самоинъективного справа*, определяется двойственным образом. Мы будем говорить, что кольцо R *(локально) самоинъективно*, если R (локально) самоинъективно слева и справа.

Заметим, что определение 2.1.1 может быть получено из определения самоинъективного кольца, если потребовать от X быть конечнопорожденным подмодулем свободного модуля $Y = R^n$. Поэтому, в частности, всякое самоинъективное кольцо является локально самоинъективным. Верно ли обратное утверждение? Такой вопрос был поставлен Уайлдингом, Джонсон и Камбитесом в работе [140].

Проблема 2.1.2. *[140, раздел 8] Существует ли локально самоинъективное кольцо, не являющееся самоинъективным?*

2.1.1 Локально самоинъективные групповые кольца

Ответ на вопрос 2.1.2 был дан автором диссертации в работе [152], содержание которой излагается в этом подразделе. Напомним, что *групповым кольцом*

группы G над кольцом R называется множество $R[G]$ всех формальных сумм вида $\rho = \sum_{h \in G} \rho_h h$, *коэффициенты* ρ_h которых принадлежат R и *носитель* которых конечен (носителем называется множество всех $h \in G$, для которых $\rho_h \neq 0$). Сумма и произведение элементов определяются по формулам $[\rho' + \rho'']_h = \rho'_h + \rho''_h$, $[\rho'\rho'']_h = \sum_{g \in G} \rho'_{g^{-1}} \rho''_{gh}$. Элемент $\rho_e \in R$ называется *свободным членом* элемента ρ, если e является единичным элементом группы G, и мы отождествляем подкольцо кольца $R[G]$, состоящее из всех свободных членов, с кольцом R.

Основным результатом подраздела является характеризация локально самоинъективных групповых колец, аналогичная следующему известному результату о самоинъективных кольцах.

Теорема 2.1.3. *[52] Групповое кольцо $\mathbb{F}[G]$ над полем $\mathbb{F}$ самоинъективно тогда и только тогда, когда группа G конечна.*

А именно, нами будет доказано, что групповое кольцо $R[G]$ является локально самоинъективным слева в том и только том случае, если кольцо R локально самоинъективно слева и группа G локально конечна. Из этого результата будет следовать положительный ответ на вопрос 2.1.2, и нами будет приведен конкретный пример локально самоинъективного кольца, не являющегося самоинъективным. Отметим, что различные обобщения теоремы 2.1.3 известны и для *полугрупповых колец* [89, 90, 112].

Следующая лемма дает характеризацию локальной самоинъективности в терминах конечно порожденных подколец.

Лемма 2.1.4. *Предположим, что для любого конечного подмножества F кольца R найдется локально самоинъективное слева кольцо S, удовлетворяющее условию $F \subset S \subset R$. Тогда R локально самоинъективно слева.*

Доказательство. Рассмотрим левый R-модуль M, порожденный векторами $v_1, \ldots, v_k \in R^{n \times 1}$ и R-линейную слева функцию $\varphi : M \to R$. В силу условия леммы R содержит подкольцо S, которое является локально самоинъективным слева и содержит все координаты векторов v_i и элементы $\varphi(v_i)$. Поскольку S локально самоинъективно, ограничение отображения φ на S-модуль $Sv_1 + \ldots + Sv_k$ продолжается до S-линейной функции $\psi : S^{n \times 1} \to S$.

Обозначим элемент $\psi(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (в котором единица стоит на j-ом месте) через σ_j и положим $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Тогда при любом $x \in S^n$ выполнено условие $\psi(x) = \sigma \cdot x$, а при любом i – условие $\psi(v_i) = \varphi(v_i)$. Определим $\Psi(y)$ как $\sigma \cdot y$ для всех $y \in R^n$; тогда при любом i выполнено условие $\Psi(v_i) = \psi(v_i) = \varphi(v_i)$. Поскольку функция Ψ является R-линейной в силу своего определения, равенство $\Psi(w) = \varphi(w)$ выполнено при всех $w \in M$. $\square$

Из теоремы 5.3 работы [140] следует, что групповое кольцо конечной группы над локально самоинъективным слева и справа кольцом также является локально самоинъективным. Следующая лемма обобщает это утверждение и показывает, что для его справедливости достаточно либо только левой, либо только правой локальной самоинъективности.

Лемма 2.1.5. *Если кольцо R локально самоинъективно слева, и группа G конечна, то кольцо $R[G]$ локально самоинъективно слева.*

Доказательство. Шаг 1. Положим $\mathcal{R} = R[G]$. Рассмотрим левый $\mathcal{R}$-модуль S, порожденный конечным множеством $\Sigma \subset \mathcal{R}^n$, и $\mathcal{R}$-линейную слева функцию $\varphi : S \to \mathcal{R}$.

Шаг 2. Обозначим через $\varphi_1 : S \to R$ функцию, ставящую в соответствие элементу $x \in S$ свободный член элемента $\varphi(x)$. Поскольку функция φ является R-линейной слева, таковой является и φ_1.

Шаг 3. Поскольку функция φ является $\mathcal{R}$-линейной, условие $[\varphi(x)]_h = \varphi_1(h^{-1}x)$ выполнено при всех $h \in G$, и поэтому при всех $x \in S$ верно, что $\varphi(x) = \sum_{h\in G} \varphi_1(h^{-1}x)\, h$.

Шаг 4. Отметим, что векторы $g\,v$ (где $g \in G$ and $v \in \Sigma$) порождают S как R-модуль, и что $\mathcal{R}^n$ изоморфен R-модулю $R^{|G|n}$. Поскольку кольцо R локально самоинъективно слева, найдется R-линейная слева функция $\psi_1 : \mathcal{R}^n \to R$, удовлетворяющая условию $\varphi_1(x) = \psi_1(x)$ при любом $x \in S$.

Шаг 5. Определим функцию $\Psi : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ по формуле $\Psi(y) = \sum_{h\in G} \psi_1(h^{-1}y)\, h$.

Шаг 6. Заметим, что для фиксированного элемента $g \in G$ выполнено условие

$$\Psi(g\,y) = \sum_{h\in G} \psi_1(h^{-1}gy)\, h = \sum_{\gamma\in G} \psi_1(\gamma^{-1}y)\, g\gamma = g\Psi(y).$$

Шаг 7. В силу шага 4 функция ψ_1 является R-линейной слева, и такова же функция Ψ в силу шага 5. Из шага 6 теперь следует, что функция Ψ является $\mathcal{R}$-линейной слева. Шаги 4 и 5 также показывают, что при любом $x \in S$ выполнено условие $\Psi(x) = \sum_{h\in G} \varphi_1(h^{-1}x)\, h$, и потому при любом $x \in S$ верно равенство $\Psi(x) = \varphi(x)$ в силу шага 3. □

Напомним, что группа называется *локально конечной*, если конечна любая конечно порожденная подгруппа этой группы.

Теорема 2.1.6. *Если кольцо R локально самоинъективно слева, и группа G локально конечна, то кольцо $R[G]$ локально самоинъективно слева.*

Доказательство. Для любого конечного множества $S \subset R[G]$ конечным является и объединение J носителей всех элементов из S. В силу условия теоремы J порождает конечную подгруппу G_0, и подкольцо $R[G_0]$ кольца $R[G]$ является локально самоинъективным слева в силу леммы 2.1.5. Поскольку $R[G_0]$ содержит S, результат теоремы следует из леммы 2.1.4. □

Следующая лемма довольно проста и содержится в работе [52] без доказательства; мы приводим ее доказательство для полноты изложения.

Лемма 2.1.7. *Пусть G' – подмножество группы G. Если найдется ненулевой элемент $a \in R[G]$, при всех $g' \in G'$ удовлетворяющий условию $a(1 - g') = 0$, то подгруппа Γ, порожденная множеством G', является конечной.*

Доказательство. Обозначим через $\Sigma \subset G$ носитель элемента a; множество Σ имеет конечную мощность n. Для любого $g \in G$ рассмотрим функцию $\varphi_g : \Sigma \to G$, ставящую элементу $h \in \Sigma$ в соответствие элемент hg. Если $a = ag$, то носители элементов ag и ag^{-1} равны Σ, и в этом случае функция φ_g является перестановкой множества Σ. Поэтому функция φ_γ является перестановкой множества Σ при любом $\gamma \in \Gamma$. Поскольку условие $\varphi_{\gamma'} = \varphi_{\gamma''}$ влечет равенство $\gamma' = \gamma''$, мощность множества Γ не превосходит $n!$. □

Для доказательства основного результата нам также потребуется описание аннуляторов конечно порожденных идеалов локально самоинъективных колец. Следующая лемма является обобщением леммы 3 из работы [52].

Лемма 2.1.8. *Если кольцо R является локально самоинъективным слева, то всякий собственный конечно порожденный правый идеал кольца R обладает ненулевым левым аннулятором.*

Доказательство. Рассмотрим правый идеал $I = s_1R + \ldots + s_nR \subset R$ и левый подмодуль $S \subset R^n$, состоящий из векторов $(rs_1, \ldots, rs_n)$, где $r \in R$. Определим функцию $\phi : R \to S$ по формуле $\phi(r) = (rs_1, \ldots, rs_n)$.

Если левый аннулятор идеала I равен $\{0\}$, то функция ϕ является изоморфизмом левых R-модулей. В этом случае обратная функция ϕ^{-1} может быть продолжена до R-линейной функции $\psi : R^n \to R$, поскольку кольцо R локально самоинъективно. В частности, выполнено условие $\psi(s_1, \ldots, s_n) = \psi(\phi(1)) = 1$. Обозначая элемент $\psi(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (в котором единица стоит на j-ой позиции) через σ_j, мы получаем равенство $\psi(s_1, \ldots, s_n) = s_1\sigma_1 + \ldots + s_n\sigma_n \in I$, откуда следует, что $1 \in I$. □

Леммы 2.1.7 и 2.1.8 позволяют доказать результат, обратный результату теоремы 2.1.6.

Теорема 2.1.9. *Если кольцо $R[G]$ локально самоинъективно слева, то группа G локально конечна.*

Доказательство. Для любого конечного множества $G' = \{g_1, \ldots, g_n\}$ элементов G определен собственный правый идеал $(1-g_1)R[G] + \ldots + (1-g_n)R[G]$. В силу леммы 2.1.8 найдется ненулевой элемент $a \in R[G]$, при любом $g \in G'$ удовлетворяющий условию $a(1-g') = 0$. Поэтому группа, порожденная множеством G', является конечной в силу леммы 2.1.7. □

Следующая лемма дает достаточное условие локальной самоинъективности кольца R в терминах группового кольца $R[G]$.

Лемма 2.1.10. *Если кольцо $R[G]$ локально самоинъективно слева, то таковым является и кольцо R.*

Доказательство. Рассмотрим левый R-модуль S, порожденный векторами $s_1, \ldots, s_k \in R^n$, и R-линейную слева функцию $\varphi : S \to R$. Положим $\mathcal{R} = R[G]$ и обозначим через $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}^n$ левый $\mathcal{R}$-модуль, порожденный векторами $s_1, \ldots, s_k$ над $\mathcal{R}$. Тогда функция $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$, ставящая элементу $\sum_{g\in G} g\sigma_g$ в соответствие элемент $\sum_{g\in G} \varphi(\sigma_g)g$, является $\mathcal{R}$-линейной слева (здесь через σ_g обозначены произвольные элементы модуля S). Поскольку кольцо $\mathcal{R}$ локально самоинъективно, существует $\mathcal{R}$-линейная слева функция $\Psi : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, которая совпадает с Φ на $\mathcal{S}$. Рассмотрим теперь функцию $\psi : R^n \to R$, ставящую в соответствие вектору $r \in R^n$ сумму коэффициентов элемента $\Psi(r)$. Поскольку функция Ψ является R-линейной слева, такова же и функция ψ. Для всех $s \in S$ выполнено условие $\Psi(s) = \Phi(s) = \varphi(s) \in R$, поэтому $\psi(s) = \varphi(s)$. □

Из теорем 2.1.6 и 2.1.9 и леммы 2.1.10 следует основной результат этого подраздела.

Теорема 2.1.11. *Кольцо $R[G]$ является локально самоинъективным слева в том и только том случае, когда кольцо R локально самоинъективно слева и группа G локально конечна.*

Доказательство. Если кольцо $R[G]$ локально самоинъективно слева, то таковым является и R в силу леммы 2.1.10. Группа G в этом случае локально конечна в силу теоремы 2.1.9. С другой стороны, в силу теоремы 2.1.6 кольцо $R[G]$ является локально самоинъективным слева, если таковым является R и группа G локально конечна. □

Покажем теперь, что теоремы 2.1.3 и 2.1.11 позволяют дать положительный ответ на вопрос 2.1.2. Обозначим через G бесконечную прямую сумму

конечных групп, тогда группа G локально конечна. Стандартным результатом линейной алгебры является тот факт, что поле $\mathbb{F}$ локально самоинъективно. Таким образом, в силу теоремы 2.1.11 кольцо $\mathbb{F}[G]$ является локально самоинъективным; при этом, как показывает теорема 2.1.3, оно не является самоинъективным.

2.1.2 Базисы свободного полумодуля

Напомним определение *базиса* левого полумодуля S над полукольцом R. Будем говорить, что элемент $s \in S$ порождается множеством $G \subset S$, если найдутся элементы $\lambda_g \in R$, только конечное число которых отличны от нуля, удовлетворяющие условию $s = \sum_{g \in G} \lambda_g g$. Множество G называется *базисом*, если оно порождает любой элемент из S и минимально по включению. В классическом случае, когда R является полем, полумодули устроены просто: любое линейное пространство изоморфно R^n при некотором n, и каждый из базисов пространства R^n содержит ровно n элементов. Обобщение этого результата на случай полуколец было предложено Тан [132].

Гипотеза 2.1.12. *([132, замечание 4.4]) Пусть наибольшая мощность базиса коммутативного полукольца R, рассматриваемого как модуль над собой, конечна и равна q. Тогда для базисов полумодуля R^n возможны мощности $n, n+1, \ldots, qn$ и только они.*

Приведенная проблема изучалась в множестве публикаций последнего времени [83, 132, 127]. В частности, эта гипотеза была доказана Тан в случае антинегативных полуколец [132], а Шу и Ванг [127] доказали ее в частном случае $q = 1$. Полное решение этой проблемы было опубликовано автором диссертации в работе [146] и приводится ниже.

Будем рассматривать R^n как левый R-полумодуль, для этого положим $\lambda(r_1, \ldots, r_n)$ равным $(\lambda r_1, \ldots, \lambda r_n)$. Через π_j будем обозначать естественное вложение R в R^n, переводящее элемент s в вектор, на j-й позиции в котором стоит s, а остальные координаты равны 0. Фиксируем произвольный вектор $\sigma \in R^n$; обозначим через $\rho_j(\sigma)$ элемент, стоящий на j-й позиции в σ. Через $\mathrm{inv}_i(\sigma)$ мы будем обозначать множество всех векторов $\lambda\sigma \in R^n$, для которых элемент $\rho_j(\lambda\sigma)$ обратим по сложению при каждом j, отличном от i.

Лемма 2.1.13. *Если левый R-полумодуль R^n порожден множеством G, то элемент $\pi_i(1)$ порожден множеством $\Gamma = \bigcup_{g \in G} \mathrm{inv}_i(g)$.*

Доказательство. В силу условия найдутся элементы λ_g, удовлетворяющие условию $\pi_i(1) = \sum_{g \in G} \lambda_g g$; применяя отображение ρ_j, мы получаем равенство

$\mathbf{0} = \sum_{g\in G} \rho_j(\lambda_g g)$ для всех j, отличных от i. Таким образом, элемент $\rho_j(\lambda_g g)$ обратим по сложению, и потому $\lambda_g g \in \mathrm{inv}_i(g)$. $\square$

Теорема 2.1.14. *Пусть наибольшая мощность базиса левого R-полумодуля R^1 конечна и равна q. Если левый R-полумодуль R^n порожден множеством G, то найдется множество $H \subset G$, которое порождает R^n и удовлетворяет условию $|H| \leqslant nq$.*

Доказательство. При $n = 1$ результат очевиден, поэтому мы предполагаем $n > 1$ и продолжаем доказательство по индукции.

Из леммы 2.1.13 следует, что при каждом i множество $\Gamma_i = \bigcup_{g\in G} \mathrm{inv}_i(g)$ порождает элемент $\pi_i(1)$. Поскольку элементы множества Γ_i имеют вид νg при некоторых $\nu \in R$ и $g \in G$, мы можем считать, не ограничивая общности, что $\Gamma_i \subset G$. В силу предположения индукции найдется множество $H' \subset \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_n$, которое удовлетворяет условию $|H'| \leqslant (n-1)q$ и порождает векторы $\alpha_2 = (a_2, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \alpha_n = (a_n, 0, \ldots, 0, 1)$. В силу определения множества Γ_i элементы $a_2, \ldots, a_n \in R$ обратимы по сложению.

Поскольку G является порождающим множеством, при некоторых $\lambda_g \in R$ выполнено условие $\pi_1(1) = \sum_{g\in G} \lambda_g g$. Поскольку $\sum_{g\in G} \rho_t(\lambda_g g) = 0$, элементы $\rho_t(\lambda_g g)$ обратимы по сложению при всех $t \in \{2, \ldots, n\}$. Другими словами, при всех t и g найдутся элементы $\mu_{tg} \in R$, удовлетворяющие условию $\rho_t(\lambda_g g) + \mu_{tg} = 0$. Тогда

$$\pi_1(1) = \sum_{g\in G} \left(\lambda_g g + \sum_{\tau=2}^{n} \mu_{\tau g} \alpha_\tau \right) + \sum_{\tau=2}^{n} \sum_{g\in G} \rho_\tau(\lambda_g g) \alpha_\tau. \tag{2.1.1}$$

В силу определения элемента μ_{tg} условие $\lambda_g g + \sum\limits_{\tau=2}^{n} \mu_{\tau g} \alpha_\tau \in \pi_1(R)$ выполнено при любом g, откуда

$$0 = \rho_t \left(\sum_{\tau=2}^{n} \sum_{g\in G} \rho_\tau(\lambda_g g) \alpha_\tau \right) = \sum_{g\in G} \rho_t(\lambda_g g). \tag{2.1.2}$$

Из равенств (2.1.1) и (2.1.2) следует, что вектор $\pi_1(1)$ порожден множеством G' элементов вида $\lambda_g g + \sum_{\tau=2}^{n} \mu_{\tau g} \alpha_\tau$, каждый из которых принадлежит $\pi_1(R)$. В силу индуктивного предположения найдется множество $\overline{H} \subset G'$, которое порождает $\pi_1(R)$ и удовлетворяет условию $|\overline{H}| \leqslant q$. Поскольку элементы $a_2, \ldots, a_n$ обратимы по сложению, множество $\overline{H} \cup H'$ порождает R^n. Осталось заметить, что всякий элемент множества $\overline{H}$ порожден множеством H' и некоторым одним элементом из G. $\square$

Гипотеза 2.1.12 следует из теоремы 2.1.14, как показывают результаты работы [132]. Действительно, построить базисы свободного полумодуля R^n мощностей, не меньших n и не больших qn несложно, и этот результат является частным случаем теоремы 4.1 работы [132]. Далее, всякий базис R^n содержит не более, чем qn элементов в силу теоремы 2.1.14. Наконец, если полукольцо R коммутативно, то в силу теоремы 3.3 работы [132] (отметим, что этот результат в другой формулировке содержится в работе [120] 1984 года) любое порождающее множество полумодуля R^n содержит не менее, чем n элементов.

2.2 Факторизация и ранг матрицы

Базовым результатом линейной алгебры является следующая характеризация ранговой функции матриц над полем: ранг матрицы A равен наименьшему числу k, для которого найдутся матрица B размера $m \times k$ и матрица C размера $k \times n$, удовлетворяющие условию $A = BC$. В данном разделе нас будет интересовать описание полуколец, для матриц над которыми верна аналогичная характеризация ранговой функции. Классическая линейная алгебра обычно исходит из определения ранга как наибольшей мощности набора линейно независимых строк матрицы, для матриц же над полукольцами существует несколько различных подходов к определению понятия линейной зависимости. Эти подходы были изложены в главе 1, и в данном разделе мы остановимся на понятии зависимости по Гондрану–Мину, которую в силу рассуждений главы 1 можно считать одним из наиболее подходящих определений линейной зависимости для произвольных полуколец. Иными словами, в данном разделе мы изучаем полукольца, факторизационный ранг матриц над которыми совпадает с рангом Гондрана–Мину. Мы показываем, что любое полукольцо, матрицы над которым удовлетворяют данному условию, вложено в некоторое поле. Также мы приводим пример целостного кольца, для матриц над которым это условие нарушается.

Результаты этого раздела были опубликованы автором в работе [167]. В изложении результатов мы будем считать, что $(\mathcal{S}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ — коммутативное полукольцо. Начнем изложение с примера, который иллюстрирует понятия факторизационного ранга и ранга Гондрана–Мину и понадобится нам в дальнейшем.

Пример 2.2.1. *Пусть элементы a, b, c полукольца $(\mathcal{S}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ таковы, что $a \neq b$, $c \neq \mathbf{0}$ и $ac = bc$. Положим*

$$A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{1} \\ b & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{2\times 2}.$$

Тогда $GMr(A) = GMc(A) = 1$, $f(A) = 2$.

Доказательство. 1. Заметим сначала, что для любого элемента $\lambda \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}\}$ верно, что $\lambda \cdot (a,\ \mathbf{1}) = (a \cdot \lambda,\ \lambda) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. В силу определения 1.1.19 это означает, что набор, состоящий из первой строки матрицы A, не является линейно зависимым в смысле Гондрана–Мину, поэтому из определения 1.2.2 следует, что $GMr(A) \geqslant 1$. Аналогично показывается, что набор, состоящий из второго столбца матрицы A, не является линейно зависимым в смысле Гондрана–Мину, поэтому также $GMc(A) \geqslant 1$.

2. Теперь воспользуемся определением 1.1.19, чтобы показать, что строки матрицы A линейно зависимы в смысле Гондрана–Мину. Положим $I = \{1\}$, $J = \{2\}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = c$, тогда в силу условия примера имеем $c \cdot (a,\ \mathbf{1}) = c \cdot (b,\ \mathbf{1})$, что доказывает в силу определения 1.1.19 зависимость строк матрицы A по Гондрану–Мину. Таким образом, из определения 1.2.2 следует, что $GMr(A) \leqslant 1$. Аналогично, равенство

$$c \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ac \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

доказывает линейную зависимость столбцов матрицы A в смысле Гондрана–Мину, поэтому $GMc(A) \leqslant 1$.

3. Равенство

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & \mathbf{1} \\ b & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \mathbf{1} \\ b & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

показывает, как следует из определения 1.2.10, что $f(A) \leqslant 2$.

4. Покажем теперь, что $f(A) \neq 1$. Предположим противное, тогда для некоторых элементов p, q, r и s полукольца $\mathcal{S}$ верно, что

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \mathbf{1} \\ b & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

или, в иной записи,

$$pr = a,\ \ qr = b, \tag{2.2.1}$$

$$ps = \mathbf{1},\ \ qs = \mathbf{1}. \tag{2.2.2}$$

Из равенств (2.2.2) следует, что $sp = \mathbf{1}$, $qsp = p$. Поэтому $q \cdot \mathbf{1} = p$, или $q = p$. Из равенств (2.2.1) теперь следует, что $a = b$. Полученное равенство противоречит условию примера, поэтому $f(A) \neq 1$. Наконец, матрица A содержит элемент, не равный $\mathbf{0}$, поэтому $f(A) \neq 0$ в силу определения 1.2.10. $\square$

Для дальнейшего изложения будет полезно заметить, что $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$ для матриц над полукольцом $\mathcal{S}$; поэтому факторизационный ранг матрицы инвариантен относительно ее транспонирования. Это означает, что функция факторизационного ранга совпадает с функцией строчного ранга Гондрана–Мину для всех матриц над $\mathcal{S}$ в том и только том случае, когда она совпадает с функцией столбцового ранга.

2.2.1 Антинегативные полукольца без делителей нуля

В этом разделе мы приведем достаточно широкий класс полуколец, для матриц над которыми факторизационный ранг и ранг Гондрана–Мину вообще говоря не совпадают. Для доказательства результатов данного подраздела нам потребуются дополнительное определение.

Определение 2.2.2. [68] Полукольцо $\mathcal{S}$ называется *полукольцом с сокращением*, если для любых $a, b, c \in \mathcal{S}$ из $ac = bc$ и $c \neq \mathbf{0}$ следует, что $a = b$.

Следующее утверждение следует непосредственно из определений.

Лемма 2.2.3. *Любое полукольцо с сокращением является полукольцом без делителей нуля.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо с сокращением, и элементы $a \in \mathcal{S}$, $b \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}\}$ таковы, что $a \cdot b = \mathbf{0}$. Тогда имеем $a \cdot b = \mathbf{0} \cdot b$, откуда в силу определения 2.2.2 $a = \mathbf{0}$. Из определения 1.1.5 теперь следует, что никакой ненулевой элемент полукольца $\mathcal{S}$ не является делителем нуля. Лемма доказана. □

Нам также потребуется утверждение, связывающее понятие бинарного булева полукольца с антинегативными полукольцами без делителей нуля. Аналогичные утверждения упоминаются, например, в параграфе 3.2 работы [14], тем не менее, мы приведем доказательство для полноты изложения.

Теорема 2.2.4. *Пусть $(\mathcal{S}, +, \cdot, \boldsymbol{0}', \boldsymbol{1}')$ — антинегативное полукольцо, не содержащее делителей нуля, и $(\mathbb{B}, \oplus, \otimes, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$ — бинарное булево полукольцо. Зададим отображение $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{B}$, положив $\varphi(\boldsymbol{0}') = \boldsymbol{0}$ и $\varphi(s) = \boldsymbol{1}$ при $s \in \mathcal{S} \setminus \{\boldsymbol{0}'\}$. Если $\boldsymbol{0}' \neq \boldsymbol{1}'$, то отображение φ является гомоморфизмом.*

Доказательство. Согласно определению отображения φ верно $\varphi(\mathbf{0}') = \mathbf{0}$, $\varphi(\mathbf{1}') = \mathbf{1}$. Поэтому достаточно для любых элементов $a, b \in \mathcal{S}$ проверить равенства

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b), \tag{2.2.3}$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \otimes \varphi(b). \tag{2.2.4}$$

В силу определения полуколец $x + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + x = x$ для любого $x \in \mathcal{S}$, откуда следует равенство (2.2.3) для любых $a, b \in \mathcal{S}$, хотя бы одно из которых равно $\mathbf{0}'$. Если же $a, b \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}'\}$, то в силу определения 1.1.4 $a + b \neq \mathbf{0}'$, что заканчивает проверку равенства (2.2.3).

Далее, согласно определению полуколец $x \cdot \mathbf{0}' = \mathbf{0}' \cdot x = \mathbf{0}'$, что доказывает равенство (2.2.4) для любых $a, b \in \mathcal{S}$, хотя бы одно из которых равно $\mathbf{0}'$. Наконец, если $a, b \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}'\}$, то в силу определения 1.1.5 $a \cdot b \neq \mathbf{0}'$, что окончательно доказывает равенство (2.2.4). □

Следующий пример полезен для доказательства основных результатов.

Пример 2.2.5. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{B}^{4\times 4},$$

а матрицы $R \in \mathbb{B}^{4\times k}$ *и* $S \in \mathbb{B}^{k\times 4}$ *таковы, что* $R \otimes S = A$. *Тогда* $k \geqslant 4$.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, тогда $k \leqslant 3$. Рассмотрим возможные случаи.

1. Предположим, что некоторый столбец матрицы S или некоторая строка матрицы R состоят только из элементов $\mathbf{0}$. Тогда из определения операций на полукольце $\mathbb{B}$ следует, что матрица A содержит, соответственно, либо нулевой столбец, либо нулевую строку. Это противоречит определению матрицы A, поэтому случай 1 не реализуется.

2. Пусть либо матрица R содержит две совпадающие строки, либо матрица S содержит два совпадающих столбца. В этом случае из определения умножения матриц следует, что матрица A содержит либо две совпадающих строки, либо два совпадающих столбца. Опять же, это противоречит определению матрицы A и показывает, что случай 2 невозможен.

3. Предположим, что некоторая строка (обозначим ее номер через t) матрицы R состоит только из элементов $\mathbf{1}$. В силу определения матрицы A, найдется индекс $q \in \{1, 2, 3, 4\}$, для которого $A_{tq} = \mathbf{0}$. В этом случае, согласно определению произведения матриц, $(R_{t1} \otimes S_{1q}) \oplus \ldots \oplus (R_{tk} \otimes S_{kq}) = \mathbf{0}$. По предположению пункта 3, каждый элемент строки с номером t матрицы R равен $\mathbf{1}$, то есть, равен нейтральному по умножению элементу полукольца $\mathbb{B}$. Таким образом, мы получаем $S_{1q} \oplus \ldots \oplus S_{kq} = \mathbf{0}$, откуда в силу определения операций на полукольце $\mathbb{B}$ следует, что $S_{1q} = \ldots = S_{kq} = \mathbf{0}$. Таким

образом, столбец матрицы S с номером q состоит только из элементов $\mathbf{0}$, что противоречит результату пункта 1.

4. Предположим теперь, что $k = 3$ и некоторая строка (ее номер мы будем обозначать через u) матрицы R содержит ровно два элемента $\mathbf{1}$. Таким образом, $R_{ux} = R_{uy} = \mathbf{1}$, $R_{uz} = \mathbf{0}$, где $\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$. В силу определения матрицы A, найдутся два различных индекса $g_1, g_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$, для которых $A_{ug_1} = A_{ug_2} = \mathbf{0}$. В этом случае, согласно определению произведения матриц, $(R_{ux} \otimes S_{xg_i}) \oplus (R_{uy} \otimes S_{yg_i}) \oplus (R_{uz} \otimes S_{zg_i}) = \mathbf{0}$ при любом $i \in \{1, 2\}$. В силу определения операций на полукольце $\mathbb{B}$ верно, что $S_{xg_i} = S_{yg_i} = \mathbf{0}$. Отсюда следует, что либо один из столбцов матрицы S с индексами g_1, g_2 состоит только из элементов $\mathbf{0}$, либо эти два столбца совпадают. Таким образом, мы получаем противоречие с результатами пунктов 1 и 2.

5. Если все строки матрицы R содержат ровно по одному элементу $\mathbf{1}$, то согласно принципу Дирихле матрица R содержит совпадающие строки, что противоречит результату пункта 2.

Осталось заметить, что пункты 1–5 исчерпывают возможные случаи. □

Теперь мы можем привести пример матрицы над произвольным антинегативным полукольцом, не содержащем делителей нуля, факторизационный ранг которой не совпадает с ее рангами Гондрана–Мину.

Пример 2.2.6. *Пусть $(\mathcal{S}, +, \cdot, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$ — антинегативное полукольцо, не содержащее делителей нуля, в котором $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{1}$. Положим*

$$H = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(H) > GMr(H) = GMc(H)$.

Доказательство. Сначала покажем, что $f(H) \geqslant 4$. Предположим, что это не так, тогда в силу определения 1.2.10 $H = P \cdot Q$ для некоторых матриц $P \in \mathcal{S}^{4\times k}$ и $Q \in \mathcal{S}^{k\times 4}$ и некоторого $k < 4$. Через R и S обозначим булевы матрицы, полученные, соответственно, из P и Q покомпонентным применением отображения φ из теоремы 2.2.4. Тогда, поскольку φ является гомоморфизмом, произведение $R \otimes S$ булевых матриц оказывается равно матрице A из примера 2.2.5. Противоречие с результатом примера 2.2.5 показывает, что на самом деле $f(H) \geqslant 4$.

Теперь покажем, что $GMc(H) \leqslant 3$. В силу определения 1.2.2 нам требуется показать, что столбцы матрицы H линейно зависимы в смысле Гондрана–

Мину. Согласно определению 1.1.19 их линейная зависимость следует из равенства

$$\mathbf{1}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}+\mathbf{1}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}=\mathbf{1}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}+\mathbf{1}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

Наконец, равенство $GMr(H) = GMc(H)$ следует из определения 1.2.2 в виду того, что матрица H совпадает со своей транспонированной. □

2.2.2 Доказательство основных результатов

В данном разделе мы докажем, что любое полукольцо, удовлетворяющее условию совпадения функций факторизационного ранга и ранга Гондрана–Мину, вложено в некоторое поле. Сначала мы докажем достаточное условие существование полукольца частных коммутативного кольца. Отметим, что глубокое изучение полуколец частных было проведено в [63]. Для наших же рассуждений будет достаточно более слабого условия, чем те, которые рассматривались в [63].

Теорема 2.2.7. *Пусть $(\mathcal{S}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ — коммутативное полукольцо с сокращением, в котором $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$. На множестве $\mathcal{S}\times(\mathcal{S}\setminus\{\mathbf{0}\})$ зададим отношение $\sim$ по правилу $(a,b)\sim(c,d)$ тогда и только тогда, когда $ad = bc$. Тогда*

1) $\sim$ является отношением эквивалентности;

2) множество $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$ классов эквивалентности $\langle a,b\rangle$ пар $(a,b)\in\mathcal{S}\times(\mathcal{S}\setminus\{\mathbf{0}\})$ является полукольцом относительно операций $\langle a,b\rangle+\langle c,d\rangle = \langle ad+bc, bd\rangle$, $\langle a,b\rangle\cdot\langle c,d\rangle = \langle ac, bd\rangle$; нейтральным по сложению является класс эквивалентности элемента $(\mathbf{0},\mathbf{1})$, по умножению — элемента $(\mathbf{1},\mathbf{1})$. Любой ненулевой элемент полукольца $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$ обратим по умножению.

Доказательство. Рефлексивность и симметричность отношения $\sim$ следуют непосредственно из его определения. Если же $(a,b)\sim(c,d)$ и $(c,d)\sim(g,h)$, то $ad = bc$ и $ch = dg$; тогда имеем $adch = bcdg$, откуда $ah = bg$, или $(a,b)\sim(g,h)$. Таким образом, $\sim$ действительно является отношением эквивалентности.

Проверим теперь, что операции на множестве $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$ определены корректно. Действительно, пусть $(a_1,b_1)\sim(a_2,b_2)$ и $(c_1,d_1)\sim(c_2,d_2)$, то есть,

$$a_1b_2 = a_2b_1,\ \ c_1d_2 = c_2d_1. \tag{2.2.5}$$

Тогда $\langle a_i,b_i\rangle\cdot\langle c_i,d_i\rangle = \langle a_ic_i, b_id_i\rangle$ при $i\in\{1,2\}$, а из (2.2.5) следует, что $a_1c_1b_2d_2 = a_2c_2b_1d_1$. Это означает, что $\langle a_1,b_1\rangle\cdot\langle c_1,d_1\rangle = \langle a_2,b_2\rangle\cdot\langle c_2,d_2\rangle$. Кроме

того, $\langle a_i, b_i\rangle + \langle c_i, d_i\rangle = \langle a_i d_i + b_i c_i, b_i d_i\rangle$. Опять же, из равенств (2.2.5) следует, что $(a_1 d_1 + b_1 c_1) b_2 d_2 = (a_2 d_2 + b_2 c_2) b_1 d_1$, поэтому $\langle a_1, b_1\rangle + \langle c_1, d_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle + \langle c_2, d_2\rangle$. Итак, операции на $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$ определены корректно.

Теперь мы можем доказывать второе утверждение теоремы. Коммутативность сложения и умножения элементов $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$, также как и ассоциативность умножения, следуют непосредственно из определения этих операций. Кроме того, заметим, что $\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle + \langle a, b\rangle = \langle \mathbf{0}\cdot b + \mathbf{1}\cdot a, b\cdot \mathbf{1}\rangle = \langle a, b\rangle$, $\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle \cdot \langle a, b\rangle = \langle \mathbf{0}\cdot a, \mathbf{1}\cdot b\rangle = \langle \mathbf{0}, b\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ и $\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle \cdot \langle a, b\rangle = \langle a, b\rangle$. Если же $a \neq \mathbf{0}$, то есть, если $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ не принадлежит классу эквивалентности пары (a, b), то $\langle a, b\rangle \cdot \langle b, a\rangle = \langle ab, ab\rangle = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle$. Для доказательства теоремы теперь достаточно проверить ассоциативность сложения и дистрибутивность:

$$(\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle) + \langle g, h\rangle = \langle adh + bch + bdg, bdh\rangle = \langle a, b\rangle + (\langle c, d\rangle + \langle g, h\rangle),$$

$$(\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle) \cdot \langle g, h\rangle = \langle adgh + bcgh, bdhh\rangle = (\langle a, b\rangle \cdot \langle g, h\rangle) + (\langle c, d\rangle \cdot \langle g, h\rangle).$$

□

Замечание 2.2.8. *В условиях теоремы 2.2.7 имеет место естественное вложение полукольца $\mathcal{S}$ в полукольцо $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$: действительно, для любых $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ верно, что $\langle s_1, \mathbf{1}\rangle + \langle s_2, \mathbf{1}\rangle = \langle s_1 + s_2, \mathbf{1}\rangle$ и $\langle s_1, \mathbf{1}\rangle \cdot \langle s_2, \mathbf{1}\rangle = \langle s_1 s_2, \mathbf{1}\rangle$.*

Теперь мы можем доказать один из главных результатов раздела.

Теорема 2.2.9. *Пусть полукольцо $\mathcal{S}$ таково, что для любой матрицы A над $\mathcal{S}$ верно $f(A) = GMc(A)$. Тогда $\mathcal{S}$ вложено в некоторое поле.*

Доказательство. Если нейтральные по сложению и умножению элементы полукольца $\mathcal{S}$ совпадают, то $\mathcal{S} = \{\mathbf{0}\}$, и поэтому $\mathcal{S}$ вложено в поле. Далее считаем, что $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$.

В силу примера 2.2.1 $\mathcal{S}$ является полукольцом с сокращением. Тогда из леммы 2.2.3 следует, что полукольцо $\mathcal{S}$ не содержит делителей нуля. Далее, как показывает пример 2.2.6, полукольцо $\mathcal{S}$ не является антинегативным. Таким образом, найдутся ненулевые элементы $a, b \in \mathcal{S}$, для которых $a + b = \mathbf{0}$.

В силу теоремы 2.2.7 полукольцо $\mathcal{S}$ обладает полукольцом частных $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$, каждый ненулевой элемент которого обратим по умножению. Из замечания 2.2.8 следует, что $\mathcal{S}$ вложено в $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$. Теперь нам достаточно показать, что любой элемент полукольца $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$ обратим по сложению. Действительно, при любом $x \in \mathcal{S}$ и $y \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}\}$ имеем $ay \neq \mathbf{0}$ и $\langle x, y\rangle + \langle bx, ay\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$. □

Рассмотрим тот интересный частный случай, когда $\mathcal{S}$ является кольцом.

Лемма 2.2.10. *Если кольцо $\mathcal{S}$ вложено в поле $\mathbb{F}$, то ранг Гондрана–Мину матрицы A над $\mathcal{S}$ равен ее классическому рангу как матрицы над $\mathbb{F}$.*

Доказательство. Понятие зависимости в смысле Гондрана–Мину над $\mathcal{S}$ равносильно в этом случае классическому понятию линейной зависимости над $\mathcal{S}$. С другой стороны, согласно базовому результату линейной алгебры классический ранг матрицы A равен наибольшему числу ее строк, линейно независимых над полем $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$. Осталось заметить, что линейная зависимость над $\mathcal{S}$ равносильна линейной зависимости над $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$, поскольку $\mathcal{S}$ не содержит делителей нуля. □

В силу леммы 2.2.10 вопрос о равенстве ранга Гондрана–Мину и факторизационного ранга матриц над целостным кольцом $\mathcal{S}$ равносилен следующему вопросу: для любой ли матрицы A над $\mathcal{S}$ существует *оптимальная факторизация*, то есть, представление вида $A = BC$, где $B \in \mathcal{S}^{m\times k}$, $C \in \mathcal{S}^{k\times n}$, а через k обозначен классический ранг матрицы A? Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным, как показывает следующий пример.

Пример 2.2.11. *Пусть $\mathcal{S}$ — кольцо вещественных многочленов от трех переменных $\mathbb{R}[x, y, z]$. Рассмотрим матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} x & -z & 0 \\ 0 & y & x \\ y & 0 & z \end{pmatrix}$$

над полукольцом $\mathcal{S}$. Тогда $GMc(A) = 2$, $f(A) = 3$.

Доказательство. Заметим, что первые два столбца матрицы A линейно независимы, поэтому $GMc(A) \geqslant 2$. В силу же определения 1.1.19 равенство

$$z \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} -z \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

показывает, что столбцы матрицы A линейно зависимы в смысле Гондрана–Мину. Из определения 1.2.2 следует таким образом, что $GMc(A) = 2$.

Заметим, что верно равенство

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -z & 0 \\ 0 & y & x \\ y & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -z & 0 \\ 0 & y & x \\ y & 0 & z \end{pmatrix},$$

поэтому $f(A) \leqslant 3$.

Теперь нам достаточно доказать, что $f(A) \geqslant 3$. Предположим противное; тогда найдутся матрицы $B \in \mathbb{B}^{3\times k}$ и $C \in \mathbb{B}^{k\times 3}$, для которых $k < 3$ и $A = BC$. Заметим, что классический ранг матрицы A в поле $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$ равен 2, поэтому в нашем случае $k = 2$, и строки матрицы C образуют базис линейного пространства, порожденного строками матрицы A. В этом случае строки матрицы C являются линейными комбинациями (с коэффициентами из поля $\operatorname{Quot}\mathcal{S}$) строк матрицы A, и потому ортогональны строке $(z\ x\ -y)$. Таким образом, $C_{i1}z + C_{i2}x - C_{i3}y = 0$ при $i \in \{1, 2\}$. Из последнего равенства следует, что свободные члены многочленов C_{i1}, C_{i2} и C_{i3} равны нулю. Таким образом, свободные члены всех элементов матрицы C равны нулю. Аналогично показывается, что свободные члены всех элементов матрицы B также равны нулю. Отсюда следует, что многочлен $A_{11} = B_{11}C_{11}+B_{12}C_{21}$ равен либо нулю, либо является суммой мономов степени, не меньшей 2. Противоречие с определением матрицы A завершает доказательство. □

2.3 О рангах произведения и суммы матриц

В данном разделе мы будем исследовать обобщения на полукольцевой случай следующих свойств классической функции ранга матриц над полем:

$$\text{если } A \otimes B = C, \text{ то } rk(C) \leqslant \min\{rk(A), rk(B)\}, \tag{2.3.1}$$

$$\text{если } A \oplus B = C, \text{ то } rk(C) \leqslant rk(A) + rk(B), \tag{2.3.2}$$

$$\text{если } (A|B) = C, \text{ то } rk(C) \leqslant rk(A) + rk(B). \tag{2.3.3}$$

Основные результаты данного раздела были опубликованы автором в работе [169]. Пусть $\mathcal{S}$ — произвольное полукольцо, а rk обозначает некоторую ранговую функцию матриц над $\mathcal{S}$. Мы будем говорить, что *неравенство на ранг произведения (соответственно, ранг суммы или ранг объединения) матриц выполняется для функции rk матриц над $\mathcal{S}$*, если для любых матриц A, B, C над $\mathcal{S}$ выполняется условие (2.3.1) (соответственно, условие (2.3.2) или (2.3.3)). В противном случае мы будем говорить, что соответствующее неравенство, вообще говоря, не выполняется. В данном разделе нас в особенности будет интересовать выполнение указанных неравенств для ранга Гондрана–Мину матриц над макс-алгеброй, которое было открытой проблемой до публикации автором диссертации статьи [169].

Отметим, что в силу примера 1.1.27 максимальный слабый ранг матрицы над $\mathbb{R}_{\max}$ может быть больше, чем число ее столбцов. Из этого результата, в

частности, следует, что неравенства на максимальный слабый ранг произведения, суммы и объединения матриц над $\mathbb{R}_{\max}$ вообще говоря, не выполняются [1]. С другой стороны, неравенства на детерминантный и тропический ранги произведения, суммы и объединения матриц над $\mathbb{R}_{\max}$ всегда выполняются, как показано в разделе 9 статьи [1].

Аналогичные неравенства для факторизационного ранга выполняются над любым полукольцом. Неравенства для произведения и суммы матриц были доказаны в работе [11], неравенство для матричного объединения — в [121].

В данном разделе мы доказываем неравенства на ранг Гондрана–Мину произведения, суммы и объединения в случае квазиселективных полуколец без делителей нуля, одним из наиболее важных примеров которых является макс-алгебра $\mathbb{R}_{\max}$. Мы показываем, что эти неравенства нарушаются в случае матриц над любым идемпотентным полукольцом, которое не является квазиселективным. Кроме того, мы приводим пример селективного полукольца (с делителями нуля), для матриц над которым неравенства на ранг Гондрана–Мину произведения, суммы и объединения матриц, вообще говоря, не выполняются.

Для рассуждений этого раздела оказывается полезным рассмотрение следующего отношения на элементах полукольца, которое играет важную роль и в различных других приложениях [63, 68].

Определение 2.3.1. Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, $a, b \in \mathcal{S}$. Если $a = a \oplus b$, то мы будем писать $a \succeq b$. Если $a \succeq b$ и $a \neq b$, мы будем писать $a \succ b$. Элементы $c, d \in \mathcal{S}$ называются *сравнимыми*, если $c \succeq d$ или $d \succeq c$.

Замечание 2.3.2. *Если полукольцо $\mathcal{S}$ идемпотентно (соотв., селективно), то отношение $\succeq$ задает частичный (соотв., линейный) порядок на $\mathcal{S}$.*

Приведем без доказательства утверждение, которое является прямым следствием определения 2.3.1.

Предложение 2.3.3. *Пусть $a, b, c \in \mathcal{S}$, $a \succeq b$. Тогда $a \otimes c \succeq b \otimes c$.*

Приведем доказательство одной технической леммы.

Лемма 2.3.4. *Пусть ненулевой элемент $h \in \mathcal{S}$ не является делителем нуля. Тогда $GMr(I_h(m) \otimes A) = GMr(A)$ для любой матрицы $A \in \mathcal{S}^{m \times n}$.*

Доказательство. Будем обозначать через $A_{(t)}$ строку матрицы A с номером t, а через $I_h(n)$ — матрицу размера $n \times n$, на диагонали которой стоят элементы h полукольца $\mathcal{S}$, а остальные элементы равны $\mathbf{0}$.

В силу определения произведения строки матрицы $I_h(m) \otimes A$ задаются как $h \otimes A_{(1)}, \ldots, h \otimes A_{(m)}$. Пусть T — произвольное подмножество множества $\{1, \ldots, m\}$. Согласно определению 1.2.2 нам достаточно доказать, что условия GM-зависимости систем строк $\{A_{(t)}\}_{t \in T}$ и $\{h \otimes A_{(t)}\}_{t \in T}$ равносильны.

1. Действительно, предположим, что $\sum_{i \in I'} \lambda_i \otimes A_{(i)} = \sum_{j \in J'} \lambda_j \otimes A_{(j)}$. Умножая полученные равенства на h, мы получаем

$$\sum_{i \in I'} \lambda_i \otimes (h \otimes A_{(i)}) = \sum_{j \in J'} \lambda_j \otimes (h \otimes A_{(j)}).$$

2. Наконец, предположим, что $\sum_{i \in I''} \mu_i \otimes (h \otimes A_{(i)}) = \sum_{j \in J''} \mu_j \otimes (h \otimes A_{(j)})$. В этом случае $\sum_{i \in I''} (h \otimes \mu_i) \otimes A_{(i)} = \sum_{j \in J''} (h \otimes \mu_j) \otimes A_{(j)}$. Поскольку элемент h не является делителем нуля, из условия $\mu_k \neq \mathbf{0}$ следует условие $h \otimes \mu_k \neq \mathbf{0}$. □

Лемма 2.3.5. *Пусть полукольцо $\mathcal{S}$ содержит ненулевой элемент h, который также не является делителем нуля. Если неравенство для ранга Гондрана–Мину произведения выполняется матриц над $\mathcal{S}$, то неравенство для ранга Гондрана–Мину суммы тоже выполняется для матриц над $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицы A и B над $\mathcal{S}$ размера $m \times n$ и положим $GMr(A) = a$, $GMr(B) = b$. Введем в рассмотрение матрицы $X = (I_h(m)|I_h(m)) \in \mathcal{S}^{m \times 2m}$, $Y = \begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{2m \times n}$. Заметим, что $X \otimes Y = I_h(m) \otimes (A \oplus B)$, поэтому $GMr(I_h(m) \otimes (A \oplus B)) \leqslant GMr(Y)$.

Далее, выберем произвольные $a+b+1$ строк матрицы Y. Согласно принципу Дирихле среди них найдутся или $a+1$ строк матрицы A, или $b+1$ строк матрицы B. Значит, произвольные $a+b+1$ строк матрицы Y GM-зависимы. Из определения 1.2.2 следует, что $GMr(Y) \leqslant a+b$.

Таким образом, $GMr(I_h(m) \otimes (A \oplus B)) \leqslant a+b$. Согласно лемме 2.3.4 $GMr(I_h(m) \otimes (A \oplus B)) = GMr(A \oplus B)$, поэтому $GMr(A \oplus B) \leqslant a+b$. □

Лемма 2.3.6. *Если неравенство для ранга Гондрана–Мину суммы выполняется матриц над $\mathcal{S}$, то неравенство для ранга Гондрана–Мину объединения тоже выполняется для матриц над $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицы $U \in \mathcal{S}^{m \times u}$ и $V \in \mathcal{S}^{m \times v}$. Положим $D = (U|O_{m \times v})$, $F = (O_{m \times u}|V)$. Заметим, что $D \oplus F = (U|V)$. Следовательно, $GMr(U|V) \leqslant GMr(D) + GMr(F)$. Кроме того, из определения 1.2.2 следует, что $GMr(U) = GMr(D)$, $GMr(V) = GMr(F)$. □

2.3.1 Квазиселективные полукольца без делителей нуля

В данном подразделе мы доказываем неравенства на ранг Гондрана–Мину произведения, суммы и объединения матриц в случае квазиселективных полуколец без делителей нуля. В частности, мы доказываем эти неравенства для матриц над макс-алгеброй $\mathbb{R}_{\max}$. Введем в рассмотрение следующее понятие, которое окажется полезным для наших рассуждений.

Определение 2.3.7. Пусть полукольцо $\mathcal{S}$ квазиселективно. Множество $R \subset \mathcal{S}$ называется *приведенным*, если

1) элементы множества R попарно сравнимы в смысле определения 2.3.1,

2) для любых $r_1, r_2 \in R$, $s \in \mathcal{S}$ из условий $r_1 \succ r_2$, $s \neq 0$ следует, что $r_1 \otimes s \succ r_2 \otimes s$.

Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, $s \in \mathcal{S}$, $P \subset \mathcal{S}$. Через $s \otimes P$ мы будем обозначать множество $\bigcup_{p \in P} \{s \otimes p\}$. Следующая лемма дает полезный способ построения приведенных множеств.

Лемма 2.3.8. *Пусть $\mathcal{S}$ — квазиселективное полукольцо, не содержащее делителей нуля, R — конечное подмножество $\mathcal{S}$. Тогда для некоторого ненулевого $h \in \mathcal{S}$ множество $h \otimes R$ является приведенным.*

Доказательство. Введем обозначение $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$. Согласно определению 1.1.8 для любых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ найдется ненулевой элемент $d_{ij} \in \mathcal{S}$ такой, что элементы $d_{ij} \otimes r_i$ и $d_{ij} \otimes r_j$ сравнимы. Положим $d = \bigotimes\limits_{i,j=1}^{n} d_{ij}$. Лемма 2.3.3 показывает теперь, что элементы множества $d \otimes R$ попарно сравнимы.

Далее, через T мы обозначим набор всех пар (u, v) элементов множества $d \otimes R$, для которых $u \succ v$ и найдется ненулевой элемент $c_{uv} \in \mathcal{S}$, при котором условие $c_{uv} \otimes u \succ c_{uv} \otimes v$ нарушается. В этом случае согласно лемме 2.3.3 $c_{uv} \otimes u = c_{uv} \otimes v$. Если множество T пусто, то из определения 2.3.7 следует, что множество $d \otimes R$ является приведенным. Если же T непусто, мы положим $c = \bigotimes_{(u,v) \in T} c_{uv}$. В этом случае согласно определению 2.3.7 множество $(c \otimes d) \otimes R$ является приведенным. Поскольку полукольцо $\mathcal{S}$ не содержит делителей нуля, мы имеем $d \neq \mathbf{0}$ и $c \otimes d \neq \mathbf{0}$. □

Следующая техническая лемма характеризует порядок, заданный на элементах конечного множества.

Лемма 2.3.9. *Пусть $(\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}, \succeq)$ — вполне упорядоченное множество. Пусть $\max\{a_1, b_1\} = \max\{c_1, b_2\}$, $\max\{a_2, b_2\} = \max\{c_2, b_1\}$. Тогда $\max\{a_1, a_2, b_1\} = \max\{c_1, c_2, b_2\}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $\max\{a_1,a_2,b_1\} \neq \max\{c_1,c_2,b_2\}$. Не ограничивая общности, мы считаем, что $\max\{a_1,a_2,b_1\}>\max\{c_1,c_2,b_2\}$. Рассмотрим два возможных случая.

1. Если $a_1>\max\{c_1,c_2,b_2\}$ или $b_1>\max\{c_1,c_2,b_2\}$, то мы имеем противоречие с условием $\max\{a_1,b_1\}=\max\{b_2,c_1\}$.

2. Пусть теперь $a_2>\max\{c_1,c_2,b_2\}$. Поскольку $\max\{a_2,b_2\}=\max\{b_1,c_2\}$, мы получаем, что $b_1=a_2$. Таким образом, $b_1>c_1$, $b_1>b_2$. Это опять же противоречит условию $\max\{a_1,b_1\}=\max\{b_2,c_1\}$. □

Теперь докажем один из ключевых результатов этого подраздела.

Теорема 2.3.10. *Пусть $\mathcal{S}$ — квазиселективное полукольцо, не содержащее делителей нуля и $a_1,\dots,a_n,b_1,b_2$ — строки из $\mathcal{S}^m$. Пусть набор $a_1,\dots,a_n,b_1$ и набор $a_1,\dots,a_n,b_2$ являются GM-зависимыми. Пусть $a_0=b_1\oplus b_2\in\mathcal{S}^m$. Тогда строки $a_0,a_1,\dots,a_n$ GM-зависимы.*

Доказательство. Согласно определению 1.1.19 существуют элементы $\lambda_0,\dots,\lambda_n\in\mathcal{S}$, не все из которых равны $\mathbf{0}$, элементы $\mu_0,\dots,\mu_n\in\mathcal{S}$, среди которых также есть отличные от $\mathbf{0}$, и множества L_1, L_2, R_1, R_2, для которых $L_i\cap R_i=\varnothing$, $L_i\cup R_i=\{1,\dots,n\}$, и для всех $k\in\{1,\dots,m\}$ верно, что

$$\left(\bigoplus_{t\in L_1}\lambda_t\otimes a_{tk}\right)\oplus\lambda_0\otimes b_{1k}=\bigoplus_{t\in R_1}\lambda_t\otimes a_{tk}, \tag{2.3.4}$$

$$\left(\bigoplus_{t\in L_2}\mu_t\otimes a_{tk}\right)\oplus\mu_0\otimes b_{2k}=\bigoplus_{t\in R_2}\mu_t\otimes a_{tk}. \tag{2.3.5}$$

Равенства (2.3.4) и (2.3.5) могут быть умножены на ненулевой элемент полукольца. Поэтому согласно лемме 2.3.8 мы можем считать, не ограничивая общности, что слагаемые в равенствах (2.3.4) и (2.3.5) попарно сравнимы. Мы получаем, что для всех $k\in\{1,\dots,m\}$ выполнены условия

$$\max\left\{\lambda_0\otimes b_{1k},\max_{t\in L_1}\{\lambda_t\otimes a_{tk}\}\right\}=\max_{t\in R_1}\{\lambda_t\otimes a_{tk}\}, \tag{2.3.6}$$

$$\max\left\{\mu_0\otimes b_{2k},\max_{t\in L_2}\{\mu_t\otimes a_{tk}\}\right\}=\max_{t\in R_2}\{\mu_t\otimes a_{tk}\}, \tag{2.3.7}$$

где максимумы понимаются в смысле отношения $\succeq$ из определения 2.3.1. Согласно лемме 2.3.8 мы можем считать, не ограничивая общности, что множество $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_n\}$ является приведенным. Если $\lambda_0=\mathbf{0}$ или $\mu_0=\mathbf{0}$, то из равенств (2.3.6) и (2.3.7) следует, что строки $a_1,\dots,a_n,a_0$ GM-зависимы.

Далее считаем, что $\lambda_0 \neq \mathbf{0}$ и $\mu_0 \neq \mathbf{0}$. Умножим равенства (2.3.6) на μ_0, равенства (2.3.7) — на λ_0. Теперь мы можем считать, что $\lambda_0 = \mu_0 = \Lambda \neq \mathbf{0}$.

Введем обозначения $\mathcal{D} = (L_1 \cap R_2) \cup (L_2 \cap R_1)$, $\mathcal{D}_\lambda = \{t \in \mathcal{D} | \lambda_t \succ \mu_t\}$, $\mathcal{D}_\mu = \{t \in \mathcal{D} | \mu_t \succ \lambda_t\}$, $\mathcal{D}_0 = \{t \in \mathcal{D} | \mu_t = \lambda_t\}$ и фиксируем произвольное $k \in \{1, \ldots, m\}$. Из равенств (2.3.6) и (2.3.7) следует, что

$$\max\left\{\Lambda \otimes b_{1k}, \max_{L_1 \setminus \mathcal{D}_0}\{\lambda_t \otimes a_{tk}\}, \max_{L_1 \cap \mathcal{D}_0}\{\lambda_t \otimes a_{tk}\}\right\} = \max\left\{\max_{R_1 \cap \mathcal{D}_0}\{\lambda_t \otimes a_{tk}\}, \max_{R_1 \setminus \mathcal{D}_0}\{\lambda_t \otimes a_{tk}\}\right\}, \quad (2.3.8)$$

$$\max\left\{\Lambda \otimes b_{2k}, \max_{L_2 \setminus \mathcal{D}_0}\{\mu_t \otimes a_{tk}\}, \max_{L_2 \cap \mathcal{D}_0}\{\mu_t \otimes a_{tk}\}\right\} = \max\left\{\max_{R_2 \cap \mathcal{D}_0}\{\mu_t \otimes a_{tk}\}, \max_{R_2 \setminus \mathcal{D}_0}\{\mu_t \otimes a_{tk}\}\right\}. \quad (2.3.9)$$

Заметим, что

$$\max_{t \in L_1 \cap \mathcal{D}_0}\{\lambda_t \otimes a_{tk}\} = \max_{t \in R_2 \cap \mathcal{D}_0}\{\mu_t \otimes a_{tk}\}, \quad \max_{t \in R_1 \cap \mathcal{D}_0}\{\lambda_t \otimes a_{tk}\} = \max_{t \in L_2 \cap \mathcal{D}_0}\{\mu_t \otimes a_{tk}\}.$$

Из леммы 2.3.9 и равенств (2.3.8) и (2.3.9) следует теперь, что

$$\max\left\{\Lambda \otimes a_{0k}, \max_{L_1}\{\lambda_t \otimes a_{tk}\}, \max_{L_2 \setminus \mathcal{D}_0}\{\mu_t \otimes a_{tk}\}\right\} =$$

$$= \max\left\{\max_{R_1}\{\lambda_t \otimes a_{tk}\}, \max_{R_2 \setminus \mathcal{D}_0}\{\mu_t \otimes a_{tk}\}\right\}. \quad (2.3.10)$$

Далее, множество $\{\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_n, \mu_n\}$ является приведенным. Согласно определению 2.3.7 для любого $i \in \mathcal{D}_\lambda$ верно или $\mu_i \otimes a_{ik} = \mathbf{0}$, или $\lambda_i \otimes a_{ik} \succ \mu_i \otimes a_{ik}$. Следовательно, мы можем убрать слагаемое $\mu_i \otimes a_{ik}$, не нарушив равенства (2.3.10). Аналогично, мы можем убрать слагаемое $\lambda_j \otimes a_{jk}$ из равенства (2.3.10) при любом $j \in \mathcal{D}_\mu$. Таким образом, мы получаем

$$\max\left\{\Lambda \otimes a_{0k}, \max_{i \in \mathcal{I}}\{\nu_i \otimes a_{ik}\}\right\} = \max_{j \in \mathcal{J}}\{\nu_j \otimes a_{jk}\}, \quad (2.3.11)$$

где $\mathcal{I} = (L_1 \setminus \mathcal{D}_\mu) \cup (L_2 \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_\lambda))$, $\mathcal{J} = (R_1 \setminus \mathcal{D}_\mu) \cup (R_2 \setminus (\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_\lambda))$ и $\nu_t = \max\{\lambda_t, \mu_t\}$. Заметим, что $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \mathcal{D} \setminus (\mathcal{D}_\lambda \cup \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_\mu)$. Поскольку множество $\{\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_n, \mu_n\}$ является приведенным, для любого $s \in \{1, \ldots, n\}$ верно или $\lambda_s \succ \mu_s$, или $\mu_s \succ \lambda_s$, или $\lambda_s = \mu_s$. Поэтому $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\lambda \cup \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_\mu$.

Таким образом, $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \varnothing$. Кроме того, выполнены условия $\mathcal{I} \cup \mathcal{J} \subset \{1, \ldots, n\}$ и $\Lambda \neq \mathbf{0}$, а равенство (2.3.11) выполняется при любом $k \in \{1, \ldots, m\}$. Теперь из определения 1.1.19 и равенства (2.3.11) следует, что строки $a_0, \ldots, a_n$ GM-зависимы. $\square$

Теорема 2.3.11. *Пусть $\mathcal{S}$ — квазиселективное полукольцо без делителей нуля, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — произвольные элементы $\mathcal{S}$, и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — строки из $\mathcal{S}^m$. Тогда GM-ранг набора строк $a_1, \ldots, a_n$ совпадает с GM-рангом набора строк $a_1, \ldots, a_n, \bigoplus_{k=1}^n \lambda_k \otimes a_k$.*

Доказательство. Пусть GM-ранг набора $a_1, \ldots, a_n$ равен $p-1$. Через $d_1, \ldots, d_p$ мы обозначим произвольный набор из p строк, лежащий в наборе $a_1, \ldots, a_n, \sum_{k=1}^n \lambda_k \otimes a_k$. Согласно определению 1.2.2 нам достаточно проверить, что строки $d_1, \ldots, d_p$ GM-зависимы.

Если $\bigoplus_{k=1}^n \lambda_k \otimes a_k \notin \{d_1, \ldots, d_p\}$, то все элементы набора $d_1, \ldots, d_p$ являются также элементами набора $a_1, \ldots, a_n$. Поскольку GM-ранг набора $a_1, \ldots, a_n$ равен $p-1$, строки $d_1, \ldots, d_p$ GM-зависимы.

Пусть теперь $\bigoplus_{k=1}^n \lambda_k \otimes a_k \in \{d_1, \ldots, d_p\}$. Для определенности предположим, что $\sum_{k=1}^n \lambda_k \otimes a_k = d_1$. Поскольку GM-ранг набора $a_1, \ldots, a_n$ равен $p-1$, при каждом $k \in \{1, \ldots, n\}$ строки $d_2, d_3, \ldots, d_p, a_k$ GM-зависимы. Теперь, согласно определению 1.1.19 при каждом $k \in \{1, \ldots, n\}$ строки $d_2, d_3, \ldots, d_p, \lambda_k \otimes a_k$ также GM-зависимы. Применение теоремы 2.3.10 показывает GM-зависимость строк $d_2, d_3, \ldots, d_p, \bigoplus_{k=1}^n \lambda_k \otimes a_k$. □

Следующая теорема получается как следствие теоремы 2.3.11.

Теорема 2.3.12. *Пусть $\mathcal{S}$ — квазиселективное полукольцо без делителей нуля, $A \in \mathcal{S}^{m\times k}$, $B \in \mathcal{S}^{k\times n}$, $C \in \mathcal{S}^{m\times n}$. Если $A \otimes B = C$, то $GMr(C) \leqslant GMr(B)$.*

Доказательство. Равенство $C_{(i)} = \bigoplus_{t=1}^k A_{it} \otimes B_{(t)}$ следует из условия. Далее, согласно теореме 2.3.11 GM-ранг набора $B_{(1)}, \ldots, B_{(k)}, C_{(1)}, \ldots, C_{(m)}$ и GM-ранг набора $B_{(1)}, \ldots, B_{(k)}$ совпадают. Поэтому из определения 1.2.2 теперь следует, что GM-ранг набора $C_{(1)}, \ldots, C_{(m)}$ не превосходит GM-ранга набора $B_{(1)}, \ldots, B_{(k)}$, то есть, $GMr(B) \geqslant GMr(C)$. □

Отметим, что в силу теоремы 2.3.12 строчный ранг Гондрана–Мину произведения матриц не превосходит строчного ранга правого сомножителя. Аналогичный же результат для левого сомножителя доказывается более просто.

Предложение 2.3.13. *Пусть $\mathcal{S}$ — коммутативное полукольцо, $A \in \mathcal{S}^{m\times k}$, $B \in \mathcal{S}^{k\times n}$, $C \in \mathcal{S}^{m\times n}$. Если $A \otimes B = C$, то $GMr(C) \leqslant GMr(A)$.*

Доказательство. Обозначим через $A_{(i)}$ строку матрицы A с номером i и рассмотрим произвольные подмножества $I, J \in \{1, \ldots, m\}$ и элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathcal{S}$. Для доказательства предложения достаточно заметить, что равенство $\bigoplus_{i\in I} \lambda_i \otimes C_{(i)} = \bigoplus_{j\in J} \lambda_j \otimes C_{(j)}$ получается из равенства $\bigoplus_{i\in I} \lambda_i \otimes A_{(i)} = \bigoplus_{j\in J} \lambda_j \otimes A_{(j)}$ умножением на матрицу B справа. □

Теперь мы можем доказать основные результаты этого подраздела.

Теорема 2.3.14. *Пусть $\mathcal{S}$ — квазиселективное полукольцо без делителей нуля. Тогда выполняются неравенства для рангов Гондрана–Мину произведения, суммы и объединения матриц над $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Неравенство на ранг произведения следует из теоремы 2.3.12 и предложения 2.3.13. Неравенство на ранг суммы следует теперь из леммы 2.3.5, неравенство на ранг объединения — из леммы 2.3.6. □

Теорема 2.3.15. *Неравенства для рангов Гондрана–Мину произведения, суммы и объединения выполняются для матриц над макс-алгеброй $\mathbb{R}_{\max}$.*

Доказательство. Согласно примеру 1.1.11 макс-алгебра $\mathbb{R}_{\max}$ является коммутативным селективным полукольцом без делителей нуля. Поэтому результат следует из теоремы 2.3.14. □

2.3.2 Полукольца, не являющиеся квазиселективными

В этом подразделе мы будем рассматривать идемпотентные полукольца, не являющиеся квазиселективными. Мы покажем, что неравенства на GM-ранги произведения, суммы и объединения выполняются не для всех матриц над такими полукольцами. Более того, мы получаем характеризацию идемпотентных полуколец, для матриц над которыми эти неравенства выполняются. Сначала мы докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2.3.16. *Пусть идемпотентное полукольцо $\mathcal{S}$ не является квазиселектиным. Тогда существует ненулевой элемент $h \in \mathcal{S}$, не являющийся делителем нуля.*

Доказательство. Согласно определению 1.1.8 найдутся элементы $g, h \in \mathcal{S}$ такие, что для любого ненулевого $d \in \mathcal{S}$ элементы $d \otimes g$ и $d \otimes h$ не являются сравнимыми в смысле определения 2.3.1. Если $d \otimes h = \mathbf{0}$, то согласно определению 2.3.1 $d \otimes g \succeq d \otimes h$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Следующая лемма дает пример матриц, важный для доказательства основного результата этого подраздела.

Лемма 2.3.17. *Пусть $\mathcal{S}$ — идемпотентное полукольцо, $a, b \in \mathcal{S}$, элементы $a \otimes d$ и $b \otimes d$ не сравнимы ни при каком $d \in \mathcal{S}$, отличном от $\mathbf{0}$. Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} a \\ a \oplus b \\ b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a \oplus b \\ b \\ a \end{pmatrix},$$

$F = (A|B)$. *Тогда* $GMr(A) \leqslant 1$, $GMr(B) \leqslant 1$, $GMr(F) = 3$.

Доказательство. Из определения 1.1.19 следует, что две произвольные строки матриц A и B GM-зависимы. Поэтому $GMr(A) \leqslant 1$ и $GMr(B) \leqslant 1$.

Предположим теперь, что строки матрицы F GM-зависимы. Тогда согласно определению 1.1.19 реализуется один из трех случаев.

1. Некоторые элементы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ полукольца $\mathcal{S}$, не все из которых равны $\mathbf{0}$, удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} \lambda_1 \otimes a = \lambda_2 \otimes (a \oplus b) \oplus \lambda_3 \otimes b, \\ \lambda_1 \otimes (a \oplus b) = \lambda_2 \otimes b \oplus \lambda_3 \otimes a. \end{cases}$$

К левой и правой частям первого равенства прибавим $(\lambda_2 \oplus \lambda_3) \otimes a$; ко второму равенству прибавим первое; получим, пользуясь идемпотентностью,

$$\begin{cases} (\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3) \otimes a = (\lambda_2 \oplus \lambda_3) \otimes (a \oplus b), \\ \lambda_1 \otimes (a \oplus b) = (\lambda_2 \oplus \lambda_3) \otimes (a \oplus b). \end{cases}$$

Из второго равенства последней системы следует, что $(\lambda_2 \oplus \lambda_3) \otimes (a \oplus b) = (\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3) \otimes (a \oplus b)$, т.к. полукольцо $\mathcal{S}$ идемпотентно. Таким образом, используя первое равенство, получаем, что $(\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3) \otimes a = (\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3) \otimes (a \oplus b)$, или $(\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3) \otimes a \succeq (\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3) \otimes b$. Согласно условию леммы $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3 = \mathbf{0}$. В силу утверждения 1.1.10 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mathbf{0}$, что противоречит предположению. Случай 1 не реализуется.

2. Некоторые элементы μ_1, μ_2, μ_3 полукольца $\mathcal{S}$, не все из которых равны $\mathbf{0}$, удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} \mu_2 \otimes (a \oplus b) = \mu_1 \otimes a \oplus \mu_3 \otimes b, \\ \mu_2 \otimes b = \mu_1 \otimes (a \oplus b) \oplus \mu_3 \otimes a. \end{cases}$$

К первому равенству прибавим второе; к левой и правой частям второго равенства прибавим $(\mu_1 \oplus \mu_3) \otimes b$; получим, пользуясь идемпотентностью,

$$\begin{cases} \mu_2 \otimes (a \oplus b) = (\mu_1 \oplus \mu_3) \otimes (a \oplus b), \\ (\mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \mu_3) \otimes b = (\mu_1 \oplus \mu_3) \otimes (a \oplus b). \end{cases}$$

Из первого равенства последней системы следует, что $(\mu_1 \oplus \mu_3) \otimes (a \oplus b) = (\mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \mu_3) \otimes (a \oplus b)$, т.к. полукольцо $\mathcal{S}$ идемпотентно. Таким образом, используя второе равенство, получаем, что $(\mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \mu_3) \otimes b = (\mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \mu_3) \otimes (a \oplus b)$, или $(\mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \mu_3) \otimes b \succeq (\mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \mu_3) \otimes a$. Согласно условию

леммы $\mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \mu_3 = \mathbf{0}$. В силу утверждения 1.1.10 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mathbf{0}$, что противоречит предположению. Случай 2 не реализуется.

3. Некоторые элементы ν_1, ν_2, ν_3 полукольца $\mathcal{S}$, не все из которых равны $\mathbf{0}$, удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} \nu_3 \otimes b = \nu_1 \otimes a \oplus \nu_2 \otimes (a \oplus b), \\ \nu_3 \otimes a = \nu_1 \otimes (a \oplus b) \oplus \nu_2 \otimes b. \end{cases}$$

К левой и правой частям первого равенства прибавим $(\nu_1 \oplus \nu_2) \otimes b$; ко второму равенству прибавим первое; получим, пользуясь идемпотентностью,

$$\begin{cases} (\nu_1 \oplus \nu_2 \oplus \nu_3) \otimes b = (\nu_1 \oplus \nu_2) \otimes (a \oplus b), \\ \nu_3 \otimes (a \oplus b) = (\nu_1 \oplus \nu_2) \otimes (a \oplus b). \end{cases}$$

Из второго равенства последней системы следует, что $(\nu_1 \oplus \nu_2) \otimes (a \oplus b) = (\nu_1 \oplus \nu_2 \oplus \nu_3) \otimes (a \oplus b)$, т.к. полукольцо $\mathcal{S}$ идемпотентно. Таким образом, используя первое равенство, получаем, что $(\nu_1 \oplus \nu_2 \oplus \nu_3) \otimes b = (\nu_1 \oplus \nu_2 \oplus \nu_3) \otimes (a \oplus b)$, или $(\nu_1 \oplus \nu_2 \oplus \nu_3) \otimes b \succeq (\nu_1 \oplus \nu_2 \oplus \nu_3) \otimes a$. Согласно условию леммы $\nu_1 \oplus \nu_2 \oplus \nu_3 = \mathbf{0}$. В силу утверждения 1.1.10 $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \mathbf{0}$, что противоречит предположению. Случай 3 не реализуется.

Полученное противоречие показывает, что строки матрицы F GM-независимы. Согласно определению 1.2.2 имеем $GMr(F) = 3$. □

Приведем пример, иллюстрирующий результат леммы 2.3.17.

Пример 2.3.18. *Пусть $\mathcal{S} = \mathbb{N}^2 \cup \{\mathbf{0}\}$ — полукольцо из примера 1.1.16,*

$$C = \begin{pmatrix} (1,3) & (2,3) \\ (2,3) & (2,2) \\ (2,2) & (1,3) \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{3\times 2}.$$

Тогда $GMr(C) = 3$.

Доказательство. Можно проверить (это уже было сделано в доказательстве примера 1.1.16), что $(1,3) \otimes d$ и $(2,2) \otimes d$ не сравнимы ни при каком $d \in \mathcal{S}$, отличном от $\mathbf{0}$. Поэтому результат следует из леммы 2.3.17. □

Отметим также еще одно следствие леммы 2.3.17. Приводимый в ней пример показывает, что теорема Гондрана–Мину (то есть, теорема 1.1.26) не может быть обобщена на случай матриц над идемпотентным полукольцом, которое не является квазиселективным. Докажем теперь основные результаты этого подраздела.

Теорема 2.3.19. *Пусть $\mathcal{S}$ — идемпотентное полукольцо, не являющееся квазиселективным. Тогда неравенства для рангов Гондрана–Мину произведения, суммы и объединения выполняются не для всех матриц над $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Из леммы 2.3.17 следует, что неравенство на ранг объединения, вообще говоря, не выполняется. Далее, из леммы 2.3.6 следует, что неравенство на ранг суммы также, вообще говоря, не выполняется. Наконец, из лемм 2.3.16 и 2.3.5 следует, что неравенство на ранг произведения, вообще говоря, не выполняется. □

Теорема 2.3.20. *Пусть $\mathcal{S}$ — идемпотентное полукольцо, не содержащее делителей нуля. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) выполняется неравенство для рангов Гондрана–Мину произведения матриц с элементами из $\mathcal{S}$;

2) выполняется неравенство для рангов Гондрана–Мину суммы матриц с элементами из $\mathcal{S}$;

3) выполняется неравенство для рангов Гондрана–Мину объединения матриц с элементами из $\mathcal{S}$;

4) полукольцо $\mathcal{S}$ является квазиселективным.

Доказательство. Импликации 4) $\Rightarrow$ 1), 4) $\Rightarrow$ 2), 4) $\Rightarrow$ 3) следуют из теоремы 2.3.14; импликации 1) $\Rightarrow$ 4), 2) $\Rightarrow$ 4), 3) $\Rightarrow$ 4) — из теоремы 2.3.19. □

2.3.3 Полукольца с делителями нуля

В этом подразделе мы покажем, что существуют селективные полукольца, для матриц над которыми могут нарушаться неравенства на GM-ранг произведения, суммы и объединения матриц.

Определение 2.3.21. Пусть $\mathcal{H} = \{a_i, b, c_j, \mathbf{0}\}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Определим отношение $\succeq$ линейного порядка на $\mathcal{H}$ следующим образом:

(i) $a_i \succeq b \succeq c_j \succeq \mathbf{0}$ при всех i, j,

(ii) $a_i \succeq a_j$, $c_i \succeq c_j$ при $i \succeq j$.

Сумму элементов $x, y \in \mathcal{H}$ определим как $x \oplus y = \max\{x, y\}$. Положим

(iii) $a_i \otimes a_j = a_{i+j}$ при всех i, j,

(iv) $b \otimes a_i = a_i \otimes b = b \otimes b = b$ при всех i,

(v) $c_i \otimes a_j = a_j \otimes c_i = c_{i+j}$ при всех i, j,

(vi) $c_i \otimes b = b \otimes c_i = c_i \otimes c_j = \mathbf{0} \otimes x = x \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$ при всех $i, j \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathcal{H}$.

Предложение 2.3.22. $(\mathcal{H}, \oplus, \otimes)$ — *коммутативное селективное полукольцо с единицей.*

Доказательство. 1. Согласно определению 2.3.21 для любых $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{H}$ верно, что $u_1 \oplus (u_2 \oplus u_3) = (u_1 \oplus u_2) \oplus u_3 = \max\{u_1, u_2, u_3\}$. Кроме того, из пункта (i) следует, что $x \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus x = x$ при любом $x \in \mathcal{H}$. Таким образом, $\mathcal{H}$ есть абелев моноид относительно операции $\oplus$.

2. Для доказательства ассоциативности операции $\otimes$ будут использоваться пункты (iii)–(vi) определения 2.3.21. Действительно, пусть $x, y, z \in \mathcal{H}$. Если какой-то из элементов x, y, z равен $\mathbf{0}$, то из пункта (vi) следует, что $x \otimes (y \otimes z) = \mathbf{0} = (x \otimes y) \otimes z$. Предполагая далее, что $\mathbf{0} \notin \{x, y, z\}$, разберем три возможных случая отдельно.

2.1. Предположим сначала, что $y = c_h$. Рассмотрим вновь отдельно два случая, возможных при этом условии.

2.1a. Пусть $x \neq a_m$ или $z \neq a_n$. Тогда из пунктов (v) и (vi) следует, что $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z = \mathbf{0}$.

2.1b. Если же $x = a_m$, $z = a_n$, то $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z = c_{h+m+n}$ согласно пункту (v); это заканчивает разбор случая 2.1.

2.2. Предположим далее, что $y = b$. Рассмотрим два возможных случая.

2.2a. Пусть $x = c_i$ или $z = c_j$. Тогда из пунктов (v) и (vi) следует, что $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z = \mathbf{0}$.

2.2b. Если же $x \neq c_i$, $z \neq c_j$, то $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z = b$ согласно пункту (iv); это заканчивает разбор случая 2.2.

2.3. Наконец, предположим, что $y = a_p$. Для этого случая имеем уже четыре возможности, каждую из которых будем рассматривать отдельно.

2.3a. Пусть $z = c_r$. Если тогда $x \neq a_q$, то из пункта (vi) следует $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z = \mathbf{0}$. Если же $x = a_q$, то $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z = c_{p+q+r}$ согласно пункту (v).

2.3b. Пусть теперь $x = c_s$. Если тогда $z \neq a_q$, то из пункта (vi) следует $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z = \mathbf{0}$. Если же $z = a_q$, то $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z = c_{p+q+s}$ согласно пункту (v).

2.3c. Если $x = z = b$ или $\{x, z\} = \{b, a_t\}$, то из пункта (iv) следует, что $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z = b$.

2.3d. Наконец, если $x = a_{t_1}$, $z = a_{t_2}$, то $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z = a_{p+t_1+t_2}$ согласно пункту (iii); это заканчивает разбор случая 2.3.

Таким образом, мы показали для каждого из возможных случаев 2.1, 2.2 и 2.3, что операция $\otimes$ ассоциативна. Непосредственно из ее определения следует, что эта операция коммутативна и $a_0 \otimes h = h$ для любого $h \in \mathcal{H}$. Таким образом, $\mathcal{H}$ есть абелев моноид относительно операции $\otimes$.

3. Пусть теперь $x, y, z \in \mathcal{H}$, $x \succeq y$. Для доказательства свойства дистрибутивности нам потребуется проверить, что $x \otimes z \succeq y \otimes z$. Во-первых, если $y = \mathbf{0}$ или $z = \mathbf{0}$, то из пункта (vi) сразу следует, что $y \otimes z = \mathbf{0}$. В этом случае $x \otimes z \succeq y \otimes z$ согласно пункту (i). Предполагая далее, что $\mathbf{0} \notin \{y, z\}$, разберем

три возможных случая отдельно.

3.1. Предположим сначала, что $y = c_q$. Рассмотрим вновь отдельно два случая, возможных при этом условии.

3.1a. Пусть $z = a_p$, тогда $y \otimes z = c_{p+q}$ согласно пункту (v). Далее, поскольку $x \succeq y$, возможны лишь случаи $x = a_r$, $x = b$ и $x = c_s$ (при $s \succeq q$). Таким образом, получаем, что, соответственно, $x \otimes z = a_{p+r}$ или $x \otimes z = b$, или $x \otimes z = c_{p+s}$. Теперь из пунктов (i) и (ii) следует, что $x \otimes z \succeq y \otimes z$.

3.1b. Если же $z \neq a_p$, то из пункта (vi) следует $y \otimes z = \mathbf{0}$. Тогда $x \otimes z \succeq y \otimes z$ согласно пункту (i); это заканчивает разбор случая 3.1.

3.2. Далее, пусть $y = b$. Снова рассмотрим два возможных случая.

3.2a. Пусть $z \neq c_i$, тогда $y \otimes z = b$ согласно пункту (iv). Далее, $x = a_j$ или $x = b$, поскольку $x \succeq y$; поэтому $x \otimes z = a_t$ или $x \otimes z = b$. Таким образом, $x \otimes z \succeq y \otimes z$ согласно пункту (i).

3.2b. Если же $z = c_i$, то из пункта (vi) следует $y \otimes z = \mathbf{0}$. Тогда $x \otimes z \succeq y \otimes z$ согласно пункту (i); это заканчивает разбор случая 3.2.

3.3. Предположим наконец, что $y = a_m$; тогда $x = a_n$ и $n \geqslant m$, поскольку $x \succeq y$. Опять же, для этого случая имеется три возможности, каждую из которых будем рассматривать отдельно.

3.3a. Если $z = c_k$, то $x \otimes z = c_{n+k} \succeq c_{m+k} = y \otimes z$ согласно пункту (ii).

3.3b. Если же $z = b$, то $x \otimes z = y \otimes z = b$ согласно пункту (iv).

3.3c. Наконец, если $z = a_v$, то $x \otimes z = a_{n+v} \succeq y \otimes z = a_{m+v}$ согласно пункту (ii); это заканчивает разбор случая 3.2.

Таким образом, мы показали для каждого из возможных случаев 3.1, 3.2 и 3.3, что $x \otimes z \succeq y \otimes z$. Таким образом, $x_1 \otimes \max\{x_2, x_3\} \succeq x_1 \otimes \min\{x_2, x_3\}$ при любых $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{H}$; поэтому

$$x_1(x_2 \oplus x_3) = x_1 \otimes \max\{x_2, x_3\} = x_1 \otimes \max\{x_2, x_3\} \oplus x_1 \otimes \min\{x_2, x_3\} = x_1x_2 \oplus x_1x_3,$$

то есть, выполняется свойство дистрибутивности.

4. Согласно пунктам 1 и 2 множество $\mathcal{H}$ образует абелев моноид относительно каждой из операций $\otimes$ и $\otimes$; согласно пункту 3 выполняется свойство дистрибутивности. Кроме того, из пункта (vi) определения 2.3.21 следует, что $\mathbf{0} \otimes x = x \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$ при любом $x \in \mathcal{H}$. Согласно определению 1.1.1 $\mathcal{H}$ есть коммутативное полукольцо с единицей. Осталось заметить, что $a \oplus b \in \{a, b\}$ для любых $a, b \in \mathcal{H}$, то есть, $\mathcal{H}$ селективно. □

Пример 2.3.23. *Пусть* $A = \left(\begin{smallmatrix} a_0 & a_0 \\ a_1 & a_0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{H}^{2\times 2}$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{H}^{2\times 2}$. *Тогда* $GMr(A) \leqslant 1$, $GMr(B) = 0$, $GMr(A|B) = 2$.

Доказательство. Согласно определению 2.3.21 верно, что $b \otimes (a_0, a_0) = b \otimes (a_1, a_0)$, $c_0 \otimes b = \mathbf{0}$. Поэтому из определения 1.2.2 следует, что $GMr(A) \leqslant 1$ и $GMr(B) = 0$.

Предположим теперь, что строки матрицы $(A|B)$ GM-зависимы. Из определения 1.1.19 следует, что

$$\lambda \otimes a_0 = \mu \otimes a_1, \quad \lambda \otimes a_0 = \mu \otimes a_0, \quad \mu \otimes b = \mathbf{0}, \tag{2.3.12}$$

при некоторых $\lambda, \mu \in \mathcal{H}$, $(\lambda, \mu) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Если $\mu = \mathbf{0}$, то первое из равенств (2.3.12) влечет равенство $\lambda = \mathbf{0}$.

Если же $\mu \neq \mathbf{0}$, то третье из равенств (2.3.12) означает, что $\mu = c_q$. Используя теперь первые два из равенств (2.3.12), мы получаем $\lambda \otimes a_0 = c_{q+1}$, $\lambda \otimes a_0 = c_q$. Полученное противоречие показывает, что строки матрицы $(A|B)$ GM-независимы. Таким образом, $GMr(A|B) = 2$. □

Теорема 2.3.24. *Неравенства для рангов Гондрана–Мину произведения, суммы и объединения выполняются не для всех матриц над* $\mathcal{H}$.

Доказательство. Матрицы A, B из примера 2.3.23 не удовлетворяют неравенству на ранг объединения. Далее, из леммы 2.3.6 следует, что неравенство на ранг суммы также, вообще говоря, не выполняется. Наконец, согласно определению 2.3.21 элемент $a_0 \in \mathcal{H}$ не является делителем нуля, поэтому из леммы 2.3.5 следует, что неравенство на ранг произведения, вообще говоря, не выполняется. □

Глава 3

Полугруппа матриц над полукольцом

В этой главе обсуждается структура полугруппы квадратных матриц фиксированного порядка над заданным полукольцом. Отметим, что в классическом случае матриц над полем или кольцом множество таких матриц образует ассоциативную алгебру и имеет фундаментальную важность для построения классических теорий абстрактной алгебры, таких как теория представлений групп или структурная теория колец [38].

Множество матриц над полукольцом не обладает структурой кольца, что в значительной мере затрудняет их изучение. С другой стороны, интерес вызывают многие вопросы, связанные с полугрупповой структурой множества матриц, в том числе описание отношений Грина, подгрупп, идемпотентов и некоторые другие [81, 118, 129]. Изучение этих вопросов, с одной стороны, позволяет получить полезную информацию о свойствах множества матриц с точки зрения полугрупп, и с другой стороны, доказать ряд результатов о структуре полуколец, матрицы над которыми удовлетворяют тем или иным условиям, рассмотрение которых связано с приложениями теории полугрупп.

3.1 Отношения Грина и ранговые функции

В этом разделе мы изучаем связь отношений Грина на полугруппе матриц размера $n \times n$ над полукольцом и ранговых функций этих матриц. Напомним, как определяются отношения Грина $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{J}$ на произвольной полугруппе S. Для элементов $a, b \in \mathcal{S}$ мы пишем $a \leqslant_{\mathcal{R}} b$, если $a = b$ или $a = bc$ для некоторого $c \in S$, а также $a \leqslant_{\mathcal{L}} b$, если $a = b$ или $a = db$ для некоторого $d \in S$. Мы также пишем $a \leqslant_{\mathcal{J}} b$, если $a \leqslant_{\mathcal{L}} b$ или $a \leqslant_{\mathcal{R}} b$, или $a = s_1 b s_2$ для некоторых $s_1, s_2 \in S$. В силу определений отношения $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{J}$ рефлексивны и

транзитивны, то есть, задают предпорядки на полугруппе S. Назовем функцию f на полугруппе S, принимающую вещественные значения, монотонной относительно отношения $\mathcal{J}$, если условие $a \leqslant_{\mathcal{J}} b$ влечет $f(a) \leqslant f(b)$.

По предложению 8.1 работы [81] ранговая функция rk монотонна относительно отношения $\mathcal{J}$ на полугруппе матриц $(\mathcal{S}^{n\times n}, \otimes)$ в том и только том случае, если условие (2.3.1) выполняется для любых матриц размера $n \times n$ над полукольцом $\mathcal{S}$. Это утверждение позволило авторам работы [81] доказать для отношения $\mathcal{J}$ на полугруппе тропических матриц монотонность тропического, детерминантного и факторизационного рангов и ранга Гондрана–Мину. Отметим также, что доказательство монотонности ранга Гондрана–Мину было основано на результатах работы [169], опубликованной автором диссертации ранее. В данной же работе, опираясь на результаты раздела 2.3, мы можем получить более полное описание поведения ранга Гондрана–Мину с точки зрения отношений Грина. Приведем доказательства этих результатов.

Теорема 3.1.1. *Функция GMr матриц размера $n \times n$ над произвольным полукольцом монотонна относительно отношения $\mathcal{R}$.*

Доказательство. Требуется проверить, что условие $A \leqslant_{\mathcal{R}} B$ влечет $GMr(A) \leqslant GMr(B)$. В силу определения отношения $\mathcal{R}$, условие $A \leqslant_{\mathcal{R}} B$ означает либо $A = B$, либо $A = B \otimes C$ при некотором C. Таким образом, результат следует из предложения 2.3.13. □

Оказывается, что функция ранга Гондрана–Мину является монотонной относительно отношений $\mathcal{L}$ и $\mathcal{J}$ для матриц не над всеми полукольцами, и следующая теорема дает характеризацию таких полуколец.

Теорема 3.1.2. *Рассмотрим идемпотентное полукольцо $\mathcal{S}$ и целое число $n \geqslant 6$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) полукольцо $\mathcal{S}$ квазиселективно;

(ii) функция GMr монотонна относительно отношения $\mathcal{J}$ на $(\mathcal{S}^{n\times n}, \otimes)$;

(iii) функция GMr монотонна относительно отношения $\mathcal{L}$ на $(\mathcal{S}^{n\times n}, \otimes)$.

Доказательство. Если полукольцо $\mathcal{S}$ квазиселективно, то в силу теоремы 2.3.20 условие $A = P \otimes B \otimes Q$ влечет $GMr(A) \leqslant GMr(B)$, что доказывает импликацию $(i) \to (ii)$; импликация $(ii) \to (iii)$ следует непосредственно из определений, поскольку $A \leqslant_{\mathcal{L}} B$ влечет $A \leqslant_{\mathcal{J}} B$ для любых матриц A и B.

Наконец, будем доказывать $(iii) \to (i)$, для чего предположим, что условие (i) нарушается. В этом случае в силу определения 1.1.8 найдутся элементы $a, b \in \mathcal{S}$, для которых $a \otimes d$ и $b \otimes d$ не сравнимы ни при каком $d \in \mathcal{S}$,

отличном от $\mathbf{0}$. Заметим, что произведение матриц

$$\begin{pmatrix} a & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a \oplus b & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ b & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a \oplus b & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & b & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{3.1.1}$$

совпадает с матрицей F из леммы 2.3.17 с точностью до добавления нулевых строк и столбцов. Далее, первая из этих матриц имеет строчный ранг Гондрана–Мину не более 2, а произведение имеет ранг Гондрана–Мину, равный 3 по лемме 2.3.17. Таким образом, функция GMr не является монотонной относительно отношения $\mathcal{L}$ на полугруппе $\left(\mathcal{S}^{6\times 6}, \otimes\right)$. Чтобы окончательно вывести отрицание отношения (iii), достаточно добавить по $n-6$ нулевых строк и столбцов к матрицам из равенства (3.1.1). □

В работе [81] не была исследована связь функции ранга Капранова тропических матриц с отношениями Грина, и было отмечено, что такое исследование представляло бы интерес. Оставшаяся часть этого раздела будет посвящена как раз изучению этого вопроса, и мы изложим результаты, опубликованные автором диссертации в статье [166]. А именно, мы покажем, что функция ранга Капранова монотонна относительно порядков Грина на полугруппе тропических матриц размера $n \times n$ при всех n в том и только том случае, если она понимается в смысле бесконечного базового поля.

В оставшейся части раздела мы исследуем матрицы над тропическим полукольцом $(\mathbb{R}, \min, +)$ и используем обозначения $a \oplus b = \min\{a, b\}$ и $a \otimes b = a + b$ для тропических операций. В следующей лемме мы рассматриваем ранг Капранова относительно поля, которое может быть конечным. Напомним, что через $B_{(i)}$ мы обозначаем i-ю строку матрицы B.

Лемма 3.1.3. *Пусть матрица B' получена из матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ добавлением строки $B_{(0)} = B_{(r)} \oplus B_{(s)}$, где $r, s \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда $K_{\mathbb{F}}(B') = K_{\mathbb{F}}(B)$, если поле $\mathbb{F}$ содержит не менее $n + 2$ элементов.*

Доказательство. 1. Пусть матрица $A \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}^{m\times n}$ такова, что $B = \deg A$. В силу условия на мощность поля $\mathbb{F}$, найдется $\lambda \in \mathbb{F}^*$, не равное коэффициенту при главном члене ни одного из элементов $\frac{A_{r1}}{A_{s1}}$, …, $\frac{A_{rn}}{A_{sn}}$. Другими словами, при вычислении сумм $A_{rk} - \lambda A_{sk}$, $k = 1, \ldots, n$, не произойдет сокращения главных членов. Таким образом, $\deg(A_{rk} - \lambda A_{sk}) = \min\{\deg A_{rk}, \deg \lambda A_{sk}\} = \min\{B_{rk}, B_{sk}\}$, т.е. $\deg(A_{rk} - \lambda A_{sk}) = B_{0k}$.

2. Через A' обозначим матрицу, полученную из A добавлением строки $A_{(0)} = A_{(r)} - \lambda A_{(s)}$. Из пункта 1 следует, что $B' = \deg A'$, кроме того, матрица A' получена из A элементарным преобразованием строк, поэтому $\operatorname{rank}(A') = \operatorname{rank}(A)$. Из определения 1.3.23 следует, что $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B) \geqslant \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B')$. С другой стороны, матрица B есть подматрица B', поэтому $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B) \leqslant \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B')$. □

Докажем полезное следствие леммы 3.1.3.

Следствие 3.1.4. *Пусть матрица B' получена из матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ добавлением строки $B_{(0)} = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \left(c_i \otimes B_{(i)}\right)$, $c_i \in \mathbb{R}$. Тогда $K_{\mathbb{F}}(B') = K_{\mathbb{F}}(B)$, если поле $\mathbb{F}$ содержит не менее $n+2$ элементов.*

Доказательство. Через B'' обозначим матрицу, полученную из B добавлением строк $\bigoplus\limits_{i=1}^{2} \left(c_i \otimes B_{(i)}\right), \bigoplus\limits_{i=1}^{3} \left(c_i \otimes B_{(i)}\right), \ldots, \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \left(c_i \otimes B_{(i)}\right)$. Из определения 1.3.23 следует, что тропическое умножение строк матрицы на элементы из $\mathbb{R}$ не влияет на ранги Капранова, поэтому, многократно применяя лемму 3.1.3, получаем, что $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B'') = \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B)$. Заметим, что матрица B' содержит B как подматрицу и сама является подматрицей матрицы B''. Значит, $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B') = \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B)$. □

Теперь мы можем доказать неравенство, ограничивающее ранг Капранова произведения тропических матриц.

Теорема 3.1.5. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Тогда $K_{\mathbb{F}}(A \otimes B) \leqslant \min\{K_{\mathbb{F}}(A), K_{\mathbb{F}}(B)\}$, если поле $\mathbb{F}$ содержит не менее $n+2$ элементов.*

Доказательство. Через B' обозначим матрицу, полученную из B добавлением строк $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} \left(A_{1i} \otimes B_{(i)}\right), \ \ldots, \ \bigoplus\limits_{i=1}^{k} \left(A_{mi} \otimes B_{(i)}\right)$. Согласно следствию 3.1.4 $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B') = \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B)$. Заметим, что матрица $A \otimes B$ есть подматрица матрицы B', поэтому $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A \otimes B) \leqslant \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B') = \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B)$. Кроме того, в силу определения 1.3.23 ранги Капранова инвариантны относительно транспонирования матриц, поэтому $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}\left((A \otimes B)^{\tau}\right) = \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B^{\tau} \otimes A^{\tau}) \leqslant \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A^{\tau})$, или $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A \otimes B) \leqslant \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A)$. □

Покажем, что условие (2.3.3) выполняется для ранга Капранова матриц независимо от базового поля.

Предложение 3.1.6. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Если $A \in \mathbb{R}^{m\times u}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times v}$, то $K_{\mathbb{F}}(A|B) \leqslant K_{\mathbb{F}}(A) + K_{\mathbb{F}}(B)$.*

Доказательство. Из определения 1.3.23 следует, что найдутся матрицы $R \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}^{m\times u}$ и $S \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}^{m\times v}$, такие что $A = \deg R$, $B = \deg S$, $\operatorname{rank}(R) = \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A)$,

$\operatorname{rank}(S) = \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B)$. Ясно, что $\deg(R|S) = (A|B)$. Кроме того, любые $(\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A) + \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B) + 1)$ столбцов матрицы $(R|S)$ линейно зависимы: они содержат либо $(\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A) + 1)$ столбцов матрицы R, либо $(\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B) + 1)$ столбцов матрицы S. □

Как следствие теоремы 3.1.5 получим неравенство, ограничивающее ранг Капранова суммы тропических матриц.

Следствие 3.1.7. *Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Тогда $K_{\mathbb{F}}(A \oplus B) \leqslant K_{\mathbb{F}}(A) + K_{\mathbb{F}}(B)$, если поле $\mathbb{F}$ содержит не менее $n + 2$ элементов.*

Доказательство. Через g обозначим самое большое число, являющееся элементом одной из матриц A, B, через l обозначим наименьшее число, обладающее таким свойством. Введем матрицу $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$, на диагонали которой стоят нули, а остальные элементы равны $g - l$. Положим $C = (A|B)$, $D = \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}$. Заметим, что $C \otimes D = A \oplus B$. По теореме 3.1.5, $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A \oplus B) \leqslant \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(C)$. Из предложения 3.1.6 следует, что $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(C) \leqslant \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A) + \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B)$, а значит, $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A \oplus B) \leqslant \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A) + \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B)$. □

Таким образом, в силу теоремы 3.1.5 и следствия 3.1.7 условия (2.3.1) и (2.3.2) выполняются для ранга Капранова всех матриц (независимо от их размера) в случае, если базовое поле бесконечно. Из теоремы 3.1.5 следует, что ранг Капранова монотонен относительно порядков Грина на полугруппе тропических матриц размера $n \times n$ при любом n, если базовое поле бесконечно. Оказывается, что в случае конечных базовых полей функция ранга Капранова обладает более сложным поведением. Мы покажем, что ранг произведения матриц может превышать ранг одного из сомножителей в этом случае.

Пример 3.1.8. *Определим матрицу $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, положив $B_{ij} = 1$ при $i = j$ и $B_{ij} = 0$ в противном случае. Если поле $\mathbb{F}$ содержит по крайней мере $n-1$ элементов, то* $\operatorname{trop}(B) = K_{\mathbb{F}}(B) = 2$.

Доказательство. Пусть $\{0, e_1, \ldots, e_{n-2}\} \subset \mathbb{F}$. Построим матрицу $A \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}^{n\times n}$ следующим образом. Положим $A_{nn} = t$, $A_{np} = 1$ при $p < n$, положим $A_{n-1,n} = 1$, $A_{n-1,n-1} = t$, $A_{n-1,q} = e_q + t$ при $q \in \{1, \ldots, n-2\}$. При $r \in \{1, \ldots, n-2\}$, $s \in \{1, \ldots, n\}$ положим $A_{rs} = A_{n-1,s} - e_r A_{ns}$. Заметим, что $\deg A = B$. По построению строки матрицы A суть линейные комбинации ее последних двух строк, т.е. $\operatorname{rank}(A) \leqslant 2$. В силу определения 1.3.23 имеем $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B) \leqslant 2$. Применяя определение 1.3.22, находим $\operatorname{trop}(B) = 2$. В силу теоремы 1.3.27 $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B) \geqslant 2$, поэтому $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B) = 2$. □

Пример 3.1.9. *Определим матрицу* $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *положив* $C_{ij} = 1$ *при* $i = j < n$, *и* $C_{ij} = 0$ *в противном случае. Если поле* $\mathbb{F}$ *содержит не более* $n-1$ *элементов, то* $\operatorname{trop}(C) = 2$, $K_{\mathbb{F}}(C) = 3$.

Доказательство. 1. Пусть матрица $A \in \mathbf{H}_{\mathbb{F}}^{n\times n}$ такова, что $\deg A = C$. Тогда $\deg A_{n-1,k} = \deg A_{nk} = 0$ для любого $k \in \{1,\dots,n-2,n\}$. Это означает, что $\frac{A_{n-1,k}}{A_{nk}} = f_k + g_k$, где $f_k \in \mathbb{F}^*$, $\deg g_k > 0$. По принципу Дирихле $f_u = f_v$ при некоторых $u, v \in \{1,\dots,n-2,n\}$, $u < v$. Таким образом, $\deg(\frac{A_{n-1,u}}{A_{nu}} - \frac{A_{n-1,v}}{A_{nv}}) > 0$, поэтому $\deg(A_{n-1,u}A_{nv} - A_{n-1,v}A_{nu}) > 0$.

2. Рассмотрим следующий минор порядка 3 матрицы A:

$$A' = \begin{pmatrix} A_{uu} & A_{uv} & A_{u,n-1} \\ A_{n-1,u} & A_{n-1,v} & A_{n-1,n-1} \\ A_{nu} & A_{nv} & A_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\deg A = C$, имеем $\deg A_{uu} = \deg A_{n-1,n-1} = 1$, а степени остальных элементов матрицы A' равны 0. Выделяя в разложении определителя матрицы A' слагаемые нулевой степени, получаем

$$\det A' = -A_{uv}A_{n-1,u}A_{n,n-1} + A_{u,n-1}(A_{n-1,u}A_{nv} - A_{n-1,v}A_{n,u}) + h_1,$$

где $\deg h_1 > 0$. В силу пункта 1 $\deg(A_{n-1,u}A_{nv} - A_{n-1,v}A_{nu}) > 0$, поэтому $\deg\det A' = 0$. В частности, $\det A' \neq 0$, значит, $\operatorname{rank}(A) \geqslant 3$. В силу определения 1.3.23, $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(C) \geqslant 3$. С другой стороны, матрица C получается из матрицы B из примера 3.1.8 изменением значения элемента B_{nn}. Поэтому в силу утверждения 3.1.6 $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(C) - \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B) \leqslant 1$, т.е. $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(C) \leqslant 3$. Равенство $\operatorname{trop}(C) = 2$ доказывается непосредственной проверкой определения 1.3.22. □

Примеры 3.1.8 и 3.1.9 приводят к следующему результату. Напомним, что через $D^\top$ мы обозначаем матрицу, транспонированную к D.

Пример 3.1.10. *Пусть порядок поля* $\mathbb{F}$ *равен* $n-1$, *пусть* B — *матрица из примера 3.1.8. Определим матрицу* $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$: *положим* $D_{ij} = 0$, *если* $i = j$ *или* $(i,j) = (n, n-1)$, *положим* $D_{ij} = 1$ *в противном случае. Тогда* $K_{\mathbb{F}}(D \otimes B) = K_{\mathbb{F}}(B \otimes D^\top) > K_{\mathbb{F}}(B)$.

Доказательство. Заметим, что $D \otimes B = B \otimes D^\top = C$, где C — матрица из примера 3.1.9. Поэтому результат следует из примеров 3.1.8 и 3.1.9. □

Итак, пример 3.1.10 показывает, что каково бы ни было конечное поле $\mathbb{F}$, условие (2.3.1) для ранга Капранова относительно $\mathbb{F}$ выполняется не для всех матриц. Учитывая результаты теоремы 3.1.5 и примера 3.1.10, мы получаем следующий результат.

Теорема 3.1.11. *Если базовое поле содержит по крайней мере $n+2$ элемента, то функция ранга Капранова монотонна относительно отношений Грина $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{J}$ на полугруппе $(\mathbb{R}^{n\times n}, \otimes)$. Если же базовое поле содержит менее n элементов, то функция ранга Капранова не монотонна ни относительно одного из этих отношений на полугруппе $(\mathbb{R}^{n\times n}, \otimes)$.*

Доказательство. Если поле $\mathbb{F}$ содержит не менее $n+2$ элементов, то в силу теоремы 3.1.5 условие $A = P \otimes B \otimes Q$ влечет $\mathrm{K}_{\mathbb{F}}(A) \leqslant \mathrm{K}_{\mathbb{F}}(B)$, что доказывает первое утверждение теоремы. Отсутствие монотонности относительно порядков $\mathcal{L}$ и $\mathcal{J}$ в случае $|\mathbb{F}| < n$ следует из примера 3.1.10; второе утверждение теоремы следует теперь из определений отношений Грина, поскольку условие $A \leqslant_{\mathcal{L}} B$ влечет $A \leqslant_{\mathcal{J}} B$ для любых матриц A и B. □

Таким образом, в наиболее важном случае бесконечного базового поля мы доказали монотонность ранга Капранова относительно отношений Грина. В случае конечных базовых полей доказано отсутствие монотонности этого ранга для матриц достаточно большого размера.

3.2 Подгруппы полугруппы матриц

В данном разделе мы продолжаем изучать матрицы над тропическим полукольцом $\overline{\mathbb{R}} = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +)$ с точки зрения теории полугрупп, и целью этого раздела будет решение проблемы, сформулированной Джонсон и Камбитесом в работе [80]. А именно, нас будет интересовать полная характеризация подгрупп полугруппы $\left(\overline{\mathbb{R}}^{n\times n}, \otimes\right)$ тропических матриц порядка n. Мы покажем, что любая подгруппа этой полугруппы допускает точное представление с помощью тропических мономиальных матриц порядка n. Наш результат позволяет доказать гипотезу Джонсон и Камбитеса [80] и доказать, что любая группа, допускающая точное представление тропическими матрицами порядка n, содержит нормальную абелеву подгруппу без кручения индекса, не большего $n!$. Кроме того, мы доказываем верхнюю оценку порядка периодической группы тропических матриц размера $n \times n$, которая улучшает результат, полученный д'Алессандро и Паску в работе [3].

Тропическая матрица $P \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ называется *мономиальной*, если найдется перестановка $\sigma = \sigma(P) \in \mathcal{S}_n$, для которой $P_{ij} \neq -\infty$ в том и только том случае, когда $i = \sigma(j)$. Матрица P также называется *диагональной*, если перестановка $\sigma(P)$ тождественна. Отметим, что диагональная матрица с нулями на диагонали является нейтральным элементом полугруппы $\left(\overline{\mathbb{R}}^{n\times n}, \otimes\right)$.

Для доказательства основных результатов раздела мы будем использовать понятие максимального слабого ранга из определения 1.2.1.

Определение 3.2.1. Будем говорить, что матрица $B \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times m}$ имеет *полный строчный ранг*, если максимальный слабый ранг системы ее строк равен n (иными словами, если никакая строка матрицы B не является линейной комбинацией остальных строк).

Следующая теорема дает линейно-алгебраическую формулировку факта, известного в теории полумодулей [139].

Теорема 3.2.2. *Пусть матрицы $A, B, C, D \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ удовлетворяют условиям $B = C \otimes A$, $A = D \otimes B$. Если матрица B имеет полный строчный ранг, то найдется мономиальная матрица $P \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$, удовлетворяющая условию $B = P \otimes A$.*

Доказательство. Обозначим множество всех тропических линейных комбинаций строк матрицы A через $M(A)$. То, что матрица B имеет полный строчный ранг, означает, что ее строки образуют *слабый базис полумодуля* $M(B)$, по определению 2.2.5 из работы [139]. Поскольку $B = C \otimes A$, мы получаем $M(B) \subset M(A)$, а в силу $A = D \otimes B$ имеем $M(A) \subset M(B)$. Таким образом, $M(A) = M(B)$, и строки матрицы B образуют *слабый базис* полумодуля $M(A)$. Согласно теореме 5.1 работы [139], множество строк матрицы B совпадает с множеством строк матрицы A с точностью до тропического умножения на константы. □

Следующая лемма посвящена обсуждению матриц неполного ранга.

Лемма 3.2.3. *Пусть $\mathcal{G}$ — подгруппа группы $\left(\overline{\mathbb{R}}^{n\times n}, \otimes\right)$ при $n \geqslant 2$. Если строчный ранг некоторой матрицы $A \in \mathcal{G}$ не полон, то группа $\mathcal{G}$ допускает точное представление тропическими матрицами порядка $n-1$.*

Доказательство. В силу определения 3.2.1 некоторая строка матрицы A является тропической линейной комбинацией остальных строк. Таким образом, для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ мы имеем $A = P \otimes \overline{A}$, где матрица $\overline{A} \in \overline{\mathbb{R}}^{(n-1)\times n}$ получена из A отбрасыванием строки с индексом i, и матрица $P \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times(n-1)}$ такова, что подматрица $P[1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n]$ является нейтральным элементом подгруппы $\left(\overline{\mathbb{R}}^{(n-1)\times(n-1)}, \otimes\right)$. Поскольку $\mathcal{G}$ является группой, для каждой матрицы $G \in \mathcal{G}$ найдется матрица $B \in \mathcal{G}$, удовлетворяющая условию $G = A \otimes B$.

Таким образом мы видим, что $G = P \otimes \overline{A} \otimes B$. Более того, поскольку матрица $P[1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n]$ нейтральна по умножению, матрица $\overline{G} = \overline{A} \otimes B$ является единственной, удовлетворяющей условию $G = P \otimes \overline{G}$. Отображение

φ, переводящее матрицу $G \in \mathcal{G}$ в матрицу $\overline{G} \otimes P \in \overline{\mathbb{R}}^{(n-1)\times(n-1)}$ таким образом корректно определено.

Рассмотрим матрицы $G, H \in \mathcal{G}$ и обозначим через $\overline{G}$ и $\overline{H}$ матрицы, удовлетворяющие условиям $G = P \otimes \overline{G}$ и $H = P \otimes \overline{H}$. Тогда $G \otimes H = P \otimes \overline{G} \otimes P \otimes \overline{H}$, и поэтому $\overline{G \otimes H} = \overline{G} \otimes P \otimes \overline{H}$, откуда

$$\varphi(G \otimes H) = \overline{G \otimes H} \otimes P = \overline{G} \otimes P \otimes \overline{H} \otimes P = \varphi(G) \otimes \varphi(H),$$

то есть отображение φ является гомоморфизмом. Более того, если $\varphi(G) = \varphi(H)$, то $\overline{G} \otimes P = \overline{H} \otimes P$, поэтому в этом случае $P \otimes \overline{G} \otimes P \otimes \overline{G} = P \otimes \overline{H} \otimes P \otimes \overline{G}$, или $G \otimes G = H \otimes G$. Поскольку $\mathcal{G}$ является группой, условие $\varphi(G) = \varphi(H)$ влечет $G = H$, доказывая инъективность отображения φ. □

Теперь мы готовы доказать один из основных результатов этого раздела.

Теорема 3.2.4. *Всякая подгруппа полугруппы* $\left(\overline{\mathbb{R}}^{n\times n}, \otimes\right)$ *допускает точное представление тропическими мономиальными матрицами порядка* n.

Доказательство. Если $n = 1$, то доказывать нечего. Мы далее полагаем $n > 1$ и продолжаем доказательство индукцией по n. Рассмотрим подгруппу $\mathcal{G}$ полугруппы $\left(\overline{\mathbb{R}}^{n\times n}, \otimes\right)$, и обозначим нейтральный элемент группы $\mathcal{G}$ через E. Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть группа $\mathcal{G}$ содержит матрицу неполного строчного ранга. Лемма 3.2.3 показывает, что в этом случае группа $\mathcal{G}$ допускает точное представление тропическими матрицами порядка $n-1$. Предположение индукции показывает, что в этом случае группа $\mathcal{G}$ допускает точное представление тропическими мономиальными матрицами порядка $n-1$, откуда следует утверждение теоремы.

2. Теперь предположим, что все матрицы группы $\mathcal{G}$ имеют полный строчный ранг. В этом случае из леммы 3.2.2 следует, что для любой матрицы $G \in \mathcal{G}$ найдется мономиальная матрица $\mathcal{P}_G \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$, удовлетворяющая условию $G = \mathcal{P}_G \otimes E$. Поскольку строчный ранг матрицы G полон, матрица $\mathcal{P}_G$ определена однозначно. Таким образом, мы можем задать отображение ψ, ставящее в соответствие матрице $G \in \mathcal{G}$ мономиальную матрицу $\mathcal{P}_G$. Легко видеть, что отображение ψ инъективно. Мы также видим, что для любых матриц G и H из группы $\mathcal{G}$ выполнено условие

$$\psi(G \otimes H) = \psi(\mathcal{P}_G \otimes E \otimes H) = \psi(\mathcal{P}_G \otimes H) = \psi(\mathcal{P}_G \otimes \mathcal{P}_H \otimes E) = \mathcal{P}_G \otimes \mathcal{P}_H,$$

поэтому отображение ψ является гомоморфизмом. □

Джонсон и Камбитес в разделе 4 работы [80] высказали гипотезу, согласно которой любая группа, допускающая точное представление тропическими матрицами порядка n, содержит нормальную абелеву подгруппу без кручения индекса, не превосходящего $n!$. Сейчас мы готовы доказать эту гипотезу.

Теорема 3.2.5. *Если группа $\mathcal{G}$ обладает точным представлением тропическими матрицами порядка n, то $\mathcal{G}$ содержит нормальную абелеву подгруппу без кручения индекса, не превосходящего $n!$.*

Доказательство. Согласно теореме 3.2.4, мы можем считать, не ограничивая общности, что группа $\mathcal{G}$ состоит из тропических мономиальных матриц порядка n. Рассмотрим подгруппу D всех диагональных матриц из $\mathcal{G}$. Ясно, что группа D нормальна в $\mathcal{G}$, абелева и не содержит элементов конечного порядка, кроме нейтрального. Остается заметить, что матрицы $A, B \in \mathcal{G}$ принадлежат одному и тому же смежному классу по группе D в $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда $\sigma(A) = \sigma(B)$. □

Д'Алессандро и Паску показали в работе [3], что любая периодическая подгруппа полугруппы $\left(\overline{\mathbb{R}}^{n\times n}, \otimes\right)$ конечна. Теорема 3.2.4 же позволяет нам получить более подробную характеризацию таких подгрупп. Напомним, что группа H называется периодической, если она состоит из элементов конечного порядка.

Следствие 3.2.6. *Порядок любой периодической подгруппы полугруппы $\left(\overline{\mathbb{R}}^{n\times n}, \otimes\right)$ не превосходит $n!$.*

Доказательство. Согласно определению, любая подгруппа без кручения периодической группы тривиальна. Поэтому результат следует из теоремы 3.2.5. □

3.3 Тождества в полугруппе матриц

В этом разделе мы изучаем проблему тождеств в полугруппе тропических матриц порядка n, рассмотренную ранее Изхакяном и Марголисом в работе [79] и Изхакяном в [78]. В этих работах была высказана гипотеза, утверждающая наличие тождества в полугруппе тропических матриц порядка n при любом n, но были доказаны только частные случаи этого утверждения. А именно, в работе [79] в явном виде приведено тождество полугруппы тропических матриц порядка 2, а в статье [78] было построено тождество для верхнетреугольных тропических матриц порядка n.

В этом разделе будут разработаны методы, которые, как мы надеемся, могут оказаться полезными для решения сформулированной проблемы, и будут построены тождества для некоторых интересных полугрупп тропических матриц. К сожалению, результаты этого раздела пока не позволяют решить проблему о тождествах в полугруппе тропических матриц порядка n при любом n, но нам удастся доказать их существование в случае $n = 3$, что решает проблему, упомянутую Изхакяном в работе [78].

3.3.1 Основные понятия и формулировка результата

В данном разделе рассматриваются матрицы порядка n над тропическим полукольцом $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$, операции в котором заданы как $a \oplus b = \min\{a, b\}$ и $a \otimes b = a + b$. Напомним, что произведение тропических матриц A и B порядка n обозначается через $A \otimes B$ и задается с помощью соотношения $[A \otimes B]_{ij} = \min_{t=1}^{n}\{A_{it} + B_{tj}\}$ при всех i и j. Ясно, что умножение тропических матриц ассоциативно, поэтому мы видим, что множество матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ образует полугруппу относительно операции $\otimes$.

Для всякого слова $u(x, y) = u_1 \dots u_k$, принадлежащего свободной полугруппе, порожденной буквами x и y, мы положим $u(A, B) = H_1 \otimes \dots \otimes H_k$, где $H_i = A$, если $u_i = x$, и $H_i = B$, если $u_i = y$. В том случае, если найдутся различные слова $\mathcal{U}(x, y)$ и $\mathcal{V}(x, y)$ из этой свободной полугруппы, удовлетворяющие условию $\mathcal{U}(A, B) = \mathcal{V}(A, B)$ для любых пар матриц размера $n \times n$, то мы говорим, что соответствующая матричная полугруппа удовлетворяет тождеству $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Целью этого раздела будет построение тождества, верного в полугруппе $\left(\mathbb{R}^{3\times 3}, \oplus\right)$.

3.3.2 Тождества для вырожденных матриц

Для построения тождества, верного для более широких классов тропических матриц, нам потребуется сначала исследовать тождества для d-вырожденных матриц. Мы будем обозначать через $\Sigma(A)$ множество всех перестановок τ, удовлетворяющих условию

$$A_{1,\tau(1)} + \dots + A_{n,\tau(n)} = \min_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\{A_{1,\sigma(1)} + \dots + A_{n,\sigma(n)}\}.$$

Напомним, что согласно определению 1.2.5 правая часть последнего равенства называется *перманентом* тропической матрицы A и обозначается через $\mathrm{perm}(A)$, а согласно определению 1.2.3 матрица A называется *d-вырожденной*, если все элементы множества $\Sigma(A)$ имеют одинаковую четность. Наш метод исследования вырожденных матриц будет опираться на

следующую лемму, которая характеризует множество $\Sigma(A)$ в терминах произведений тропических матриц.

Лемма 3.3.1. *Предположим, что произведение $A \otimes B$ тропических матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является d-невырожденной матрицей, и пусть $\sigma \in \Sigma(A)$ и $\tau \in \Sigma(B)$. Тогда $\tau\sigma \in \Sigma(A \otimes B)$ и $perm(A) + perm(B) = perm(A \otimes B)$.*

Доказательство. Шаг 1. Введем обозначение $\psi = \tau\sigma$; согласно определению произведения тропических матриц условие $[A \otimes B]_{i,\psi(i)} \leqslant A_{i,\sigma(i)} + B_{\sigma(i),\psi(i)}$ выполнено при всех i. Тогда мы имеем неравенство $\sum_{i=1}^{n}[A \otimes B]_{i,\psi(i)} \leqslant \operatorname{perm}(A) + \operatorname{perm}(B)$, откуда также $\operatorname{perm}(A \otimes B) \leqslant \operatorname{perm}(A) + \operatorname{perm}(B)$.

Шаг 2. Обозначим через $\mathcal{H}$ множество всех непустых конечных формальных сумм вида $s = c_1X^{e_1} + \ldots + c_tX^{e_t}$, где коэффициенты $c_i > 0$ и показатели e_i являются вещественными числами. Обычные операции формального сложения и умножения задают на $\mathcal{H}$ структуру полукольца, вложенного в групповое кольцо группы $(\mathbb{R}, +)$ над кольцом $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Обозначим через $\deg s$ степень суммы s, то есть, наименьшее значение e_τ по всем $\tau \in \{1, \ldots, t\}$. Легко видеть, что отображение степени задает гомоморфизм полукольца $\mathcal{H}$ и тропического полукольца.

Шаг 3. Зададим матрицы A' и B' над $\mathcal{H}$ равенствами $A'_{ij} = \xi_{ij}X^{A_{ij}}$ и $B'_{ij} = \chi_{ij}X^{B_{ij}}$. Мы будем предполагать, что матрицы A' и B' имеют определители степеней $\operatorname{perm}(A)$ и $\operatorname{perm}(B)$, соответственно, выбрав коэффициенты ξ и χ алгебраически независимыми в совокупности. Зададим элементы матрицы C' как $C'_{ij} = A'_{i1}B'_{1j} + \ldots + A'_{in}B'_{nj}$, то есть, обозначим через C' обычное произведение матриц A' и B'. Поскольку отображение степени задает гомоморфизм $\mathcal{H}$ в тропическое полукольцо, матрица C' имеет определитель степени $\operatorname{perm}(A) + \operatorname{perm}(B)$.

Шаг 4. Обозначим через π перестановку, для которой моном $C'_{1,\pi(1)} \ldots C'_{n,\pi(n)}$ имеет минимально возможную степень d. Если $d < \operatorname{perm}(A) + \operatorname{perm}(B)$, то по результату шага 3 найдется перестановка π' четности, отличной от четности π, для которой $C'_{1,\pi'(1)} \ldots C'_{n,\pi'(n)}$ тоже имеет степень d.

Шаг 5. Поскольку отображение степени задает гомоморфизм полукольца $\mathcal{H}$ в тропическое полукольцо, матрица $A \otimes B$ может быть получена из C' поэлементным применением этого отображения. Таким образом, $\operatorname{perm}(A \otimes B) = d$, и тогда в силу шага 4 $\pi, \pi' \in \Sigma(A \otimes B)$, поэтому матрица $A \otimes B$ тропически вырождена.

Шаг 6. Противоречие, полученное в шаге 5, показывает, что $d \geqslant \operatorname{perm}(A) + \operatorname{perm}(B)$, то есть, $\operatorname{perm}(A \otimes B) \geqslant \operatorname{perm}(A) + \operatorname{perm}(B)$. Теперь результат следует из шага 1. □

Выведем несколько полезных следствий доказанной леммы.

Лемма 3.3.2. *Если тропическое произведение $A \otimes B$ квадратных матриц d-невырождено, то обе эти матрицы A и B также d-невырождены.*

Доказательство. Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma(A)$ и $\tau_1, \tau_2 \in \Sigma(B)$, тогда по лемме 3.3.1 перестановка $\sigma_i \tau_j$ принадлежит множеству $\Sigma(A \otimes B)$. Поскольку множество $\Sigma(A \otimes B)$ состоит из перестановок одинаковой четности, мы заключаем, что перестановки σ_1 и σ_2 имеют одинаковую четность и что перестановки τ_1 и τ_2 имеют одинаковую четность. □

Другое следствие посвящено степени $A^{\otimes k}$ тропической матрицы A, то есть матрицы, полученной из A умножением на себя k раз.

Лемма 3.3.3. *Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Если тождественная перестановка не принадлежит множеству $\Sigma(A^{\otimes n!})$, то матрица $A^{\otimes n!}$ является d-вырожденной.*

Доказательство. Следует непосредственно из леммы 3.3.1, поскольку любая перестановка на множестве $\{1, \ldots, n\}$, возведенная в степень $n!$, является тождественной. □

Наконец, мы укажем еще одно полезное следствие.

Следствие 3.3.4. *Для любых тропических матриц A и B порядка n выполнено одно из следующих условий: (i) матрица $A^{\otimes n!} \otimes B^{\otimes n!}$ d-вырождена; (ii) матрица $B^{\otimes n!} \otimes A^{\otimes n!}$ d-вырождена; (iii) условие $\left[A^{\otimes n!} \otimes B^{\otimes n!}\right]_{ii} = \left[B^{\otimes n!} \otimes A^{\otimes n!}\right]_{ii}$ выполнено для любого i.*

Доказательство. Согласно определению тропического произведения матриц верно, что $\left[A^{\otimes n!} \otimes B^{\otimes n!}\right]_{ii} \leqslant \left[A^{n!}\right]_{ii} + \left[B^{n!}\right]_{ii}$ и $\left[B^{n!} \otimes A^{n!}\right]_{ii} \leqslant \left[A^{n!}\right]_{ii} + \left[B^{n!}\right]_{ii}$. Если обе матрицы $A^{n!} \otimes B^{n!}$ и $B^{n!} \otimes A^{n!}$ были бы d-невырождены, они в силу леммы 3.3.1 имели бы перманент $\sum_{i=1}^{n} \left[A^{n!}\right]_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \left[B^{n!}\right]_{ii}$, и в этом случае $\left[A^{n!} \otimes B^{n!}\right]_{ii} = \left[B^{n!} \otimes A^{n!}\right]_{ii} = \left[A^{n!}\right]_{ii} + \left[B^{n!}\right]_{ii}$. □

Обратим теперь внимание на d-вырожденные матрицы порядка 3.

Лемма 3.3.5. *[1] Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ d-вырождена. Тогда найдутся матрицы $P \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ и $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, удовлетворяющие условию $P \otimes Q = A$.*

Доказательство. Требуется показать, что факторизационный ранг матрицы A не превосходит двух, если ее детерминантный ранг не превосходит двух. Этот результат следует из теоремы 8.3 и следствия 8.12 работы [1]. □

Мы заканчиваем этот подраздел построением тождеств для тех тропических матриц, которые допускают факторизации как в лемме 3.3.5.

Лемма 3.3.6. *Рассмотрим матрицы $A = P_1 \otimes Q_1$ и $B = P_2 \otimes Q_2$, где $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ и $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)}$. Если тождество $\mathcal{U}_n(x,y) = \mathcal{V}_n(x,y)$ выполняется для всех тропических матриц порядка n, то выполнено условие $\mathcal{U}_n(A\otimes A, A\otimes B)\otimes A = \mathcal{V}_n(A\otimes A, A\otimes B)\otimes A$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что $\mathcal{U}_n(A\otimes A, A\otimes B)\otimes A = P_1 \otimes \mathcal{U}_n(Q_1\otimes P_1\otimes Q_1\otimes P_1, Q_1\otimes P_2\otimes Q_2\otimes P_1)\otimes Q_1$ и $\mathcal{V}_n(A\otimes A, A\otimes B)\otimes A = P_1 \otimes \mathcal{V}_n(Q_1\otimes P_1\otimes Q_1\otimes P_1, Q_1\otimes P_2\otimes Q_2\otimes P_1)\otimes Q_1$. □

3.3.3 Матрицы с диагональным преобладанием

Каково бы ни было положительное число H, мы будем называть матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матрицей *с диагональным H-преобладанием*, если неравенство $A_{ij} \geqslant \max\{A_{ii}, A_{jj}\} + H|A_{ii} - A_{jj}|$ выполнено при любых i и j. Будем говорить, что матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ образуют пару с диагональным H-преобладанием, если $A \oplus B$ является матрицей с диагональным преобладанием и условие $A_{ii} = B_{ii}$ выполнено при любом i. В этом подразделе будет построено тождество, которое выполняется при достаточно большом H для всех матриц с диагональным H-преобладанием.

Лемма 3.3.7. *Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с диагональным H-преобладанием и положим $h \leqslant H-1$. Тогда для любого индекса i выражение*

$$\alpha = A_{ii_1} + A_{i_1 i_2} + \ldots + A_{i_{h-1} i_h} + A_{i_h i}$$

достигает своего минимума при $i_1 = \ldots = i_h = i$.

Доказательство. Удалим элемент i_k из последовательности $(i, i_1, \ldots, i_h, i)$, если он совпадает с предыдущим элементом. Обозначим полученную последовательность через $J = (j_0 \ldots j_t)$; также, обозначим через $j \in J$ тот индекс, для которого значение A_{jj} минимально. Предполагая, что $t > 0$, мы получаем условие $\alpha \geqslant A_{j_0 j_1} + \ldots + A_{j_{t-1} j_t} + (h - t + 1)A_{jj}$. В силу диагонального H-преобладания выполнено равенство $\alpha \geqslant (h+1)A_{jj} + H\sum_{\tau=0}^{t-1} |A_{j_\tau j_\tau} - A_{j_{\tau+1} j_{\tau+1}}|$. Из равенства треугольника следует условие $\alpha \geqslant (h+1)\max_{g\in J} A_{gg} \geqslant (h+1)A_{ii}$, и теперь достаточно заметить, что при $i_1 = \ldots = i_h = i$ выполнено равенство $\alpha = (h+1)A_{ii}$. □

В следующей лемме мы обозначаем через $G \in \{A, B\}^*$ произвольное слово, которое содержит все возможные слова длины n как подслова.

Лемма 3.3.8. *Пусть матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ образуют пару с диагональным h-преобладанием; обозначим через g длину слова G и предположим, что*

$h = 2ng + 1$. *Выберем значение* $X^{(ng+1)} \in \{A, B\}$ *произвольным образом и обозначим через* $X^{(t)}$ *букву слова* $G^n X^{(ng+1)} G^n$, *стоящую на месте* t. *Тогда для любых* κ_0 *и* κ_h *выражение*

$$\beta = X^{(1)}_{\kappa_0,\kappa_1} + \ldots + X^{(h)}_{\kappa_{h-1},\kappa_h}$$

достигает минимума на некотором наборе $(\kappa_1 \ldots \kappa_{h-1})$, *удовлетворяющем условию* $\kappa_{ng} = \kappa_{ng+1}$.

Доказательство. Шаг 1. При $n = 1$ результат очевиден, поэтому мы предполагаем, что $n \geqslant 2$, и продолжаем доказательство по индукции. Рассмотрим набор $K = (\kappa_1 \ldots \kappa_{h-1})$, доставляющий минимум выражению β. В силу леммы 3.3.7 мы можем считать, что условие $\kappa_p = \kappa_q$ влечет выполнение равенства $\kappa_r = \kappa_p$ при всех r, удовлетворяющих условию $p < r < q$. Теперь наше рассуждение разбивается на два случая, каждый из которых будет рассмотрен отдельно.

Шаг 2. Предположим, что при некотором $u \leqslant g$ выполнено условие $\kappa_0 \neq \kappa_u$ (или, аналогично, что при некотором $u \geqslant h - g$ верно, что $\kappa_h \neq \kappa_u$). В силу шага 1 индекс κ_0 не встречается среди κ_v при $v \geqslant g$ (в другом случае κ_h не встречается среди κ_v при $v \leqslant h - g$). Теперь положим $c_g = \kappa_g$ и $c_{h-g} = \kappa_{h-g}$. Пользуясь индукцией, мы находим индексы $c_{g+1}, \ldots, c_{h-g-1}$, которые удовлетворяют условию $c_{ng} = c_{ng+1}$ и для которых выражение $X^{(g+1)}_{c_g,c_{g+1}} + \ldots + X^{(h-g)}_{c_{h-g-1},c_{h-g}}$ принимает минимально возможное значение. Теперь нам достаточно заменить κ_u на c_u в последовательности K при любом $u \in \{g, \ldots, h - g\}$.

Шаг 3. Теперь мы можем считать, что при любом $i \leqslant g$ выполнено условие $\kappa_i = \kappa_0$, а при любом $i \geqslant h - g$ верно равенство $\kappa_i = \kappa_h$. Обозначим через e произвольный индекс, при котором значение $A_{\kappa_e\kappa_e}$ минимально возможно; обозначим через $\{j_1, \ldots, j_t\}$ множество всех индексов, удовлетворяющих условию $\kappa_{j-1} \neq \kappa_j$. С точностью до переобозначения индексов мы считаем, что $j_1 < \ldots < j_s \leqslant e < j_{s+1} < \ldots < j_t$.

Согласно определению G содержит подслово $X^{(j_1)} \ldots X^{(j_s)}$, поэтому найдутся последовательные числа $r + 1, \ldots, r + s \in \{1, \ldots, g\}$, при любом $\sigma \in \{1, \ldots, s\}$ удовлетворяющие условию $X^{(j_\sigma)} = X^{(r+\sigma)}$. Аналогично, найдутся последовательные числа $q + s + 1, \ldots, q + t \in \{h - g + 1, \ldots, h\}$ при любом $\pi \in \{s + 1, \ldots, t\}$ удовлетворяющие условию $X^{(j_\pi)} = X^{(q+\pi)}$. Теперь мы полагаем (1) $c_i = \kappa_0$ при $i \leqslant r$, (2) $c_i = \kappa_h$ при $i > q + t$, (3) $c_i = \kappa_e$ при $r + s < i \leqslant q + s$, (4) $c_{r+\sigma} = \kappa_{j_\sigma}$ при $\sigma \in \{1, \ldots, s\}$, (5) $c_{q+\pi} = \kappa_{j_\pi}$ при $\pi \in \{s+1, \ldots, t\}$. Остается заметить, что выполнены условия $c_{ng} = c_{ng+1} = \kappa_e$ и $X^{(1)}_{c_0,c_1} + \ldots + X^{(h)}_{c_{h-1},c_h} \leqslant \beta$. $\square$

Теперь мы докажем основной результат этого подраздела. Обозначим через $w_1, \ldots, w_{2^n}$ набор всех слов длины n из $\{A, B\}^*$ и положим $\Gamma = w_1 \ldots w_{2^n}$.

Теорема 3.3.9. *Если $H \geqslant n^2\, 2^{n+1} + 1$, то тождество $\Gamma^n A \Gamma^n = \Gamma^n B \Gamma^n$ выполнено для любой пары тропических $n \times n$ матриц с диагональным H-преобладанием.*

Доказательство. Положим $G = \Gamma$ и применим лемму 3.3.8. Для любых κ_0 и κ_h значения выражений $[\Gamma^n A \Gamma^n]_{\kappa_0\kappa_h}$ и $[\Gamma^n B \Gamma^n]_{\kappa_0\kappa_h}$ равны минимальному значению выражения β, и потому в силу леммы 3.3.8 этот минимум не зависит от $X^{(ng+1)}$. □

3.3.4 Матрицы без диагонального преобладания

Для дальнейших рассуждений нам потребуется классический результат, известный как *венгерский метод* решения задачи о назначениях [97].

Лемма 3.3.10. *Пусть матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ удовлетворяет условию $M_{ii} = 0$ при всех i. Предположим, что условие $M_{1\sigma(1)} + \ldots + M_{n\sigma(n)} \geqslant 0$ выполняется для любой перестановки σ на $\{1, \ldots, n\}$. Тогда найдутся числа $r_1, \ldots, r_n$, для которых значение выражения $M_{ij} - r_i + r_j$ неотрицательно при всех i и j.*

Доказательство. Венгерский метод позволяет найти числа $r_i, s_j \in \mathbb{R}$, для которых значение выражения $M_{ij} + r_i + s_j$ неотрицательно при любых i и j. Поскольку преобразование $M'_{ij} = M_{ij} + r_i + c_j$ не влияет на множество всех перестановок σ, доставляющих минимум выражению $M_{1\sigma(1)} + \ldots + M_{n\sigma(n)}$, мы получаем $r_i = -s_i$. □

Будем говорить, что тропические матрицы C и C' порядка n *эквивалентны*, если найдутся вещественные числа $s_1, \ldots, s_n$, удовлетворяющие условию $C'_{ij} = C_{ij} + s_i - s_j$ при всех i и j.

Лемма 3.3.11. *Рассмотрим тропическую матрицу C порядка n и положительное число H. Предположим, что для любого подмножества $K \subset \{1, \ldots, n\}$ и для любой циклической перестановки σ на K выполнено условие*

$$\sum_{\kappa\in K} C_{\kappa,\sigma(\kappa)} \geqslant |K| \max_{\kappa\in K}\{C_{\kappa\kappa}\} + H \sum_{\kappa\in K} |C_{\kappa,\kappa} - C_{\sigma(\kappa),\sigma(\kappa)}|.$$

Тогда матрица C эквивалентна матрице с диагональным H-преобладанием.

Доказательство. Рассмотрим матрицу D, заданную как $C_{ij} - H|C_{ii} - C_{jj}| - \max\{C_{ii}, C_{jj}\}$ при всех i и j. Рассмотрим перестановку σ на множестве $K \subset \{1, \ldots, n\}$, тогда мы получим

$$\sum_{\kappa\in K} D_{\kappa,\sigma(\kappa)} = \sum_{\kappa\in K} C_{\kappa,\sigma(\kappa)} - H\sum_{\kappa\in K} |C_{\kappa,\kappa} - C_{\sigma(\kappa),\sigma(\kappa)}| - \sum_{\kappa\in K} \max\{C_{\kappa,\kappa}, C_{\sigma(\kappa),\sigma(\kappa)}\},$$

поэтому $\sum_{\kappa\in K} D_{\kappa,\sigma(\kappa)} \geqslant |K| \max_{\kappa\in K}\{C_{\kappa\kappa}\} - \sum_{\kappa\in K} \max\{C_{\kappa,\kappa}, C_{\sigma(\kappa),\sigma(\kappa)}\} \geqslant 0$.

Теперь мы видим, что матрица D удовлетворяет условиям леммы 3.3.10, поэтому найдутся числа $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, для которых значение выражения $D_{ij} - r_i + r_j$ неотрицательно при всех i и j. Поэтому значение $C'_{ij} = C_{ij} + r_i - r_j$ не может быть меньше, чем $H|C_{ii} - C_{jj}| + \max\{C_{ii}, C_{jj}\}$, и потому C' является матрицей с диагональным H-преобладанием. □

Теперь мы докажем основной результат этого подраздела. Как обычно, обозначим через $w_1, \ldots, w_{2^n}$ набор всех слов длины n из $\{A, B\}^*$ и положим $\Gamma = w_1 \ldots w_{2^n}$.

Теорема 3.3.12. *Предположим, что матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ удовлетворяют условиям $id \in \Sigma(A) \cap \Sigma(B)$ и $A_{ii} = B_{ii}$, при любом i. Если пара A, B не подобна паре с диагональным h-преобладанием, то матрица $\Gamma(A^{h+1}, B^{h+1})$ является d-вырожденной.*

Доказательство. Положим $C = A \oplus B$. В силу леммы 3.3.11 для некоторых множества $K \subset \{1, \ldots, n\}$ и циклической перестановки σ на множестве K выполнено условие

$$\sum_{\kappa\in K} C_{\kappa,\sigma(\kappa)} < |K| \max_{\kappa\in K}\{C_{\kappa\kappa}\} + h\sum_{\kappa\in K} |C_{\kappa,\kappa} - C_{\sigma(\kappa),\sigma(\kappa)}|. \tag{3.3.1}$$

Будем обозначать σ через $(k_1\, k_2 \ldots k_t)$ и предполагать, что значение $C_{k_1k_1}$ максимально среди всех C_{kk} при $k \in K$. Мы положим $X(i,j) = A$ при $A_{ij} < B_{ij}$ и $X(i,j) = B$ в противном случае. Заметим, что выполнено условие $\chi_{ij} := \left[X(i,j)^{h+1}\right]_{ij} \leqslant C_{ij} + h\min\{C_{ii}, C_{jj}\}$.

Обозначая через P произведение $(X(k_1,k_2))^{h+1} \ldots (X(k_t,k_1))^{h+1}$, мы получаем условие $P_{k_1k_1} \leqslant \chi_{k_1k_2} + \ldots + \chi_{k_tk_1}$, откуда следует неравенство

$$P_{k_1k_1} \leqslant \sum_{\kappa\in K} C_{\kappa,\sigma(\kappa)} + h\sum_{\kappa\in K} \min\{C_{\kappa,\kappa}, C_{\sigma(\kappa),\sigma(\kappa)}\},$$

которое влечет в силу условия (3.3.1) неравенство $P_{k_1k_1} < (h+1)|K|C_{k_1k_1}$. Заметим, что также выполнено условие $P_{ii} \leqslant (h+1)|K|C_{ii}$, из которого следует неравенство $\operatorname{perm}(P) < (h+1)|K| \sum_{i=1}^n C_{ii}$.

Если бы матрица $\Gamma(A^{h+1}, B^{h+1})$ была d-невырождена, то такова же была и P в силу следствия 3.3.2. Тогда из теоремы 3.3.1 следовало бы условие $\operatorname{perm}(P) = (h+1)|K| \sum_{i=1}^{n} C_{ii}$, которое приводит к противоречию. □

3.3.5 Доказательство основного результата

Применим разработанный метод для построения тождества, выполненного в полугруппе тропических матриц порядка 3. Тождество, которое мы строим в следующей теореме, содержит по 1 795 308 сомножителей в левой и правой части.

Теорема 3.3.13. *Рассмотрим матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ и положим $\overline{A} = A^6B^6$, $\overline{B} = B^6A^6$; положим также $\mathcal{U}(x,y) = x^2y^4x^2x^2y^2x^2y^4x^2$ и $\mathcal{V}(x,y) = x^2y^4x^2y^2x^2x^2y^4x^2$. Обозначим через $w_1, \ldots, w_8$ набор всех слов длины 3 и положим $\Gamma(x,y) = w_1 \ldots w_8$. Положим*

$$\mathcal{A} = \Gamma\left(\overline{A}^{146}, \overline{B}^{146}\right) \Gamma^3\left(\overline{A}, \overline{B}\right) \overline{A}\, \Gamma^3\left(\overline{A}, \overline{B}\right),$$

$$\mathcal{B} = \Gamma\left(\overline{A}^{146}, \overline{B}^{146}\right) \Gamma^3\left(\overline{A}, \overline{B}\right) \overline{B}\, \Gamma^3\left(\overline{A}, \overline{B}\right).$$

Тогда $\mathcal{U}(\mathcal{AA}, \mathcal{AB})\,\mathcal{A} = \mathcal{V}(\mathcal{AA}, \mathcal{AB})\,\mathcal{A}$.

Доказательство. В силу основного результата работы [79] тождество $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ выполнено в полугруппе тропических матриц порядка 2. Поэтому, если матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются d-вырожденными, результат следует из лемм 3.3.5 и 3.3.6. В противном случае матрицы $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\Gamma\left(\overline{A}^{146}, \overline{B}^{146}\right)$ являются d-невырожденными в силу следствия 3.3.2. Из теоремы 3.3.1 и следствия 3.3.3 следует условие $id \in \Sigma\left(\overline{A}\right) \cap \Sigma\left(\overline{B}\right)$, и в силу следствия 3.3.4 условие $\overline{A}_{ii} = \overline{B}_{ii}$ выполнено при любом i. Используя теорему 3.3.12, мы заключаем, что пара $\left(\overline{A}, \overline{B}\right)$ подобна паре с диагональным 145-преобладанием. Из теоремы 3.3.9 теперь следует равенство $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, и в этом случае результат теоремы следует из равенства $\mathcal{U}(x,x) = \mathcal{V}(x,x)$. □

Результаты этого раздела не только позволяют разрешить проблему Изхакяна и Марголиса о тождестве для матриц порядка 3, но в силу теорем 3.3.12 и 3.3.9 также сводят задачу к построению тождества для класса d-вырожденных матриц. В связи с этим весьма полезным представляется дальнейшее исследование проблемы тождества для этого класса.

Глава 4

О ранговых функциях булевых матриц

Эта глава посвящена исследованию ранговых функций над бинарным булевым полукольцом. В силу вложения бинарного полукольца $(\{0,1\}, \max, \cdot)$ в тропическое полукольцо $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +)$ изучение ранговых функций булевых матриц представляет интерес с точки зрения тропической линейной алгебры. В самом деле, понятие тропического ранга булевой матрицы оказывается полезным в различных задачах тропической геометрии [45]. Функция детерминантного ранга как тропических, так и булевых матриц оказывается интересной в связи с приложениями в области дискретных динамических систем [21, 42, 60]. С другой стороны, многие важные инварианты булевых матриц не являются обобщениями функций тропических матриц. Такова, например, функция изоляционного числа матрицы, вызывающая интерес в современных исследованиях, связанных с проблемами комбинаторной оптимизации [53], сложности информационных протоколов [46] и некоторыми иными. Интерес вызывает также недавно введенный в рассмотрение CP-ранг булевой матрицы [149].

Отметим также важность проблемы факторизации булевых матриц: необходимость ее изучения обусловлена приложениями в комбинаторике, вычислительной математике и других областях науки. А именно, проблема факторизации булевой матрицы предоставляет линейно-алгебраическую характеризацию понятия двудольной размерности [57] графа, поскольку факторизационный ранг матрицы смежностей двудольного графа G равен минимальной мощности покрытия графа G полными двудольными подграфами этого графа [10, 71]. Двудольная размерность графа представляет собой важный комбинаторный инвариант и в свою очередь находит широкое применение в приложениях, в частности, для решения проблем компьютерной безопасности [128] и задач вычислительной математики [48].

4.1 Вычисление ранговых функций

В этом подразделе мы изложим результаты, опубликованные автором диссертации в работе [160]. Исследование, предпринятое автором в этой работе было, в частности, мотивировано вопросом Бутковича [22] о том, может ли тропический ранг матрицы быть найден за полиномиальное время. Кроме того, вызывал интерес также вопрос Де Шуттера [42] о вычислительной сложности детерминантного ранга, который был также упомянут в работах [21] и [60] и оставался открытым. Наконец, была открытой проблемой недавняя гипотеза Фризен и Тайса [58] о вычислении изоляционного числа булевой матрицы. В данном разделе мы получим ответ на указанные вопросы и докажем, что задачи вычисления детерминантного и тропического рангов и изоляционного числа булевой матрицы являются NP-трудными. Отметим, что указанные проблемы для детерминантного и тропического рангов были открытыми до опубликования работы [160] автором диссертации. Доказательство NP-полноты для тропического ранга появилось ранее в [85], но оно, как представляется, значительно сложнее излагаемого нами и никогда не было опубликовано в рецензируемом журнале.

Чтобы сформулировать результаты этого раздела, приведем определения фигурирующих в нем понятий. Тропический и детерминантный ранги булевой матрицы задаются как частные случаи определений 1.2.4 и 1.2.7.

Определение 4.1.1. [1] Булева матрица $U \in \{0,1\}^{k\times k}$ называется *d-невырожденной*, если $\|U\|^+ \neq \|U\|^-$, то есть, если условие $U_{1,\sigma(1)} = \ldots = U_{k,\sigma(k)} = 1$ выполняется для некоторой перестановки σ из симметрической группы $\mathcal{S}_k$ и не выполняется ни для какой перестановки, четность которой отлична от четности σ. Матрица U называется *тропически невырожденной*, если условие $U_{1,\varphi(1)} = \ldots = U_{k,\varphi(k)} = 1$ выполняется для единственной перестановки φ из $\mathcal{S}_k$. *Детерминантным* (соответственно, *тропическим*) рангом булевой матрицы называется максимальный размер ее d-невырожденного (соответственно, тропически невырожденного) минора.

Хотя результаты этого подраздела сформулированы и доказаны для случая булевых матриц, они остаются верными и для ранговых функций матриц над тропическим полукольцом. Действительно, меняя в булевой матрице A все нулевые элементы на ∞, а все единичные на 0, мы получим тропическую матрицу с такими же детерминантным и тропическим рангами, как у матрицы A. Теперь приведем определение изоляционного числа матрицы, которое ранее в этой работе не встречалось.

Определение 4.1.2. Элементы $(i_1, j_1), \ldots, (i_n, j_n)$ булевой матрицы B называются *изолированным множеством*, если условие $B_{i_s,j_t} = B_{i_t,j_s} = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $t = s$. *Изоляционным числом* матрицы называется максимальная мощность ее изолированного множества.

Легко видеть, что тропический ранг булевой матрицы не превосходит ее детерминантного ранга, который в свою очередь не может быть больше ее изоляционного числа. Перейдем к доказательству основного результата раздела.

Теорема 4.1.3. *Даны булева матрица A и целое число k. Задача распознавания того, больше ли изоляционное число (или детерминантный ранг, или тропический ранг) матрицы A, чем k, является NP-полной.*

Доказательство. Рассмотрим простой граф $G = (V, \mathcal{E})$. Заменим каждое ребро $\{u, v\}$ графа G парой ориентированных ребер, проходящих через u и v в противоположных направлениях; полученный ориентированный граф обозначим через $D(G)$. Множество вершин графа $D(G)$ равно V, и мы обозначаем через $E \subset V \times V$ множество ребер графа $D(G)$. Введем в рассмотрение матрицу $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$, строки и столбцы которой имеют индексы из множества $V \cup E$, и зададим ее элементы, положив $\mathcal{A}_{xy} = 1$ в том и только том случае, когда выполнено одно из следующих условий:

(i) $x = y$,

(ii) $(x, y) \in E$, то есть, $D(G)$ содержит ребро, проходящее *из* вершины x *в* вершину y,

(iii) $y = (x, u)$ для некоторого $u \in V$, то есть, y является ребром графа $D(G)$ с *началом* в вершине x,

(iv) $x = (v, y)$ для некоторого $v \in V$, то есть, x является ребром графа $D(G)$ с *концом* в вершине y.

Шаг 1. Пусть U — независимое множество в графе G. Предположим, что перестановка σ на множестве $U \cup E$ удовлетворяет условию $\mathcal{A}_{x,\sigma(x)} = 1$ для всех $x \in U \cup E$. Если $\sigma(e) \neq e$ при некотором $e \in E$, то согласно нашему построению условие $\mathcal{A}_{e,\sigma(e)} = 1$ влечет $e = (v_1, \sigma(e))$ при некотором $v_1 \in V$. Аналогично, условие $\mathcal{A}_{\sigma^{-1}(e),e} = 1$ влечет $e = (\sigma^{-1}(e), v_2)$ при некотором $v_2 \in V$. Таким образом, если $\sigma(e) \neq e$, то e является ребром, проходящим из $\sigma^{-1}(e)$ в $\sigma(e)$, то есть, e принадлежит множеству $U \times U$. Поскольку U является независимым множеством, мы получаем противоречие и доказываем таким образом, что на самом деле $\sigma(e) = e$ при всех $e \in E$. Отсюда также следует, что $\sigma(u) \in U$ при любом $u \in U$; поскольку U является независимым множеством, элемент $\mathcal{A}_{u,\sigma(u)}$ равен 1 если и только если $\sigma(u) = u$. Теперь мы видим, что условие $\mathcal{A}_{x,\sigma(x)} = 1$ выполняется для всех $x \in U \cup E$, только если σ

является тождественной перестановкой. Это означает, что подматрица матрицы $\mathcal{A}$, образованная строками и столбцами с индексами из множества $U \cup E$ является тропически невырожденной, и потому тропический ранг матрицы $\mathcal{A}$ не может быть меньше, чем $|U| + |E|$.

Шаг 2. С другой стороны, рассмотрим множество $S \subset (V \cup E) \times (V \cup E)$, удовлетворяющее условию $|S| = |E| + h$. Если элементы матрицы $\mathcal{A}$ с индексами из S образуют изолированное множество, то пересечение множества S с множеством $\{e, u\} \times \{e, v\}$ имеет мощность 0 или 1 для всех $e = (u, v) \in E$. Поэтому множество S содержит по крайней мере h элементов вида (w, w), где $w \in V$, и эти вершины w образуют независимое множество мощности h в графе G. Таким образом, граф G содержит независимое множество мощности $f - |E|$, где через f обозначено изоляционное число матрицы $\mathcal{A}$.

Из результатов шагов 1 и 2 следует, что изоляционное число и тропический и детерминантный ранги матрицы $\mathcal{A}(G)$ равны между собой и равны числу $|U'| + |E| = |U'| + 2|\mathcal{E}|$, где через U' обозначено независимое множество наибольшей мощности в графе G. Распознавание того, содержит ли простой граф независимое множество мощности, превосходящей k, является классической NP-полной проблемой [59]. Таким образом, задача распознавания того, больше ли изоляционное число или детерминантный ранг, или тропический ранг матрицы A, чем k, является NP-трудной. Все упомянутые задачи также принадлежат классу NP — тропическая вырожденность и d-вырожденность могут быть проверены за полиномиальное время как показано в работе [23], а распознавание изолированного множества за полиномиальное время возможно непосредственно по его определению. □

4.2 О факторизации булевых матриц

В этом разделе мы обращаемся к проблеме факторизации булевых матриц и приводим доказательства результатов, полученных автором диссертации в работе [159]. Связанное с проблемой факторизации понятие *булева ранга* матрицы является частным случаем определения 1.2.10 и может быть введено следующим образом. Напомним, что согласно определению операций в бинарном булевом полукольце произведением булевых матриц $B \in \{0,1\}^{n \times k}$ и $C \in \{0,1\}^{k \times m}$ является матрица размера $n \times m$, элементы которой заданы как $[B \otimes C]_{ij} = \max_{t=1}^{k} \{B_{it} \cdot C_{tj}\}$ при любых i и j.

Определение 4.2.1. *Булевым рангом* матрицы $A \in \{0,1\}^{n \times m}$ называется минимальное целое число k, для которого найдутся матрицы $B \in \{0,1\}^{n \times k}$ и $C \in \{0,1\}^{k \times m}$, удовлетворяющие условию $A = B \otimes C$. Булев ранг матрицы, состоящей из нулевых элементов, по определению полагается равным 0.

Положив $B = A$ и в качестве C взяв единичную матрицу порядка m, мы докажем, что булев ранг матрицы $A \in \{0,1\}^{n\times m}$ не превосходит m; можно показать аналогично, что этот ранг не превосходит n. Таким образом, булев ранг матрицы A не может превосходить значения $\min\{m,n\}$, и матрица A называется матрицей *полного булева ранга* (в этом разделе мы будем называть такие матрицы просто матрицами *полного ранга*), если ее булев ранг равен $\min\{m,n\}$. Понятие матриц полного ранга связано также с изучением простых элементов полугруппы булевых квадратных матриц порядка n [39].

Этот раздел посвящен изучению ограничений на число нулевых элементов $(0,1)$-матриц в зависимости от их булева ранга. Похожие исследования проводились и ранее: в работе [20] изучались возможные значения ранга булевой матрицы с фиксированным числом ненулевых элементов в ее строках и столбцах, и были получены некоторые оценки на минимальное такое значение. В работе [73] были продолжены исследования множества значений ранга булевых матриц, начатые в работе [20], и было показано, что булев ранг матрицы размера $n \times n$, содержащей k ненулевых элементов в каждой строке и каждом столбце, не может быть меньше, чем $\frac{n}{k}$. Точные значения минимума булева ранга были получены в работе [71] для квадратных матриц, содержащих k ненулевых элементов в каждой строке и каждом столбце для $k \leqslant 4$ при любом натуральном n.

Мы также исследуем минимально возможные значения булева ранга при заданных условиях на число ненулевых элементов, но в отличие от упомянутых работ, мы ограничиваем только число нулевых элементов в столбцах данной булевой матрицы. Исследуется вопрос о том, может ли матрица $A \in \{0,1\}^{n\times m}$ иметь полный булев ранг (равный n), если каждый из ее столбцов содержит не более, чем k нулевых элементов.

Проблема 4.2.2. *Рассмотрим множество тех матриц $A \in \{0,1\}^{n\times m}$, булев ранг которых равен n. При каких значениях переменной k некоторый столбец любой матрицы A обязательно содержит по крайней мере k нулевых элементов?*

В вопросе 4.2.2 попробуем смягчить требование о полноте булева ранга, заменив его, например, рассмотрением матриц, имеющих сколь угодно большой булев ранг. Как показывает следующая теорема (аналогичный результат приведен в [17]), в этом случае мы можем гарантировать присутствие лишь одного нулевого элемента в столбцах матриц.

Теорема 4.2.3. *[40] Пусть матрица $A \in \{0,1\}^{n\times m}$ задана соотношениями $A_{ij} = 1$ при $i \neq j$ и $A_{ij} = 0$ при $i = j$. Тогда булев ранг матрицы A равен наименьшему целому числу k, при котором $n \leqslant \binom{\lceil \frac{k}{2} \rceil}{k}$.*

Требование полноты булева ранга оказывается значительно более сильным; в частности, из результатов этого раздела следует, что значение k не может оставаться ограниченным при $n \to \infty$. Тем не менее, будет показано, что отношение k к n становится сколь угодно малым при больших n. Более того, нами будет найдено значение k, которое является асимптотически оптимальным при $n \to \infty$.

Исследование, результаты которого изложены в данном разделе, было также мотивировано изучением связи понятия булева ранга с понятием числа изоляции графа или $(0,1)$-матрицы [71]. Взаимосвязь этих понятий исследуется довольно давно: в работе [71] было показано, что число изоляции данной матрицы не превосходит ее булева ранга. В недавней статье Бисли [10] продолжает изучение взаимного поведения этих матричных инвариантов и показывает, что число изоляции совпадает с булевым рангом, если какая-либо из этих величин не превосходит 2. Приведены также примеры матриц, показывающие, что булев ранг может принимать сколь угодно большие значения, если даже изоляционное число фиксировано и равно 3. В данном разделе показано, что аналогичное утверждение не верно для матриц полного булева ранга: иными словами, булевы матрицы полного ранга не могут иметь сколь угодно большого размера, если их числа изоляции ограничены.

4.2.1 Факторизация матриц с малым числом нулей

В этом подразделе мы изучаем проблему 4.2.2 и показываем, что значение $k = \frac{\sqrt{n}}{2} - 1$ удовлетворяет ее условиям. Впоследствии мы докажем асимптотическую оптимальность этого значения, а для доказательства результатов этого подраздела нам потребуется следующее определение.

Определение 4.2.4. *Булевой линейной оболочкой* векторов $a_1, \ldots, a_m \in \{0,1\}^n$ называется множество всех булевых векторов вида $(\lambda_1 \otimes a_1) \oplus \ldots \otimes (\lambda_m \otimes a_m)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ выбираются из множества $\{0,1\}$.

Понятие булевой линейной оболочки дает важную характеризацию понятия булева ранга.

Лемма 4.2.5. *Булев ранг матрицы $A \in \{0,1\}^{n \times m}$ равен наименьшей возможной мощности такого множества $\alpha \subset \{0,1\}^n$, что все столбцы матрицы A принадлежат булевой линейной оболочке векторов множества α.*

Доказательство. Если булев ранг матрицы A равен k, то в качестве α можно взять множество столбцов матрицы B из определения 4.2.1.

Предположим теперь, что столбцы матрицы A принадлежат булевой линейной оболочке векторов $b_1, \ldots, b_k$. Тогда в силу определения 4.2.4 для любого $t \in \{1, \ldots, m\}$ найдутся такие $c_{1t}, \ldots, c_{kt} \in \{0, 1\}$, для которых линейная комбинация $(c_{1t} \otimes b_1) \oplus \ldots \otimes (c_{kt} \otimes b_k)$ равна столбцу матрицы A с номером t. Тогда, обозначив через B матрицу, образованную столбцами $b_1, \ldots, b_k$, и задав матрицу $C \in \{0, 1\}^{k \times m}$ соотношением $C_{tj} = c_{tj}$, получим $A = B \otimes C$. $\square$

Как следствие леммы 4.2.5 получается следующее утверждение.

Предложение 4.2.6. *Если матрица A' получена из булевой матрицы A удалением одной строки или одного столбца, то булев ранг матрицы A' равен или на единицу меньше, чем булев ранг матрицы A.*

Доказательство. Пусть матрица A' получена удалением столбца a_0, и ее столбцы принадлежат булевой линейной оболочке векторов $v_1, \ldots, v_k$. Тогда столбцы матрицы A принадлежат булевой линейной оболочке векторов $a_0, v_1, \ldots, v_k$, поэтому результат следует из леммы 4.2.5.

Случай, когда матрица A' получена удалением строки, сводится к рассмотренному: равенство $C^\top \otimes B^\top = (B \otimes C)^\top$ показывает, что булевы ранги матриц инвариантны относительно транспонирования. $\square$

Докажем теперь теорему, которая является важным шагом на пути к доказательству основного результата.

Теорема 4.2.7. *Пусть целое число $q > 1$ является степенью простого числа. Если каждый столбец матрицы $A \in \{0, 1\}^{q^2 \times m}$ содержит не более, чем $q - 2$ нулевых элемента, то булев ранг матрицы A не превосходит $q(q-1)$.*

Доказательство. Индексы строк и столбцов матриц, использованные в доказательстве этой теоремы, отличаются от обычной числовой нумерации и весьма сложны. По этой причине элемент матрицы A, лежащий в строке с индексом α и столбце с индексом β, будет обозначаться через $A(\alpha|\beta)$.

1. Условимся обозначать индексы строк матрицы A с помощью пар элементов поля $\mathbb{F}_q$ (таких пар ровно q^2); иными словами, строкам матрицы A мы присвоим индексы из множества $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$. Столбцы матрицы A будут, как обычно, иметь индексы из множества $\{1, \ldots, m\}$. Введем в рассмотрение матрицу $B \in \{0, 1\}^{q^2 \times q(q-1)}$, строкам которой, как и строкам матрицы A, присвоим индексы из множества $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$. Столбцам же матрицы B присвоим индексы из множества $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q^*$, где $\mathbb{F}_q^*$ обозначает множество обратимых элементов поля $\mathbb{F}_q$; ясно, что $\left|\mathbb{F}_q^*\right| = q - 1$. Зададим элементы матрицы B как $B(k, l|g, h) = 1$, если $l = g + kh$, и положим $B(k, l|g, h) = 0$ в противном случае.

2. Теперь фиксируем произвольный элемент $v \in \{1, \ldots, m\}$ и рассмотрим некоторые элементы $k, l \in \mathbb{F}_q$, удовлетворяющие соотношению $A(k, l|v) = 1$. В силу определения матрицы B при каждом $s \in \mathbb{F}_q^*$ выполнено условие $B(k, l| - sk + l, s) = 1$. Из определения матрицы B также следует, что если элементы $k', l' \in \mathbb{F}_q$ таковы, что $(k', l') \neq (k, l)$, то не более, чем один элемент $s' \in \mathbb{F}_q^*$ удовлетворяет условию $B(k', l'| - s'k + l, s') = 1$. Согласно условию теоремы не более, чем $q-2$ пары (k', l') удовлетворяют условию $A(k', l'|v) = 0$. В силу принципа Дирихле не более, чем $q-2$ элемента $s' \in \mathbb{F}_q^*$ удовлетворяют условиям $B(k', l'|-s'k+l, s') = 1$ и $A(k', l'|v) = 0$ при каких-либо k' и l'. Таким образом, найдется элемент $\widehat{s} = \widehat{s}(k, l, v) \in \mathbb{F}_q^*$, для которого $B(k', l'| - \widehat{s}k + l, \widehat{s}) = 0$ при любых k' и l', удовлетворяющих условию $A(k', l'|v) = 0$.

3. Теперь рассмотрим множество всех пар (k, l), для которых $A(k, l|v) = 1$, и обозначим через $\mathcal{S}_v$ множество всех пар $(-\widehat{s}(k, l, v)k + l, \widehat{s}(k, l, v))$. Пункт 2 показывает, что v-ый столбец матрицы A равен булевой сумме столбцов матрицы B с индексами из множества $\mathcal{S}_v$. Иными словами, каждый столбец матрицы A представим как булева линейная комбинация столбцов матрицы B, поэтому доказываемый результат следует теперь из леммы 4.2.5. □

Теперь мы можем доказать неравенство, связывающее размер матрицы с количеством нулевых элементов в ее столбцах.

Теорема 4.2.8. *Пусть $A \in \{0, 1\}^{n \times m}$ — матрица булева ранга n. Тогда некоторый столбец матрицы A содержит по крайней мере $q - 1$ нулевых элементов, где q — наибольшее целое число, которое является степенью простого и удовлетворяет условию $q^2 - q + 1 \leqslant n$.*

Доказательство. Предположим противное. Если $n \geqslant q^2$, то обозначим через A' матрицу, полученную из A удалением произвольных $n - q^2$ строк. В силу теоремы 4.2.7 булев ранг матрицы A' не превосходит $q^2 - q$, поэтому в силу утверждения 4.2.6 матрица имеет булев ранг, не больший $n - q < n$. Противоречие.

Если же $n < q^2$, то рассмотрим матрицу A'', полученную из A добавлением $q^2 - n$ строк, состоящих из элементов 1. В силу теоремы 4.2.7 матрица A'' имеет булев ранг, не превосходящий $q^2 - q$. Матрица A является подматрицей матрицы A'', и поэтому ее булев ранг тоже не превосходит $q^2 - q < n$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Чтобы получить оценку числа нулевых элементов в явном виде, нам потребуется следующий классический результат теории чисел.

Теорема 4.2.9. *[122] Для любого целого положительного числа k найдется простое число p, удовлетворяющее условию $k < p \leqslant 2k$.*

Теперь мы можем доказать основной результат данного подраздела.

Теорема 4.2.10. *Если булев ранг матрицы $A \in \{0,1\}^{n\times m}$ равен n, то некоторый столбец матрицы A содержит по крайней мере $\frac{\sqrt{n}}{2} - 1$ нулей.*

Доказательство. В силу теоремы 4.2.9 существует простое p, большее $\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right]$ и не превосходящее $[\sqrt{n}]$. Теперь достаточно применить теорему 4.2.8. □

4.2.2 Приложения полученного результата

Этот подраздел посвящен обсуждению некоторых следствий и приложений теоремы 4.2.10. Сначала будем показывать, что результат теоремы 4.2.10 асимптотически оптимален при $n \to \infty$. Как и в доказательстве теоремы 4.2.7, в этом подразделе мы будем обозначать элемент матрицы A, лежащий в строке с индексом α и столбце с индексом β, через $A(\alpha|\beta)$.

Пример 4.2.11. *Пусть t — положительное целое число, положим также $f(t) = \frac{t^2+3t+4}{2}$. Обозначим через Ψ множество всех t-элементных подмножеств множества $\psi = \{1,\dots,f(t)\}$. Определим булеву матрицу $A = A(t)$ следующим образом: присваивая ее строкам индексы из множества ψ, столбцам — из множества Ψ, положим $A(i|I) = 0$, если $i \in I$, и $A(i|I) = 1$ в противном случае. Тогда булев ранг матрицы A равен $f(t)$.*

Доказательство. Для доказательства утверждения требуется проверить, что матрицы $B \in \{0,1\}^{f(t)\times(f(t)-1)}$ и $C \in \{0,1\}^{(f(t)-1)\times|\Psi|}$ не могут удовлетворять условию $A = B \otimes C$. Случай $t = 1$ соответствует примеру 2.4 работы [10], а также может быть разобран непосредственно с помощью определения 4.2.1.

В случае $t > 1$ продолжим доказательство по индукции. Предположим, что матрицы B и C удовлетворяют условию $B \otimes C = A$. В соответствии с определением матрицы A, присвоим строкам матрицы B индексы из множества ψ, столбцам матрицы C — индексы из множества Ψ. Столбцам матрицы B, также как и строкам матрицы C, присвоим индексы из множества $\{1,\dots,f(t)-1\}$. Рассмотрим два возможных случая.

1. Предположим, что любая строка матрицы B содержит не более, чем t элементов 1. Поскольку число строк матрицы B больше, чем число ее столбцов, найдется такой индекс $u \in \psi$, что для любого индекса v, удовлетворяющего условию $B(u|v) = 1$, условие $B(u'(v)|v) = 1$ также выполняется при некотором $u'(v) \neq u$. Множество всех индексов v, удовлетворяющих условию $B(u|v) = 1$, обозначим через V. Определение умножения булевых матриц показывает, что если $A(u|\nu) = 1$ при некотором $\nu \in \Psi$, то $A(u'(v)|\nu) = 1$ для

некоторого $v \in V$. С другой стороны, в силу предположения пункта 1 мощность множества V не превосходит t, поэтому найдется множество $\mathcal{I} \in \Psi$, удовлетворяющее условиям $u \notin \mathcal{I}$ и $u'(v) \in \mathcal{I}$ при любом $v \in V$. В этом случае $A(u|\mathcal{I}) = 1$ и $A(u'(v)|\mathcal{I}) = 0$ при любом $v \in V$. Противоречие.

2. Теперь предположим, что некоторая строка (обозначим ее номер через μ) матрицы B содержит по крайней мере $t+1$ элементов, равных 1. Опять же, обозначим через V множество всех индексов v, удовлетворяющих условию $B(\mu|v) = 1$; через $\overline{V}$ обозначим множество всех индексов $\overline{v}$, удовлетворяющих условию $B(\mu|\overline{v}) = 0$. Через ψ' обозначим произвольное подмножество множества $\psi \setminus \{\mu\}$, состоящее из $f(t-1)$ элементов; обозначим через Ψ' множество всех $(t-1)$-элементных подмножеств множества ψ'. Любое множество $\mathcal{J} \in \Psi'$ теперь удовлетворяет условию

$$\bigoplus_{k \in V \cup \overline{V}} B(\mu|k) \otimes C(k|\mathcal{J} \cup \{\mu\}) = \mathrm{A}(\mu|\mathcal{J} \cup \{\mu\}) = 0,$$

поэтому $C(v|\mathcal{J} \cup \{\mu\}) = 0$ для любого $v \in V$.

Таким образом, для любых $\omega \in \psi'$ и $\mathcal{J} \in \Psi'$ выполняется условие

$$\bigoplus_{k \in \overline{V}} B(\omega|k) \otimes C(k|\mathcal{J} \cup \{\mu\}) = \mathrm{A}(\omega|\mathcal{J} \cup \{\mu\}).$$

Заметим, что подматрица, образованная строками матрицы A с индексами из множества ψ' и столбцами с индексами $\mathcal{J} \cup \{\mu\}$, совпадает с матрицей $A(t-1)$ с точностью до переобозначения индексов столбцов и строк. Последнее равенство поэтому показывает, что булев ранг матрицы $A(t-1)$ не превосходит мощности множества $\overline{V}$, то есть, не превосходит $f(t)-t-2$. Пользуясь предположением индукции, получаем неравенство $f(t-1) \leqslant f(t)-t-2$ и приходим к противоречию.

Таким образом, каждая из возможностей 1 и 2 была сведена нами к противоречию. Значит, матрицы $B \in \{0,1\}^{f(t)\times(f(t)-1)}$ и $C \in \{0,1\}^{(f(t)-1)\times|\Psi|}$ на самом деле не могут удовлетворять условию $A = B \otimes C$. □

Докажем теперь асимптотическую оптимальность результата теоремы 4.2.10.

Следствие 4.2.12. *Каково бы ни было целое положительное число n, найдется $(0,1)$-матрица булева ранга n размера $n \times m$, любой столбец которой содержит не более, чем $\sqrt{2n}$ нулевых элементов.*

Доказательство. Используем утверждение примера 4.2.11 для $t = \left[\sqrt{2n}\right]$ и затем применяем Предложение 4.2.6. □

Теорема 4.2.10 и следствие 4.2.12 показывают, что оптимальное значение величины k из условия проблемы 4.2.2 принадлежит промежутку $\left[\frac{\sqrt{n}}{2} - 1, \sqrt{2n}\right]$. Иными словами, оптимальное k имеет порядок роста $\Theta(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$.

Теперь мы покажем, как теорема 4.2.10 может быть применена к исследованию взаимного поведения булева ранга и различных других инвариантов булевых матриц — детерминантного и тропического рангов и изоляционного числа. Хотя булев ранг матрицы может быть сколь угодно велик при ограниченных значениях перечисленных инвариантов [1, 10], оказывается, что аналогичное утверждение перестает быть верным в предположении полноты булева ранга. Оказывается верной следующая теорема.

Теорема 4.2.13. *Пусть k, n и m — целые положительные числа, $n \geqslant 16^{2^k-1}$. Если матрица $A \in \{0,1\}^{n\times m}$ имеет булев ранг n, то найдутся семейства индексов $r_1, \ldots, r_k$ и $c_1, \ldots, c_k$, для которых $A(r_i|c_i) = 1$ и $A(r_j|c_i) = 0$ при $j > i$.*

Доказательство. При $k = 1$ утверждение тривиально; предположим, что $k > 1$ и продолжим доказательство индукцией по k. В этом случае из теоремы 4.2.10 следует, что некоторый столбец (обозначим его номер через c_1) матрицы A содержит по крайней мере $\frac{\sqrt{n}}{4} \geqslant 16^{2^{k-1}-1}$ нулевых элементов. Ясно, что удаление нулевых столбцов не влияет на ранг матрицы; поэтому мы можем считать, что $A(r_1|c_1) = 1$ при некотором $r_1 \in \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через A' матрицу, полученную из A удалением строк с индексами ρ, удовлетворяющими условию $A(\rho|c_1) = 1$. По предположению индукции, для матрицы A' найдутся такие семейства индексов $r_2, \ldots, r_k$ и $c_2, \ldots, c_k$, что $A(r_i|c_i) = 1$ и $A(r_j|c_i) = 0$ при всех $j > i > 1$. Поскольку индексы $r_2, \ldots, r_k$ являются номерами строк матрицы A', мы имеем также $A(r_g|c_1) = 0$ для каждого $g > 1$. □

Теперь мы можем доказать следующую теорему, которая дает верхнюю оценку размера матрицы полного булева ранга в терминах других рассмотренных нами инвариантов булевой матрицы.

Теорема 4.2.14. *Пусть матрица $A \in \{0,1\}^{n\times m}$ имеет полный булев ранг. Если детерминантный или тропический ранги или число изоляции матрицы A меньше k, то $\min\{n, m\} < 16^{2^k-1}$.*

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим подматрицу A' матрицы A из теоремы 4.2.13, образованную строками с индексами $r_1, \ldots, r_k$

и столбцами с индексами $c_1, \ldots, c_k$. В силу определения 4.1.1 матрица A' d-невырождена и тропически невырождена, поэтому детерминантный и тропический ранги матрицы A не могут быть меньше, чем k. Кроме того, в силу определения 4.1.2 число изоляции матрицы A также не может быть меньше, чем k. Далее, булев, детерминантный, тропический ранги и число изоляции инвариантны относительно транспонирования матриц, поэтому результат следует из теоремы 4.2.13. □

4.3 Взаимное поведение ранговых функций

В данном разделе мы исследуем взаимное поведения ранговых функций булевых матриц. Результаты этого раздела интересны не только сами по себе, но и своими приложениями к изучению ранговых функций тропических матриц. Используя результаты этого раздела и метод, который будет изложен и обоснован в главе 5, мы докажем некоторые интересные результаты о взаимном поведении ранговых функций тропических матриц.

4.3.1 Граничный ранг и классический ранг

Шаблоном нулей матрицы A над полем называется булева матрица $Z = Z(A)$, удовлетворяющая условию $Z_{ij} = 0$ в том и только том случае, когда $A_{ij} = 0$. Проблема построения матриц над полем, по заданным значениям ранга и шаблона нулей является важной для различных приложений, среди которых теория матроидов и тропическая геометрия [45]. В самом деле, в главе 1 было указано на связь этой задачи с понятием ранга Капранова тропических матриц.

Аналогичная задача оказывается интересной и в частном случае упорядоченного поля. Напомним, что поле R называется *упорядоченным*, если оно содержит подмножество P, которое замкнуто относительно операций сложения и умножения, и R является объединением непересекающихся множеств P, $-P$ и $\{0\}$. Элементы множества P называются *положительными*, а элементы множества $\{-P\}$ — *отрицательными*. Такое определение позволяет обобщить понятие шаблона нулей: матрица $\mathcal{S}(A) \in \{0, +, -\}^{m \times n}$ называется *знаковым шаблоном* матрицы $A \in R^{m \times n}$, если условие $A_{ij} \in P$ влечет $[\mathcal{S}(A)]_{ij} = +$, условие $-A_{ij} \in P$ влечет $[\mathcal{S}(A)]_{ij} = -$, и, наконец, условие $A_{ij} = 0$ влечет $[\mathcal{S}(A)]_{ij} = 0$. Минимальным рангом шаблона S относительно поля R называется минимально возможный ранг матрицы B над полем R, удовлетворяющий условию $\mathcal{S}(B) = S$.

Этот подраздел посвящен доказательству гипотезы о связи минимального

и граничного рангов, сформулированной в работе [100]. Напомним определение граничного ранга матрицы, для этого назовем *линией* матрицы A любую ее строку или столбец. *Граничным рангом* матрицы A называется минимальное число t, для которого существует набор из t линий, покрывающий все ненулевые элементы матрицы A.

Гипотеза 4.3.1. *[100, гипотеза 4.2] Предположим, что минимальный ранг знакового шаблона S относительно вещественных чисел равен r, а граничный ранг этого шаблона равен t. Если $r \geqslant t-2$, минимальный ранг шаблона S относительно рациональных чисел также равен r.*

В этом подразделе излагается доказательство гипотезы 4.3.1, опубликованное автором диссертации в работе [151]. Будут полезным сделать следующие наблюдения, первое из которых следует непосредственно из определений.

Наблюдение 4.3.2. *Умножение строки вещественной матрицы на ненулевое число не влияет на минимальные ранги ее знакового шаблона.*

Наблюдение 4.3.3. *Обозначим через r и t, соответственно, минимальный и граничный ранги шаблона S относительно упорядоченного поля R. Тогда для любого целого числа $h \in [r,t]$, найдется матрица над R ранга h, знаковый шаблон которой равен S.*

Доказательство. В силу классической теоремы Кенига [11] матрица S содержит t ненулевых элементов, никакие два из которых не лежат на одной линии. Поэтому доказываемое утверждение верно при некотором $h \geqslant t$; осталось лишь заметить, что ранги матриц, одна из которых получена из другой изменением единственного элемента, не могут отличаться более, чем на единицу. □

Будем говорить, что линейное подпространство $V \subset \mathbb{R}^d$ *рационально*, если некоторый базис V состоит из векторов, все координаты которых рациональны. Следующая лемма дает полезное описание ранга блочной матрицы.

Лемма 4.3.4. *Рассмотрим рациональные матрицы $V_1 \in \mathbb{Q}^{p\times(p-1)}$ и $V_2 \in \mathbb{Q}^{(q-1)\times q}$ рангов $p-1$ и $q-1$, соответственно. Множество $\mathcal{W}$ всех матриц $W \in \mathbb{R}^{p\times q}$, для которых матрица $U = \left(\begin{smallmatrix} W & V_1 \\ V_2 & O \end{smallmatrix}\right)$ имеет ранг $p+q-2$, является рациональным подпространством.*

Доказательство. Заметим, что рациональные элементарные преобразования первых p строк и первых q столбцов матрицы U не влияют на свойство $\mathcal{W}$ быть рациональным пространством. Поэтому мы можем считать, что матрицы V_1 и V_2 отличаются от единичных матриц, соответственно, удалением p-ой строки и q-го столбца. В этом случае пространство $\mathcal{W}$ состоит из тех матриц W, которые удовлетворяют условию $W_{pq} = 0$. □

Для доказательства гипотезы 4.3.1 нам потребуется еще одна лемма. Через $[x]$ мы обозначаем целую часть вещественного числа x.

Лемма 4.3.5. *Пусть вектор $a = (a_1, \dots, a_n)$ и матрица $B \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ удовлетворяют условию $aB = (0\,0)$. Предположим, что любой элемент первого столбца матрицы B равен 0 или 1. При каждом целом положительном N зададим матрицу $C = C(N)$ размера 2×2 по формуле $C_{ij} = [B_{ij}N]$. Тогда при достаточно большом N найдется рациональный вектор $x = x(N)$, удовлетворяющий условиям $xC = (0\,0)$ и $x(N) \to a$ при $N \to \infty$.*

Доказательство. Случай 1. Если матрица B нулевая, то достаточно положить $x_i = [a_iN]/N$.

Случай 2. Если ранг матрицы B равен 1, то таков же и ранг матрицы C. Поскольку при некоторых i и χ значение $B_{i\chi}$ отлично от 0, мы можем положить $x_j = [a_jN]/N$ при $j \neq i$ и $x_i = -\sum_{j\neq i} x_jC_{j\chi}/C_{i\chi}$.

Случай 3. Для некоторых p и q выполнено условие $\det \begin{pmatrix} B_{p1} & B_{p2} \\ B_{q1} & B_{q2} \end{pmatrix} \neq 0$. Положим $x_j = [a_jN]/N$ при $j \notin \{p, q\}$ и $u_\chi = \sum\limits_{j\notin\{p,q\}} x_jC_{j\chi}$. Формулы Крамера решения систем линейных уравнений позволяют положить

$$x_p = \frac{-u_1C_{q2} + u_2C_{q1}}{C_{p1}C_{q2} - C_{p2}C_{q1}} \quad \text{и} \quad x_q = \frac{-u_2C_{p1} + u_1C_{p2}}{C_{p1}C_{q2} - C_{p2}C_{q1}}.$$

Условие $x(N) \to a$ при $N \to \infty$ может быть проверено непосредственно. □

Теперь мы готовы доказать частный случай гипотезы 4.3.1.

Лемма 4.3.6. *Для любой вещественной матрицы A ранга $n - 2$ размера $m \times n$ найдется рациональная матрица с такими же рангом и знаковым шаблоном, как у матрицы A.*

Доказательство. В силу условия найдется матрица $B \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ ранга 2, для которой произведение AB является нулевой матрицей. Наблюдение 4.3.2 позволяет считать, что первый столбец матрицы B состоит из нулей и единиц. Для любого целого положительного числа N зададим матрицу $C = C(N)$ по формуле $C_{jk} = [NB_{jk}]$. Заметим, что ранг матрицы $C(N)$ равен двум при достаточно большом значении N.

Обозначим через X матрицу размера $m\times n$, элементами которой являются переменные X_{ij} при $A_{ij} \neq 0$, а остальные элементы равны 0. При каждом i применим результат леммы 4.3.5 к системе уравнений $X_{(i)}C = (0\,0)$. Таким образом, мы можем присвоить рациональные значения элементам матрицы X и получить матрицу $X(N)$, удовлетворяющую условиям $X(N)C(N) = 0$

и $X(N) \to A$ при $N \to \infty$. Заметим, что из условия $X(N) \to A$ следует, что матрицы $X(N)$ и A имеют одинаковые знаковые шаблоны при достаточно больших N. □

Теперь мы можем доказать ключевой результат этого подраздела.

Лемма 4.3.7. *Пусть вещественная матрица A имеет классический ранг r и граничный ранг t. Если $r = t - 2$, то найдется рациональная матрица с такими же рангом и знаковым шаблоном, как у матрицы A.*

Доказательство. 1. В силу наблюдения 4.3.3, достаточно построить рациональную матрицу ранга, не превосходящего r, с таким же знаковым шаблоном, как у A.

2. С точностью до перестановок строк и столбцов матрица A имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} B & C \\ D & O \end{smallmatrix}\right)$, где матрица $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ удовлетворяет условию $p + q = t$, а через O обозначена нулевая матрица. Если ранг матрицы D не превосходит $q - 2$, то в силу леммы 4.3.6 мы можем построить рациональную матрицу D' ранга, не большего $q - 2$, с таким же знаковым шаблоном, как у матрицы D. Выбирая B' и C' как произвольные рациональные матрицы, шаблоны которых совпадают, соответственно, с шаблонами матриц B и C, мы получаем матрицу $\left(\begin{smallmatrix} B' & C' \\ D' & O \end{smallmatrix}\right)$, ранг которой не превосходит $t-2$. Таким образом, мы можем считать, что ранг матрицы D превосходит $q-2$ и, аналогично, ранг матрицы C превосходит $p-2$. Поскольку ранг матрицы A равен $t-2 = p+q-2$, мы видим, что ранги матриц C и D равны $p-1$ и $q-1$, соответственно.

3. В силу шага 2 строки матрицы C линейно зависимы, и наблюдение 4.3.2 позволяет нам считать, что коэффициенты их линейной зависимости рациональны. Иными словами, столбцы матрицы C порождают рациональное подпространство в $\mathbb{R}^p$. Поскольку рациональные точки плотны в рациональных пространствах, мы можем считать, что все элементы матрицы C (и, аналогично, матрицы D) рациональны. Теперь результат следует из леммы 4.3.4. □

Теперь мы можем доказать гипотезу 4.3.1.

Теорема 4.3.8. *Пусть граничный ранг вещественной матрицы A равен t. Если ранг матрицы A больше или равен $t-2$, то существует рациональная матрица с такими же рангом и знаковым шаблоном, как у A.*

Доказательство. Добавление повторяющихся строки или столбца не влияет на ранг матрицы, а граничный ранг полученной матрицы равен рангу исходной или превосходит его на единицу. Заметим, что граничный ранг матрицы $\left(\begin{smallmatrix} A & A \\ A & A \end{smallmatrix}\right)$ равен удвоенному граничному рангу матрицы A. Поэтому мы можем добавить достаточно много повторяющихся строк и столбцов к матрице A

и получить матрицу A', удовлетворяющую условиям леммы 4.3.7. Поэтому существует рациональная матрица B с таким же знаковым шаблоном, как у A, ранг которой не превосходит ранга матрицы A. Теперь результат следует из наблюдения 4.3.3. □

4.3.2 Строчный и столбцовый ранги Гондрана–Мину

В этом подразделе нас будут интересовать примеры матриц, на которых рассматриваемые ранговые функции принимают различные значения. Такие примеры были изучены в работе [1] для детерминантного, тропического, факторизационного, слабого рангов и для других ранговых функций, а также приведены примеры матриц минимального размера, различающих те или иные ранговые функции. Тем не менее, вопрос о минимальном примере матрицы с различными строчным и столбцовым рангами Гондрана–Мину оставался открытым, и в работе [1] был сформулирован следующий вопрос.

Вопрос 4.3.9. *[1, вопрос 8.10] Каковы минимальные натуральные числа m и n, для которых существует матрица $D \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, удовлетворяющая условию $GMr(D) \neq GMc(D)$?*

Ответ на вопрос 4.3.9 был получен автором в работе [170], а в данном подразделе мы приводим пример булевой матрицы минимального размера, строчный и столбцовый ранги которой различны. Этот результат будет использован нами в главе 5, в которой мы исследуем ранговые функции тропических матриц и получаем ответ на вопрос 4.3.9 в полной общности.

Приведем сначала пример матрицы $A \in \mathbb{B}^{5\times 6}$, для которой $GMr(A) = 5$, $GMc(A) = d(A) = 4$. На самом деле, приводимая нами матрица будет иметь такие же детерминантный ранг и ранги Гондрана–Мину, если рассмотреть ее как матрицу над полукольцом из определения 1.1.13.

Пример 4.3.10. *Для матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

верны равенства $GMr(A) = 5$, $GMc(A) = d(A) = 4$, $GMr(A^\top) = 4$, $GMc(A^\top) = 5$, если рассматривать ее как матрицу над $\mathbb{B}$ или над полукольцом $(\mathbb{R}_+, \max, \cdot)$.

Доказательство. 1. Покажем, что любые пять столбцов матрицы A GM-линейно зависимы. Равенство $\max\{A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}\} = \max\{A_{i4}, A_{i5}\}$ выполняется при всех $i \in \{1,2,3,4\}$ и доказывает, что столбцы матрицы A с номерами $1,2,3,4,5$ GM-линейно зависимы. Аналогично, равенство $\max\{A_{i3}, A_{i6}\} = \max\{A_{i4}, A_{i5}\}$ показывает, что столбцы матрицы A с номерами $3,4,5,6$ GM-линейно зависимы. Линейная GM-зависимость столбцов с номерами $1,2,4,5,6$ следует из равенства $\max\{A_{i1}, A_{i2}, A_{i6}\} = \max\{A_{i4}, A_{i5}\}$, и, наконец, столбцы с номерами $1,2,3,5,6$ линейно GM-зависимы согласно равенству $\max\{A_{i1}, A_{i2}, A_{i5}\} = \max\{A_{i3}, A_{i6}\}$. Таким образом, из определения 1.2.2 следует, что $GMc(A) < 5$.

С другой стороны, матрица $A[1,3,4,5|1,2,3,4]$ d-невырождена, поэтому $d(A) \geqslant 4$. Применяя теорему 1.2.17, получаем, что $GMc(A) \geqslant d(A)$. Ранее мы доказали, что $GMc(A) < 5$, поэтому $GMc(A) = d(A) = 4$.

2. Теперь покажем, что система строк матрицы A GM-линейно независима. Отметим, что в виду вложения бинарного булева полукольца в полукольцо $(\mathbb{R}_+, \max, \cdot)$, нам будет достаточно доказать GM-линейную независимость строк над $(\mathbb{R}_+, \max, \cdot)$. Предположим противное, тогда для некоторых множеств $I \subset \{1,2,3,4,5\}$, $J \subset \{1,2,3,4,5\}$ и элементов $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, не все из которых равны 0, верно, что $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = \{1,2,3,4,5\}$ и для всех $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$ выполнено равенство

$$\max_{i \in I}\{\lambda_i A_{ik}\} = \max_{j \in J}\{\lambda_j A_{jk}\}. \tag{4.3.1}$$

Кроме того, считаем, не ограничивая общности, что $|I| > |J|$.

2.1. Заметим, что матрицы $A[1,2,3|1,3,5]$ и $A[3,4,5|2,3,4]$ являются d-невырожденными. Поэтому из теоремы 1.2.17 следует, что строки матрицы $A[1,2,3]$, как и строки матрицы $A[3,4,5]$ являются GM-линейно независимыми. Таким образом, среди элементов λ_1, λ_2, как и среди элементов λ_4, λ_5, найдется элемент, отличный от 0. Из равенства (4.3.1) для $k = 1$ теперь следует, что $\lambda_1 = \lambda_2$, а индексы 1 и 2 принадлежат различным из множеств I и J. Аналогично, из равенства (4.3.1) для $k = 2$ следует, что $\lambda_4 = \lambda_5$, а индексы 4 и 5 принадлежат различным из множеств I и J.

2.2. Таким образом, пункт 2.1 показывает, что в силу условия $|I| > |J|$ остается ровно четыре возможности для множества I: или $I = \{1,3,4\}$, или $I = \{1,3,5\}$, или $I = \{2,3,4\}$, или $I = \{2,3,5\}$. В первом из этих случаев нарушается равенство (4.3.1) для $k = 3$, во втором — для $k = 4$, в третьем — для $k = 5$, в четвертом — для $k = 6$. Противоречие показывает, что строки матрицы A GM-линейно независимы, то есть, что $GMr(A) = 5$.

В силу равенств $GMr(A) = 5$ и $GMc(A) = 4$ мы также получаем $GMr(A^\top) = 4$ и $GMc(A^\top) = 5$ из определения 1.2.2. $\square$

Теперь мы будем доказывать, что если детерминантный ранг матрицы $M \in \mathbb{B}^{p\times q}$ не превосходит 3, то $GMr(M) = GMc(M) = d(M)$. Как следствие этого результата мы получим, что $m = 5$ и $n = 6$ — это минимальные натуральные числа, для которых существует матрица $C \in \mathbb{B}^{m\times n}$, удовлетворяющая условию $GMr(C) > GMc(C)$. Согласно определению 1.2.2 из этих результатов также следует, что $m' = 6$ и $n' = 5$ — это минимальные натуральные числа, для которых существует матрица $C' \in \mathbb{B}^{m'\times n'}$, удовлетворяющая условию $GMc(C') > GMr(C')$. Начнем доказательство с утверждения, которое следует непосредственно из определений.

Предложение 4.3.11. *Пусть $A \in \mathbb{B}^{m\times n}$, $d(A)\in\{0,1\}$. Тогда $GMr(A) = d(A)$.*

Доказательство. Согласно определениям 1.2.2 и 1.2.4 каждый из указанных рангов равен 0 в том и только том случае, когда A — нулевая матрица, и каждый из них не превосходит 1 тогда и только тогда, когда все ненулевые строки матрицы A совпадают. □

Следующая теорема является классическим результатом теории матриц. Напомним, что в силу определения 1.2.5 перманентом булевой матрицы B размера $k \times k$ является число $perm(B) = \max_{\sigma\in\mathcal{S}_k}\{B_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot B_{k,\sigma(k)}\}$.

Теорема 4.3.12. *(Теорема Фробениуса–Кёнига.) [110, теорема 2.2] Пусть $B \in \mathbb{B}^{n\times n}$, $perm(B) = 0$. Тогда существует подматрица матрицы B размера $l \times (n + 1 - l)$, все элементы которой равны 0.*

Покажем теперь, что если детерминантный ранг матрицы над $\mathbb{B}$ не превосходит 2, то он равен ее рангу Гондрана–Мину.

Предложение 4.3.13. *Пусть $M\in\mathbb{B}^{n\times m}$, $d(M)=2$. Тогда $GMr(M) = 2$.*

Доказательство. Обозначим через $A \in \mathbb{B}^{3\times m}$ подматрицу матрицы M, образованную тремя произвольными строками матрицы M.

Если $A_{11} = 1$ и $A_{21} = A_{31} = 0$, то в силу условия $d(A) \leqslant 2$ либо вторая и третья строки совпадают, либо одна из них состоит из нулей. В каждом из этих случаев строки A GM-линейно зависимы, и мы считаем далее, что столбцы матрицы A содержат не менее двух единиц (нулевые столбцы можно не принимать в расчет, так как они не влияют на ранги матриц).

Если некоторая строка матрицы A состоит из единиц, то она является булевой суммой других строк, что влечет требуемую линейную GM-зависимость. В противном случае, если бы в матрице A не было строк из единиц, она содержала бы d- невырожденную подматрицу $\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{smallmatrix}\right)$, что невозможно в виду исходного предположения $d(A) < 3$.

Итак, мы показали, что строки матрицы A GM-линейно зависимы. В силу произвольности выбора строк матрицы A имеем, что любые три строки матрицы M GM-линейно зависимы, $GMr(M) \leqslant 2$. Но по теореме 1.2.17 верно, что $GMr(M) \geqslant d(M)$. Значит, $GMr(M) = 2$. □

Наконец, мы можем показать, что если детерминантный ранг матрицы над $\mathbb{B}$ не превосходит 3, то он равен ее рангу Гондрана–Мину.

Предложение 4.3.14. *Пусть* $M \in \mathbb{B}^{n\times m'}$, $d(M)\leqslant 3$. *Тогда* $GMr(M)=d(M)$.

Доказательство. Обозначим через $B \in \mathbb{B}^{4\times m'}$ подматрицу матрицы M, образованную четырьмя произвольными строками матрицы M.

Легко видеть, что строки матрицы B GM-линейно зависимы в случае $m' = 1$. Покажем, что строки матрицы B GM-линейно зависимы и в случае $m' \geqslant 2$. Доказательство проведем методом *от противного.* Предположим, что существует матрица $A \in \mathbb{B}^{4\times m}$, для которой верно, что $d(A) \leqslant 3$ и $GMr(A) = 4$. *Будем считать, что матрица A содержит минимальное число столбцов среди всех матриц с таким свойством.* Разберем несколько частных случаев отдельно друг от друга.

Шаг 1. Матрица A не содержит столбца, состоящего из нулей.

Следует непосредственно из минимальности числа столбцов матрицы A.

Шаг 2. В матрице A нет столбца, содержащего ровно одну единицу.

В противном случае с точностью до перестановки строк и столбцов мы имели бы $A_{11} = 1$ и $A_{i'1} = 0$ при $i' > 1$. Поскольку в силу предложений 4.3.11 и 4.3.13 найдется d-невырожденная подматрица $A[2, 3, 4|j_1, j_2, j_3]$, матрица $A[1, 2, 3, 4|1, j_1, j_2, j_3]$ была бы в этом случае d-невырождена, что противоречило бы исходному предположению $d(A) \leqslant 3$.

Шаг 3. Матрица A содержит не более трех столбцов, содержащих ровно два элемента 1.

Предположим, что матрица A содержит четыре различных столбца, каждый из которых содержит ровно по две единицы. Обозначим через A' подматрицу, образованную этими столбцами. Если $perm(A') = 0$, то в силу теоремы 4.3.12 матрица A' содержит нулевую подматрицу либо размера 1×4, либо размера 2×3. В каждом из этих случаев матрица A' гарантированно содержит повторяющиеся столбцы, и это противоречит минимальности m.

Значит, $perm(A') = 1$, и тогда с точностью до перестановки столбцов $A'_{ii} = 1$ при $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. В силу исходного предположения имеем также $A'_{i,\sigma(i)} = 1$ при всех i для некоторой нечетной перестановки σ (которая не может быть транспозицией в силу минимальности m). Таким образом с точностью до перестановок строк и столбцов мы имеем $A = \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,0\,A_{15}\,\ldots\,A_{1m} \\ 0\,1\,1\,0\,A_{25}\,\ldots\,A_{2m} \\ 0\,0\,1\,1\,A_{35}\,\ldots\,A_{3m} \\ 1\,0\,0\,1\,A_{45}\,\ldots\,A_{4m} \end{pmatrix}$.

В силу минимальности числа m столбцов матрицы A, найдутся непересекающиеся подмножества $I \neq \varnothing$ и J множества $\{1,2,3,4\}$, для которых равенство $\max_{i\in I}\{\lambda_i A_{ik'}\} = \max_{j\in J}\{\lambda_j A_{jk'}\}$ верно при всех $k' > 1$. Отметим, что из последнего равенства для $k' \in \{2,3,4\}$ следует, что $\{I,J\} = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$ и потому это равенство выполняется на самом деле при всех k'. Полученное противоречие с условием $GMr(A) = 4$ завершает разбор шага 3.

Теперь используем установленные рассуждениями шагов 1 – 3 свойства матрицы A для завершения доказательства. В силу условия $GMr(A) > 3$ для любых $\{i,j,p,q\} = \{1,2,3,4\}$ найдется такое k, для которого $\max\{A_{ik}, A_{jk}\} \neq \max\{A_{pk}, A_{qk}\}$. Заметим, что если k-й столбец содержит не менее трех единиц, то $\max\{A_{ik}, A_{jk}\} = \max\{A_{pk}, A_{qk}\}$ при любых таких i,j,p,q. Согласно шагам 1 и 2 столбцы матрицы A содержат не менее двух единиц, и согласно шагу 3 не более трех столбцов матрицы A содержат ровно по две единицы. Отсюда мы заключаем, что матрица A содержит (с точностью до перестановки строк и столбцов) подматрицу $\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ или подматрицу $\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&1\\ 1&0&1\\ 1&1&0 \end{pmatrix}$. В силу условия $d(A) \leqslant 3$ мы заключаем, что первая строка матрицы состоит либо только из нулей, либо только из единиц. В этих случаях же строки A линейно GM-зависимы, что дает противоречие с предположением $GMr(A) = 4$.

Противоречие показывает, что на самом деле строки матрицы B (то есть любые четыре строки матрицы M) GM-линейно зависимы, а значит $GMr(M) \leqslant 3$. По теореме 1.2.17 $GMr(M) \geqslant d(M)$, откуда $GMr(M)$=3. □

Будем теперь доказывать, что матрица из примера 4.3.10 имеет минимальный размер среди матриц с различными рангом Гондрана–Мину и детерминантным рангом.

Теорема 4.3.15. *Предположим, что матрица $M \in \mathbb{B}^{p\times q}$ удовлетворяет условию $\min\{p,q\} < 5$ или условию $\max\{p,q\} < 6$. Тогда $GMr(M) = d(M)$.*

Доказательство. Если $\min\{p,q\} < 5$, то результат следует из предложения 4.3.14 и теоремы 1.2.17. В противном случае $p = q = 5$, и утверждение следует из теоремы 1.2.15. □

Теперь покажем, что матрица из примера 4.3.10 имеет минимальный размер среди матриц с различными рангами Гондрана–Мину.

Теорема 4.3.16. *Матрица A из примера 4.3.10 содержит минимально возможные среди всех матриц $M \in \mathbb{B}^{p\times q}$ числа строк и столбцов при условии $GMr(M) > GMc(M)$.*

Доказательство. Следует из теоремы 4.3.15. □

4.3.3 Матрицы с фиксированным тропическим рангом

В этом подразделе мы сравниваем поведение ранговых функций булевых матриц. Мы показываем, что ранги Гондрана–Мину, детерминантный и тропический ранги принимают ограниченные значения, если один из них ограничен. Более того, мы доказываем для любой булевой матрицы A неравенства $trop(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$, $d(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$, $trop(A) \geqslant \frac{d(A)+2}{3}$. Результаты данного подраздела будут использованы в главе 5 при доказательстве аналогичных неравенств для матриц над макс-алгеброй.

4.3.3.1 Ранг Гондрана–Мину и тропический ранг

Будем сначала доказывать оценку сравнения ранга Гондрана–Мину и тропического ранга, верную для булевых матриц. Для этого потребуется доказать следующую теорему.

Теорема 4.3.17. *Пусть строки матрицы $A \in \mathbb{B}^{n\times m}$ GM-линейно независимы. Тогда $trop(A) \geqslant \sqrt{n}$.*

Доказательство. От противного. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть $B \in \mathbb{B}^{n\times m}$ — матрица, строки которой GM-независимы, и $trop(B) < \sqrt{n}$. Будем считать, что среди всех матриц, обладающих этими свойствами, матрица B содержит минимальное число строк; а среди матриц, содержащих минимальное число строк, содержит минимальное число столбцов. Заметим, что матрица B не содержит нулевых столбцов. Заметим, кроме того, что $n > 1$, $m > 1$.

Обозначим через k число элементов $\mathbf{1}$ в первом столбце матрицы B. Не ограничивая общности, можно считать, что $B_{11} = \ldots = B_{k1} = \mathbf{1}$. Тогда $B_{k+1,1} = \ldots = B_{n1} = \mathbf{0}$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $k < \sqrt{n}$. Согласно определению 1.1.19 строки матрицы B с номерами $k+1, \ldots, n$ GM-независимы. По предположению минимальности матрицы B $trop(B[k+1, \ldots, n]) > \sqrt{n-k}$. По определению 1.2.7 найдется тропически невырожденная матрица $B[r_1, \ldots, r_t | c_1, \ldots, c_t]$, где $t = trop(B[k+1, \ldots, n])$, $\{r_1, \ldots, r_t\} \subset \{k+1, \ldots, n\}$. Согласно обозначениям первый столбец матрицы $B[k+1, \ldots, n]$ состоит только из элементов $\mathbf{0}$, поэтому $c_i \neq 1$. Таким образом,

$$B[1, r_1, \ldots, r_t | 1, c_1, \ldots, c_t] = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathbf{1} & B_{1c_1} & \ldots & B_{1c_t} \\ \hline \mathbf{0} & & & \\ \ldots & & B' & \\ \mathbf{0} & & & \end{array}\right),$$

где матрица $B' = B[r_1, \ldots, r_t | c_1, \ldots, c_t]$ тропически невырождена. Таким образом, согласно определению 1.2.5 матрица $B[1, r_1, \ldots, r_t | 1, c_1, \ldots, c_t]$ тропически невырождена. Согласно определению 1.2.7 $trop(B) \geqslant t + 1 = \sqrt{n-k} + 1$. По предположениям, $trop(B) < \sqrt{n}$, $k < \sqrt{n}$. Таким образом, $\sqrt{n} > trop(B) \geqslant \sqrt{n - \sqrt{n}} + 1$; отсюда $n - 2\sqrt{n} + 1 \geqslant n - \sqrt{n}$, т.е. $1 \geqslant \sqrt{n}$. Противоречие.

2. Пусть $k \geqslant \sqrt{n}$. Поскольку $trop(B[1, \ldots, n | 2, \ldots, m]) \leqslant trop(B)$, ввиду минимальности матрицы B строки матрицы $B[1, \ldots, n | 2, \ldots, m]$ GM-зависимы. Согласно определению 1.1.19 найдутся множества $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$, такие что $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J \neq \varnothing$, и верно, что

$$\bigoplus_{i \in I} A_{is} = \bigoplus_{j \in J} A_{js} \text{ при всех } s \in \{2, \ldots, m\}. \tag{4.3.2}$$

Можно считать, не ограничивая общности, что значение $|I \cup J|$ максимально по всем зависимостям вида (4.3.2). Через $S = \{s_1, \ldots, s_h\}$ обозначим множество всех $s \in \{2, \ldots, m\}$, для которых $\bigoplus_{i \in I} A_{is} = \bigoplus_{j \in J} A_{js} = \mathbf{0}$. Возможны два случая.

2.1. Пусть множество S непусто. Через $P = \{p_1, \ldots, p_g\}$ обозначим множество тех $p \in \{1, \ldots, n\}$, для которых найдется $s \in S$, такое, что $A_{ps} = \mathbf{1}$. Заметим, что $P \cap (I \cup J) = \varnothing$. Далее, матрица B не содержит нулевых строк, поэтому множество P непусто. Обозначая через B_0 матрицу, образованную строками матрицы B с номерами из множества $\{1, \ldots, n\} \setminus P$ и столбцами с номерами из множества $\{1, \ldots, m\} \setminus S$, имеем

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_0 & O \\ \hline B_1 & B[p_1, \ldots, p_g | s_1, \ldots, s_h] \end{array} \right), \tag{4.3.3}$$

где через B_1 обозначена матрица, образованная строками матрицы B с номерами из множества P и столбцами с номерами из множества $\{1, \ldots, m\} \setminus S$.

2.1.1. Если строки матрицы $B[p_1, \ldots, p_g | s_1, \ldots, s_h]$ GM-зависимы, то согласно определению 1.1.19 найдутся множества $I_1, J_1 \subset P$, такие что $I_1 \cap J_1 = \varnothing$, $I_1 \cup J_1 \neq \varnothing$, и верно, что

$$\bigoplus_{i \in I_1} A_{is} = \bigoplus_{j \in J_1} A_{js} \text{ при всех } s \in S. \tag{4.3.4}$$

Согласно обозначениям при $s' \in \{2, \ldots, m\} \setminus S$ верно, что $\bigoplus_{i \in I} A_{is} = \bigoplus_{j \in J} A_{js} = \mathbf{1}$; значит, при $s' \in \{2, \ldots, m\} \setminus S$ верно, что $\bigoplus_{i \in I \cup I_1} A_{is'} =$

$\bigoplus_{j\in J\cup J_1} A_{js'} = \mathbf{1}$. Складывая равенства (4.3.2) и (4.3.4), получаем, что при всех $s \in \{2,\dots,m\}$ верно, что

$$\bigoplus_{i\in I\cup I_1} A_{is} = \bigoplus_{j\in J\cup J_1} A_{js},$$

что противоречит максимальности значения $|I \cup J|$, поскольку $I_1, J_1 \subset P$, и $P \cap (I \cup J) = \varnothing$.

2.1.2. Таким образом, строки матрицы $B[p_1,\dots,p_g|s_1,\dots,s_h]$ GM-независимы. Кроме того, строки матрицы B GM-независимы, поэтому согласно равенству (4.3.3) строки матрицы B_0 GM-независимы. Итак, по предположению минимальности матрицы B верны неравенства $trop(B_0) \geqslant \sqrt{n-|P|}$ и $trop(B[p_1,\dots,p_g|s_1,\dots,s_h]) \geqslant \sqrt{|P|}$. Из (4.3.3) следует, что $trop(B) \geqslant trop(B_0)+trop(B[p_1,\dots,p_g|s_1,\dots,s_h])$. Таким образом, $trop(B) \geqslant \sqrt{n-|P|}+\sqrt{|P|}$. По исходному предположению, $trop(B) < \sqrt{n}$, т.е. $\sqrt{n-|P|}+\sqrt{|P|} < \sqrt{n}$, или $\sqrt{n-|P|} < \sqrt{n}-\sqrt{|P|}$. Отсюда $n-|P| < n+|P|-2\sqrt{n|P|}$, т.е. $\sqrt{|P|} > \sqrt{n}$. Противоречие показывает, что случай 2.1 не реализуется.

2.2. Пусть теперь множество S пусто, т.е. верно, что

$$\bigoplus_{i\in I} A_{is} = \bigoplus_{j\in J} A_{js} = \mathbf{1} \text{ при всех } s \in \{2,\dots,m\}. \tag{4.3.5}$$

Заметим, что $\bigoplus_{i\in I} A_{i1} \neq \bigoplus_{j\in J} A_{j1}$, иначе строки матрицы B были бы GM-зависимы. Не ограничивая общности, можно считать, что $\bigoplus_{i\in I} A_{i1} = \mathbf{1}$, $\bigoplus_{j\in J} A_{j1} = \mathbf{0}$. Тогда, согласно обозначениям $J \cap \{1,\dots,k\} = \varnothing$. Из (4.3.5) следует тогда, что при всех $s \in \{2,\dots,m\}$ верно, что

$$\bigoplus_{i\in I\cup\{1,\dots,k\}} A_{is} = \bigoplus_{j\in J} A_{js} = \mathbf{1}.$$

Значит, ввиду минимальности значения $|I \cup J|$ верно, что $\{1,\dots,k\} \subset I$.

Фиксируем произвольное $r \in \{1,\dots,k\}$. Строки матрицы B GM-независимы, поэтому при некотором $v = v(r) \in \{1,\dots,m\}$ верно, что

$$\bigoplus_{i\in I\setminus\{r\}} A_{iv} \neq \bigoplus_{j\in J\cup\{r\}} A_{jv}. \tag{4.3.6}$$

Согласно обозначениям $\bigoplus_{i\in I\setminus\{r\}} A_{i1} = \bigoplus_{j\in J\cup\{r\}} A_{j1} = \mathbf{1}$, поэтому $v \neq 1$. Далее, из (4.3.5) следует, что при $v \neq 1$ верно, что $\bigoplus_{j\in J\cup\{r\}} A_{jv} = \mathbf{1}$. Таким образом, из (4.3.6) следует, что $\bigoplus_{i\in I\setminus\{r\}} A_{iv} = \mathbf{0}$. Согласно (4.3.5) $\bigoplus_{i\in I} A_{iv} = \mathbf{1}$, т.е. $A_{rv} = \mathbf{1}$, $A_{r'v} = \mathbf{0}$ при $r' \in I \setminus \{r\}$.

Таким образом, для любого $r \in \{1,\dots,k\}$ найдется число $v(r) \in \{2,\dots,m\}$, такое что $A_{r,v(r)} = \mathbf{1}$, $A_{r',v(r)} = \mathbf{0}$ при $r' \in \{1,\dots,r-1,r+1,\dots,k\}$. Это означает, что на диагонали матрицы $B[1,\dots,k|v(1),\dots,v(k)]$ стоят элементы $\mathbf{1}$, а остальные элементы равны $\mathbf{0}$. Согласно определению 1.2.5 матрица $B[1,\dots,k|v(1),\dots,v(k)]$ тропически невырождена, поэтому $trop(B) \geqslant k$. По предположению пункта 2, $k \geqslant \sqrt{n}$, поэтому $trop(B) \geqslant \sqrt{n}$, что противоречит исходным предположениям.

Таким образом, случай 2.2 также не реализуется. Случаи 1 и 2 исчерпывают возможности, поэтому теорема доказана. □

Теперь мы можем доказать следующую оценку.

Теорема 4.3.18. *Пусть $M \in \mathbb{B}^{n\times m}$. Тогда $trop(M) \geqslant \sqrt{GMr(M)}$.*

Доказательство. Пусть $GMr(M) = t$. Тогда, согласно определению 1.2.2 при некоторых $r_1,\dots,r_t$ строки матрицы $M[r_1,\dots,r_t]$ GM-независимы. Согласно теореме 4.3.17 $trop(M[r_1,\dots,r_t]) \geqslant \sqrt{t}$. Таким образом, согласно определению 1.2.7 $trop(M) \geqslant \sqrt{t}$. □

Оценка сравнения GM- и детерминантного рангов, верная для матриц над $\mathbb{B}$, получается как следствие теоремы 4.3.18.

Следствие 4.3.19. *Пусть $M \in \mathbb{B}^{n\times m}$. Тогда $d(M) \geqslant \sqrt{GMr(M)}$.*

Доказательство. Следует непосредственно из теоремы 4.3.18 и леммы 1.2.13. □

4.3.3.2 Детерминантный и тропический ранги

Теперь мы будем сравнивать детерминантный и тропический ранги матриц над бинарным булевым полукольцом. Нам потребуются следующие понятия теории графов.

Ориентированным графом G называется конечное множество вершин $V(G)$ и множество упорядоченных пар $E(G)$ различных вершин (x,y). Если $e = (x_1,x_2) \in E(G)$, мы говорим, что ребро e *исходит* из вершины x_1 и *входит* в x_2, а также, что ребро e *инцидентно* этим вершинам.

Последовательность вершин $x_1,\dots,x_m$ называется *ориентированным путем* в G, если пары $(x_1,x_2),\dots,(x_{m-1},x_m)$ принадлежат $E(G)$. В этом случае мы говорим, что из вершины x_1 *можно попасть* в вершину x_m. Если при этом $x_1 = x_m$, ориентированный путь называется *циклом длины* $m-1$. Этот цикл называется *элементарным*, если вершины $x_1,\dots,x_{m-1}$ попарно различны.

Под *удалением* из графа G *вершин* $x_1,\dots,x_k$ будем понимать удаление этих вершин и всех ребер, инцидентных им.

Определение 4.3.20. Ориентированный граф G называется *сильно связным*, если из любой его вершины можно попасть в любую другую вершину.

Определение 4.3.21. Ориентированный граф G называется *сильно k-связным*, если любой граф G', полученный из G удалением не более чем $k-1$ вершин, сильно связен.

Определение 4.3.22. Пусть G — ориентированный граф на n вершинах. Матрицу $A \in \mathbb{B}^{n\times n}$, — где $A_{ij} = \mathbf{1}$, если $i = j$ или $(ij) \in E(G)$, и $A_{ij} = \mathbf{0}$ в противном случае, — будем называть *обобщенной матрицей смежности* графа G.

Лемма 4.3.23. *Пусть G — ориентированный граф на n вершинах, не являющийся сильно связным, A — обобщенная матрица смежности графа G. Тогда матрица A содержит нулевую подматрицу размера $p \times (n-p)$.*

Доказательство. Согласно определению 4.3.20 из некоторой вершины x графа G нельзя попасть в некоторую вершину $y \neq x$ графа G по ориентированному пути. Через $R = \{r_1, \ldots, r_p\}$ обозначим множество, состоящее из вершины x и всех тех вершин, в которые можно попасть из вершины x по ориентированным путям, через $C = \{c_1, \ldots, c_{n-p}\}$ обозначим множество всех других вершин. Множества R и C непусты, т.к. $x \in R$, $y \in C$. Заметим, что матрица $A[r_1, \ldots, r_p | c_1, \ldots, c_{n-p}]$ нулевая. □

Лемма 4.3.24. *Пусть $k < n$. Пусть G — ориентированный граф на n вершинах, не являющийся сильно k-связным, A — обобщенная матрица смежности графа G. Тогда матрица A содержит нулевую подматрицу размера $p \times (n+1-p-k)$.*

Доказательство. Согласно определению 4.3.21 граф G', полученный из G удалением некоторых t $(t < k)$ вершин, не является сильно связным.

Обозначим вершины графа G' через $v_1, \ldots, v_{n-t}$. Согласно лемме 4.3.23 матрица $A[v_1, \ldots, v_{n-t} | v_1, \ldots, v_{n-t}]$ содержит нулевую подматрицу размера $p \times (n-p-t)$. Таким образом, матрица A содержит нулевую подматрицу размера $p \times (n-p-t)$, и, т. к. $t < k$, и нулевую подматрицу размера $p \times (n+1-p-k)$. □

Также нам потребуются следующие утверждения.

Теорема 4.3.25. *[133, следствие 4.3] Любой сильно 3-связный ориентированный граф содержит элементарный цикл четной длины.*

Предложение 4.3.26. *Пусть* $A \in \mathbb{B}^{n\times n}$, *числа* $p_1, \ldots, p_t \in \{1, \ldots, n\}$ *различны. Пусть, каковы бы ни были* $q_1, \ldots, q_t \in \{1, \ldots, n\}$, *верно, что* $\|A[p_1, \ldots, p_t|q_1, \ldots, q_t]\|^+ = \|A[p_1, \ldots, p_t|q_1, \ldots, q_t]\|^-$. *Тогда* $\|A\|^+ = \|A\|^-$.

Доказательство. Следует непосредственно из [120, теорема 5.4]. □

Теорема 4.3.27. *Пусть матрица* $A \in \mathbb{B}^{n\times n}$ *такова, что* $\|A\|^+ \neq \|A\|^-$. *Тогда* $trop(A) \geqslant \frac{n+2}{3}$.

Доказательство. Докажем индукцией по n. При $n \in \{1, 2, 3\}$ утверждение следует непосредственно из определений.

Пусть $n > 3$. Заметим, что $\|A\|^+ = \mathbf{1}$ или $\|A\|^- = \mathbf{1}$. Поэтому, с точностью до перестановки строк, можно считать, что $A_{11} = \ldots = A_{nn} = \mathbf{1}$. Рассмотрим ориентированный граф G, из вершины i которого выходит ребро в вершину j (при $i \neq j$) в том и только том случае, если $A_{ij} = \mathbf{1}$. Предположим, что граф G содержит элементарный цикл четной длины. Не ограничивая общности, считаем, что это цикл $(1, 2, \ldots, 2k)$. Тогда $A_{12} = \ldots = A_{2k-1,2k} = A_{2k,1} = \mathbf{1}$, поэтому

$$(A_{12} \ldots A_{2k-1,2k} A_{2k,1})(A_{2k+1,2k+1} \ldots A_{nn}) = \mathbf{1},$$

и $\|A\|^+ = \|A\|^- = \mathbf{1}$.

Противоречие показывает, что граф G не содержит элементарных циклов четной длины. Значит, согласно теореме 4.3.25 граф G не является сильно 3-связным. По построению, A является обобщенной матрицей смежности графа G, поэтому согласно лемме 4.3.24 матрица A содержит нулевую подматрицу $A[r_1, \ldots, r_p|c_1, \ldots, c_q]$, для которой $p + q = n - 2$. Согласно лемме 4.3.26 существуют d-невырожденные подматрицы $A[r_1, \ldots, r_p|c'_1, \ldots, c'_p]$ и $A[r'_1, \ldots, r'_q|c_1, \ldots, c_q]$. Заметим, что при любых i и j верно, что $r_i \neq r'_j$, $c'_i \neq c_j$, т.к. матрица $A[r_1, \ldots, r_p|c_1, \ldots, c_q]$ нулевая.

Введем обозначения $g = trop(A[r_1, \ldots, r_p|c'_1, \ldots, c'_p])$, $h = trop(A[r'_1, \ldots, r'_q|c_1, \ldots, c_q])$. Согласно предположению индукции $g \geqslant \frac{p+2}{3}$, $h \geqslant \frac{q+2}{3}$. По определению 1.2.7, найдутся тропически невырожденная подматрица $A[R_1, \ldots, R_g|C'_1, \ldots, C'_g]$ матрицы $A[r_1, \ldots, r_p|c'_1, \ldots, c'_p]$, и тропически невырожденная подматрица $A[R'_1, \ldots, R'_h|C_1, \ldots, C_h]$ матрицы $A[r'_1, \ldots, r'_q|c_1, \ldots, c_q]$.

Заметим, что матрица $A[R_1, \ldots, R_g|C_1, \ldots, C_h]$ является подматрицей матрицы $A[r_1, \ldots, r_p|c_1, \ldots, c_q]$, поэтому матрица $A[R_1, \ldots, R_g|C_1, \ldots, C_h]$ нулевая. Матрица $A_0 = A[R_1, \ldots, R_g, R'_1, \ldots, R'_h|C'_1, \ldots, C'_g, C_1, \ldots, C_h]$, таким

образом, имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} A[R_1,\ldots,R_g|C'_1,\ldots,C'_g] & O \\ \hline A[R'_1,\ldots,R'_h|C'_1,\ldots,C'_g] & A[R'_1,\ldots,R'_h|C_1,\ldots,C_h] \end{array}\right).$$

Итак, согласно определению 1.2.5 матрица A_0 тропически невырождена, поскольку матрицы $A[R_1,\ldots,R_g|C'_1,\ldots,C'_g]$ и $A[R'_1,\ldots,R'_h|C_1,\ldots,C_h]$ тропически невырождены. По определению 1.2.7 $trop(A) \geqslant g+h$. Таким образом, $trop(A) \geqslant \frac{p+2}{3} + \frac{q+2}{3}$, или $trop(A) \geqslant \frac{p+q+4}{3}$, т.е. $trop(A) \geqslant \frac{n+2}{3}$, что доказывает индуктивный переход. □

Теперь мы можем доказать неравенство, связывающее детерминантный и тропический ранги матриц над $\mathbb{B}$.

Теорема 4.3.28. *Пусть $A \in \mathbb{B}^{m\times n}$. Тогда $trop(A) \geqslant \frac{d(A)+2}{3}$.*

Доказательство. Пусть $d(A) = r$. Тогда матрица A содержит d-невырожденную подматрицу $B \in \mathbb{B}^{r\times r}$. Согласно теореме 4.3.27 $trop(B) \geqslant \frac{r+2}{3}$. Таким образом, $trop(A) \geqslant \frac{r+2}{3}$, что и требовалось. □

Глава 5

Ранговые функции тропических матриц

Данная глава посвящена исследованию свойств ранговых функций тропических матриц. Особое внимание мы уделим тем функциям, которые важны для различных приложений тропической линейной алгебры: детерминантному и тропическому рангам, рангам Капранова и Гондрана–Мину и факторизационному рангу. Отметим разделы чистой и прикладной математики, задачи которых требуют развития теории этих ранговых функций: понятие тропического ранга возникает из рассмотрения проблем комбинаторной оптимизации [22] и геометрии [45], детерминантный ранг полезен для исследований в теории дискретных динамических систем [60], ранги Гондрана–Мину связаны со спектральной теорией тропических матриц [66] и находят приложения в теории расписаний [36], разработке алгоритмов кластеризации [64] и ряд других. Понятие ранга Капранова восходит к проблемам алгебраической геометрии [47] и используется для изучения тропических многообразий [31]. Понятие факторизационного ранга естественным образом возникает в связи с некоторыми вопросами комбинаторной оптимизации [7] и оказывается полезным для решения некоторых ее проблем [8, 9]; впоследствии понятие факторизационного ранга нашло также приложения в геометрии [44].

Для доказательства основных результатов главы важен метод шаблонов тропических матриц, который в целом описан в первом разделе и обоснованию которого посвящен второй раздел этой главы. Коротко, суть метода состоит в том, что некоторые ранговые функции тропической матрицы оказываются (с точностью до умножения строк и столбцов матрицы на ненулевые элементы) равными рангу некоторой булевой матрицы, которая определяется специальным образом с помощью исходной. Метод позволяет обобщить некоторые результаты, известные для булевых матриц, на случай матриц над тропическим полукольцом. А именно, будут доказаны неравенства

$\mathrm{trop}(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$ и $\mathrm{trop}(A) \geqslant \frac{d(A)+2}{3}$, верные для любой тропической матрицы A. С использованием метода шаблонов будет показано, что при любом фиксированном k задача распознавания свойства $GMr(A) < k$ решается за полиномиальное по размеру тропической матрицы A время. В данной главе мы также изучаем матрицы, на которых рассматриваемые ранговые функции проявляют различное поведение, и обсуждаем применимость метода шаблонов к изучению функций ранга Капранова и факторизационного ранга.

5.1 Шаблон тропической матрицы

Метод тропических шаблонов, разработке которого посвящена статья [164] автора диссертации, оказывается непосредственным образом связан с понятием смешанного разбиения суммы Минковского выпуклых многогранников. Напомним, что *суммой Минковского* $\sum_{i=1}^{k} P_i$ множеств $P_1, \ldots, P_k \subset \mathbb{R}^d$ называется множество всевозможных сумм вида $x_1 + \ldots + x_k$ при $x_1 \in P_1, \ldots, x_k \in P_k$. Рассмотрим теперь набор $B = (B_1, \ldots, B_k)$ выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^d$ и предположим, что размерность их суммы Минковского равна d. Набор выпуклых многогранников $(B_1, \ldots, B_k)$ из $\mathbb{R}^d$ называется *ячейкой Минковского* для набора $(P_1, \ldots, P_k)$, если вершины многогранника B_i образуют подмножество вершин многогранника P_i при всех значениях i.

Определение 5.1.1. Набор S ячеек Минковского $B^{(\alpha)} = \left(B_1^{(\alpha)}, \ldots, B_k^{(\alpha)}\right)$ называется *смешанным разбиением* суммы Минковского набора многогранников $(P_1, \ldots, P_k)$, если выполнены следующие условия:

(i) объединение по всем ячейкам из S их сумм Минковского $\sum_{i=1}^{k} B_i^{(\alpha)}$ покрывает все множество $\sum_{i=1}^{k} P_i$;

(ii) для любых i, α и β пересечением многогранников $B_i^{(\alpha)}$ и $B_i^{(\beta)}$ является их общая грань.

Отметим, что понятие смешанного разбиения является естественным обобщением классического понятия разбиения многогранника. Подробное обсуждение смешанных разбиений проведено в статье [124], а в нашей работе мы остановимся на тех их свойствах, которые важны для исследования ранговых функций тропических матриц. Рассмотрим стандартный $(d-1)$-мерный симплекс Δ^{d-1} в пространстве $\mathbb{R}^d$, то есть выпуклую оболочку множества $\{e_1, \ldots, e_d\}$. Обозначим через $n\Delta^{d-1}$ сумму Минковского $\Delta^{d-1} + \ldots + \Delta^{d-1}$, в которой n слагаемых. Типом вектора $x \in \mathbb{R}^d$ относительно столбцов матрицы $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ называется набор из d множеств $(S_1, \ldots, S_d)$, где множества S_j составлены из тех индексов $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $\theta = j$ доставляет

минимум выражению $V_{\theta i} - x_\theta$. Этот тип мы будем обозначать через $type_V(x)$. Введем в рассмотрение понятие *смешанного разбиения* суммы симплексов $n\Delta^{d-1}$, *индуцированного матрицей* $M \in \mathbb{R}^{d\times n}$, взяв за основу следующую характеризацию этого понятия.

Теорема 5.1.2. *[45, теорема 5.2] Рассмотрим матрицу $M \in \mathbb{R}^{d\times n}$ и семейство подмножеств $S = (S_1, \ldots, S_d)$ множества $\{1, \ldots, n\}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) найдется вектор $x \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющий условию $type_M(x) = S$;

(2) смешанное разбиение $n\Delta^{d-1}$, индуцированное матрицей M, содержит ячейку Минковского $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где через τ_i обозначена выпуклая оболочка множества $\{e_j \,|i \in S_j\}$.

Девелин, Сантос и Штурмфельс в работе [45] доказывают полезную характеризацию тропического ранга в терминах смешанного разбиения, индуцированного матрицей.

Теорема 5.1.3. *[45, следствие 5.4] Тропический ранг матрицы $M \in \mathbb{R}^{d\times n}$ равен числу d минус минимальная размерность ячейки смешанного разбиения суммы симплексов $n\Delta^{d-1}$, индуцированного матрицей M.*

Теорема 5.1.3 позволяет предположить, что и другие ранговые функции тропических матриц можно задать в терминах индуцируемого ими смешанного разбиения. Вопрос о том, так ли это на самом деле, был представлен в работе [45]. Более формально поставленная проблема может быть сформулирована следующим образом.

Проблема 5.1.4. *[45, раздел 8, вопрос 4] Пусть матрицы M и M' размера $d \times n$ индуцируют одно и то же смешанное разбиение суммы симплексов $n\Delta^{d-1}$. Обязательно ли M и M' имеют одинаковые факторизационные ранги или одинаковые ранги Капранова?*

Проблема 5.1.4 была решена автором диссертации в статье [156], в которой приведены примеры матриц размера 6×6, которые индуцируют одно из то же смешанное разбиение и имеют различные факторизационные ранги и различные ранги Капранова. Прежде чем остановиться на этих примерах более подробно, мы приведем еще одну характеризацию смешанных разбиений, для чего нам потребуется ввести в рассмотрение понятие шаблона тропической матрицы (напомним, что через $\overline{\mathbb{R}}$ мы обозначаем множество $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ элементов тропического полукольца).

Определение 5.1.5. *Тропическим шаблоном* матрицы $A \in \overline{\mathbb{R}}^{d\times n}$ называется булева матрица $B \in \mathbb{B}^{d\times n}$, определенная как

1) $B_{uv} = 1$, если $A_{uv} = \min_i\{A_{iv}\} < \infty$,
2) $B_{uv} = 0$, если $A_{uv} > \min_i\{A_{iv}\}$ или если $A_{uv} = \infty$.
Тропический шаблон матрицы A обозначается через $\mathcal{P}(A)$.

Следующая лемма дает характеризацию понятия тропического шаблона в терминах типов тропических векторов.

Лемма 5.1.6. *Рассмотрим матрицу $M \in \mathbb{R}^{d\times n}$, вектор $x \in \mathbb{R}^d$ и семейство подмножеств $S = (S_1, \ldots, S_d)$ множества $\{1, \ldots, n\}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $type_M(x) = S$;

(2) элементы тропического шаблона P матрицы $M(x)$, элементы которой заданы как $[M(x)]_{ji} = M_{ji} - x_j$, удовлетворяют условию $P_{ji} = 1$ в том и только в том случае, если $j \in S_i$.

Доказательство. В силу определения типа тропического вектора условие $type_M(x) = S$ обозначает, что множества S_j составлены из тех индексов $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $\theta = j$ доставляет минимум выражению $M_{\theta i} - x_\theta = M'_{\theta i}$. □

Теперь мы можем привести характеризацию понятия шаблона в терминах смешанных разбиений тропических матриц. Будем говорить, что тропические матрицы M и M' одного размера *тропически проективно эквивалентны* (или просто *эквивалентны*), если найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, для которых $M_{ij} = M'_{ij} + \alpha_i + \beta_j$ при всех i и j. В силу леммы 1.2.12 рассматриваемые ранговые функции постоянны на каждом классе эквивалентности.

Теорема 5.1.7. *Рассмотрим матрицу $M \in \mathbb{R}^{d\times n}$ и семейство подмножеств $S = (S_1, \ldots, S_d)$ множества $\{1, \ldots, n\}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) матрица M эквивалентна некоторой матрице M', элементы шаблона P' которой удовлетворяет условию $P'_{ji} = 1$ в том и только в том случае, если $j \in S_i$;

(2) смешанное разбиение $n\Delta^{d-1}$, индуцированное матрицей M, содержит ячейку Минковского $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где через τ_i обозначена выпуклая оболочка множества $\{e_j \,|i \in S_j\}$.

Доказательство. Условие (1) доказываемой теоремы обозначает, что найдется вектор $x \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющий условию (2) из леммы 5.1.6, и потому для доказательства достаточно применить теорему 5.1.2. □

Теорема 5.1.7 показывает, что смешанное разбиение, индуцированное матрицей M, определяется однозначно множеством тропических шаблонов матриц из класса эквивалентности M, и наоборот, множество таких тропических шаблонов однозначно определяет смешанное разбиение. При дальнейшем изложении результатов главы мы увидим, что характеризации ранговых функций в терминах тропических шаблонов дают мощный инструмент для исследования этих функций. Пока же мы остановимся на тех функциях, которые, к сожалению, не допускают характеризации в таких терминах: в частности, мы дадим отрицательное решение проблемы 5.1.4.

Пример 5.1.8. *Факторизационный ранг тропической матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

не превосходит 4.

Доказательство. Следует из равенства

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Пример 5.1.9. *При любом* ε *из интервала* $(0, 0.5)$ *тропическая матрица*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

имеет ранг Капранова, не меньший 5.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $H \in \mathbf{H}^{6\times 6}$, удовлетворяющую условию $\deg H = B$, и положим $u = H_{33}H_{44} - H_{34}H_{43}$. В этом случае алгебраические дополнения H_{16} и H_{61} выражаются как $H_{16} = -H_{21}uH_{52}H_{65} + \eta_1$ и $H_{61} = -H_{14}H_{22}H_{36}H_{43}H_{55} - H_{16}H_{22}uH_{55} + \eta_2$, где $\deg \eta_1 \geqslant 6$, $\deg \eta_2 \geqslant 3$.

Предположим, что H_{16} — это нулевой элемент поля $\mathbf{H}$. В этом случае, степень элемента $H_{21}uH_{52}H_{65}$ не меньше 6, поэтому $\deg u \geqslant 2$. Тогда мы имеем $\deg(H_{16}H_{22}uH_{55}) \geqslant 2+\varepsilon$, и потому $H_{61} = -H_{14}H_{22}H_{36}H_{43}H_{55} + \eta_2'$, где $\deg \eta_2' \geqslant 2+\varepsilon$. Таким образом, мы имеем равенство $\deg H_{61} = 2$ в случае, если H_{16} равно нулю, и поэтому ранг матрицы H не может быть меньше 5. Доказываемый результат следует теперь из определения 1.3.23. □

Предложение 5.1.10. *Матрицы A и B из примеров 5.1.8 и 5.1.9 имеют различные факторизационные ранги и различные ранги Капранова.*

Доказательство. По теореме 1.4 статьи [45] ранг Капранова матрицы не может быть меньше ее факторизационного ранга, поэтому предложение следует из результатов примеров 5.1.8 и 5.1.9. □

Лемма 5.1.11. *Матрицы A и B из примеров 5.1.8 и 5.1.9 индуцируют одно и то же смешанное разбиение суммы симплексов $6\Delta^5$.*

Доказательство. 1. Рассмотрим две биективные функции

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t < -2\varepsilon \\ \frac{t}{2} - \varepsilon, & \text{если } t \in [-2\varepsilon, 0) \\ t - \varepsilon, & \text{если } t \in [0, \varepsilon] \end{cases} \text{ и}$$

$$g(t) = \begin{cases} f(t+1) - 1, & \text{если } t < -1+\varepsilon \\ t - \varepsilon, & \text{если } t \in [-1+\varepsilon, \varepsilon] \end{cases},$$

отображающие интервал $\mathbb{R}_{\leqslant\varepsilon}{=}(-\infty, \varepsilon]$ в $(-\infty, 0]$. Предположим, что вектор $x \in \mathbb{R}^6_{\leqslant\varepsilon}$ удовлетворяет условию $x_1 = 0$, положим тогда $x' = (0, f(x_2), f(x_3), g(x_4), f(x_5), f(x_6))$. Для любого $i \in \{1, \ldots, 6\}$ непосредственная проверка показывает, что выражения $A_{\theta i} - x_\theta$ и $B_{\theta i} - x'_\theta$ принимают свои минимальные значения одновременно. Поэтому $type_A(x) = type_B(x')$.

2. Теперь рассмотрим произвольный вектор $y \in \mathbb{R}^6$. Поскольку типы проективно эквивалентных векторов одинаковы, мы можем предполагать, что $y_1 = 0$. Если вектор y содержит положительную координату, то мы имеем $type_A(y) = type_B(y)$. В противном случае вектор y состоит из неположительных координат, и в силу пункта 1 найдутся векторы $y', y'' \in \mathbb{R}^6$, удовлетворяющие условиям $type_A(y) = type_B(y')$, $type_B(y) = type_A(y'')$. Таким образом, матрицы A и B индуцируют одно и то же множество типов. Теперь результат следует из теоремы 5.1.2. □

Предложение 5.1.10 и Лемма 5.1.11 показывают, что матрицы A и B индуцируют одно из то же смешанное разбиение и имеют различные факторизационные ранги и различные ранги Капранова. Это дает отрицательное решение проблемы 5.1.4 и доказывает следующую теорему.

Теорема 5.1.12. *Ни факторизационный ранг, ни ранг Капранова тропической матрицы не допускают характеризации в терминах смешанного разбиения суммы симплексов $n\Delta^{d-1}$, индуцированного этой матрицей.*

Теорема 5.1.12 показывает, что в силу теоремы 5.1.7 факторизационный ранг и ранг Капранова матрицы M не могут быть определены в терминах множества шаблонов матриц из класса эквивалентности M. Определенный интерес представляет также вычисление тропических рангов матриц из примеров 5.1.8 и 5.1.9. Хотя эти ранги могут быть вычислены непосредственным применением определения 1.2.7, мы получим этот результат как следствие метода шаблонов.

Предложение 5.1.13. *Матрицы A и B из примеров 5.1.8 и 5.1.9 имеют тропический ранг* 4.

Доказательство. Пример 5.1.9 показывает, что ранг Капранова матрицы B не может быть меньше 5. В силу определения 1.3.23 ранг Капранова любой подматрицы матрицы B размера 6×5 не может быть меньше 4. Далее, теоремы 1.3.28 и 1.3.32 показывают, что тропический ранг матрицы B не может быть меньше 4. С другой стороны, по теореме 1.3.27 тропический ранг матрицы A не может быть больше 4. В силу леммы 5.1.11 матрицы A и B индуцируют одно и то же смешанное разбиение, поэтому остается применить теорему 5.1.3. □

Теоремы 1.3.28 и 1.3.32 показывают, что матрица B имеет минимально возможный размер среди матриц с различными тропическим рангом и рангом Капранова относительно комплексного базового поля, что дает, в частности, ответ на вопрос, сформулированный в разделе 1 статьи [31]. Иной пример матрицы, дающей ответ на вопрос о минимальном размере матрицы с различными тропическим рангом и рангом Капранова, был приведен автором диссертации в работе [168].

Завершим раздел обсуждением еще одного матричного инварианта, введенного в работе [27]. *Граф различий* тропической матрицы $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ строится на множестве вершин $\{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$; вершины (i,j) и (k,l) соединены ребром в том и только том случае, если $Q_{ij} + Q_{kl} < Q_{ik} - Q_{jl}$. Из теоремы 5.1.7 следует, что матрицы, индуцирующие одинаковые смешанные разбиения суммы симплексов, индуцируют и одинаковые графы различий.

Картрайт и Чан [27] поставили проблему: можно ли характеризовать функцию так называемого симметрического ранга тропических матриц в терминах графа различий? Напомним, что тропическая матрица S имеет *симметрический ранг* k, если найдется матрица $U \in \mathbb{R}^{m\times k}$, удовлетворяющая условию $S = U \otimes U^{\top}$, и число k минимально при этих условиях.

Проблема 5.1.14. *[27] Существуют ли тропические матрицы $C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с различными симметрическими рангами, которые индуцируют одинаковые графы различий?*

Положительное решение проблемы 5.1.14 было получено автором диссертации в работе [145]. Чтобы начать изложение этого результата, рассмотрим тропическую матрицу

$$C(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & \alpha & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 5.1.15. *Симметрический ранг матрицы $C(1)$ не превосходит четырех.*

Доказательство. Достаточно проверить равенство $C = v_1^{\top} \otimes v_1 \oplus v_2^{\top} \otimes v_2 \oplus v_3^{\top} \otimes v_3 \oplus v_4^{\top} \otimes v_4$, где $u_1 = (0\,0\,4\,4\,4\,4\,0\,0)$, $v_2 = (4\,4\,0\,0\,4\,4\,0\,0)$, $v_3 = (4\,4\,4\,4\,0\,0\,4\,4)$, $v_4 = (1\,4\,1\,4\,1\,4\,0\,4)$. □

Предложение 5.1.16. *При $\alpha < 1$ симметрический ранг матрицы $C(\alpha)$ больше или равен пяти.*

Доказательство. Предположим противное; тогда найдутся матрицы $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$, $U^{(4)}$ размера 8×8, которые при любых t, i, j, k, l удовлетворяют условиям

$$U_{ij}^{(t)} + U_{kl}^{(t)} = U_{il}^{(t)} + U_{kj}^{(t)} \quad \text{и} \tag{5.1.1}$$

$$C_{ij} = \min\{U_{ij}^{(1)}, U_{ij}^{(2)}, U_{ij}^{(3)}, U_{ij}^{(4)}\} \tag{5.1.2}$$

(для простоты мы пишем C_{ij} вместо $[C(\alpha)]_{ij}$ в доказательстве этого предложения). Обозначим через $\tau(i,j)$ произвольный индекс τ, удовлетворяющий условию $C_{ij} = U_{ij}^{(\tau)}$.

Шаг 1. Предположим, что условие $\tau(2p, 2p) = \tau(2q, 2q) = t$ выполнено при некоторых различных $p, q \in \{1, 2, 3\}$. Тогда мы имеем равенства $U^{(t)}_{2p,2p} = C_{2p,2p}$ и $U^{(t)}_{2q,2q} = C_{2q,2q}$. В силу определения матрицы C выполнено условие $U^{(t)}_{2p,2p} = U^{(t)}_{2q,2q} = 0$. Из равенства (5.1.1) следует равенство $U^{(t)}_{2p,2q} + U^{(t)}_{2q,2p} = 0$; теперь равенство (5.1.2) влечет условие $C_{2p,2q} + C_{2q,2p} \leqslant 0$. Это противоречит определению матрицы C, в силу которого $C_{2p,2q} = C_{2q,2p} = 4$; таким образом, индексы $\tau(2, 2)$, $\tau(4, 4)$, $\tau(6, 6)$ попарно различны, и мы можем полагать $\tau(2p, 2p) = p$ с точностью до переименования матриц $U^{(\tau)}$.

Шаг 2. Предположим, что $(u, v) = (r, s)$, где индексы r и s являются либо различными элементами множества $\{1, 3, 5\}$, либо удовлетворяют условию $\{r, s\} = \{5, 7\}$. Предположим, что условие $\tau(u, v) = p$ выполнено при некотором $p \in \{1, 2, 3\}$; тогда мы имеем условия $U^{(p)}_{2p,2p} = C_{2p,2p}$ и $U^{(p)}_{uv} = C_{uv}$. В силу определения матрицы C выполнены условия $U^{(p)}_{2p,2p} = 0$ и $U^{(p)}_{uv} < 4$. Из равенства (5.1.1) следует неравенство $U^{(p)}_{2p,v} + U^{(p)}_{u,2p} < 4$; теперь равенство (5.1.2) влечет условие $C_{2p,v} + C_{u,2p} < 4$. Это противоречит определению матрицы C, в силу которого числа $C_{2p,v}$ и $C_{u,2p}$ неотрицательны и одно из них равно четырем. Теперь мы видим, что $\tau(u, v) = 4$.

Шаг 3. Из шага 2 следует равенство $U^{(4)}_{uv} = C_{uv}$. В частности, для любых различных индексов $r, s \in \{1, 3, 5\}$ выполнено условие $U^{(4)}_{r,s} = 2$. Из равенства (5.1.1) следуют равенства $U^{(4)}_{r,r} = U^{(4)}_{r,s} + U^{(4)}_{s,r} - U^{(4)}_{s,s} = 4 - U^{(4)}_{s,s}$, поэтому мы можем сделать вывод, что $U^{(4)}_{r,r} = 2$.

Шаг 4. В силу шага 2 выполнено условие $\tau(5, 7) = \tau(7, 5) = 4$, поэтому $U^{(4)}_{5,7} = U^{(4)}_{7,5} = \alpha$. Из шага 3 следует, что $U^{(4)}_{5,5} = 2$, поэтому равенство (5.1.1) влечет условие $U^{(4)}_{7,7} = U^{(4)}_{5,7} + U^{(4)}_{7,5} - U^{(4)}_{5,5}$. Таким образом, мы получаем неравенство $U^{(4)}_{7,7} = 2\alpha - 2 < 0$, из которого в силу условия (5.1.2) следует неравенство $C_{7,7} < 0$, которое противоречит определению матрицы C. □

Предложение 5.1.17. *Матрицы $C(e)$ индуцируют один и тот же граф различий при всех $e \in (0, 1]$.*

Доказательство. Требуется проверить, что выражение $\psi(e) = [C(e)]_{ij} + [C(e)]_{kl} - [C(e)]_{ik} - [C(e)]_{jl}$ имеет один и тот же знак при всех $e \in (0, 1]$. Выражение ψ зависит от e, только если $\{5, 7\} \subset \{i, j, k, l\}$; кроме того, если $i = k$ или $j = l$, то $\psi(e) = 0$. Поэтому мы можем считать, что $k = 5$, $l = 7$, $i, j \notin \{5, 7\}$. В этом случае значение $\psi(1)$ является целым нечетным числом, и для доказательства остается заметить, что $|\psi(1) - \psi(e)| \leqslant 1 - e$. □

Из предложений 5.1.15 и 5.1.16 следует, что матрицы $C(0.5)$ и $C(1)$ имеют

различные симметрические ранги, поэтому предложение 5.1.17 дает положительный ответ на вопрос 5.1.14.

5.2 О ранге Гондрана–Мину матрицы

Обсуждая тропические матрицы, мы будем в данном разделе рассматривать полукольцо $\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max} = (\mathbb{R}_+, \oplus, \otimes)$, элементами которого являются неотрицательные вещественные числа, а операции заданы как $a \oplus b = \max\{a, b\}$, $a \otimes b = ab$. Результат примера 1.1.13 показывает, что полукольцо $\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max}$ изоморфно тропическому полукольцу $\left(\overline{\mathbb{R}}, \min, +\right)$, поэтому рассмотрение полукольца $\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max}$ не ограничивает общности рассуждений. Основным результатом данного раздела будет характеризация ранга Гондрана–Мину тропической матрицы в терминах ее шаблона, поэтому мы начнем с переформулировки определения 5.1.5 на язык полукольца $\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max}$.

Определение 5.2.1. *Тропическим шаблоном* матрицы $A \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max})^{n\times m}$ называется матрица $B \in \mathbb{B}^{n\times m}$, где

1) $B_{uv} = 1$, если $A_{uv} = \max_i\{A_{iv}\} > 0$,

2) $B_{uv} = 0$, если $A_{uv} < \max_i\{A_{iv}\}$ или если $A_{uv} = 0$.

Тропический шаблон матрицы A обозначается через $\mathcal{P}(A)$.

Полукольцо $\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max}$ состоит из неотрицательных вещественных чисел и будет рассматривается как подмножество множества $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Для доказательства результатов этого раздела нам потребуются базовые понятия топологии вещественной прямой. Мы рассматриваем множество $\mathbb{R}$ с обычной метрикой $\rho(a, b) = |a - b|$. Пусть $\{a(t)\}$ — последовательность вещественных чисел; мы пишем $\lim_{t\to\infty} a(t) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое значение t, что при всех $t' > t$ выполнено условие $|a(t') - a| < \varepsilon$. В этом случае мы говорим, что последовательность $\{a(t)\}$ *сходится* к *пределу* a и пишем $a(t) \to a$. Последовательность матриц $\{A(t)\}$ *сходится* к матрице A, $A(t) \to A$, если $A_{ij}(t) \to A_{ij}$ при всех i и j. Множество матриц $M' \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ является *замкнутым в* $\mathbb{R}^{n\times m}$, если предел любой сходящейся последовательности матриц из M' сам принадлежит M'. Множество M' называется *ограниченным*, если существует такое $C > 0$, что для любой матрицы $A \in M'$ и любых i и j верно, что $|A_{ij}| < C$.

Следующее понятие дает характеризацию линейной зависимости в смысле Гондрана–Мину для матриц над полукольцом $\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max}$.

Определение 5.2.2. Будем говорить, что строка $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+$ *реализует GM-зависимость строк* матрицы $A \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max})^{n\times m}$, если для некоторых

множеств I, J, $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = \{1, \ldots, n\}$, верно, что $\max_{i \in I}\{\lambda_i A_{ik}\} = \max_{j \in J}\{\lambda_j A_{jk}\}$ при всех $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Замечание 5.2.3. *В определении 5.2.2 строка $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ может быть и нулевой. Согласно определению 1.1.19 для GM-зависимости строк матрицы A необходимо и достаточно, чтобы существовала строка $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, реализующая GM-зависимость строк матрицы A.*

Докажем несколько вспомогательных утверждений, которые характеризуют линейную зависимость в смысле Гондрана–Мину с точки зрения топологии и будут полезны для дальнейших рассуждений.

Лемма 5.2.4. *Множество всех матриц размера $n \times m$ над полукольцом $\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max}$, строки которых GM-зависимы, замкнуто в $\mathbb{R}^{n \times m}$. Множество всех строк $\Lambda \in \mathbb{R}^n_+$, реализующих GM-зависимость строк некоторой матрицы $A \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max})^{n \times m}$, замкнуто в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $\{A(t)\}$ — последовательность $n \times m$-матриц над $\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max}$, строки которых GM-зависимы, такая что $A(t) \to A$. Заметим, что $A \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max})^{n \times m}$, поскольку элементы матриц $A(t)$ неотрицательны. Для доказательства первого утверждения леммы нужно доказать GM-зависимость строк матрицы A.

Согласно определению 1.1.19 при каждом t найдутся неотрицательные числа $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$, не все равные 0, найдутся множества $I(t)$, $J(t)$, такие что $I(t) \cap J(t) = \varnothing$, $I(t) \cup J(t) = \{1, \ldots, n\}$, для которых верно, что

$$\max_{i \in I(t)}\{\lambda_i(t) A_{ik}(t)\} = \max_{j \in J(t)}\{\lambda_j(t) A_{jk}(t)\} \text{ при всех } t \in \mathbb{N} \text{ и } k \in \{1, \ldots, m\}. \tag{5.2.1}$$

С точностью до умножения равенств (5.2.1) на положительные числа, можно считать, что $\max_i\{\lambda_i(t)\} = 1$ при всех t. Значит элементы $(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)) \in \mathbb{R}^n_+$ принадлежат единичному шару в $\mathbb{R}^n$. Поэтому некоторая подпоследовательность последовательности $(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$ имеет предел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ в $\mathbb{R}^n$. Итак, мы можем считать, не ограничивая общности, что $(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)) \to (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Далее, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+$, поскольку все числа $\lambda_i(t)$ неотрицательны. Кроме того, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$, поскольку $\max_i\{\lambda_i(t)\} = 1$ при всех t.

Теперь для доказательства первого утверждения леммы достаточно доказать, что если при каждом t строка $(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$ реализует GM-зависимость строк матрицы $A(t)$, и, кроме того, $A(t) \to A$, $(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)) \to (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то строка $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ реализует GM-зависимость строк матрицы A. Этим будет доказано также второе утверждение леммы, которое соответствует частному случаю $A(t) \equiv A$.

Заметим, что при каждом t есть лишь конечное число возможностей для множеств $I(t)$ и $J(t)$, поэтому найдется подпоследовательность $t_1, t_2, \ldots$, такая что множества $I(t_s)$ и $J(t_s)$ не зависят от s. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что $I(t) = I$, $J(t) = J$ при всех t.

Переходя к пределу при $t \to \infty$ в равенстве (5.2.1), получаем равенства $\max_{i\in I}\{\lambda_i A_{ik}\} = \max_{j\in J}\{\lambda_j A_{jk}\}$, верные при всех $k \in \{1, \ldots, m\}$. Таким образом, строка $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ реализует GM-зависимость строк матрицы A. Лемма доказана. □

Более подробное описание GM-зависимости с точки зрения топологии может быть дано с помощью следующего определения.

Определение 5.2.5. Пусть $A \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max})^{n\times m}$. Будем обозначать через $\mathcal{D}_k(A)$ множество всех строк из $\mathbb{R}^n_+$, которые реализуют GM-зависимость строк матрицы $A[1, \ldots, n|1, \ldots, k-1, k+1, m]$. Будем обозначать через $\mathcal{B}_k(A)$ множество всех строк $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+$, таких что $\max_{t=1}^n\{\lambda_t A_{tk}\} \leqslant 1$. Введем обозначение $\mathcal{L}_k(A) = \mathcal{D}_k(A) \cap \mathcal{B}_k(A)$.

Лемма 5.2.6. *Пусть элементы матрицы $A \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max})^{n\times m}$ отличны от 0. Тогда множество $\mathcal{L}_k(A)$ компактно в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. 1. Согласно лемме 5.2.4 множество $\mathcal{D}_k(A)$ замкнуто.

2. Пусть последовательность строк $\{L(t)\} \subset \mathbb{R}^n_+$ сходится к строке L. Тогда $L \in \mathbb{R}^n_+$. Далее, пусть $\max_{s=1}^n\{l_s(t)A_{sk}\} \leqslant 1$ при всех t. Переходя к пределу при $t \to \infty$, получаем, что $\max_{s=1}^n\{l_s A_{sk}\} \leqslant 1$. Таким образом, множество $\mathcal{B}_k(A)$ замкнуто.

3. Из условия $\max_{s=1}^n\{\lambda_s A_{sk}\} \leqslant 1$, верного для любой строки $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{B}_k(A)$, следует, что $\lambda_s \leqslant \frac{1}{A_{sk}}$ при всех $s \in \{1, \ldots, n\}$. Это означает ограниченность множества $\mathcal{B}_k(A) \subset \mathbb{R}^n_+$.

Итак, из пунктов 1 и 2 следует, что множество $\mathcal{L}_k(A) = \mathcal{D}_k(A) \cap \mathcal{B}_k(A)$ замкнуто. В пункте 3 доказано, что множество $\mathcal{B}_k(A)$ ограничено. Значит множество $\mathcal{L}_k(A)$ ограничено. Замкнутость и ограниченность множества в $\mathbb{R}^n$ означают его компактность. □

Определим теперь естественный частичный порядок на множестве $\mathbb{R}^n_+$.

Определение 5.2.7. Пусть $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Если $a_t \geqslant b_t$ при всех t, мы будем писать $(a_1, \ldots, a_n) \geqslant (b_1, \ldots, b_n)$. Если $(a_1, \ldots, a_n) \geqslant (b_1, \ldots, b_n)$ и $(a_1, \ldots, a_n) \neq (b_1, \ldots, b_n)$, мы пишем $(a_1, \ldots, a_n) > (b_1, \ldots, b_n)$.

Оказывается, что множество $\mathcal{L}_k(A)$ содержит элемент, максимальный относительно порядка $\geqslant$.

Лемма 5.2.8. *Пусть элементы матрицы* $A \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max})^{n\times m}$ *отличны от* 0, *строки матрицы* $A[1,\dots,n|1,\dots,k-1,k+1,\dots,m]$ *GM-зависимы. Тогда частично упорядоченное множество* $(\mathcal{L}_k(A),\geqslant)$ *содержит максимальный элемент* $\Lambda \neq (0,\dots,0)$.

Доказательство. Согласно лемме 5.2.6 множество $\mathcal{L}_k(A)$ компактно в $\mathbb{R}^n$. Поэтому непрерывная функция $f(x_1,\dots,x_n) = x_1 + \dots + x_n$ достигает максимума на $\mathcal{L}_k(A)$ при некотором $\Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathcal{L}_k(A)$.

Заметим, что если $(\lambda'_1,\dots,\lambda'_n) > (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, то $f(\lambda'_1,\dots,\lambda'_n) > f(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Поэтому строка $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ максимальна в смысле отношения $\geqslant$ в множестве $\mathcal{L}_k(A)$. Далее, поскольку строки матрицы $A[1,\dots,n|1,\dots,k-1,k+1,\dots,m]$ GM-зависимы, найдется ненулевая строка $\Lambda_0 \in \mathcal{L}_k(A)$. В силу максимальности строки Λ, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$. □

Следующая лемма показывает, что GM-зависимость строк матрицы влечет GM-зависимость строк ее шаблона.

Лемма 5.2.9. *Пусть* $A \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max})^{n\times m}$, $W = \mathcal{P}(A) \in \mathbb{B}^{n\times m}$. *Пусть множества* $I, J \subset \{1,\dots,n\}$ *и неотрицательные числа* $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}_+$, *не все равные* 0, *таковы, что* $\max_{i\in I}\{\lambda_i A_{ik}\} = \max_{j\in J}\{\lambda_j A_{jk}\}$ *при всех* k. *Положим* $\mu_t = 1$, *если* $\lambda_t = \max_u\{\lambda_u\}$, *положим* $\mu_t = 0$, *если* $\lambda_t < \max_u\{\lambda_u\}$. *Тогда* $\max_{i\in I}\{\mu_i W_{ik}\} = \max_{j\in J}\{\mu_j W_{jk}\}$ *при всех* k.

Доказательство. При любом $k \in \{1,\dots,m\}$ возможны три случая.

1. Пусть $\max_{i\in I}\{\lambda_i A_{ik}\} = \max_{j\in J}\{\lambda_j A_{jk}\} = \max_u\{\lambda_u\}\cdot\max_v\{A_{vk}\} > 0$. В этом случае $\lambda_{i_0} = \max_u\{\lambda_u\}$, $A_{i_0k} = \max_v\{A_{vk}\}$ при некотором $i_0 \in I$. Также $\lambda_{j_0} = \max_u\{\lambda_u\}$, $A_{j_0k} = \max_v\{A_{vk}\}$ при некотором $j_0 \in J$. Согласно определению 5.2.1 $W_{i_0k} = W_{j_0k} = 1$. Кроме того, по условию леммы $\mu_{i_0} = \mu_{j_0} = 1$. Поэтому $\max_{i\in I}\{\mu_i W_{ik}\} = \max_{j\in J}\{\mu_j W_{jk}\} = 1$.

2. Пусть теперь $\max_{i\in I}\{\lambda_i A_{ik}\} = \max_{j\in J}\{\lambda_j A_{jk}\} < \max_u\{\lambda_u\}\cdot\max_v\{A_{vk}\}$. В этом случае при всех $i \in I\cup J$ либо $\lambda_i < \max_u\{\lambda_u\}$, либо $A_{ik} < \max_v\{A_{vk}\}$. Это означает, что при всех $i \in I\cup J$ либо $\mu_i = 0$, либо $W_{ik} = 0$. Поэтому $\mu_i W_{ik} = 0$ при всех $i \in I\cup J$. Таким образом, $\max_{i\in I}\{\mu_i W_{ik}\} = \max_{j\in J}\{\mu_j W_{jk}\} = 0$.

3. Пусть, наконец, $\max_{i\in I}\{\lambda_i A_{ik}\} = \max_{j\in J}\{\lambda_j A_{jk}\} = 0$. В этом случае при всех $i \in I\cup J$ либо $\lambda_i = 0$, либо $A_{ik} = 0$. Это означает, что при всех $i \in I\cup J$ либо $\mu_i = 0$, либо $W_{ik} = 0$. Поэтому $\mu_i W_{ik} = 0$ при всех $i \in I\cup J$. Таким образом, $\max_{i\in I}\{\mu_i W_{ik}\} = \max_{j\in J}\{\mu_j W_{jk}\} = 0$.

Эти случаи исчерпывают все возможности, поэтому лемма доказана. □

Теперь мы можем доказать один из основных результатов настоящего раздела для частного случая матриц, не содержащих нулевых элементов.

Теорема 5.2.10. *Пусть элементы матрицы $A \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max})^{p\times q}$ отличны от 0, строки матрицы A GM-независимы. Тогда существует матрица A', полученная из A умножением строк на некоторые положительные числа, такая что строки матрицы $\mathcal{P}(A')$ GM-независимы.*

Доказательство. От противного. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Через $B \in (\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max})^{n\times m}$ обозначим матрицу, элементы которой отличны от 0, строки которой GM-независимы, а строки матрицы $\mathcal{P}(B')$ GM-зависимы при любой матрице B', полученной из B умножением строк на положительные числа. Будем считать, что число столбцов m минимально возможное при этих условиях. Случай $m = 1$ соответствует матрице размера 1×1 и тривиальным образом сводится к противоречию; далее считаем, что $m > 1$.

Предположим, что строки матрицы $B[1,\dots,n|2,\dots,m]$ GM-независимы. Тогда, ввиду минимальности числа столбцов матрицы B, существует матрица B_1, полученная из B умножением строк на положительные элементы, такая что строки матрицы $\mathcal{P}(B_1[1,\dots,n|2,\dots,m])$ GM-независимы. Согласно определению 5.2.1 матрица $\mathcal{P}(B_1)$ отличается от матрицы $\mathcal{P}(B_1[1,\dots,n|2,\dots,m])$ добавлением некоторого столбца. Поэтому и строки матрицы $\mathcal{P}(B_1)$ GM-независимы. Противоречие с исходным предположением показывает, что строки матрицы $B[1,\dots,n|2,\dots,m]$ GM-зависимы.

Согласно лемме 5.2.8 множество $\mathcal{L}_1(B)$ содержит максимальный элемент $\Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$. По определению 5.2.5

$$\max_{t=1}^{n}\{\lambda_t B_{t1}\} \leqslant 1, \tag{5.2.2}$$

и, кроме того, строка Λ реализует GM-зависимость строк матрицы $B[1,\dots,n|2,\dots,m]$. Поэтому для некоторых множеств I, J, $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = \{1,\dots,n\}$, верно, что

$$\max_{i\in I}\{\lambda_i B_{ik}\} = \max_{j\in J}\{\lambda_j B_{jk}\} \text{ при всех } k \in \{2,\dots,m\}. \tag{5.2.3}$$

Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть не все $\{\lambda_s\}$ отличны от 0. Не ограничивая общности, считаем, что $\lambda_n = 0$. Поскольку $\Lambda \neq (0,\dots,0)$, $\lambda_i \neq 0$ при некотором i. Положим

$$\lambda'_n = \frac{\lambda_i}{2}\frac{\min\limits_{\tau=1}^{m}\{B_{i\tau}\}}{\max\limits_{\tau=1}^{m}\{B_{n\tau}\}}.$$

Тогда при любом τ верно, что $\lambda'_n B_{n\tau} < \lambda_i B_{i\tau}$, т.е. замена $\lambda_n = 0$ на λ'_n не нарушит свойств (5.2.2) и (5.2.3). Таким образом, $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda'_n) \in \mathcal{L}_1(B)$.

Кроме того, $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda'_n) > (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, что противоречит максимальности строки Λ. Это означает, что случай 1 не реализуется.

2. Пусть теперь при любом $s \in \{1,\dots,n\}$ верно, что $\lambda_s \neq 0$. В этом случае с точностью до умножения строк матрицы B на положительные числа можно считать, что $\lambda_s = 1$ при любом s. Далее считаем, что $\lambda_s = 1$ при любом s.

Согласно исходному предположению строки матрицы $W = \mathcal{P}(B) \in \mathbb{B}^{n\times m}$ GM-зависимы. Согласно определению 1.1.19 для некоторых множеств $\mathcal{I},\mathcal{J} \subset \{1,\dots,n\}$, таких, что $\mathcal{I}\cap\mathcal{J} = \varnothing$, $\mathcal{I}\cup\mathcal{J} \neq \varnothing$, верно, что

$$\max_{i\in\mathcal{I}}\{W_{iv}\} = \max_{j\in\mathcal{J}}\{W_{jv}\} \text{ при всех } v \in \{1,\dots,m\}. \tag{5.2.4}$$

Через E обозначим множество всех таких $e \in \{1,\dots,m\}$, для которых $\max_{i\in\mathcal{I}}\{W_{ie}\} = \max_{j\in\mathcal{J}}\{W_{je}\} = 0$. Рассмотрим два возможных случая.

2.1. Пусть $1 \in E$, т.е. $\max_{i\in\mathcal{I}}\{W_{i1}\} = \max_{j\in\mathcal{J}}\{W_{j1}\} = 0$. Положим

$$\theta = \max_{e\in E, t\in\mathcal{I}\cup\mathcal{J}}\left\{\frac{B_{te}}{\overset{n}{\max}_{\tau=1}\{B_{\tau e}\}}\right\}. \tag{5.2.5}$$

Согласно определению множества E имеем $W_{te} = 0$ при $e \in E$, $t \in \mathcal{I}\cup\mathcal{J}$. Значит, по определению 5.2.1 $B_{te} < \overset{n}{\max}_{\tau=1}\{B_{\tau e}\}$. Поэтому $\theta < 1$.

Положим $\xi = \sqrt{\theta^{-1}}$. Заметим, что $\xi > 1$. Положим $\rho_{t'} = 1$ при $t' \notin \mathcal{I}\cup\mathcal{J}$; положим $\rho_t = \xi$ при $t \in \mathcal{I}\cup\mathcal{J}$. Согласно (5.2.5) при $t \in \mathcal{I}\cup\mathcal{J}$, $e \in E$ верно, что $\rho_t B_{te} \leqslant \xi\theta \max_{\tau=1}^{n}\{B_{\tau e}\}$, т.е. $\rho_t B_{te} < \max_{\tau=1}^{n}\{B_{\tau e}\}$. Сопоставляя последнее неравенство с равенством (5.2.3), получаем, что

$$\max_{i\in(I\cup\mathcal{I})\setminus\mathcal{J}}\{\rho_i B_{ie}\} = \max_{j\in(J\cup\mathcal{J})\setminus\mathcal{I}}\{\rho_j B_{je}\} = \overset{n}{\max}_{\tau=1}\{B_{\tau e}\} \text{ при } e \in E\setminus\{1\}. \tag{5.2.6}$$

Аналогично, используя неравенство (5.2.2), получаем, что

$$\overset{n}{\max}_{t=1}\{\rho_t B_{t1}\} = \overset{n}{\max}_{\tau=1}\{B_{\tau 1}\} \leqslant 1. \tag{5.2.7}$$

Далее, из равенства (5.2.4) и определения множества E следует, что $\max_{i\in\mathcal{I}}\{W_{ie'}\} = \max_{j\in\mathcal{J}}\{W_{je'}\} = 1$ при $e' \notin E$. Из определения 5.2.1 получаем, что $\max_{i\in\mathcal{I}}\{B_{ie'}\} = \max_{j\in\mathcal{J}}\{B_{je'}\} = \overset{n}{\max}_{\tau=1}\{B_{\tau e}\}$ при $e' \notin E$, поэтому

$$\max_{i\in\mathcal{I}}\{\rho_i B_{ie'}\} = \max_{j\in\mathcal{J}}\{\rho_j B_{je'}\} = \xi\overset{n}{\max}_{\tau=1}\{B_{\tau e'}\} \text{ при } e' \notin E. \tag{5.2.8}$$

Согласно определению коэффициентов $\{\rho_i\}$ имеем $\rho_{t'} = 1 < \xi$ при $t' \notin \mathcal{I}\cup\mathcal{J}$. Поэтому из равенства (5.2.8) следует, что

$$\max_{i\in(I\cup\mathcal{I})\setminus\mathcal{J}}\{\rho_i B_{ie'}\} = \max_{j\in(J\cup\mathcal{J})\setminus\mathcal{I}}\{\rho_j B_{je'}\} = \xi\overset{n}{\max}_{\tau=1}\{B_{\tau e'}\} \text{ при } e' \notin E. \tag{5.2.9}$$

Таким образом, равенства (5.2.6) и (5.2.9) показывают, что строка $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ реализует GM-зависимость строк матрицы $B[1, \ldots, n|2, \ldots, m]$, неравенство (5.2.7) — что $\max_{t=1}^{n}\{\rho_t B_{t1}\} \leqslant 1$. Поэтому, согласно определению 5.2.5 $(\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \mathcal{L}_1(B)$. Это противоречит максимальности строки $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (1, \ldots, 1)$, т.к. $(\rho_1, \ldots, \rho_n) \succ (1, \ldots, 1)$. Таким образом, случай 2.1 не реализуется.

2.2. Пусть теперь $1 \notin E$, т.е. $\max_{i\in\mathcal{I}}\{W_{i1}\} = \max_{j\in\mathcal{J}}\{W_{j1}\} = 1$. Из равенства (5.2.3) следует, что $\max_{i\in I}\{B_{ik}\} = \max_{j\in J}\{B_{jk}\} = \max\limits_{\tau=1}^{n}\{B_{\tau k}\}$ при всех $k \in \{2, \ldots, m\}$. Поэтому, согласно определению 5.2.1 $\max_{i\in I}\{W_{ik}\} = \max_{j\in J}\{W_{jk}\} = 1$ при всех $k \in \{2, \ldots, m\}$. Кроме того, согласно определению множества E при $e \in E$ верно, что $\max_{i\in\mathcal{I}}\{W_{ie}\} = \max_{j\in\mathcal{J}}\{W_{je}\} = 0$, значит

$$\max_{i\in I\setminus(\mathcal{I}\cup\mathcal{J})}\{W_{ie}\} = \max_{j\in J\setminus(\mathcal{I}\cup\mathcal{J})}\{W_{je}\} = 1 \text{ при всех } e \in E. \tag{5.2.10}$$

Далее, из определения множества E и равенства (5.2.4) следует, что $\max_{i\in\mathcal{I}}\{W_{ie'}\} = \max_{j\in\mathcal{J}}\{W_{je'}\} = 1$ при $e' \notin E$. Сопоставляя последнее равенство с равенством (5.2.10), получаем, что $\max_{i\in(I\cup\mathcal{I})\setminus\mathcal{J}}\{W_{iv}\} = \max_{j\in(J\cup\mathcal{J})\setminus\mathcal{I}}\{W_{jv}\} = 1$ при всех $v \in \{1, \ldots, m\}$. Далее, из определения 5.2.1 следует, что $\max_{i\in(I\cup\mathcal{I})\setminus\mathcal{J}}\{B_{iv}\} = \max_{j\in(J\cup\mathcal{J})\setminus\mathcal{I}}\{B_{jv}\} = \max\limits_{\tau=1}^{n}\{B_{\tau v}\}$ при всех $v \in \{1, \ldots, m\}$. Последнее равенство означает GM-зависимость строк матрицы B, поскольку $((I \cup \mathcal{I}) \setminus \mathcal{J}) \cap ((J \cup \mathcal{J}) \setminus \mathcal{I}) = \varnothing$. Противоречие с исходным предположением завершает разбор случая 2.2.

Таким образом, ни один из случаев 2.1, 2.2 не реализуется, что завершает разбор случая 2. Теорема полностью доказана. □

Для обобщения результата на случай матриц, содержащих нулевые элементы, потребуется следующая лемма.

Лемма 5.2.11. *Пусть $V, W \in \mathbb{B}^{n\times m}$, $V_{ij} = W_{ij}$ при $(i, j) \neq (1, 1)$, $V_{11} = 0$, $W_{11} = 1$. Пусть строки матрицы V GM-зависимы, строки матрицы $W[2, \ldots, n|2, \ldots, m]$ GM-зависимы. Тогда строки матрицы W GM-зависимы.*

Доказательство. Обозначим через $w_1, \ldots, w_n$ строки матрицы W, через v_1 первую строку матрицы V. Положим $u_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{B}^m$. Матрица, составленная из строк $u_1, w_2, \ldots, w_n$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline w_{21} & & & \\ \ldots & & W[2, \ldots, n|2, \ldots, m] & \\ w_{n1} & & & \end{array}\right),$$

поэтому GM-зависимость этих строк равносильна GM-зависимости строк матрицы $W[2,\dots,n|2,\dots,m]$. Заметим, наконец, что $\max\{u_{1t},V_{1t}\}=W_{1t}$ при любом t. Теперь утверждение леммы следует из теоремы 2.3.10. $\square$

Теперь мы будем доказывать ключевой результат этого раздела.

Теорема 5.2.12. *Пусть строки матрицы $A\in(\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max})^{p\times q}$ GM-независимы. Тогда существует матрица A', полученная из A умножением строк на некоторые положительные элементы, такая что строки матрицы $\mathcal{P}(A')$ GM-независимы.*

Доказательство. От противного. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Через $q(M)$ будем обозначать число нулевых элементов в неотрицательной матрице M. Через $B\in(\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max})^{n\times m}$ обозначим матрицу, строки которой GM-независимы, а строки матрицы $\mathcal{P}(B')$ GM-зависимы при любой матрице B', полученной из B умножением строк на положительные числа. Будем также считать, что число $q(B)$ минимально при этих условиях. Заметим, что $m>1$. В силу теоремы 5.2.10 $q(B)>0$.

Таким образом, матрица B содержит нулевой элемент. Будем считать, не ограничивая общности, что $B_{11}=0$. Предположим, что строки матрицы $B[1,\dots,n|2,\dots,m]$ GM-независимы. Заметим, что $q(B[1,\dots,n|2,\dots,m])<q(B)$. Значит, ввиду минимальности значения $q(B)$, существует матрица C, полученная из B умножением строк на положительные числа, такая что строки матрицы $\mathcal{P}(C[1,\dots,n|2,\dots,m])$ GM-независимы. Согласно определению 5.2.1 матрица $\mathcal{P}(C)$ отличается от матрицы $\mathcal{P}(C[1,\dots,n|2,\dots,m])$ добавлением некоторого столбца. Поэтому и строки матрицы $\mathcal{P}(C)$ GM-независимы. Противоречие с исходным предположением показывает, что строки матрицы $B[1,\dots,n|2,\dots,m]$ GM-зависимы.

Таким образом, при некоторых множествах I,J, $I\cap J=\varnothing$, $I\cup J=\{1,\dots,n\}$, при некоторых неотрицательных числах $\mu_1,\dots,\mu_n$, не все из которых равны 0, верно, что

$$\max_{i\in I}\{\mu_i B_{ik}\}=\max_{j\in J}\{\mu_j B_{jk}\}\text{ при }k\in\{2,\dots,m\}. \tag{5.2.11}$$

Через $B(\varepsilon)$ будем обозначать матрицу, полученную из матрицы B заменой элемента $B_{11}=0$ на ε. Из леммы 5.2.4 следует, что найдется число $\delta>0$, такое что при любом $\varepsilon\in(0,\delta)$ строки матрицы $B(\varepsilon)$ GM-независимы.

Фиксируем произвольное $\varepsilon\in(0,\delta)$. Заметим, что $q(B(\varepsilon))=q(B)-1$. В силу минимальности числа $q(B)$ найдется матрица $B'(\varepsilon)$, полученная из $B(\varepsilon)$ умножением соответствующих строк на положительные числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, такая что строки матрицы $W=\mathcal{P}(B'(\varepsilon))\in\mathbb{B}^{n\times m}$ GM-независимы. Через B'

обозначим матрицу, полученную из B умножением соответствующих строк на числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Введем обозначение $V = \mathcal{P}(B')$. Согласно исходному предположению строки матрицы V GM-зависимы. Матрицы B' и $B'(\varepsilon)$ различаются только элементами $B'_{11} = 0$, $B'_{11}(\varepsilon) = \lambda_1\varepsilon$, поэтому из определения 5.2.1 следует, что матрицы V и W различаются только первыми столбцами.

1. Если $W_{11} = 0$, то замена элемента $B'_{11}(\varepsilon)$ на 0 не повлияет на шаблон матрицы $B'(\varepsilon)$. В результате такой замены получится матрица B', поэтому $V = W$. Это противоречит рассуждениям предыдущего абзаца.

Поэтому $W_{11} = 1$. Согласно определению 5.2.1 это означает, что $\max_{\tau=1}^{n}\{\lambda_\tau B_{\tau 1}(\varepsilon)\} = \lambda_1 B_{11}(\varepsilon) = \lambda_1\varepsilon$.

2. Будем доказывать, что строки матрицы $W[2, \ldots, n|2, \ldots, m]$ GM-независимы. Если $W_{u1} = 0$ при всех $u \neq 1$, то матрица W имеет вид

$$W = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & W_{12} & \ldots & W_{1m} \\ \hline 0 & & & \\ \ldots & & W[2, \ldots, n|2, \ldots, m] & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

и тогда GM-независимость строк матрицы $W[2, \ldots, n|2, \ldots, m]$ следует из GM-независимости строк матрицы W.

Пусть теперь $W_{i_0 1} = 1$ при некотором $i_0 \neq 1$. Согласно определению 5.2.1 это означает, что $\max_{\tau=1}^{n}\{B'_{\tau 1}(\varepsilon)\} = B'_{i_0 1}(\varepsilon)$. Матрица B' отличается от $B'(\varepsilon)$ только элементом $B'_{11} = 0$, поэтому также $\max_{\tau=1}^{n}\{B'_{\tau 1}\} = B'_{i_0 1}$. Таким образом, $\max_{\tau=1}^{n}\{B'_{\tau 1}(\varepsilon)\} = \max_{\tau=1}^{n}\{B'_{\tau 1}\}$. Итак, по определению 5.2.1 при $u \neq 1$ условие $V_{u1} = 1$ верно тогда и только тогда, когда $W_{u1} = 1$. Таким образом, матрицы V и W также отличаются только элементами $V_{11} = 0$, $W_{11} = 1$. Кроме того, строки матрицы V GM-зависимы, строки матрицы W GM-независимы. Согласно лемме 5.2.11 строки матрицы $W[2, \ldots, n|2, \ldots, m]$ GM-независимы.

3. Предположим, что $\mu_1\lambda_1^{-1} < \max_\tau\{\mu_\tau\lambda_\tau^{-1}\}$. Из (5.2.11) следует, что

$$\max_{i\in I}\{\mu_i\lambda_i^{-1}B'_{ik}(\varepsilon)\} = \max_{j\in J}\{\mu_i\lambda_i^{-1}B'_{jk}(\varepsilon)\} \text{ при всех } k \in \{2, \ldots, m\}. \tag{5.2.12}$$

Положим $\nu_t = 1$, если $\mu_t\lambda_t^{-1} = \max_\tau\{\mu_\tau\lambda_\tau^{-1}\}$, и $\nu_t = 0$, если $\mu_t\lambda_t^{-1} < \max_\tau\{\mu_\tau\lambda_\tau^{-1}\}$. В этом случае $\nu_1 = 0$, а согласно лемме 5.2.9 из равенства (5.2.12) следует, что $\max_{i\in I}\{\nu_i W_{ik}\} = \max_{j\in J}\{\nu_j W_{jk}\}$ при всех $k \in \{2, \ldots, m\}$. Таким образом, строки матрицы $W[2, \ldots, n|2, \ldots, m]$ GM-зависимы. Противоречие с рассуждениями пункта 2 показывает, что $\mu_1\lambda_1^{-1} = \max_\tau\{\mu_\tau\lambda_\tau^{-1}\}$.

4. Фиксируем произвольное $t \in \{1, \ldots, n\}$. По рассуждениям пункта 1 $\max_\tau\{\lambda_\tau B_{\tau 1}(\varepsilon)\} = \lambda_1\varepsilon$, поэтому $\mu_t B_{t1} = (\mu_t\lambda_t^{-1})\lambda_t B_{t1} \leqslant \mu_t\lambda_t^{-1}\lambda_1\varepsilon$. Далее, по

рассуждениям пункта 3 $\mu_1\lambda_1^{-1} = \max_\tau\{\mu_\tau\lambda_\tau^{-1}\}$, поэтому $\mu_t\lambda_t^{-1}\lambda_1\varepsilon \leqslant \mu_1\lambda_1^{-1}\lambda_1\varepsilon$, т.е. $\mu_t B_{t1} \leqslant \mu_1\varepsilon$.

В силу произвольности выбора $\varepsilon \in (0, \delta)$, $\mu_t B_{t1} = 0$ при всех t. Таким образом, $\max\limits_{i\in I}\{\mu_i B_{i1}\} = \max\limits_{j\in J}\{\mu_j B_{j1}\} = 0$.

Из последнего равенства и равенства (5.2.11) следует, что строки матрицы B GM-зависимы, что противоречит исходному предположению. □

Перейдем к доказательству основных результатов данного раздела.

Теорема 5.2.13. *Строчный ранг Гондрана–Мину тропической матрицы A равен наибольшему строчному рангу Гондрана–Мину среди шаблонов всех матриц, эквивалентных A.*

Доказательство. Если матрица A содержит r GM-независимых строк, то шаблон некоторой матрицы, эквивалентной A, содержит r GM-независимых строк в силу теоремы 5.2.12. С другой стороны, ранг Гондрана–Мину шаблона матрицы не может превышать ранга самой матрицы, как показывает лемма 5.2.9. □

Теорема 5.2.13 дает характеризацию линейной зависимости тропических векторов в смысле Гондрана–Мину в терминах тропических шаблонов, т.е. матриц над бинарным булевым полукольцом. Это свойство лежит в основе метода тропических шаблонов, который оказывается полезным для доказательства различных результатов о ранге Гондрана–Мину тропических матриц и будет использоваться в последующих разделах данной главы. Отметим также, что теорема 5.2.13 гарантирует характеризацию ранга Гондрана–Мину матрицы в терминах смешанного разбиения суммы симплексов, и в этом ранг Гондрана–Мину проявляет в виду теоремы 5.1.12 отличие от факторизационного ранга и ранга Капранова.

5.3 Приложения метода шаблонов

В данном разделе мы применяем метод тропических шаблонов к решению некоторых проблем, связанных с рангом Гондрана–Мину тропических матриц. В первом подразделе мы исследуем взаимное поведение ранга Гондрана–Мину и других ранговых функций. Ранее аналогичные вопросы рассматривались для факторизационного ранга [1, 45], и было показано, что факторизационный ранг тропических матриц может быть сколь угодно большим, даже если тропический ранг и ранг Гондрана–Мину ограничены. Случай ранга Капранова и тропического ранга рассматривался в работе [86], было показано, что и ранг Капранова тропических матриц может быть сколь угодно

большим, даже если их тропический ранг ограничен. Мы доказываем, что ни ранг Гондрана–Мину, ни детерминантный ранг тропических матриц не могут быть сколь угодно большими, если ограничен тропический ранг. Более того, мы доказываем неравенства $trop(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$, $trop(A) \geqslant \frac{d(A)+2}{3}$, $d(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$, верные для всех тропических матриц. Метод тропических шаблонов позволяет получить помимо упомянутых результатов также решение проблемы 4.3.9.

Во втором подразделе данного раздела мы изучаем вычислительную сложность функции ранга Гондрана–Мину тропических матриц. Мы показываем, что ранг Гондрана–Мину тропических матриц может быть вычислен за полиномиальное время, если тропические ранги этих матриц предполагаются ограниченными. Кроме того, мы рассматриваем задачу распознавания свойства $GMr(A) < k$ тропической матрицы A при фиксированных значениях k. Аналогичная задача для тропического (и детерминантного) ранга имеет быстрое решение [45]. С другой стороны, задача проверки, меньше ли ранг Капранова заданной матрицы, чем 4, NP-трудна, как показано в работе [86]. Вопросу о том, можно ли быстро проверять аналогичное свойство для факторизационного ранга, будет посвящен раздел 7.4 нашей работы. В данном разделе мы решаем аналогичную проблему для функции ранга Гондрана–Мину тропических матриц, показывая, что задача распознавания свойства $GMr(A) < k$ решается за полиномиальное по размеру тропической матрицы A время.

5.3.1 Взаимное поведение ранговых функций

В этом подразделе мы доказываем неравенства $trop(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$, $trop(A) \geqslant \frac{d(A)+2}{3}$, $d(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$, верные для тропических матриц. Приведенные неравенства обобщают результаты раздела 4.3 и доказываются с помощью метода тропических шаблонов, который обсуждался в предыдущем разделе. Докажем сначала некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 5.3.1. *Тропический ранг шаблона W тропической матрицы A не превосходит тропического ранга самой матрицы A.*

Доказательство. Пусть $trop(W) = k$. Тогда можно считать, не ограничивая общности, что матрица $W[1, \ldots, k|1, \ldots, k]$ тропически невырождена. Тогда, согласно определению 1.2.5 равенство $\prod_{i=1}^{k} W_{\sigma(i),i} = 1$ выполнено при единственной перестановке $\sigma \in \mathcal{S}_k$. По определению 5.1.5 в этом случае $\prod_{i=1}^{k} A_{\sigma(i),i} = \prod_{i=1}^{k} \min_{\tau=1}^{n}\{A_{\tau i}\}$, а при $\varphi \neq \sigma$ верно, что $\prod_{i=1}^{k} A_{\varphi(i),i} < \prod_{i=1}^{k} \min_{\tau=1}^{n}\{A_{\tau i}\}$. Таким образом, по определению 1.2.5, матрица $A[1, \ldots, k|1, \ldots, k]$ тропически невырождена. Значит, $trop(A) \geqslant k$. $\square$

Лемма 5.3.2. *Детерминантный ранг шаблона W тропической матрицы A не превосходит детерминантного ранга самой матрицы A.*

Доказательство. Пусть $d(W) = r$. Тогда можно считать, не ограничивая общности, что матрица $W[1,\dots,r|1,\dots,r]$ тропически невырождена. Тогда, согласно определению 1.2.3 равенство $\prod_{i=1}^{r} W_{\sigma(i),i} = 1$ выполнено при некоторой перестановке $\sigma \in \mathcal{S}_r$; более того, если четность перестановки $\varphi \in \mathcal{S}_r$ противоположна четности σ, то $\prod_{i=1}^{r} W_{\sigma(i),i} = 0$.

Согласно определению 5.1.5 в этом случае $\prod_{i=1}^{r} A_{\sigma(i),i} = \prod_{i=1}^{r} \min_{\tau=1}^{n}\{A_{\tau i}\}$ и $\prod_{i=1}^{r} A_{\varphi(i),i} < \prod_{i=1}^{r} \min_{\tau=1}^{n}\{A_{\tau i}\}$. Таким образом, по определению 1.2.3 матрица $A[1,\dots,r|1,\dots,r]$ d-невырождена. Значит, $d(A) \geqslant r$. □

Докажем теперь характеризацию детерминантного ранга тропической матрицы в терминах шаблонов.

Теорема 5.3.3. *Детерминантный ранг тропической матрицы A равен наибольшему детерминантному рангу среди шаблонов всех матриц, эквивалентных A.*

Доказательство. В силу теорем 1.2.15 и 5.2.13, шаблон некоторой матрицы, эквивалентной A, будет иметь детерминантный ранг, не меньший детерминантного ранга A, поэтому результат следует из леммы 5.3.2. □

Теперь мы можем доказать неравенство, связывающее тропический ранг и ранг Гондрана–Мину тропической матрицы.

Теорема 5.3.4. *Для любой тропической матрицы A выполнено неравенство $trop(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$.*

Доказательство. Пусть $GMr(A) = n$. Согласно определению 1.2.2 найдется подматрица $B = A[r_1,\dots,r_n]$, строки которой GM-независимы. Согласно теореме 5.2.12 можно считать, не ограничивая общности, что строки матрицы $\mathcal{P}(B) \in \mathbb{B}^{n\times m}$ GM-независимы. По теореме 4.3.17 $trop(\mathcal{P}(B)) \geqslant \sqrt{n}$. Поэтому, по лемме 5.3.1, $trop(B) \geqslant \sqrt{n}$. Но B есть подматрица матрицы A, поэтому $trop(A) \geqslant \sqrt{n}$. □

Теорема 5.3.4 позволит далее доказать возможность быстрого вычисления ранга Гондрана–Мину матриц фиксированного тропического ранга. Другое следствие теоремы 5.3.4 позволяет установить неравенство между рангом Гондрана–Мину и детерминантным рангом тропической матрицы.

Следствие 5.3.5. *Для любой тропической матрицы A выполнено неравенство $d(A) \geqslant \sqrt{GMr(A)}$.*

Доказательство. Следует непосредственно из теорем 5.3.4 и 1.2.17. □

Теперь получим неравенство для детерминантного и тропического рангов.

Теорема 5.3.6. *Для любой тропической матрицы A выполнено неравенство $trop(A) \geqslant \frac{d(A)+2}{3}$.*

Доказательство. Пусть $d(A) = r$. Тогда матрица A содержит d-невырожденную подматрицу B размера $r \times r$. Согласно теореме 1.2.15 строки матрицы B GM-независимы, поэтому согласно теореме 5.2.12 можно считать, не ограничивая общности, что строки матрицы $\mathcal{P}(B) \in \mathbb{B}^{r\times r}$ GM-независимы. Тогда по теореме 1.2.15 верно, что $\|\mathcal{P}(B)\|^+ \neq \|\mathcal{P}(B)\|^-$. Далее, по теореме 4.3.27 $trop(\mathcal{P}(B)) \geqslant \frac{r+2}{3}$. Таким образом, согласно лемме 5.3.1 $trop(B) \geqslant \frac{r+2}{3}$. Но B есть подматрица матрицы A, поэтому $trop(A) \geqslant \frac{r+2}{3}$. □

Наконец, в качестве еще одного приложения метода тропических шаблонов мы получаем решение проблемы 4.3.9.

Теорема 5.3.7. *Матрица A из примера 4.3.10 содержит минимально возможные среди всех матриц M над $\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max}$ числа строк и столбцов при условии $GMr(M) > d(M)$. Матрица $A^\top$ содержит минимально возможные среди всех матриц M' над $\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max}$ числа строк и столбцов при условии $GMc(M') > d(M')$.*

Доказательство. Предположим, что первое утверждение теоремы неверно. Тогда найдется матрица M размера $p \times q$ над $\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max}$, удовлетворяющая условию $GMr(M) > GMc(M)$, для которой $\min\{p, q\} < 5$ или $\max\{p, q\} < 6$. Тогда в силу теоремы 4.3.15 шаблон W любой матрицы, эквивалентной M, будет удовлетворять условию $GMr(W) = d(W)$, и из теорем 5.2.13 и 5.3.3 будет следовать, что $GMr(M) = d(M)$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение теоремы; для доказательства второго достаточно теперь заметить, что $GMc(A) = GMr(A^\top)$. □

Отметим, что в силу примера 1.1.13 полукольцо $\mathbb{R}_{\geqslant 0,\max}$ изоморфно тропическому полукольцу и макс-алгебре $\mathbb{R}_{\max}$, поэтому теорема 5.3.7 действительно дает полное решение проблемы 4.3.9.

5.3.2 О вычислительной сложности GM-ранга

Еще одно из своих приложений метод тропических шаблонов находит при изучении вычислительной сложности функции ранга Гондрана–Мину тропических матриц. Вопросам исследования этой сложности посвящена проблема,

поставленная Бутковичем в 2008 году в статье [24]: даны k тропических векторов, существует ли полиномиальный по времени алгоритм распознавания линейной GM-зависимости этих векторов? Напомним, что в силу известного результата 1984 года (теоремы 1.2 работы [87]) указанная задача NP-трудна даже для 0-1 матриц, если число k является частью входных данных. Проблема существования полиномиального алгоритма, однако, оставалась открытой в предположении постоянства значения числа k и была вновь сформулирована в монографии [25]; ее положительное решение было получено автором диссертации в работе [164] и будет изложено в этом подразделе.

Кроме того, в данном подразделе мы применяем метод тропических шаблонов и показываем, что задача вычисления GM-ранга решается за полиномиальное время для матриц с фиксированным тропическим рангом. Кроме того, будет доказано, что при фиксированном k задача проверки условия $GMr(A) < k$ также решается за полиномиальное по размеру матрицы A время. Для доказательства этих утверждений понадобятся следующие леммы.

Лемма 5.3.8. *Пусть A — тропическая матрица размера $k \times m$, где $m \geqslant 2^k = M$. Если строки матрицы $A[1, \ldots, k|c_1, \ldots, c_M]$ GM-зависимы при любых $c_1, \ldots, c_M \in \{1, \ldots, m\}$, то строки матрицы A также GM-зависимы.*

Доказательство. Предположим противное. Согласно теореме 5.2.12 можно считать, не ограничивая общности, что строки матрицы $\mathcal{P}(A)$ GM-независимы в этом случае. Заметим, что матрица $\mathcal{P}(A) \in \mathbb{B}^{k \times m}$ содержит не более, чем 2^k различных столбцов. Удаление повторяющихся столбцов не влияет на GM-независимость, поэтому найдутся $c_1, \ldots, c_M \in \{1, \ldots, m\}$, такие что строки матрицы $\mathcal{P}(A)[1, \ldots, k|c_1, \ldots, c_M]$ GM-независимы. Значит, согласно теореме 5.2.13 строки матрицы $A[1, \ldots, k|c_1, \ldots, c_M]$ GM-независимы. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Лемма 5.3.9. *Пусть k — целое число и A — тропическая матрица размера $n \times m$, где $m \geqslant 2^k$. Тогда $GMr(A) < k$ в том и только в том случае, если строки каждой из подматриц размера $k \times 2^k$ матрицы A GM-зависимы.*

Доказательство. Если $GMr(A) \geqslant k$, то, согласно определению 1.2.2 матрица A содержит k GM-независимых строк. В этом случае согласно лемме 5.3.8 матрица A содержит $k \times 2^k$-подматрицу с GM-независимыми строками.

Если же найдется $k \times 2^k$-подматрица матрицы A, строки которой GM-независимы, то соответствующие k строк матрицы A будут также GM-независимы. Это означает, что $GMr(A) \geqslant k$. □

Теперь докажем основные результаты этого подраздела.

Теорема 5.3.10. *Пусть k — фиксированное целое число. Тогда задача распознавания свойства $GMr(A) < k$ решается за полиномиальное по размеру тропической матрицы A время.*

Доказательство. Обозначим размер матрицы A через $n \times m$ и обозначим через A_0 матрицу, полученную из A добавлением k строк и 2^k столбцов, состоящих из элементов ∞. По определению 1.2.2 $GMr(A_0) = GMr(A)$. Поэтому согласно лемме 5.3.9 для проверки свойства $GMr(A) < k$ достаточно проверить GM-зависимость строк всех $k \times 2^k$-подматриц A' матрицы A_0. Проверку GM-зависимости строк любой $k \times 2^k$-матрицы возможно провести за ограниченное время [56], а число различных $k \times 2^k$-подматриц матрицы A_0 не превосходит $(n+k)^k(m+2^k)^{2^k}$, то есть полиномиально по nm. □

Теорема 5.3.11. *Пусть t — фиксированное целое число. Тогда задача вычисления GM-ранга матрицы тропического ранга, не большего t, решается за полиномиальное время.*

Доказательство. Согласно теореме 5.3.4 GM-ранг матрицы A не превосходит t^2, поэтому нам достаточно проверить свойства $GMr(A) < k$ при всех $k \in \{1, \ldots, t^2\}$. А эти свойства проверяются за полиномиальное время, как показывает теорема 5.3.10. □

Глава 6

Когда миноры порядка r образуют тропический базис?

В этой главе мы возвращаемся к рассмотрению проблемы о тропическом базисе, обсуждение которой мы начали в первой главе. Напомним, что проблема 1.3.34 была сформулирована Чан, Йенсеном и Рубеи в работе [31] и полностью решена автором диссертации в статье [161]. Ввиду значительной сложности возникающих при решении проблемы 1.3.34 комбинаторных построений мы посвящаем изложению ее решения эту главу полностью. Итак, целью главы будет доказательство теоремы 1.3.35.

Сначала введем обозначения, удобные для изложения наших результатов. Указанные обозначения являются во многом специфическими для излагаемой теории, и потому мы ограничим их использование пределами данной главы.

Как уже было отмечено, в главе приводится решение проблемы о ранге Капранова матрицы и тропическом базисе идеала, порожденного минорами матрицы переменных. Указанные понятия были определены в первой главе; напомним, что через $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ мы обозначаем кольцо Мальцева-Неймана над множеством комплексных чисел, то есть, объект, заданный определением 1.3.2. Во всех рассуждениях данной главы мы будем во избежание путаницы использовать символ "t" только для обозначения переменной в элементе поля $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$. Хотя основной результат главы доказывается для матриц над тропическим полукольцом $(\mathbb{R}, \min, +)$, для наших рассуждений будет полезным рассматривать и расширенное тропическое полукольцо $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +)$ (которое получается из $\mathbb{R}$ добавлением бесконечно большого положительного элемента). Заметим, что расширенное тропическое полукольцо $\mathbb{T}$ является образом поля $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ при отображении степени deg. Матрица, полученная из матрицы $A \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^{m \times n}$ поэлементным применением отображения степени, также будет обозначаться через $\deg A$. Наконец, отметим, что в данном случае мы исследуем ранг Капранова для матриц относительно базового поля $\mathbb{C}$ (то есть, изучаем вопрос о тропическом базисе в том виде, в котором он был сфор-

мулирован в работе [31]). Поэтому мы будем писать далее просто $\mathbf{H}$ вместо $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$, а также K вместо $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}$.

Как обычно, через $A[r_1, \ldots, r_p]$ мы обозначаем матрицу, образованную строками матрицы A с номерами $r_1, \ldots, r_p$, через $A[r_1, \ldots, r_p | c_1, \ldots, c_q]$ — матрицу, образованную столбцами с номерами $c_1, \ldots, c_q$ матрицы $A[r_1, \ldots, r_p]$. Поскольку в данной главе исследуются в основном матрицы над полем, через A_{ij} нам будет удобно обозначать алгебраическое дополнение матрицы A, то есть, значение выражения

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A[1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n | 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n];$$

элементы матрицы A, в отличие от остальных глав, мы будем обозначать через a_{ij}.

6.1 Предварительные результаты

В этом разделе излагаются результаты, на которых основан метод, позволяющий доказать основные результаты главы. Начнем изложение результатов раздела с тех утверждений, которые были известны до опубликования автором работы [161].

Теорема 6.1.1. *[45, теоремы 1.4, 5.5 и 6.5] Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Тогда* $K(A) \geqslant \mathrm{trop}(A)$. *Если* $\mathrm{trop}(A) \leqslant 2$, *то* $K(A) = \mathrm{trop}(A)$. *Если* $\mathrm{trop}(A) < \min\{m, n\}$, *то* $K(A) < \min\{m, n\}$.

Доказательство. Следует из теоремы 1.3.29 и теоремы 1.4 из работы [45]. □

Мы будем также использовать более глубокую теорему, характеризующую взаимное поведение тропического ранга и ранга Капранова.

Теорема 6.1.2. *[31, следствие 1.5] Если матрица* $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$ *такова, что* $\min\{d, n\} \leqslant 5$, *то* $\mathrm{trop}(A) = K(A)$.

Доказательство. Следует из теорем 1.3.28 и 1.3.32. □

Для наших рассуждений окажется важным понятие тропической зависимости, заданное определением 1.1.22. Приведем формулировку этого определения в интересующем нас случае матриц над тропическим полукольцом.

Определение 6.1.3. [77] Семейство векторов $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ называется *тропически линейно зависимым* (или просто *тропически зависимым*), если найдутся элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{T}$, не все равные ∞, такие что при любом

$k \in \{1, \ldots, n\}$ минимум в выражении $\min_{\tau=1}^{m}\{\lambda_\tau + a_{\tau k}\}$ достигается по крайней мере дважды. В этом случае мы говорим, что набор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{T}^m$ *реализует тропическую зависимость* семейства $a_1, \ldots, a_m$. Если семейство векторов не является тропически зависимым, то оно называется *тропически независимым*.

6.1.1 Шаблон тропической матрицы и простые свойства

Отметим, что полукольцо $\overline{\mathbb{B}} = (\{0, \infty\}, \min, +)$ изоморфно бинарному булеву полукольцу. В этом разделе будет более удобным рассматривать полукольцо $\overline{\mathbb{B}}$, и мы можем сформулировать определение 5.1.5 в новых обозначениях.

Определение 6.1.4. $\overline{\mathbb{B}}$-*шаблоном* матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $B \in \overline{\mathbb{B}}^{m\times n}$, элементы (b_{uv}) которой заданы как

$$b_{uv} = \begin{cases} 0, \text{ если } A_{uv} = \min_{i=1}^{m}\{A_{iv}\}, \\ \infty, \text{ если } A_{uv} > \min_{i=1}^{m}\{A_{iv}\}. \end{cases}$$

$\overline{\mathbb{B}}$-шаблон матрицы A обозначается через $\mathcal{P}(A)$.

Наконец, отметим, что в этом разделе не будет рассматриваться полукольцо $\mathbb{B}$, равно как и понятие тропического шаблона в смысле определения 5.1.5. Поэтому вместо понятия, задаваемого определением 5.1.5, мы будем рассматривать равносильное ему понятие $\overline{\mathbb{B}}$-шаблона, которое мы, таким образом, можем называть в этом разделе просто *шаблоном* тропической матрицы.

Для исследования комбинаторной структуры тропических матриц и векторов будет также полезным понятие носителя вектора.

Определение 6.1.5. *Носителем* вектора $b \in \overline{\mathbb{B}}^n$ называется набор всех индексов $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых i-я координата вектора b равна 0. Мы будем обозначать носитель j-го столбца матрицы $A \in \overline{\mathbb{B}}^{m\times n}$ через $\mathrm{Supp}_j(A)$.

Приведем определение понятия тропического ранга для матриц над $\overline{\mathbb{B}}$.

Определение 6.1.6. Семейство векторов $a_1, \ldots, a_m \in \overline{\mathbb{B}}^n$ называется $\overline{\mathbb{B}}$-*тропически линейно зависимым* (или просто $\overline{\mathbb{B}}$-*тропически зависимым*), если найдется непустое подмножество $I \subset \{1, \ldots, m\}$, для которого при любом $k \in \{1, \ldots, n\}$ мощность множества $\{i \in I \mid a_{ik} = 0\}$ отлична от 1. В этом случае мы говорим, что множество I *реализует* $\overline{\mathbb{B}}$-*тропическую зависимость* семейства $a_1, \ldots, a_m$. Если семейство векторов не является $\overline{\mathbb{B}}$-тропически зависимым, то оно называется $\overline{\mathbb{B}}$-*тропически независимым*.

Приведем базовые утверждения, связывающие тропические ранги матриц над различными полукольцами.

Лемма 6.1.7. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = \mathcal{P}(A)$. Предположим, что числа $\{\lambda_\tau\}$ (где индекс τ пробегает множество $\mathcal{I} \subset \{1,\dots,m\}$) реализуют тропическую зависимость строк матрицы A с индексами из множества $\mathcal{I}$. Пусть $I = \{\rho \in \mathcal{I} | \lambda_\rho = \min_{\tau\in\mathcal{I}}\{\lambda_\tau\}\}$. Тогда множество I реализует $\overline{\mathbb{B}}$-тропическую зависимость строк матрицы B.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда в силу определения 6.1.6 для некоторых $k \in \{1,\dots,n\}$ и $i \in I$ выполнено условие $a_{ik} = 0$, и для всех $i' \in I \setminus \{i\}$ верно, что $a_{i'k} = \infty$. В этом случае в силу определения 6.1.4 условие $\lambda_j + a_{jk} > \lambda_i + a_{ik}$ выполнено при всех $j \in \mathcal{I} \setminus \{i\}$, что противоречит определению 6.1.3. □

Теперь введем естественное обобщение тропической вырожденности матриц на случай полукольца $\overline{\mathbb{B}}$.

Определение 6.1.8. Пусть $n > 1$. Матрица $S \in \overline{\mathbb{B}}^{n\times n}$ называется $\overline{\mathbb{B}}$-*тропически вырожденной*, если минимум в выражении (1.3.5) достигается по крайней мере два раза. В противном случае матрица S называется $\overline{\mathbb{B}}$-*тропически невырожденной*.

Следующая лемма связывает понятия $\overline{\mathbb{B}}$-вырожденности и тропического ранга.

Лемма 6.1.9. *Размер $\overline{\mathbb{B}}$-тропически невырожденного минора шаблона матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ не может превосходить тропического ранга матрицы A.*

Доказательство. В силу определения 6.1.4 тропическая $\overline{\mathbb{B}}$-вырожденность матрицы $\mathcal{P}(A)[r_1,\dots,r_k|c_1,\dots,c_k]$ влечет тропическую вырожденность матрицы $A[r_1,\dots,r_k|c_1,\dots,c_k]$. Поэтому утверждение леммы следует из определения 1.3.22. □

Следующее определение задает естественное отношение эквивалентности на множестве тропических матриц, которое соответствует преобразованиям, называемым иногда [13] PQ-преобразованиями.

Определение 6.1.10. Назовем *PQ-преобразованиями* тропической матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ перестановки строк, перестановки столбцов этой матрицы, и тропическое умножение строки или столбца этой матрицы на число $u \in \mathbb{R}$. Тропические матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называются *PQ-эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой PQ-преобразованиями.

Приведем без доказательства ряд утверждений, которые следуют непосредственно из определений.

Лемма 6.1.11. *Если матрицы* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *PQ-эквивалентны, то* $\operatorname{trop}(A) = \operatorname{trop}(B)$, $K_{\mathbb{C}}(A) = K_{\mathbb{C}}(B)$.

Лемма 6.1.12. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Если матрица* B *является подматрицей матрицы* A, *то* $\operatorname{trop}(A) \geqslant \operatorname{trop}(B)$, $K_{\mathbb{C}}(A) \geqslant K_{\mathbb{C}}(B)$.

Лемма 6.1.13. *Если наборы* $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ *реализуют тропическую зависимость семейства векторов* $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, *то набор* $(\min\{\lambda_1, \mu_1\}, \dots, \min\{\lambda_m, \mu_m\})$ *также реализует тропическую зависимость строк* $a_1, \dots, a_m$.

Следующая лемма дает более сложную характеризацию связи линейной зависимости матриц над различными полукольцами.

Лемма 6.1.14. *Пусть* $A \in (\mathbf{H}^*)^{m\times n}$. *Предположим, что ненулевой вектор* $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{H}^m$ *удовлетворяет условию* $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ik} = 0$ *при всех* $k \in \{1, \dots, n\}$. *Тогда набор* $(\deg \lambda_1, \dots, \deg \lambda_m) \in \mathbb{T}^m$ *реализует тропическую зависимость матрицы* $\deg A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется $k \in \{1, \dots, n\}$, для которого условие $\deg \lambda_{i_0} + \deg a_{i_0 k} < \deg \lambda_i + \deg a_{ik}$ выполнено при всех $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$. Отсюда следует условие $\deg\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ik}\right) = \deg \lambda_{i_0} + \deg a_{i_0 k} \neq \infty$, которое означает противоречие. □

6.1.2 Системы линейных уравнений над полем H

Для наших дальнейших рассуждений будет полезным разработать методы распознавания совместности систем линейных уравнений над полем $\mathbf{H}$ в случае, когда степени переменных заданы условием. В этом подразделе мы приводим некоторые достаточные условия совместности таких систем из одного, двух и трех уравнений.

Лемма 6.1.15. *Пусть* $A \in \mathbf{H}^{6\times 3}$, $(h_1, \dots, h_6) \in \mathbb{R}^6$. *Положим*

$$D = \sum_{i=1}^{3} \min_{1\leqslant j\leqslant 6} \{\deg a_{ji} + h_j\} < \infty$$

и предположим, что числа $u, v, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *попарно различны. Если условие* $\deg \det A[p, q, r] = D - (h_p + h_q + h_r)$ *выполнено для любых попарно различных индексов* $p, q, r \in \{u, v, y, z\}$, *то найдутся элементы* $x_1, \dots, x_6 \in \mathbf{H}$, *удовлетворяющие условию* $\deg x_j = h_j$ *при любом* $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *и условию* $\sum_{j=1}^6 a_{ji} x_j = 0$ *при любом* $i \in \{1, 2, 3\}$.

Доказательство. 1. Считаем, не ограничивая общности, что $\{u, v, y, z\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Положим $x_4 = \xi t^{h_4}$, $x_5 = t^{h_5}$, $x_6 = t^{h_6}$, где через ξ обозначено некоторое ненулевое комплексное число.

2. Введем обозначение

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ -\sum_{q=4}^{6} a_{q,1}x_q & -\sum_{q=4}^{6} a_{q,2}x_q & -\sum_{q=4}^{6} a_{q,3}x_q \end{pmatrix} \tag{6.1.1}$$

и определим x_1, x_2, x_3 как (единственное) решение системы $\sum_{p=1}^{3} a'_{pi}x_p = a'_{4,i}$ линейных уравнений, где $i \in \{1, 2, 3\}$. Нам требуется проверить, что условие $\deg x_j = h_j$ выполнено при всех $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. Из пункта 1 сразу следует условие $\deg x_{j'} = h_{j'}$ при всех $j' \in \{4, 5, 6\}$.

4. Далее, предположим, что $j = 1$. Формулы Крамера решения линейных систем показывают, что

$$x_1 = \frac{\det A'[4, 2, 3]}{\det A'[1, 2, 3]}.$$

По условию леммы выполнено условие $\deg \det A[1, 2, 3] = D - (h_1 + h_2 + h_3)$, поэтому мы должны проверить условие $\deg \det A'[2, 3, 4] = D - (h_2 + h_3)$. В силу равенства (6.1.1)

$$\begin{aligned} -\det A'[2, 3, 4] = x_4 \det A[2, 3, 4] + (a_{51}x_5 + a_{61}x_6)(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + \\ + (a_{52}x_5 + a_{62}x_6)(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + (a_{53}x_5 + a_{63}x_6)(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Теперь получим нижние оценки степеней слагаемых в правой части последнего равенства. Для любого $\alpha \in \{5, 6\}$ и любых β, γ, δ, удовлетворяющих условию $\{\beta, \gamma, \delta\} = \{1, 2, 3\}$, мы получаем

$$\deg(x_\alpha a_{\alpha\delta} a_{2\beta} a_{3\gamma}) = \deg(x_\alpha a_{\alpha\delta}) + \deg a_{2\beta} + \deg a_{3\gamma} \geqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant 6} \{\deg a_{j\delta} + h_j\} +$$

$$+ \left(\min_{1 \leqslant j \leqslant 6} \{\deg a_{j\beta} + h_j\} - h_2 \right) + \left(\min_{1 \leqslant j \leqslant 6} \{\deg a_{j\gamma} + h_j\} - h_3 \right) = D - (h_2 + h_3).$$

В силу шага 1 $\deg x_4 = h_4$, поэтому из условия леммы вытекает, что $\deg(x_4 \det A[2, 3, 4]) = D - (h_2 + h_3)$. Последнее равенство показывает, что слагаемое $x_4 \det A[2, 3, 4] = \xi t^{h_4} \det A[2, 3, 4]$ имеет наименьшую возможную степень среди слагаемых в правой части равенства (6.1.2). Поэтому условие $\deg \det A'[2, 3, 4] = D - (h_2 + h_3)$, а значит и условие $\deg x_1 = h_1$, выполняется для всех комплексных чисел ξ кроме, может быть, одного.

5. Аналогичными рассуждениями может быть показано, что условия $\deg x_2 = h_2$ и $\deg x_3 = h_3$ выполняются для всех комплексных чисел ξ кроме, может быть, одного или двух. $\square$

Следующая лемма понадобится нам для того, чтобы доказать утверждение, аналогичное лемме 6.1.15 для систем из двух уравнений.

Лемма 6.1.16. *Пусть $S \in \mathbf{H}^{2\times m}$. Тогда найдется число $\xi \in \mathbb{C}^*$, удовлетворяющее условию $\deg(\xi s_{1,k} + s_{2,k}) = \min\{\deg s_{1,k}, \deg s_{2,k}\}$ при всех $k \in \{1, \ldots, m\}$.*

Доказательство. Если $s_{ik} \neq 0$, обозначим коэффициент главного члена элемента s_{ik} через σ_{ik}. Если же $s_{ik} = 0$, мы выберем число $\sigma_{ik} \in \mathbb{C}^*$ произвольным образом. Теперь достаточно положить $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0, -\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}}, \ldots, -\frac{\sigma_{2,m}}{\sigma_{1,m}}\}$. $\square$

Теперь докажем аналог леммы 6.1.15 для систем из двух уравнений.

Лемма 6.1.17. *Предположим, что каждый столбец матрицы $A \in \mathbf{H}^{5\times 2}$ содержит ненулевой элемент, а также, что выполнено условие $\deg(a_{p,1}a_{q,2} - a_{q,1}a_{p,2}) = \min\{\deg a_{p,1} + \deg a_{q,2}, \deg a_{q,1} + \deg a_{p,2}\}$ при любых различных индексах $p, q \in \{1, \ldots, 5\}$. Рассмотрим вектор $(h_1, \ldots, h_5) \in \mathbb{R}^5$ и обозначим через Θ_i (где $i \in \{1, 2\}$) множество всех индексов $\eta \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, доставляющих минимум выражению $\min_\eta\{\deg a_{\eta i} + h_\eta\}$. Если при этом $|\Theta_1| \geqslant 2$, $|\Theta_2| \geqslant 2$, $|\Theta_1 \cup \Theta_2| \geqslant 3$, то найдутся элементы $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbf{H}$, удовлетворяющие условию $\deg x_j = h_j$ при любом $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и условию $\sum_{j=1}^5 a_{ji}x_j = 0$ при любом $i \in \{1, 2\}$.*

Доказательство. Введем обозначения $\theta_1 = \min_{j=1}^5\{a_{j,1} + h_j\}$ и $\theta_2 = \min_{j=1}^5\{a_{j,2}+h_j\}$. Будем считать, не ограничивая общности, что $1 \in \Theta_1$, $2 \in \Theta_2$ и что каждое из множеств Θ_1 и Θ_2 имеет непустое пересечение с множеством $\{3, 4, 5\}$. Из этих условий следует, что $\min_{\iota=3}^5\{\deg\det A[1, \iota] + h_1 + h_\iota\} = \min_{\iota=3}^5\{\deg\det A[2, \iota] + h_2 + h_\iota\} = \theta_1 + \theta_2$. Лемма 6.1.16 показывает, что в этом случае найдутся числа $\xi_3, \xi_4, \xi_5 \in \mathbb{C}^*$, удовлетворяющие условию

$$\deg\left(\sum_{\iota=3}^5 \det A[1, \iota]t^{h_1+h_\iota}\xi_\iota\right) = \deg\left(\sum_{\iota=3}^5 \det A[2, \iota]t^{h_2+h_\iota}\xi_\iota\right) = \theta_1 + \theta_2.$$

Из формул Крамера следует тогда, что решение (y_1, y_2) системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}t^{h_1}y_1 + a_{21}t^{h_2}y_2 = -\sum_{\iota=3}^5 \xi_\iota a_{\iota,1}t^{h_\iota}, \\ a_{12}t^{h_1}y_1 + a_{22}t^{h_2}y_2 = -\sum_{\iota=3}^5 \xi_\iota a_{\iota,2}t^{h_\iota} \end{cases} \tag{6.1.3}$$

удовлетворяет условию $\deg y_1 = \deg y_2 = 0$. Положим $x_1 = y_1 t^{h_1}$, $x_2 = y_2 t^{h_2}$ и $x_\iota = \xi_\iota t^{h_\iota}$ при всех $\iota \in \{3,4,5\}$. Уравнения (6.1.3) показывают, что $\sum_{j=1}^5 a_{j,1} x_j = \sum_{j=1}^5 a_{j,2} x_j = 0$. □

Наконец, мы докажем лемму о решениях одного линейного уравнения.

Лемма 6.1.18. *Рассмотрим векторы $a \in \mathbb{R}^m$ и $l \in \mathbf{H}^m$. Если набор $\deg l$ реализует тропическую зависимость вектора a, то найдутся элементы $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{H}$, для которых условие $\deg x_j = a_j$ выполнено при всех $j \in \{1, \ldots, m\}$, а также $\sum_{j=1}^m x_j l_j = 0$.*

Доказательство. Предположим, что минимум выражению $\min_{j=1}^m \{a_j + \deg l_j\}$ доставляют индексы $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, m\}$. Определение 6.1.3 показывает, что $k > 1$. В силу леммы 6.1.16 найдутся ненулевые комплексные числа $\xi_{\widehat{\jmath}}$ (где индекс $\widehat{\jmath}$ пробегает множество $\{1, \ldots, m\} \setminus \{j_1\}$), для которых степень элемента $\sum_{\widehat{\jmath} \neq j_1} l_{\widehat{\jmath}} \xi_{\widehat{\jmath}} t^{a_{\widehat{\jmath}}}$ окажется равной $\min_{j=1}^n \{a_j + \deg l_j\}$. Осталось положить $x_{\widehat{\jmath}} = \xi_{\widehat{\jmath}} t^{a_{\widehat{\jmath}}}$ при $\widehat{\jmath} \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j_1\}$, а также $x_{j_1} = \frac{\sum_{\widehat{\jmath} \neq j_1} l_{\widehat{\jmath}} \xi_{\widehat{\jmath}} t^{a_{\widehat{\jmath}}}}{-l_{j_1}}$. □

Для доказательства основного результата главы нам также потребуется характеризация тропического ранга матрицы в терминах тропической линейной зависимости ее строк. Эта характеризация была известна ранее и доказана в различных работах: в иной формулировке этот результат был получен еще в работе [45]. Другие доказательства были впоследствии получены в работе [77] и статье [1]. Для полноты нашего изложения мы покажем, как упомянутый результат следует из теоремы 6.1.1.

Теорема 6.1.19. *Тропический ранг матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ равен наибольшей мощности тропически линейно независимой системы строк матрицы A.*

Доказательство. Обозначим через $r_1, \ldots, r_c$ индексы строк тропически линейно независимой системы наибольшей мощности. В силу леммы 6.1.18 ранг Капранова любой подматрицы матрицы $A[r'_1, \ldots, r'_{c+1}]$ не превосходит c, и теорема 6.1.1 поэтому показывает, что $\operatorname{trop}(A) \leqslant c$.

С другой стороны, условие $\operatorname{trop}(A) < c$ в силу теоремы 6.1.1 влечет условие $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(A[r_1, \ldots, r_c]) < c$. В этом случае применение теоремы 6.1.14 показало бы, что строки матрицы $A[r_1, \ldots, r_c]$ тропически зависимы, поэтому на самом деле $\operatorname{trop}(A) = c$. □

6.2 Миноры порядка 4 матрицы размера $6 \times n$

В этом разделе будет доказан результат, составляющий основную сложность решения проблемы 1.3.34. А именно, будет показано, что любая матрица раз-

мера $6 \times n$ тропического ранга 3 имеет ранг Капранова, равный 3. Сначала мы дадим характеризацию матриц размера $6 \times n$ тропического ранга 3, ранг Капранова которых превосходит 3. Эта характеризация позволит свести доказываемый результат к некоторому числу частных случаев, каждый из которых мы впоследствии разберем отдельно.

6.2.1 Сведение задачи к разбору частных случаев

Следующая теорема дает характеризацию матриц размера $6 \times n$ тропического ранга 3, ранг Капранова которых превосходит 3.

Теорема 6.2.1. *Предположим, что матрица* $A \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ *удовлетворяет условиям* $\operatorname{trop}(A) = 3$ *и* $K_{\mathbb{C}}(A) > 3$. *Тогда класс PQ-эквивалентности матрицы* A *содержит матрицу* W, *такую что каждая строка матрицы* $\mathcal{P}(W)$ *содержит по крайней мере один элемент* 0 *и выполнено одно из следующих условий:*

(i) столбцы $\mathcal{P}(W)$ *имеют носители* $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6\}$;

(ii) матрица $\mathcal{P}(W)$ *содержит столбцы с носителем* $\{1,2\}$, *содержит столбцы по крайней мере с одним из носителей* $\{4,5,6\}$, $\{3,4,6\}$, $\{3,5,6\}$, $\{3,4,5\}$; *матрица* $\mathcal{P}(W)$ *может содержать столбцы с носителем* $\{3,4,5,6\}$;

(iii) матрица $\mathcal{P}(W)$ *может содержать столбцы с носителями* $\{1,2,3\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,4,6\}$, $\{3,5,6\}$. *Носители остальных столбцов матрицы* $\mathcal{P}(W)$ *имеют мощность не менее* 4; *никакие четырехэлементные носители столбцов матрицы* $\mathcal{P}(W)$ *не содержат никакие трехэлементные носители ее столбцов как подмножества;*

(iv) матрица $\mathcal{P}(W)$ *содержит столбцы с носителями* $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, *другие столбцы содержат по крайней мере по два элемента* 0 *в первых трех строках и по крайней мере по два элемента* 0 *в последних трех строках;*

(v) множество носителей столбцов матрицы $\mathcal{P}(W)$ *есть* $\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$.

Доказательство. 1. Согласно теореме 6.1.19 строки матрицы A тропически зависимы. Применяя определение 6.1.3 и лемму 6.1.11, мы считаем, не ограничивая общности, что любой столбец матрицы $\mathcal{P}(A)$ содержит не менее двух нулей.

2. Более того, согласно лемме 6.1.11 мы можем считать, что любая строка матрицы $\mathcal{P}(A)$ содержит по крайней мере один нуль. Рассмотрим три возможных случая.

Случай O. Если каждый столбец матрицы $\mathcal{P}(A)$ содержит не менее четырех нулей, то эта матрица удовлетворяет условиям пункта (iii) доказываемой

теоремы.

Случай А. Предположим теперь, что каждый столбец матрицы $\mathcal{P}(A)$ содержит не менее трех нулей, и некоторый столбец этой матрицы содержит ровно 3 нуля. Рассмотрим два возможных частных случая А1 и А2.

А1. Предположим, что найдутся индексы $u', v' \in \{1, \ldots, n\}$, удовлетворяющие условиям $|\mathrm{Supp}_{u'}(\mathcal{P}(A))| = 3$ и $|\mathrm{Supp}_{v'}(\mathcal{P}(A)) \setminus \mathrm{Supp}_{u'}(\mathcal{P}(A))| = 1$. В этом случае с точностью до перестановок строк и столбцов

$$\mathcal{P}(A) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & a_{12} & & & \\ 0 & a_{22} & & \mathcal{P}(A)[1,2,3,4|3,\ldots,n] & \\ 0 & a_{32} & & & \\ \infty & 0 & & & \\ \hline \infty & \infty & a_{53} & \ldots & a_{5,n} \\ \infty & \infty & a_{63} & \ldots & a_{6,n} \end{array}\right).$$

Если пятая и шестая строки матрицы $\mathcal{P}(A)$ различны, то в силу леммы 6.1.9 выполнено условие $\mathrm{trop}(A) \geqslant 4$. Противоречие показывает, что пятая и шестая строки матрицы $\mathcal{P}(A)$ различны. В силу пункта 2 любая строка матрицы $\mathcal{P}(A)$ содержит нулевой элемент, поэтому с точностью до перестановок строк имеем

$$\mathcal{P}(A) = \left(\begin{array}{cc|ccc|ccc} 0 & p_{12} & & & & & & \\ 0 & p_{22} & & \overline{P} & & & \overline{P'} & \\ 0 & p_{32} & & & & & & \\ \infty & 0 & & & & & & \\ \hline \infty & \infty & \infty & \ldots & \infty & 0 & \ldots & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \ldots & \infty & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right).$$

Предположение случая А показывает, что любой столбец матрицы $\overline{P}$ содержит по крайней мере три нуля.

Прибавим теперь малое (в смысле абсолютного значения) число $-\varepsilon < 0$ к каждому элементу пятой и шестой строк матрицы A. Определение 6.1.4 показывает, что шаблон полученной матрицы равен

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|ccc} 0 & p_{12} & & & & \infty & \ldots & \infty \\ 0 & p_{22} & & \overline{P} & & \ldots & & \ldots \\ 0 & p_{32} & & & & \ldots & & \ldots \\ \infty & 0 & & & & \infty & \ldots & \infty \\ \hline \infty & \infty & \infty & \ldots & \infty & 0 & \ldots & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \ldots & \infty & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right),$$

то есть, с точностью до перестановок строк и столбцов удовлетворяет условиям пункта (ii).

A2. Если найдутся индексы $u'', v'' \in \{1, \ldots, n\}$, для которых носители $\mathrm{Supp}_{u''}(\mathcal{P}(A))$ и $\mathrm{Supp}_{v''}(\mathcal{P}(A))$ не пересекаются, то матрица $\mathcal{P}(A)$ удовлетворяет условиям пункта (iv) или случая A1 с точностью до перестановок строк и столбцов.

A3. Теперь мы завершим разбор случая A. Пункт A1 показывает, что если некоторый носитель мощности 4 включает $\mathrm{Supp}_u(\mathcal{P}(A))$ при некотором $u \in \{1, \ldots, n\}$, то утверждение теоремы выполнено для матрицы A. Поэтому мы можем считать, что ни одно собственное подмножество носителя, имеющего мощность 4, не является носителем никакого столбца матрицы $\mathcal{P}(A)$.

В силу пунктов A1 и A2 утверждение теоремы также выполняется для матрицы A, если условие $|\mathrm{Supp}_{\widehat{u}}(\mathcal{P}(A)) \cap \mathrm{Supp}_{\widehat{v}}(\mathcal{P}(A))| \in \{0, 2\}$ выполнено для некоторых индексов $\widehat{u}, \widehat{v} \in \{1, \ldots, n\}$, удовлетворяющих условию $|\mathrm{Supp}_{\widehat{u}}(\mathcal{P}(A))| = |\mathrm{Supp}_{\widehat{v}}(\mathcal{P}(A))| = 3$. Поэтому мы можем считать, что условие $|\mathrm{Supp}_{\widehat{u}}(\mathcal{P}(A)) \cap \mathrm{Supp}_{\widehat{v}}(\mathcal{P}(A))| \in \{1, 3\}$ выполнено для любых таких индексов $\widehat{u}$, $\widehat{v}$. Непосредственная проверка показывает теперь, что матрица A удовлетворяет условиям пункта (iii) с точностью до перестановки строк.

Случай B. Предположим, что некоторый столбец матрицы $\mathcal{P}(A)$ содержит ровно два нуля. Мы можем считать, не ограничивая общности, что столбец

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix}$$

принадлежит матрице $\mathcal{P}(A)$. Рассмотрим три возможных случая.

B1. Предположим, что некоторый столбец матрицы $\mathcal{P}(A)[3, 4, 5, 6]$ содержит ровно два нуля. Тогда в силу леммы 6.1.9 с точностью до перестановок строк и столбцов

$$\mathcal{P}(A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & & P_1' & & & P_2' & \\ 0 & \ldots & 0 & & & & & & \\ \hline \infty & \ldots & \infty & 0 & \ldots & 0 & & P_3' & \\ \infty & \ldots & \infty & 0 & \ldots & 0 & & & \\ \hline \infty & \ldots & \infty & \infty & \ldots & \infty & 0 & \ldots & 0 \\ \infty & \ldots & \infty & \infty & \ldots & \infty & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right).$$

Прибавим достаточно малое $\varepsilon > 0$ к каждому элементу третьей и четвертой строк матрицы A, и прибавим 2ε к каждому элементу первых двух строк полученной матрицы. В силу определения 6.1.4 шаблон полученной матрицы

будет равен

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \infty & \dots & \infty & \infty & \dots & \infty \\ 0 & \dots & 0 & \infty & \dots & \infty & \infty & \dots & \infty \\ \hline \infty & \dots & \infty & 0 & \dots & 0 & \infty & \dots & \infty \\ \infty & \dots & \infty & 0 & \dots & 0 & \infty & \dots & \infty \\ \hline \infty & \dots & \infty & \infty & \dots & \infty & 0 & \dots & 0 \\ \infty & \dots & \infty & \infty & \dots & \infty & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

то есть, будет соответствовать условиям пункта (i) с точностью до перестановки строк.

B2. Предположим, что любой столбец матрицы $\mathcal{P}(A)[3,4,5,6]$ содержит либо ни одного, либо по крайней мере три нуля. В этом случае

$$\mathcal{P}(A) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & P' \\ 0 & \dots & 0 & \\ \hline \infty & \dots & \infty & \\ \infty & \dots & \infty & P'' \\ \infty & \dots & \infty & \\ \infty & \dots & \infty & \end{array}\right),$$

где всякий столбец матрицы P'' содержит по крайней мере три нуля.

Прибавим достаточно малое $\varepsilon > 0$ к каждому элементу первых двух строк матрицы A. В силу определения 6.1.4 шаблон полученной матрицы $\mathcal{A}$ равен

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \infty & \dots & \infty \\ 0 & \dots & 0 & \infty & \dots & \infty \\ \hline \infty & \dots & \infty & & & \\ \infty & \dots & \infty & & P'' & \\ \infty & \dots & \infty & & & \\ \infty & \dots & \infty & & & \end{array}\right).$$

Рассмотрим два возможных случая.

B2.1. Если элемент ∞ содержится в матрице P'', то матрица $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям пункта (ii).

B2.2. Теперь мы предположим, что

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \left(\begin{array}{c|c} 0\dots0 & \infty\dots\infty \\ 0\dots0 & \infty\dots\infty \\ \hline \infty\dots\infty & 0\dots0 \\ \infty\dots\infty & 0\dots0 \\ \infty\dots\infty & 0\dots0 \\ \underbrace{\infty\dots\infty}_{p'} & \underbrace{0\dots0}_{q'} \end{array}\right), \text{ где } p \geqslant 0 \text{ и } q' > 0. \qquad (6.2.1)$$

Будем проводить рассмотрение случая B2.2 индукцией по p'. Поскольку случай $p' = 0$ тривиален, мы можем считать, что $p' > 0$. Используя лемму 6.1.11, мы считаем, что наименьший элемент любого столбца матрицы $\mathcal{A}$ равен 0.

Прибавим наименьший элемент матрицы $\mathcal{A}[3,4,5,6|1,\dots,p']$ к каждому элементу первых двух строк матрицы $\mathcal{A}$. Обозначая через $\mathcal{A}'$ полученную матрицу, мы получаем в силу определения 6.1.4, что с точностью до перестановок строк и столбцов

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}') = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}0\dots0\\0\dots0\end{matrix} & \begin{matrix}0\dots0\\0\dots0\end{matrix} & \begin{matrix}\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\\ \underbrace{\infty\dots\infty}_{p''}\end{matrix} & \begin{matrix}\\P_3\\\\ \underbrace{\qquad}_{p'-p''}\end{matrix} & \begin{matrix}0\dots0\\0\dots0\\0\dots0\\0\dots0\end{matrix} \end{array}\right),$$

где $p'' < p'$, и каждый столбец матрицы P_3 содержит по крайней мере один нулевой элемент.

В силу предположения индукции мы можем считать, что элемент ∞ содержится в матрице P_3. Если всякий столбец матрицы P_3 содержит не менее двух нулей, то матрица $\mathcal{A}'$ удовлетворяет условиям либо пункта B1, либо пункта B2.1.

Поэтому осталось рассмотреть случай, когда некоторый столбец матрицы P_3 содержит ровно один нулевой элемент. В силу леммы 6.1.9 с точностью до перестановок строк и столбцов верно, что

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}') = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}0\dots0\\0\dots0\end{matrix} & \begin{matrix}0\dots0\\0\dots0\end{matrix} & P_8 \\ \hline \begin{matrix}\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\end{matrix} & \begin{matrix}0\dots0\\\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\end{matrix} & \begin{matrix}0\dots0\\0\dots0\\0\dots0\\0\dots0\end{matrix} \end{array}\right).$$

Добавим теперь малое число $\varepsilon > 0$ к каждому элементу первых трех строк матрицы $\mathcal{A}'$. В силу определения 6.1.4 полученная матрица удовлетворяет условиям пункта (v), что завершает разбор случая B2.2. Отметим, что случаи B2.1 и B2.2 исчерпывают все возможности в рамках случая B2, поэтому разбор случая B2 также завершен.

B3. Наконец, предположим, что некоторый столбец матрицы $\mathcal{P}(A)[3,4,5,6]$ содержит ровно один нулевой элемент. В силу леммы 6.1.9 с

точностью до перестановок строк и столбцов верно, что

$$\mathcal{P}(A) = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix} & P_0 & P_0' \\ \hline \infty\ldots\infty & 0\ldots0 & P_0'' \\ \hline \infty\ldots\infty & \infty\ldots\infty & 0\ldots0 \\ \infty\ldots\infty & \infty\ldots\infty & 0\ldots0 \\ \underbrace{\infty\ldots\infty}_{p} & \underbrace{\infty\ldots\infty}_{q} & \underbrace{0\ldots0}_{r} \end{array}\right),\ p>0,\ q>0,\ r>0, \qquad (6.2.2)$$

где всякий столбец матрицы P_0 содержит не менее одного нулевого элемента.

Выберем матрицу (и обозначим ее через A_0), для которой значение $p+q$ будет минимальным при следующих условиях: шаблон матрицы A_0 имеет вид (6.2.2)*, матрицы A_0 и A PQ-эквивалентны, всякий столбец матрицы $\mathcal{P}(A_0)$ содержит по крайней мере два нуля.*

В силу леммы 6.1.11 мы можем считать, не ограничивая общности, что минимальный элемент всякого столбца матрицы A_0 равен 0. Матрица A_0 в этом случае состоит из неотрицательных элементов и равна

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}0&\ldots&0\\0&\ldots&0\end{matrix} & A_0[1,2|p+1,\ldots,p+q] & A_1 \\ \hline A_0[3|1,\ldots,p] & \begin{matrix}0&\ldots&0\end{matrix} & A_2 \\ \hline A_0[4,5,6|1,\ldots,p] & A_0[4,5,6|p+1,\ldots,p+q] & \begin{matrix}0&\ldots&0\\0&\ldots&0\\0&\ldots&0\end{matrix} \end{array}\right).$$

В силу определения 6.1.4 все элементы матриц $A_0[3|1,\ldots,p]$ и $A_0[4,5,6|1,\ldots,p+q]$ положительны, поэтому любой столбец матрицы $A_0[1,2|p+1,\ldots,p+q]$ содержит по крайней мере один нулевой элемент. В частности, минимальный элемент матрицы $A_0[4,5,6|1,\ldots,p+q]$ (мы обозначаем его через m) положителен.

Прибавим m к каждому элементу первых трех строк матрицы A_0, прибавим $-m$ к каждому элементу первых $p+q$ столбцов полученной матрицы. Полученная матрица C состоит из неотрицательных элементов и равна

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}0&\ldots&0\\0&\ldots&0\end{matrix} & A_0[1,2|p+1,\ldots,p+q] & C_1 \\ \hline A_0[3|1,\ldots,p] & \begin{matrix}0&\ldots&0\end{matrix} & C_2 \\ \hline C[4,5,6|1,\ldots,p] & C[4,5,6|p+1,\ldots,p+q] & \begin{matrix}0&\ldots&0\\0&\ldots&0\\0&\ldots&0\end{matrix} \end{array}\right),$$

причем нуль содержится в матрице $C[4,5,6|1,\dots,p+q]$, и все элементы матриц C_1 и C_2 положительны.

По ранее доказанному всякий столбец матрицы $A_0[1,2|p+1,\dots,p+q]$ содержит по крайней мере один нулевой элемент, поэтому любой столбец матрицы C содержит не менее двух нулей. Если любой столбец матрицы C содержит не менее трех нулей, то матрица C удовлетворяет условиям либо случая O, либо случая A, для которых утверждение теоремы уже доказано.

Поэтому мы можем считать, что столбец матрицы C с индексом $\widehat{\jmath} \in \{1,\dots,p+q\}$ содержит не более двух нулей. В этом случае для всех $i' \in \{1,2,3\} \setminus \{\widehat{\imath}\}$ выполнено условие $C_{i'\widehat{\jmath}} = 0$, и также $C_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}} > 0$. В силу определения матрицы C найдется индекс $\widehat{\jmath}' \in \{1,\dots,p+q\}$, удовлетворяющий условию $C_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}'} = 0$.

Поэтому перестановки первых трех строк и первых $p+q$ столбцов матрицы C приведут нас к матрице

$$C' = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & c'_{12} & & \\ 0 & c'_{22} & C'[1,2,3|3,\dots,p+q] & C'_0 \\ \omega_3 & 0 & & \\ \hline \omega_4 & c'_{42} & & 0 \ \dots \ 0 \\ \omega_5 & c'_{52} & C'[4,5,6|3,\dots,p+q] & 0 \ \dots \ 0 \\ \omega_6 & c'_{62} & & 0 \ \dots \ 0 \end{array}\right), \tag{6.2.3}$$

где условие $\omega_\iota > 0$ выполнено для всех $\iota \in \{3,4,5,6\}$, всякий столбец матрицы $C'[1,2,3|2,\dots,p+q]$ содержит не менее двух нулей, минимальный элемент матрицы $C'[4,5,6|2,\dots,p+q]$ равен 0 (заметим, что элементы c'_{42}, c'_{52} и c'_{62} могут быть равны нулю), и элементы матрицы C'_0 положительны. Нам вновь потребуется разобрать три случая отдельно друг от друга.

B3.1. Если всякий столбец матрицы $C'[3,4,5,6|2,\dots,p+q]$ содержит либо ни одного, либо не менее трех нулей, то матрица C' удовлетворяет условиям пункта B2.

B3.2. Если некоторый столбец матрицы $C'[3,4,5,6|2,\dots,p+q]$ содержит ровно два нуля, то матрица C' удовлетворяет условиям пункта B1.

B3.3. Наконец, предположим, что некоторый столбец (обозначим его индекс через j) матрицы $C'[3,4,5,6|2,\dots,p+q]$ содержит ровно один нуль, то есть, условие $c'_{ij} = 0$ выполнено при единственном $i \geqslant 3$.

Предположим, что $i \neq 3$. Фиксируем произвольно индекс $i_0 \in \{4,5,6\} \setminus \{i\}$. Тогда имеем $c'_{i_0 j} > 0$ и $c'_{3j} > 0$. В силу равенства (6.2.3) имеем $c'_{3,p+q+1} > 0$.

Поэтому матрица

$$C'[2,i,i_0,3|1,j,p+q+1,2] = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \omega_i & 0 & x_4 & x_5 \\ \omega_{i_0} & c'_{i_0 j} & 0 & x_6 \\ \omega_3 & c'_{3,j} & c'_{3,p+q+1} & 0 \end{pmatrix},$$

где элементы $x_1, \ldots, x_6$ неотрицательны, является тропически невырожденной. Это означает, что $\mathrm{trop}(A) > 3$ и противоречит условию теоремы.

Поэтому $i = 3$. Переставляя столбцы матрицы C' с индексами 2 и j, мы получаем матрицу D, для которой

$$\mathcal{P}(D) = \left(\begin{array}{cc|c|ccc} 0 & c'_{1,j} & \multirow{2}{*}{$\mathcal{P}(D)[1,2,3|3,\ldots,p+q]$} & \multicolumn{3}{c}{\multirow{2}{*}{C'_0}} \\ 0 & c'_{2,j} & & & & \\ \infty & 0 & & & & \\ \hline \infty & \infty & \multirow{3}{*}{$\mathcal{P}(D)[4,5,6|3,\ldots,p+q]$} & 0 & \ldots & 0 \\ \infty & \infty & & 0 & \ldots & 0 \\ \infty & \infty & & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right). \tag{6.2.4}$$

В силу леммы 6.1.9 строки матрицы $\mathcal{P}(D)[4,5,6]$ совпадают. Отметим, что матрица $D[4,5,6|2,\ldots,p+q]$ равна матрице $C'[4,5,6|2,\ldots,p+q]$ с точностью до перестановки столбцов, поэтому минимальный элемент этой матрицы равен 0. Таким образом, матрица $\mathcal{P}(D)[4,5,6|3,\ldots,p+q]$ содержит несколько столбцов, состоящих из нулевых элементов, а остальные столбцы матрицы $\mathcal{P}(D)[4,5,6|3,\ldots,p+q]$ состоят из элементов ∞. В силу равенства (6.2.4) это противоречит минимальности значения $p+q$. Таким образом, случай B3.3 не реализуется.

Заметим, что случаи B3.1, B3.2 и B3.3 исчерпывают все возможности, что заканчивает рассмотрение случая B3, а также и случая B в целом. □

Оставшаяся часть раздела посвящена разбору случаев (i)–(v) теоремы 6.2.1. Для доказательства основного результата раздела нам нужно доказать, что ни один из этих случаев не реализуется.

6.2.2 Случаи (ii) и (v)

Начнем наши рассуждения с разбора случаев (ii) и (v) теоремы 6.2.1.

Теорема 6.2.2. *Случай (v) теоремы 6.2.1 не реализуется.*

Доказательство. 1. Предположим, что матрица W реализует случай (v), тогда $\mathrm{trop}(W) = 3$, $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(W) > 3$, и с точностью до перестановок строк и столбцов

$$\mathcal{P}(W) = \left(\begin{array}{c|c|c} \infty\dots\infty & \infty\dots\infty & 0\dots0 \\ \infty\dots\infty & \infty\dots\infty & 0\dots0 \\ \infty\dots\infty & \infty\dots\infty & 0\dots0 \\ \hline 0\dots0 & \infty\dots\infty & \infty\dots\infty \\ 0\dots0 & 0\dots0 & \infty\dots\infty \\ \underbrace{0\dots0}_{s_1} & \underbrace{0\dots0}_{s_2} & \underbrace{\infty\dots\infty}_{s_3} \end{array}\right), \text{ где } s_1, s_2, s_3 > 0.$$

В силу леммы 6.1.11 мы можем считать, не ограничивая общности, что наименьший элемент любого столбца матрицы W равен 0.

2. Положим $\overline{W} = W[1,2,3,4,5]$. Тогда в силу леммы 6.1.12 выполнено условие $\mathrm{trop}(\overline{W}) \leqslant 3$. Теперь теорема 6.1.2 показывает, что $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(\overline{W}) \leqslant 3$. В силу определения 1.3.23 найдется матрица $F' \in \mathbf{H}^{5\times n}$, для которой $\overline{W} = \deg F'$ и $rank(F') \leqslant 3$.

3. Таким образом, любые четыре строки матрицы F' линейно зависимы над полем $\mathbf{H}$. В частности, найдутся такие элементы λ_1, λ_2, λ_4 и λ_5 из поля $\mathbf{H}$, не все равные нулю, найдутся элементы μ_1, μ_3, μ_4 и μ_5 из поля $\mathbf{H}$, не все равные нулю, для которых при всех $k \in \{1,\dots,n\}$ выполнены условия

$$\lambda_1 f'_{1k} + \lambda_2 f'_{2k} + \lambda_4 f'_{4k} + \lambda_5 f'_{5k} = 0, \mu_1 f'_{1k} + \mu_3 f'_{3k} + \mu_4 f'_{4k} + \mu_5 f'_{5k} = 0. \quad (6.2.5)$$

Также мы положим $\lambda_3 = \lambda_6 = \mu_2 = \mu_6 = 0$. Умножая линейные комбинации (6.2.5) на ненулевые элементы поля $\mathbf{H}$, мы можем считать, что $\min_{\theta=1}^{6}\{\deg\lambda_\theta\} = \min_{\theta=1}^{6}\{\deg\mu_\theta\} = 0$. В силу леммы 6.1.14 семейства $(\deg\lambda_1 \deg\lambda_2 \deg\lambda_4 \deg\lambda_5)$ и $(\deg\mu_1 \deg\mu_3 \deg\mu_4 \deg\mu_5)$ реализуют тропическую зависимость строк матриц $W[1,2,4,5]$ и $W[1,3,4,5]$, соответственно.

4. В силу леммы 6.1.7 выполнены условия $\deg\lambda_1 = \deg\lambda_2 = \deg\mu_1 = \deg\mu_3 = 0$, и числа $\deg\lambda_4$, $\deg\mu_4$, $\deg\lambda_5$, $\deg\mu_5$ положительны.

5. Поскольку $\mathrm{trop}(W) \leqslant 3$, найдется семейство $(h_1h_4h_5h_6) \in \mathbb{T}^4$, реализующее тропическую зависимость строк матрицы $W[1,4,5,6]$. Тогда в силу леммы 6.1.7 мы можем считать, не ограничивая общности, что $h_1 > 0$, $h_4 \geqslant 0$, $h_5 = h_6 = 0$. В этом случае для любого индекса $\tau \in \{1,\dots,s_1+s_2\}$ выполнены условия $h_5 + \deg(f'_{5\tau}) = 0$ и $h_4 + \deg(f'_{4\tau}) \geqslant 0$. Бесконечность поля $\mathbb{C}$ позволяет найти числа $\nu_4, \nu_5 \in \mathbf{H}$, $\deg\nu_4 = h_4$, $\deg\nu_5 = h_5$, удовлетворяющие условиям

$$deg(\nu_4 f'_{4\tau} + \nu_5 f'_{5\tau}) = 0 \text{ при всех } \tau \in \{1,\dots,s_1+s_2\}. \quad (6.2.6)$$

Мы также выбираем ν_1 и ν_6 как произвольные элементы поля $\mathbf{H}$ степеней h_1 и h_6, соответственно, и полагаем $\nu_2 = \nu_3 = 0$.

6. Положим $f_{i\tau} = f'_{i\tau}$ при любых $i \in \{1,2,3,4,5\}$ и $\tau \in \{1,\dots,s_1+s_2\}$. Положим также

$$f_{6\tau} = \frac{-\nu_1 f_{1\tau} - \nu_4 f_{4\tau} - \nu_5 f_{5\tau}}{\nu_6} \text{ при любом } \tau \in \{1,\dots,s_1+s_2\}. \tag{6.2.7}$$

В силу пункта 5 выполнено условие $\deg(\nu_1 f_{1\tau}) > 0$, поэтому из равенств (6.2.6) следует, что условие $\deg f_{6\tau} = 0$ выполнено при всех $\tau \in \{1,\dots,s_1+s_2\}$.

7. В силу пункта 5 набор $(\deg\nu_1, \deg\nu_4, \deg\nu_5, \deg\nu_6)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $W[1,4,5,6]$. Поэтому из леммы 6.1.18 следует, что для любого индекса $q \in \{s_1+s_2+1,\dots,n\}$ найдутся элементы $f_{1q}, f_{4q}, f_{5q}, f_{6q} \in \mathbf{H}$ степеней $w_{1q}, w_{4q}, w_{5q}, w_{6q}$, соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\nu_1 f_{1q} + \nu_4 f_{4q} + \nu_5 f_{5q} + \nu_6 f_{6q} = 0, \text{ где } q \in \{s_1+s_2+1,\dots,n\}. \tag{6.2.8}$$

8. Наконец, при каждом $q \in \{s_1+s_2+1,\dots,n\}$ мы положим

$$f_{2q} = \frac{-\lambda_1 f_{1q} - \lambda_4 f_{4q} - \lambda_5 f_{5q}}{\lambda_2}, f_{3q} = \frac{-\mu_1 f_{1q} - \mu_4 f_{4q} - \mu_5 f_{5q}}{\mu_3}. \tag{6.2.9}$$

В силу пункта 4 выполнены условия $\deg\lambda_4 > 0$ и $\deg\lambda_5 > 0$, поэтому $\deg(\lambda_4 f_{4q} + \lambda_5 f_{5q}) > 0$, откуда следует условие $\deg f_{2q} = 0$ при всех $q \in \{s_1+s_2+1,\dots,n\}$. Таким же образом мы можем проверить выполнение условия $\deg f_{3q} = 0$.

9. Теперь мы завершили определение матрицы $F \in \mathbf{H}^{6\times n}$. Пункты 6, 7 и 8 показывают, что $W = \deg F$. В силу равенств (6.2.5) и (6.2.9) вторая и третья строки матрицы F являются линейными комбинациями первой, четвертой и пятой ее строк. В силу равенств (6.2.7) и (6.2.8) шестая строка матрицы F также является линейной комбинацией первой, четвертой и пятой строк. Таким образом, мы получаем $rank(F) \leqslant 3$, и в силу определения 1.3.23 верно неравенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(W) \leqslant 3$. Противоречие с пунктом 1 показывает, что на самом деле такой матрицы W не существует. □

Теперь перейдем к рассмотрению случая (ii) теоремы 6.2.1.

Теорема 6.2.3. *Случай (ii) теоремы 6.2.1 не реализуется.*

Доказательство. 1. Пусть матрица W реализует случай (ii), тогда, в частности, матрица $\mathcal{P}(W)$ содержит по крайней мере один из столбцов с носителями $\{4,5,6\}$, $\{3,4,6\}$, $\{3,5,6\}$, $\{3,4,5\}$. Поэтому с точностью до перестановок

строк матрица $\mathcal{P}(W)$ содержит столбец с носителем $\{3,4,5\}$. Таким образом, имеем $\operatorname{trop}(W)=3$, $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(W)>3$ и

$$\mathcal{P}(W)=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \begin{matrix}0\dots0\\0\dots0\end{matrix} & \begin{matrix}\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\end{matrix} & \begin{matrix}\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\end{matrix} & \begin{matrix}\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\end{matrix} & \begin{matrix}\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\end{matrix} & \begin{matrix}\infty\dots\infty\\\infty\dots\infty\end{matrix} \\ \hline \infty\dots\infty & 0\dots0 & 0\dots0 & 0\dots0 & \infty\dots\infty & 0\dots0 \\ \hline \infty\dots\infty & 0\dots0 & 0\dots0 & \infty\dots\infty & 0\dots0 & 0\dots0 \\ \hline \infty\dots\infty & 0\dots0 & \infty\dots\infty & 0\dots0 & 0\dots0 & 0\dots0 \\ \hline \underbrace{\infty\dots\infty}_{s_0} & \underbrace{\infty\dots\infty}_{s_1} & \underbrace{0\dots0}_{s_2} & \underbrace{0\dots0}_{s_3} & \underbrace{0\dots0}_{s_4} & \underbrace{0\dots0}_{s_5} \end{array}\right), \tag{6.2.10}$$

где $s_0>0$ и $s_1>0$. Далее, случай (ii) теоремы 6.2.1 требует, чтобы каждая строка матрицы $\mathcal{P}(W)$ содержала по крайней мере один нуль. Таким образом, шестая строка матрицы $\mathcal{P}(W)$ содержит нулевые элементы, и поэтому $s_2+\ldots+s_5>0$.

2. Будем считать, что значение $s_1+\ldots+s_5$ минимально по всем матрицам, удовлетворяющим условиям случая (ii) теоремы 6.2.1. В силу леммы 6.1.11 мы можем также считать, что минимальный элемент всякого столбца матрицы W равен 0.

3. Тогда минимальный элемент матрицы $W[1,2|s_0+1,\dots,n]$ равен $m>0$. Прибавим $-m$ к каждому элементу первых двух строк матрицы W, прибавим m к каждому элементу первых s_0 столбцов матрицы W. Полученная матрица V такова, что

$$\mathcal{P}(V)=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \begin{matrix}0\dots0\\0\dots0\end{matrix} & P_1' & P_2' & P_3' & P_4' & P_5' \\ \hline \infty\dots\infty & 0\dots0 & 0\dots0 & 0\dots0 & \infty\dots\infty & 0\dots0 \\ \hline \infty\dots\infty & 0\dots0 & 0\dots0 & \infty\dots\infty & 0\dots0 & 0\dots0 \\ \hline \infty\dots\infty & 0\dots0 & \infty\dots\infty & 0\dots0 & 0\dots0 & 0\dots0 \\ \hline \underbrace{\infty\dots\infty}_{s_0} & \underbrace{\infty\dots\infty}_{s_1} & \underbrace{0\dots0}_{s_2} & \underbrace{0\dots0}_{s_3} & \underbrace{0\dots0}_{s_4} & \underbrace{0\dots0}_{s_5} \end{array}\right), \tag{6.2.11}$$

и матрица $(P_1'|\dots|P_5')$ содержит по крайней мере один нуль. Из пункта 2 также следует, что минимальный элемент матрицы V равен нулю.

4. Предположим, что столбец $\binom{\infty}{\infty}$ принадлежит хотя бы двум из матриц $P_1',\dots,P_5'$. Соответствующие номера столбцов матрицы V обозначим через τ_1 и τ_2; не ограничивая общности мы можем считать, что $\tau_1\in\{s_0+1,\dots,s_0+s_1\}$. Тогда в силу (6.2.11) выполнены условия $[\mathcal{P}(V)]_{5,\tau_1}=0$, $[\mathcal{P}(V)]_{6,\tau_1}=\infty$ и $[\mathcal{P}(V)]_{6,\tau_2}=0$. Если первые две строки матрицы $\mathcal{P}(V)$ совпадают, то мы добавим достаточно малое $\varepsilon>0$ к каждому элементу последних четырех

строк матрицы V и получим противоречие с минимальностью значения $s_1 + \ldots + s_5$, предположенной в пункте 2.

Наоборот, если первые две строки матрицы $\mathcal{P}(V)$ различны, то выполнено условие $v_{1,\tau_0} \neq v_{2,\tau_0}$ для некоторого τ_0. Не ограничивая общности, мы считаем, что $v_{1,\tau_0} > 0$ и $v_{2,\tau_0} = 0$; тогда матрица

$$\mathcal{P}(V)[5,6,2,1|\tau_1,\tau_2,\tau_0,1] = \begin{pmatrix} 0 & \pi_1 & \pi_2 & \infty \\ \infty & 0 & \pi_3 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

является $\overline{\mathbb{B}}$-тропически вырожденной, поэтому в силу леммы 6.1.9 верно неравенство $\mathrm{trop}(V) \geqslant 4$.

Полученное противоречие показывает, что столбец $\binom{\infty}{\infty}$ принадлежит не более, чем одной из матриц $P'_1, \ldots, P'_5$. В частности, мы можем считать, не ограничивая общности, что столбец $\binom{\infty}{\infty}$ не принадлежит матрицам P'_2, P'_3, P'_4.

5. В силу леммы 6.1.12 выполнено условие $\mathrm{trop}(V[2,3,4,5,6]) \leqslant 3$. Поэтому теорема 6.1.2 показывает, что $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V[2,3,4,5,6]) \leqslant 3$. В силу определения 1.3.23 найдется матрица F', для которой выполнены условия $V[2,3,4,5,6] = \deg F'$ и $rank(F') \leqslant 3$.

6. В силу пункта 5 любые четыре строки матрицы F' линейно зависимы над полем $\mathbf{H}$. В частности, найдутся элементы λ_{21}, λ_{41}, λ_{51}, λ_{61} из поля $\mathbf{H}$, не все равные 0, найдутся элементы λ_{22}, λ_{32}, λ_{42}, λ_{62} из поля $\mathbf{H}$, не все равные 0, для которых при всех $j \in \{1, \ldots, n\}$, выполнены условия

$$\lambda_{21}f'_{2j} + \lambda_{41}f'_{4j} + \lambda_{51}f'_{5j} + \lambda_{61}f'_{6j} = 0, \lambda_{22}f'_{2j} + \lambda_{32}f'_{3j} + \lambda_{42}f'_{4j} + \lambda_{62}f'_{6j} = 0. \quad (6.2.12)$$

Мы также полагаем $\lambda_{11} = \lambda_{31} = \lambda_{12} = \lambda_{52} = 0$.

7. Умножая равенства (6.2.12) на ненулевые элементы поля $\mathbf{H}$, мы считаем, что $\min_{k=1}^{6}\{\deg \lambda_{k1}\} = \min_{k=1}^{6}\{\deg \lambda_{k2}\} = 0$. В силу леммы 6.1.14 наборы $(\deg \lambda_{21} \deg \lambda_{41} \deg \lambda_{51} \deg \lambda_{61})$ и $(\deg \lambda_{22} \deg \lambda_{32} \deg \lambda_{42} \deg \lambda_{62})$ реализуют тропическую зависимость строк матрицы $V[2,4,5,6]$ и $V[2,3,4,6]$, соответственно.

8. В силу пункта 1 $s_1 > 0$, поэтому из леммы 6.1.7 вытекает, что $\deg \lambda_{41} = \deg \lambda_{51} = \deg \lambda_{32} = \deg \lambda_{42} = 0$, и числа $\deg \lambda_{21}$, $\deg \lambda_{22}$ положительны. Аналогично, если $s_3 + s_4 \neq 0$, то $\deg \lambda_{62} = 0$; если же $s_2 + s_3 \neq 0$, то $\deg \lambda_{61} = 0$.

9. Поскольку $\mathrm{trop}(V) \leqslant 3$, мы можем найти набор $(h_1 h_2 h_5 h_6) \in \mathbb{T}^4$, удовлетворяющий условию $\min\{h_1, h_2, h_5, h_6\} = 0$, который реализует тропическую зависимость строк матрицы $V[1,2,5,6]$. Тогда в силу леммы 6.1.7 выполнено условие $h_1 = h_2 = 0$. Выберем теперь λ_{13}, λ_{23} и λ_{53} как произвольные элементы поля $\mathbf{H}$ степеней h_1, h_2 и h_5, соответственно. Положим также $\lambda_{33} = \lambda_{43} = 0$.

10. Далее, обозначим $\rho_1 = \lambda_{61}\lambda_{53}$, $\rho_2 = \lambda_{51}\lambda_{63}$, $\rho_3 = (\lambda_{42}\lambda_{61} - \lambda_{62}\lambda_{41})\lambda_{53}$, $\rho_4 = \lambda_{42}\lambda_{51}\lambda_{63}$, где значение λ_{63} будет определено позднее. А именно, из бесконечности поля $\mathbb{C}$ следует, что найдется элемент $\lambda_{63} \in \mathbf{H}$, удовлетворяющий условиям $\deg \lambda_{63} = h_6$, $\deg(\rho_1 - \rho_2) = \min\{\deg \rho_1, \deg \rho_2\}$ и $\deg(\rho_3 - \rho_4) = \min\{\deg \rho_3, \deg \rho_4\}$. Таким образом, мы определили значение $\{\lambda_{ki}\}$ при всех $k \in \{1, \ldots, 6\}$ и $i \in \{1, 2, 3\}$; матрицу (λ_{ki}) мы далее будем обозначать через $\Lambda \in \mathbf{H}^{6\times 3}$.

11. В этом пункте мы используем обозначение $\widehat{s}$ для индекса $s_0 + s_1 + 1$. В силу равенства (6.2.12) выполнено условие

$$\lambda_{41} f'_{4\widehat{s}} + \lambda_{61} f'_{6\widehat{s}} = \alpha, \lambda_{42} f'_{4\widehat{s}} + \lambda_{62} f'_{6\widehat{s}} = \beta, \tag{6.2.13}$$

где $\alpha = -\lambda_{21} f'_{2\widehat{s}} - \lambda_{51} f'_{5\widehat{s}}$, $\beta = -\lambda_{22} f'_{2\widehat{s}} - \lambda_{32} f'_{3\widehat{s}}$. Из пункта 3 следует, что $s_2 \neq 0$, и тогда $\deg f'_{3,\widehat{s}} = \deg f'_{4,\widehat{s}} = \deg f'_{6,\widehat{s}} = 0$, $\deg f'_{5,\widehat{s}} > 0$ и $\deg f'_{2\widehat{s}} \geqslant 0$; из пунктов 7 и 8 следует, что если $s_2 \neq 0$, то выполнены условия $\deg \lambda_{21} > 0$, $\deg \lambda_{22} > 0$, $\deg \lambda_{32} = 0$ и $\deg \lambda_{51} \geqslant 0$. Поэтому мы получаем, что условия $\deg \alpha > 0$ и $\deg \beta = 0$ выполнены в случае, когда $s_2 \neq 0$.

Далее, мы получаем $f'_{4\widehat{s}} = \frac{1}{\lambda_{41}}(\alpha - \lambda_{61} f'_{6\widehat{s}})$ из равенства (6.2.13), и тогда

$$\frac{\lambda_{42}\alpha}{\lambda_{41}} - \frac{\lambda_{61}\lambda_{42} f'_{6\widehat{s}}}{\lambda_{41}} + \lambda_{62} f'_{6\widehat{s}} = \beta.$$

Таким образом, мы имеем $\lambda_{41}\lambda_{62} - \lambda_{61}\lambda_{42} = \frac{1}{f'_{6\widehat{s}}}(\lambda_{41}\beta - \lambda_{42}\alpha)$; откуда видно, что элемент $\lambda_{41}\lambda_{62} - \lambda_{61}\lambda_{42}$ имеет степень 0 в случае, когда $s_2 \neq 0$.

12. Начнем строить матрицу $F \in \mathbf{H}^{6\times n}$, удовлетворяющую условиям $\deg F = V$ и

$$\lambda_{1i} f_{1j} + \lambda_{2i} f_{2j} + \lambda_{3i} f_{3j} + \lambda_{4i} f_{4j} + \lambda_{5i} f_{5j} + \lambda_{6i} f_{6j} = 0 \tag{6.2.14}$$

при всех $i \in \{1, 2, 3\}$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим пять возможных случаев.

Случай А. Предположим, что индекс $j \in \{1, \ldots, n\}$ таков, что минимум в выражении

$$\min_{\theta=1}^{6}\{\deg \lambda_{\theta 3} + v_{\theta j}\} \tag{6.2.15}$$

достигается в том и только том случае, когда $\theta \in \{1, 2\}$. Из пункта 9 тогда следует, что $v_{1j} = v_{2j}$. Положим $f_{kj} = f'_{kj}$ для любого $k \neq 1$, и также

$$f_{1j} = \frac{-\lambda_{23} f_{2j} - \lambda_{53} f_{5j} - \lambda_{63} f_{6j}}{\lambda_{13}}. \tag{6.2.16}$$

Единственное слагаемое степени v_{2j} в числителе — это $\lambda_{23} f_{2j}$, а все остальные слагаемые имеют большую степень, поэтому $\deg f_{1j} = v_{2j} = v_{1j}$. Таким образом, из пункта 5 следует равенство $\deg f_{kj} = v_{kj}$ при любых $k \in$

$\{1,2,3,4,5,6\}$. Равенства (6.2.14) для $i=1$ и $i=2$ теперь следуют из пункта 6, а для $i=3$ — из равенства (6.2.16).

Случай B. Теперь мы предположим, что $j \in \{s_0+1,\dots,s_0+s_1, s_0+s_1+s_2+s_3+s_4+1,\dots,n\}$ и рассмотрим два возможных случая.

Случай B1. Предположим, что значения $\theta=5$ и $\theta=6$ доставляют минимум выражению (6.2.15). Тогда $v_{6j}=h_5-h_6$ и $\min_{\theta=1}^{6}\{\deg\lambda_{\theta 3}+v_{\theta j}\}=h_5$. Теперь из пунктов 8 и 9 следует, что $\deg\det\Lambda[3,4,5]=h_5$, $\deg\det\Lambda[3,4,6]=h_6$, и для $i'=1$ и $i'=2$ выполнено условие $\min_{\theta=1}^{6}\{\deg\lambda_{\theta i'}+v_{\theta j}\}=0$. Из пункта 10 также следует, что $\deg\det\Lambda[3,5,6]=\deg\det\Lambda[4,5,6]=h_6$. Таким образом мы видим, что матрица $\Lambda\in\mathbf{H}^{6\times 3}$, набор $(v_{1j},\dots,v_{6j})$ и множество индексов $\{3,4,5,6\}$ удовлетворяют условиям леммы 6.1.15. Отсюда следует, что для некоторых элементов $f_{1j},\dots,f_{6j}\in\mathbf{H}$ выполнены условия $\deg f_{kj}=v_{kj}$ при всех $k\in\{1,2,3,4,5,6\}$, а также условия (6.2.14) при всех $i\in\{1,2,3\}$.

Случай B2. Предположим, что для некоторого $\chi\in\{1,2\}$ значение $\theta=\chi$ доставляет минимум выражению (6.2.15). Положим $f_{6j}=t^{v_{6j}}$; в силу леммы 6.1.16 найдется число $\xi\in\mathbb{C}^*$, удовлетворяющее условиям

$$\deg(\lambda_{53}\xi+\lambda_{63}f_{6j})=\min\{\deg\lambda_{53},\deg\lambda_{63}+v_{6j}\},\tag{6.2.17}$$

$$\deg(\lambda_{51}\xi+\lambda_{61}f_{6j})=0,\tag{6.2.18}$$

$$\deg\left(\frac{\lambda_{42}\lambda_{51}}{\lambda_{41}}\xi+\left(\frac{\lambda_{42}\lambda_{61}}{\lambda_{41}}-\lambda_{62}\right)f_{6j}\right)=0.\tag{6.2.19}$$

Положим $f_{5j}=\xi$; мы видим, что $\deg f_{5j}=v_{5j}$ и $\deg f_{6j}=v_{6j}$. В силу леммы 6.1.16 найдется число $\psi\in\mathbb{C}^*$, удовлетворяющее условию $\deg(\psi\lambda_{3-\chi,3}t^{v_{3-\chi,j}}+\lambda_{53}f_{5j}+\lambda_{63}f_{6j})=\min\{\deg\lambda_{3-\chi,3}+v_{3-\chi,j},\deg\lambda_{53}+v_{5j},\deg\lambda_{63}+v_{6j}\}$. Теперь мы положим $f_{3-\chi,j}=\psi t^{v_{3-\chi,j}}$ (тогда $\deg f_{3-\chi,j}=v_{3-\chi,j}$) и

$$f_{\chi j}=-\frac{\psi\lambda_{3-\chi,3}t^{v_{3-\chi,j}}+\lambda_{53}f_{5j}+\lambda_{63}f_{6j}}{\lambda_{\chi 3}}.\tag{6.2.20}$$

В силу предположения случая B2 значение $\theta=\chi$ доставляет минимум выражению (6.2.15), и тогда, поскольку набор $(\deg\lambda_{13}\ \deg\lambda_{23}\ \deg\lambda_{53}\ \deg\lambda_{63})$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $V[1,2,5,6]$, выполнены условия $\deg\lambda_{\chi 3}+v_{\chi j}=\min\{\deg\lambda_{3-\chi,3}+v_{3-\chi,j},\deg\lambda_{53}+v_{5j},\deg\lambda_{63}+v_{6j}\}$. Из условия (6.2.20) теперь следует, что $\deg f_{\chi j}=v_{\chi j}$, и поэтому условие (6.2.14) выполняется при $i=3$ для любых значений f_{3j} и f_{4j}, поскольку в силу пункта 9 верно, что $\lambda_{33}=\lambda_{43}=0$.

Далее, мы полагаем

$$f_{4j} = \frac{-\lambda_{21}f_{2j} - \lambda_{51}f_{5j} - \lambda_{61}f_{6j}}{\lambda_{41}}, f_{3j} = \frac{-\lambda_{22}f_{2j} - \lambda_{42}f_{4j} - \lambda_{62}f_{6j}}{\lambda_{32}}. \qquad (6.2.21)$$

В силу пункта 6 выполнено условие $\lambda_{11} = \lambda_{31} = \lambda_{12} = \lambda_{52} = 0$, откуда в виду (6.2.21) следует выполнение условий (6.2.14) при $i = 1$ и $i = 2$.

Наконец, из пункта 8 следует, что $\deg(\lambda_{21}f_{2j}) > 0$, поэтому в силу условий (6.2.18) имеем $\deg f_{4j} = 0 = v_{4j}$. Пользуясь определением элемента f_{3j}, мы заменяем значения элементов f_{4j} и f_{5j} на их выражения и получаем, что

$$f_{3j} = \frac{\lambda_{42}\lambda_{51}}{\lambda_{32}\lambda_{41}}\xi + \left(\frac{\lambda_{61}\lambda_{42}}{\lambda_{32}\lambda_{41}} - \frac{\lambda_{62}}{\lambda_{32}}\right) f_{6j} + \left(\frac{\lambda_{21}\lambda_{42}}{\lambda_{32}\lambda_{41}} - \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{32}}\right) f_{2j}.$$

Из пункта 8 и условий (6.2.19) следует теперь, что $\deg f_{3j} = 0 = v_{3j}$. Это заканчивает разбор случая B2.

В силу пункта 9 набор $(\deg \lambda_{13}, \deg \lambda_{23}, \deg \lambda_{53}, \deg \lambda_{63})$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $V[1, 2, 5, 6]$. Поэтому если ни значение $\theta = 1$, ни значение $\theta = 2$ не доставляют минимума выражению (6.2.15), то значения $\theta = 5$ и $\theta = 6$ доставляют минимум этому выражению. Таким образом, случаи B1 и B2 исчерпывают все возможности, и разбор случая B завершен.

Случай C. Теперь мы предположим, что $j \in \{s_0+s_1+1, \dots, s_0+s_1+s_2\}$, и что предположение случая A не выполняется для j.

C1. В силу пункта 4 условие $v_{g_1 j} = 0$ выполнено при некотором $g_1 \in \{1, 2\}$, из пункта 9 вытекает, что $\deg \lambda_{g_1 3} = 0$. Таким образом, минимум выражению (6.2.15) доставляет значение $\theta = g_1$. В силу пункта 9 набор $(\deg \lambda_{13}, \deg \lambda_{23}, \deg \lambda_{53}, \deg \lambda_{63})$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $V[1, 2, 5, 6]$, и потому минимум в выражении (6.2.15) также достигается при некотором $g_2 \neq g_1$. Поскольку предположение случая A не выполняется для j, мы можем считать, что $g_2 \notin \{1, 2\}$. Из равенства (6.2.11) теперь следует, что $g_2 \neq 5$, из пункта 9 вытекает, что $g_2 \notin \{3, 4\}$; таким образом, $g_2 = 6$. Тогда мы имеем $\deg \lambda_{63} + v_{6j} = \deg \lambda_{g_1 3} + v_{g_1 j} = 0$, то есть, $\deg \lambda_{63} = 0$.

C2. Из пунктов 8 и 9 следует, что $\deg \det \Lambda[g_1, 3, 4] = \deg \det \Lambda[g_1, 3, 6] = 0$, и для любого $i \in \{1, 2, 3\}$ выполнено условие $\min_{\theta=1}^{6}\{\deg \lambda_{\theta i} + v_{\theta j}\} = 0$. Равенство $\deg \det \Lambda[g_1, 4, 6] = 0$ следует из пункта 11, а равенство $\deg \det \Lambda[3, 4, 6] = 0$ — из пунктов 8 и C1. Таким образом, матрица $\Lambda \in \mathbf{H}^{6\times 3}$, набор $(v_{1j}, \dots, v_{6j})$ и множество индексов $\{g_1, 3, 4, 6\}$ удовлетворяют условию леммы 6.1.15. Отсюда следует, что для некоторых элементов $f_{1j}, \dots, f_{6j} \in \mathbf{H}$ выполнено условие $\deg f_{kj} = v_{kj}$ при всех $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а также верны равенства (6.2.14) при всех $i \in \{1, 2, 3\}$.

Случай D. Теперь предположим, что $j \in \{s_0 + s_1 + s_2 + 1, \dots, s_0 + s_1 + s_2 + s_3\}$, и что предположение пункта A не верно для j. Рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта C1, показывают, что минимум выражению (6.2.15) доставляют некоторые индексы $\theta_1 \in \{1, 2\}$ и $\theta_2 \in \{5, 6\}$, и мы также получаем $\deg \lambda_{\theta_2 3} = 0$. В силу пунктов 8 и 9 выполнены условия $\deg \det \Lambda[\theta_1, 3, 5] = \deg \det \Lambda[\theta_1, 3, 6] = \deg \det \Lambda[\theta_1, 5, 6] = 0$, и для всех $i \in \{1, 2, 3\}$ верно равенство $\min_{\theta=1}^{6}\{\deg \lambda_{\theta i} + v_{\theta j}\} = 0$. Равенство $\deg \det \Lambda[3, 5, 6] = 0$ следует из пункта 10. Таким образом матрица $\Lambda \in \mathbf{H}^{6\times 3}$, набор $(v_{1j}, \dots, v_{6j})$ и множество индексов $\{\theta_1, 3, 5, 6\}$ удовлетворяют условию леммы 6.1.15. Отсюда следует, что для некоторых элементов $f_{1j}, \dots, f_{6j} \in \mathbf{H}$ выполнено условие $\deg f_{kj} = v_{kj}$ при всех $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а также верны равенства (6.2.14) при всех $i \in \{1, 2, 3\}$.

Случай E. Наконец, предположим, что $j \in \{s_0+s_1+s_2+s_3+1, \dots, s_0+s_1+s_2+s_3+s_4\}$, а также, что предположение пункта A не выполняется для j. Рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта C1, показывают, что минимум выражению (6.2.15) доставляют некоторые индексы $\theta'_1 \in \{1, 2\}$ и $\theta'_2 \in \{5, 6\}$. Из пункта 8 следует, что $\deg \det \Lambda[\theta'_1, 4, 5] = \deg \det \Lambda[\theta'_1, 5, 6] = 0$, и для любого $i \in \{1, 2, 3\}$ выполнено условие $\min_{\theta=1}^{6}\{\deg \lambda_{\theta i} + v_{\theta j}\} = 0$. Из пунктов 8 и 11 также следует, что $\deg \det \Lambda[\theta'_1, 4, 6] = 0$, из пункта 10 вытекает $\deg \det \Lambda[4, 5, 6] = 0$. Таким образом матрица $\Lambda \in \mathbf{H}^{6\times 3}$, набор $(v_{1j}, \dots, v_{6j})$ и множество индексов $\{\theta'_1, 4, 5, 6\}$ удовлетворяют условию леммы 6.1.15. Отсюда следует, что для некоторых элементов $f_{1j}, \dots, f_{6j} \in \mathbf{H}$ выполнено условие $\deg f_{kj} = v_{kj}$ при всех $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а также верны равенства (6.2.14) при всех $i \in \{1, 2, 3\}$.

Заметим, что случаи A–E исчерпывают все возможности для индекса j. В самом деле, в силу пункта 9 индексы $j' \in \{1, \dots, s_0\}$ удовлетворяют условиям случая A. Все оставшиеся возможности были рассмотрены в случаях B–E. Таким образом, построенная матрица F удовлетворяет условию $V = \deg F$, а также равенствам (6.2.14) при всех $i \in \{1, 2, 3\}$ и $j \in \{1, \dots, n\}$. По построению матрицы Λ это означает, что любая строка матрицы F является линейной комбинацией ее второй, четвертой и шестой строк. Это показывает, что $rank(F) \leqslant 3$. В силу определения 1.3.23 верно, что $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(W) \leqslant 3$. Противоречие с пунктом 1 показывает, что такой матрицы W не существует. $\square$

6.2.3 Случай (iv)

В этом подразделе мы разбираем случай (iv) теоремы 6.2.1. Начнем с доказательства полезной технической леммы.

Лемма 6.2.4. *Пусть тропический ранг матрицы $M \in \mathbb{R}^{4\times n}$ не превосхо-*

дит трех, столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix}$ *принадлежит матрице* $\mathcal{P}(M)$*, строки матрицы* $\mathcal{P}(M)[2,3,4]$ *попарно различны, каждая строка матрицы* $\mathcal{P}(M)$ *содержит по крайней мере один нуль. Тогда набор* $(x,0,0,0)$ *реализует тропическую зависимость строк матрицы* M *при некотором положительном* x*.*

Доказательство. В силу теоремы 6.1.19 найдется набор (x,a,b,c), реализующий тропическую зависимость строк матрицы M, и мы можем считать, что $\min\{x,a,b,c\} = 0$. Из леммы 6.1.7 тогда следует, что $x > 0$ и $a = b = c = 0$. □

Воспользуемся доказанной леммой для характеризации тропических матриц, реализующих случай (iv) теоремы 6.2.1.

Лемма 6.2.5. *Пусть матрица* W *реализует случай (iv) теоремы 6.2.1. Тогда найдутся положительные числа* x *и* y*, для которых наборы* $(0,0,0,x)$ *и* $(y,0,0,0)$ *реализуют тропическую зависимость строк матриц* $W[1,2,3,4]$ *и* $W[3,4,5,6]$*, соответственно.*

Доказательство. 1. В предположении случая (iv) матрица W удовлетворяет условиям $\operatorname{trop}(W) = 3$, $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(W) > 3$ и

$$\mathcal{P}(W) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0\ldots0 & \infty\ldots\infty & \\ 0\ldots0 & \infty\ldots\infty & P' \\ 0\ldots0 & \infty\ldots\infty & \\ \hline \infty\ldots\infty & 0\ldots0 & \\ \infty\ldots\infty & 0\ldots0 & P'' \\ \underbrace{\infty\ldots\infty}_{p} & \underbrace{0\ldots0}_{q} & \underbrace{}_{r} \end{array}\right),$$

где числа p и q ненулевые, число r может равняться нулю, всякий столбец матрицы P', как и всякий столбец матрицы P'', содержит по крайней мере два нуля. В силу леммы 6.1.11 мы можем считать, не ограничивая общности, что минимальный элемент любого столбца матрицы W равен 0.

2. Мы докажем только, что набор $(y,0,0,0)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $W[3,4,5,6]$ при некотором $y > 0$, поскольку случай матрицы $W[1,2,3,4]$ может быть разобран аналогично. Возможны два случая.

Случай A. Предположим, что ∞ является элементом матрицы P''. В этом случае, если некоторые строки матрицы P'' совпадают друг с другом, то мы прибавляем малое $-\varepsilon < 0$ к каждому элементу последних трех строк матрицы W. В силу определения 6.1.4 полученная матрица удовлетворяет

условиям случая (v) теоремы 6.2.1 с точностью до перестановок строк и столбцов.

Полученное противоречие с теоремой 6.2.2 показывает, что строки матрицы P'' попарно различны. В этом случае применение леммы 6.2.4 завершает разбор случая A.

Случай B. Предположим теперь, что матрица P'' состоит из нулевых элементов. Будем разбирать этот случай методом *от противного*. Предположим, что ни при каком $y > 0$ набор $(y, 0, 0, 0)$ не реализует тропической зависимости строк матрицы $W[3, 4, 5, 6]$.

B1. Обозначим через G множество всех индексов $j \in \{1, \ldots, p\}$, для которых минимум на множестве $\{w_{4j}, w_{5j}, w_{6j}\}$ достигается ровно один раз. Если множество G пусто, то набор $(0, 0, 0)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $W[4, 5, 6]$, что дает противоречие с предположением случая B. Поэтому множество G непусто, и мы обозначаем через χ минимальный элемент множества $\bigcup_{g \in G} \{w_{4g}, w_{5g}, w_{6g}\}$.

Теперь предположим, что ни для какой пары $(j_1, j_2) \in \{1, \ldots, p\}^2$ минимум на множестве $\{w_{4j_1}, w_{5j_1}, w_{6j_1}, w_{4j_2}, w_{5j_2}, w_{6j_2}\}$ не достигается ровно один раз. Тогда для каждого индекса $j \in \{1, \ldots, p\}$ мы имеем $\min\{w_{4j}, w_{5j}, w_{6j}\} \leqslant \chi$, и если минимум множества $\{w_{4j}, w_{5j}, w_{6j}\}$ меньше χ, то этот минимум достигается по крайней мере два раза. Таким образом, в этом случае набор $(\chi, 0, 0, 0)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $W[3, 4, 5, 6]$. Противоречие с предположением случая B показывает, что найдутся индексы $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, p\}$, для которых минимум на множестве $\{w_{4j_1}, w_{5j_1}, w_{6j_1}, w_{4j_2}, w_{5j_2}, w_{6j_2}\}$ достигается ровно один раз. Будем считать, не ограничивая общности, что $a = w_{4j_1} < \min\{w_{5j_1}, w_{6j_1}, w_{4j_2}, w_{5j_2}, w_{6j_2}\}$.

B2. Через J' обозначим множество всех индексов j, при которых не все из чисел w_{4j}, w_{5j}, w_{6j} равны между собой. Положим также

$$a' = \min_{4 \preceq i \preceq 6, j \in J'} \{w_{ij}\}.$$

В силу рассуждений пункта B1 имеем $j_1 \in J'$ и $a' \leqslant a$.

B3. Теперь прибавим $-a'$ к каждому элементу последних трех строк матрицы W. В силу определения 6.1.4 шаблон полученной матрицы V имеет вид

$$\mathcal{P}(V) = \left(\begin{array}{c|c} 0 \ldots 0 & \\ 0 \ldots 0 & \widehat{P} \\ 0 \ldots 0 & \\ \hline & 0 \ldots 0 \\ \widetilde{P} & 0 \ldots 0 \\ & 0 \ldots 0 \end{array}\right), \tag{6.2.22}$$

где матрица $\widetilde{P}$ содержит по крайней мере один нуль, и столбец $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ не принадлежит матрице $\widetilde{P}$. В силу пункта B1 столбец матрицы $\widetilde{P}$ с индексом j_2 равен $\begin{pmatrix}\infty\\\infty\\\infty\end{pmatrix}$. Рассмотрим два возможных случая.

B4. Предположим, что две последние строки матрицы $\widetilde{P}$ различны. Тогда мы можем считать, не ограничивая общности, что $[\mathcal{P}(V)]_{5j_0} = 0$ и $[\mathcal{P}(V)]_{6j_0} = \infty$ при некотором j_0. Отсюда следует, что $v_{6j_0} > v_{5j_0} = 0$, и в силу рассуждений пункта B3 мы имеем

$$V[3,4,5,6|j_2,j_1,j_0,p'+1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & z_1 \\ w_{4j_2}-a' & a-a' & z_2 & 0 \\ w_{5j_2}-a' & w_{5j_1}-a' & 0 & 0 \\ w_{6j_2}-a' & w_{6j_1}-a' & v_{6j_0} & 0 \end{pmatrix},$$

где числа z_1, z_2 неотрицательны. Из рассуждений пункта B1 следует, что $a-a' < \min\{w_{5j_1}-a', w_{6j_1}-a', w_{4j_2}-a', w_{5j_2}-a', w_{6j_2}-a'\}$, поэтому в силу определения 1.2.5 матрица $V[3,4,5,6|j_2,j_1,j_0,p'+1]$ тропически невырождена. Поэтому $\mathrm{trop}(W) \geqslant 4$, и мы получаем противоречие с пунктом 1.

B5. Таким образом, рассуждения пункта B4 показывают, что последние две строки матрицы $\widetilde{P}$ совпадают.

B5.1. Если первая строка матрицы $\widetilde{P}$ содержит по крайней мере один нуль, то мы прибавим достаточно малое $\varepsilon > 0$ к каждому элементу первых четырех строк матрицы V. В силу определения 6.1.4 полученная матрица удовлетворяет условиям случая (ii) теоремы 6.2.1. Это противоречит утверждению теоремы 6.2.3.

B5.2. В противном случае все элементы первой строки матрицы $\widetilde{P}$ равны ∞, и мы прибавим малое $-\varepsilon < 0$ к каждому элементу последних трех строк матрицы V. В силу определения 6.1.4 полученная матрица удовлетворяет условиям случая (v) теоремы 6.2.1. Это противоречит утверждению теоремы 6.2.2.

Полученное противоречие завершает разбор случая B и показывает таким образом, что набор $(y,0,0,0)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $W[3,4,5,6]$ при некотором $y > 0$. □

Теперь мы готовы доказать основной результат этого подраздела.

Теорема 6.2.6. *Случай (iv) теоремы 6.2.1 не реализуется.*

Доказательство. 1. Предположим, что матрица W реализует случай (iv), тогда $\mathrm{trop}(W) = 3$ и $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(W) > 3$. Также в силу леммы 6.1.11 мы можем

предполагать, что элементы матрицы W неотрицательны и

$$W = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}0\dots0\\0\dots0\\0\dots0\end{matrix} & \widetilde{P}' & P' \\ \hline & \begin{matrix}0\dots0\\0\dots0\\ \underbrace{0\dots0}_{q}\end{matrix} & \\ \hline \underbrace{\widetilde{P''}}_{p} & & \underbrace{P''}_{r} \end{array}\right), \tag{6.2.23}$$

где матрицы $\widetilde{P}'$ и $\widetilde{P''}$ состоят из положительных чисел, и каждый столбец каждой из матриц P' и P'' содержит по крайней мере два нуля.

2. В силу леммы 6.2.5 найдутся положительные числа a и b, для которых наборы $(0,0,0,a)$ и $(b,0,0,0)$ реализуют тропическую зависимость строк матриц $W[1,2,3,4]$ и $W[3,4,5,6]$, соответственно.

3. Через $\Lambda \in \mathbf{H}^{3\times 3}$ обозначим матрицу, элементы которой имеют степень 0, алгебраические дополнения имеют степень a, а определитель имеет степень $2a+b$. Например, можно положить

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1+t^a & 1 & 1 \\ 1 & 1+t^a & 1 \\ 1 & 1 & \frac{2}{2+t^a} + t^{a+b} \end{pmatrix}.$$

4. Мы покажем, что для любого индекса $j \in \{1,\dots,n\}$ найдутся элементы $f_{1j},\dots,f_{6j}$ степеней $w_{1j},\dots,w_{6j}$, соответственно, удовлетворяющие условию

$$\Lambda \begin{pmatrix} f_{1j} \\ f_{2j} \\ f_{3j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^a f_{4j} \\ t^a f_{5j} \\ t^a f_{6j} \end{pmatrix}. \tag{6.2.24}$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай A. Предположим, что $j \in \{1,\dots,p\}$, и минимум на множестве $\{w_{4j}, w_{5j}, w_{6j}\}$ достигается ровно один раз. Из пункта 2 тогда следует, что $\min\{w_{4j}, w_{5j}, w_{6j}\} = b$, поэтому для любого $i' \in \{1,2,3\}$ элемент

$$f_{i'j} = \frac{t^{a+w_{4j}}\Lambda_{1i'} + t^{a+w_{5j}}\Lambda_{2i'} + t^{a+w_{6j}}\Lambda_{3i'}}{\det\Lambda}$$

имеет нулевую степень. Положив $f_{4j} = t^{w_{4j}}$, $f_{5j} = t^{w_{5j}}$, $f_{6j} = t^{w_{6j}}$, мы применим формулы Крамера для проверки того, что элементы $f_{1j},\dots,f_{6j}$ удовлетворяют условию (6.2.24).

Случай B. Предположим теперь, что $j \in \{1,\dots,p\}$, и минимум на множестве $\{w_{4j}, w_{5j}, w_{6j}\}$ достигается по крайней мере дважды. Из пункта 2

теперь следует, что $\min\{w_{4j}, w_{5j}, w_{6j}\} = c \leqslant b$. В силу равенства (6.2.23) число c положительно, и мы можем считать, не ограничивая общности, что $w_{4j} = w_{5j} = c$ и $w_{6j} = d \geqslant c$. В этом случае степень элемента

$$f_{5j} := -\frac{\gamma_1 t^c \Lambda_{11}}{\Lambda_{21}} - \frac{t^d \Lambda_{31}}{\Lambda_{21}} + t^b \tag{6.2.25}$$

равна c для некоторого $\gamma_1 \in \mathbb{C}^*$. Положим также $f_{4j} = \gamma_1 t^c$ и $f_{6j} = t^d$.

Теперь для каждого $i' \in \{1, 2, 3\}$ положим

$$f_{i'j} = \frac{t^a f_{4j} \left(\Lambda_{1i'} - \frac{\Lambda_{2i'}\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}}\right) + t^a f_{6j} \left(\Lambda_{3i'} - \frac{\Lambda_{2i'}\Lambda_{31}}{\Lambda_{21}}\right) + t^{a+b}\Lambda_{2i'}}{\det \Lambda}.$$

В силу пункта 3 выполнены равенства $\deg f_{1j} = \deg f_{2j} = \deg f_{3j} = 0$. В силу равенства (6.2.25) также выполнено условие

$$f_{i'j} = \frac{t^a f_{4j}\Lambda_{1i'} + t^a f_{5j}\Lambda_{2i'} + t^a f_{6j}\Lambda_{3i'}}{\det \Lambda},$$

поэтому условие (6.2.24) следует теперь из формул Крамера.

Случай C. Теперь предположим, что $j \in \{p+1, \ldots, p+q\}$, и минимум на множестве $\{w_{1j}, w_{2j}, w_{3j}\}$ достигается ровно один раз. Из пункта 2 следует, что $\min\{w_{1j}, w_{2j}, w_{3j}\} = a$, поэтому при каждом $i' \in \{1, 2, 3\}$ элемент

$$f_{i'+3,j} = t^{-a} \left(\lambda_{i'1} t^{w_{1j}} + \lambda_{i'2} t^{w_{2j}} + \lambda_{i'3} t^{w_{3j}}\right)$$

имеет нулевую степень. Положим также $f_{1j} = t^{w_{1j}}$, $f_{2j} = t^{w_{2j}}$, $f_{3j} = t^{w_{3j}}$ и убедимся, что выбранные значения удовлетворяют условию (6.2.24).

Случай D. Теперь предположим, что $j \in \{p+1, \ldots, p+q\}$, и минимум на множестве $\{w_{1j}, w_{2j}, w_{3j}\}$ достигается по крайней мере дважды. Из пункта 2 следует, что $\min\{w_{1j}, w_{2j}, w_{3j}\} = h \leqslant a$. В силу равенства (6.2.23) число h положительно, и мы можем считать, не ограничивая общности, что $w_{1j} = w_{2j} = h$ и $w_{3j} = g \geqslant h$. В этом случае степень элемента

$$f_{2j} = -\frac{\gamma_2 t^h \lambda_{11}}{\lambda_{12}} - \frac{t^g \lambda_{13}}{\lambda_{12}} + t^a \tag{6.2.26}$$

равна h при некотором $\gamma_2 \in \mathbb{C}^*$. Положим также $f_{1j} = \gamma_2 t^h$ и $f_{3j} = t^g$.

Далее, для каждого $i' \in \{1, 2, 3\}$ положим $f_{i'+3,j} = t^{-a} \left(\lambda_{i'1} f_{1j} + \lambda_{i'2} f_{2j} + \lambda_{i'3} f_{3j}\right)$ и убедимся, что эти значения удовлетворяют условию (6.2.24). Из равенства (6.2.26) следует также, что

$$f_{i'+3,j} = \frac{\gamma_2 t^h \left(\lambda_{i'1} - \frac{\lambda_{11}\lambda_{i'2}}{\lambda_{12}}\right) + t^g \left(\lambda_{i'3} - \frac{\lambda_{13}\lambda_{i'2}}{\lambda_{12}}\right) + \lambda_{i'2} t^a}{t^a},$$

поэтому в силу пункта 3 верны равенства $\deg f_{4j} = \deg f_{5j} = \deg f_{6j} = 0$.

Случай E. Наконец, разберем случай $j \in \{p+q+1, \dots, n\}$. В силу пункта 1 мы можем считать, не ограничивая общности, что $w_{1j} = w_{2j} = 0 = w_{4j} = w_{5j} = 0$, $w_{3j} = \alpha \geqslant 0$ и $w_{6j} = \beta \geqslant 0$. В этом случае все комплексные числа ζ кроме, возможно, одного таковы, что значение

$$f_{4j} = -\frac{\zeta\Lambda_{23}}{\Lambda_{13}} - \frac{t^\beta\Lambda_{33}}{\Lambda_{13}} + t^{b+\alpha}$$

имеет степень нуль. Мы также выбираем ζ отличным от нуля и полагаем $f_{5j} = \zeta$, $f_{6j} = t^\beta$. Далее, мы полагаем

$$f_{i'j} = \frac{t^a f_{4j}\Lambda_{1i'} + t^a f_{5j}\Lambda_{2i'} + t^a f_{6j}\Lambda_{3i'}}{\det\Lambda}$$

для всех $i' \in \{1,2,3\}$, и проверяем условие (6.2.24) с помощью формул Крамера.

В силу определений при любых $i' \in \{1,2,3\}$ выполнены условия

$$f_{i'j} = \frac{t^{a+\beta}\left(\Lambda_{3i'} - \frac{\Lambda_{33}\Lambda_{1i'}}{\Lambda_{13}}\right) + \zeta t^a\left(\Lambda_{2i'} - \frac{\Lambda_{23}\Lambda_{1i'}}{\Lambda_{13}}\right) + t^{a+b+\alpha}\Lambda_{1i'}}{\det\Lambda},$$

в частности, $f_{3j} = \frac{t^{a+b+\alpha}\Lambda_{13}}{\det\Lambda}$ (поэтому в силу пункта 3 верно $\deg f_{3j} = \alpha$). В силу пункта 3 мы также имеем $\deg\Lambda = 2a+b$, $\deg\Lambda_{1i'} = a$, $\deg\left(\Lambda_{3i'} - \frac{\Lambda_{33}\Lambda_{1i'}}{\Lambda_{13}}\right) = a+b$ и $\deg\left(\Lambda_{2i'} - \frac{\Lambda_{23}\Lambda_{1i'}}{\Lambda_{13}}\right) = a+b$.

Таким образом, мы получаем $f_{i'j} = t^\alpha\phi_1 + \zeta\phi_2 + t^\beta\phi_3$ для некоторых ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 степени нуль. Наконец, поскольку числа α и β неотрицательны, все комплексные числа ζ кроме, возможно, одного или двух удовлетворяют условиям $\deg f_{i'j} = 0$ при $i' \in \{1,2\}$. В силу бесконечности поля $\mathbb{C}$ найдется число ζ, для которого $\deg f_{ij} = w_{ij}$ при всех $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Случаи A–E исчерпывают все возможности, поэтому найдется матрица F, удовлетворяющая условию $W = \deg F$ и условию (6.2.24). Поэтому $rank F \leqslant 3$, и в силу определения 1.3.23 выполнено неравенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(W) \leqslant 3$. Противоречие с пунктом 1 показывает, что такой матрицы W на самом деле не существует. □

6.2.4 Случай (iii)

Для разбора случая (iii) теоремы 6.2.1 нам требуется следующая лемма.

Лемма 6.2.7. *Предположим, что матрица W реализует случай (iii) теоремы 6.2.1, и носитель некоторого столбца матрицы $\mathcal{P}(W)$ равен $\{r_1, r_2, r_3\}$. Если $\{r_4, r_5, r_6\} = \{1, \dots, 6\} \setminus \{r_1, r_2, r_3\}$, то строки матрицы $\mathcal{P}(W)[r_4, r_5, r_6]$ попарно различны.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда мы можем считать, не ограничивая общности, что четвертая и пятая строки матрицы $\mathcal{P}(W)$ совпадают и $\{r_1, r_2, r_3\} = \{1, 2, 3\}$. В этом случае

$$\mathcal{P}(W) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix}0\dots0\\0\dots0\\0\dots0\end{matrix} & P_2 & P_3 & P_4 \\ \hline \infty\dots\infty & 0\dots0 & 0\dots0 & \infty\dots\infty \\ \infty\dots\infty & 0\dots0 & 0\dots0 & \infty\dots\infty \\ \hline \underbrace{\infty\dots\infty}_{h_1} & \underbrace{0\dots0}_{h_2} & \underbrace{\infty\dots\infty}_{h_3} & \underbrace{0\dots0}_{h_4} \end{array}\right),$$

где значения h_2, h_3 и h_4 могут быть равны нулю. В силу предположений пункта (iii) на самом деле $h_4 = 0$. Более того, теорема 6.2.1 требует, чтобы каждая строка матрицы $\mathcal{P}(W)$ содержала по крайней мере один нуль, и мы имеем $h_2 \neq 0$.

Теперь мы прибавляем малое $\varepsilon > 0$ к каждому элементу первых трех строк матрицы W. В силу определения 6.1.4 полученная матрица удовлетворяет условиям либо случая (v) (если $h_3 \neq 0$) или случая (iv) (если $h_3 = 0$) теоремы 6.2.1 с точностью до перестановок строк и столбцов. Противоречие с одной из теорем 6.2.2 и 6.2.6 завершает доказательство леммы. □

Теперь мы докажем основной результат подраздела.

Теорема 6.2.8. *Случай (iii) теоремы 6.2.1 не реализуется.*

Доказательство. 1. Предположим, что матрица W реализует случай (iii). Тогда, в частности, $\operatorname{trop}(W) = 3$, $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(W) > 3$ и

$$\mathcal{P}(W) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0\dots0 & 0\dots0 & \infty\dots\infty & \infty\dots\infty & \\ 0\dots0 & \infty\dots\infty & 0\dots0 & \infty\dots\infty & \\ 0\dots0 & \infty\dots\infty & \infty\dots\infty & 0\dots0 & P' \\ \infty\dots\infty & 0\dots0 & 0\dots0 & \infty\dots\infty & \\ \infty\dots\infty & 0\dots0 & \infty\dots\infty & 0\dots0 & \\ \underbrace{\infty\dots\infty}_{q_1} & \underbrace{\infty\dots\infty}_{q_2} & \underbrace{0\dots0}_{q_3} & \underbrace{0\dots0}_{q_4} & \end{array}\right), \tag{6.2.27}$$

где каждое из чисел $q_1, \dots, q_4$ может быть равным нулю.

2. В силу леммы 6.1.11 мы можем считать, что минимальный элемент всякого столбца матрицы W равен нулю.

3. Если $q_1 \neq 0$, то в силу лемм 6.2.4 и 6.2.7 найдется положительное число $a > 0$, для которого набор $(a, 0, 0, 0)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $W[3, 4, 5, 6]$. Если же $q_1 = 0$, то мы полагаем $a = 0$.

Аналогично, если $q_2 \neq 0$, то найдется положительное число $b > 0$, для которого набор $(b, 0, 0, 0)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $W[1, 2, 3, 6]$. Если же $q_2 = 0$, то мы полагаем $b = 0$.

Если $q_3 \neq 0$, то найдется положительное число $c > 0$, для которого набор $(0, c, 0, 0)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $W[1, 2, 3, 5]$. Если же $q_3 = 0$, то мы полагаем $c = 0$.

Если $q_4 \neq 0$, то найдется положительное число $d > 0$, для которого набор $(0, 0, d, 0)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $W[1, 2, 3, 4]$. Если же $q_4 = 0$, то мы полагаем $d = 0$.

4. Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 + t^a & 1 & -t^b \\ 1 & 2t^c & 1 \\ 5t^d & 1 & \frac{2+t^b-10t^{b+c+d}-5t^d}{-1+4t^c+2t^{a+c}} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и обозначим через L подматрицу $\Lambda[1, 2, 3]$.

5. Пусть индексы $g_1, g_2, g_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ попарно различны. Можно проверить, что $\deg \det \Lambda[g_1, g_2, g_3] = 0$, если множество $\{g_1, g_2, g_3\}$ не является носителем ни одного столбца матрицы $\mathcal{P}(W)$. Кроме того, вычисления показывают, что всякое алгебраическое дополнение матрицы L имеет степень нуль и $\deg \det L = a$.

6. Будем показывать, что для любого индекса $j \in \{1, \ldots, n\}$ найдутся элементы $f_{1j}, \ldots, f_{6j}$ степеней $w_{1j}, \ldots, w_{6j}$, соответственно, для которых выполнено условие

$$\lambda_{1i} f_{1j} + \ldots + \lambda_{6i} f_{6j} = 0 \text{ для всех } i \in \{1, 2, 3\}. \tag{6.2.28}$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай А. Сначала предположим, что $j \in \{1, \ldots, q_1\}$, и минимум на множестве $\{w_{4j}, w_{5j}, w_{6j}\}$ достигается ровно один раз. В силу пункта 3 верно равенство $\min\{w_{4j}, w_{5j}, w_{6j}\} = a$, и потому в силу пункта 5 для любого индекса $i' \in \{1, 2, 3\}$ элемент

$$f_{i'j} = \frac{t^{w_{4j}} L_{i'1} + t^{w_{5j}} L_{i'2} + t^{w_{6j}} L_{i'3}}{\det L}$$

имеет степень нуль. Положим также $f_{4j} = t^{w_{4j}}$, $f_{5j} = t^{w_{5j}}$, $f_{6j} = t^{w_{6j}}$ и проверим, что в силу формул Крамера набор $f_{1j}, \dots, f_{6j}$ удовлетворяет условию (6.2.28).

Случай B. Теперь предположим, что $j \in \{1, \dots, q_1\}$, и минимум на множестве $\{w_{4j}, w_{5j}, w_{6j}\}$ достигается по крайней мере дважды. Из пункта 3 следует, что $\min\{w_{4j}, w_{5j}, w_{6j}\} = h \leqslant a$, и число h тогда положительно в силу равенства (6.2.27). Мы можем считать, не ограничивая общности, что $w_{4j} = w_{5j} = h$ и $w_{6j} = u \geqslant h$, и тогда степень элемента

$$f_{5j} = -\frac{\gamma t^h L_{11}}{L_{12}} - \frac{t^u L_{13}}{L_{12}} + t^a \tag{6.2.29}$$

равна h для некоторого $\gamma \in \mathbb{C}^*$. Положим также $f_{4j} = \gamma t^h$, $f_{6j} = t^u$.

Теперь при каждом $i' \in \{1, 2, 3\}$ мы полагаем

$$f_{i'j} = \frac{f_{4j}\left(L_{i'1} - \frac{L_{i'2}L_{11}}{L_{12}}\right) + f_{6j}\left(L_{i'3} - \frac{L_{i'2}L_{13}}{L_{12}}\right) + t^a L_{i'2}}{\det L}.$$

В силу пункта 5 выполнено условие $\deg f_{1j} = \deg f_{2j} = \deg f_{3j} = 0$, и из условий (6.2.29) следует, что

$$f_{i'j} = \frac{f_{4j}L_{i'1} + f_{5j}L_{i'2} + f_{6j}L_{i'3}}{\det L},$$

поэтому применение формул Крамера завершает проверку условия (6.2.28).

Случай C. Теперь пусть $j \in \{q_1 + 1, \dots, q_1 + \dots + q_4\}$. Мы будем рассматривать только случай, когда $j \in \{q_1 + 1, \dots, q_1 + q_2\}$, поскольку если $j \in \{q_1 + q_2 + 1, \dots, q_1 + q_2 + q_3\}$ или $j \in \{q_1 + q_2 + q_3 + 1, \dots, q_1 + \dots + q_4\}$, то доказательство может быть получено аналогичными рассуждениями. В силу пункта 2 набор $(\deg \lambda_{13}, \deg \lambda_{23}, \deg \lambda_{33}, \deg \lambda_{63}) = (b, 0, 0, 0)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $W[1, 2, 3, 6]$. Теперь из леммы 6.1.18 следует, что найдутся элементы $f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}, f_{6j} \in \mathbf{H}$ степеней $w_{1j}, w_{2j}, w_{3j}, w_{6j}$, соответственно, удовлетворяющие условию $\lambda_{13}f_{1j} + \lambda_{23}f_{2j} + \lambda_{33}f_{3j} + \lambda_{63}f_{6j} = 0$. В силу пунктов 1 и 3 элементы $f_{4j} = \lambda_{11}f_{1j} + \lambda_{21}f_{2j} + \lambda_{31}f_{3j}$ и $f_{5j} = \lambda_{12}f_{1j} + \lambda_{22}f_{2j} + \lambda_{32}f_{3j}$ имеют нулевые степени. Условие (6.2.28) теперь может быть проверено с помощью формул Крамера.

Случай D. Пусть $j \in \{q_1 + \dots + q_4 + 1, \dots, n\}$. В силу предположений случая (iii) теоремы 6.2.1 множество $\mathrm{Supp}_j(\mathcal{P}(W))$ имеет подмножество $\{u, v, y, z\}$, которое не включает в себя никакого носителя столбца матрицы $\mathcal{P}(W)$. В силу пункта 5 имеем $\deg \det \Lambda[p, q, r] = 0$ для любых различных $p, q, r \in \{u, v, y, z\}$, в силу пунктов 2 и 4 верно, что

$\sum_{h=1}^{3} \min_{s=1}^{6}\{\deg \lambda_{sh} + w_{sj}\} = 0$. Таким образом, в силу леммы 6.1.15 найдутся элементы $f_{1j}, \ldots, f_{6j} \in \mathbf{H}$ степеней $w_{1j}, \ldots, w_{6j}$, соответственно, удовлетворяющие условию (6.2.28).

Случаи A–D исчерпывают все возможности, поэтому найдется матрица F, удовлетворяющая условию $W = \deg F$ и условию (6.2.28). Поэтому $rankF \leqslant 3$, и в силу определения 1.3.23 выполнено неравенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(W) \leqslant 3$. Противоречие с пунктом 1 показывает, что такой матрицы W на самом деле не существует. □

6.2.5 Случай (i)

Чтобы завершить доказательство основного результата этого раздела, нам осталось рассмотреть случай (i) теоремы 6.2.1. Для рассмотрения этого случая нам придется рассматривать матрицы $V \in \mathbb{R}^{6\times n}$ несколько более общего вида, а именно, такие матрицы V, для которых

$$\mathcal{P}(V) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0\ldots0 & P_1 & \infty\ldots\infty \\ 0\ldots0 & & \infty\ldots\infty \\ \hline \infty\ldots\infty & 0\ldots0 & \infty\ldots\infty \\ \infty\ldots\infty & 0\ldots0 & \infty\ldots\infty \\ \hline \infty\ldots\infty & P_3 & 0\ldots0 \\ \underbrace{\infty\ldots\infty}_{u_1} & \underbrace{\quad}_{u_2} & \underbrace{0\ldots0}_{u_3} \end{array}\right), \tag{6.2.30}$$

где P_1 и P_3 могут быть любыми матрицами над $\overline{\mathbb{B}}$.

Введем обозначения, которые мы будем использовать в этом разделе: через L^1 мы будем обозначать множество всех наборов $l^1 = (l_1^1, l_2^1, l_3^1, \infty, l_5^1, \infty)$, которые удовлетворяют условию $\min\{l_1^1, l_2^1, l_3^1, l_5^1\} = 0$ и реализуют тропическую зависимость строк матрицы V. Через L^2 мы будем обозначать множество всех наборов $l^2 = (l_1^2, \infty, l_3^2, l_4^2, l_5^2, \infty)$, которые удовлетворяют условию $\min\{l_1^2, l_3^2, l_4^2, l_5^2\} = 0$ и реализуют тропическую зависимость строк матрицы V. Через L^3 мы будем обозначать множество всех наборов $l^3 = (l_1^3, \infty, l_3^3, \infty, l_5^3, l_6^3)$, которые удовлетворяют условию $\min\{l_1^3, l_3^3, l_5^3, l_6^3\} = 0$ и реализуют тропическую зависимость строк матрицы V. Также, если $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $l \in \mathbb{T}^6$, то через $\Theta(l, j)$ мы обозначаем множество всех индексов $\theta \in \{1, \ldots, 6\}$, доставляющих минимум выражению $\min_\theta\{v_{\theta j} + l_\theta\}$.

Нам потребуются следующие леммы.

Лемма 6.2.9. *Пусть матрица $V \in \mathbb{R}^{6\times n}$ тропического ранга три удовлетворяет условию* (6.2.30). *Предположим, что для всяких наборов $l^1 \in L^1$ и $l^3 \in L^3$ и индекса $j'' \in \{u_1 + 1, \ldots, u_1 + u_2\}$ выполнено условие*

$\bigl|\Theta(l^1,j'')\cup\Theta(l^3,j'')\bigr|\geqslant 3$. *Предположим также, что для всякого* $l^2\in L^2$ *найдется такой набор* $l^3\in L^3$, *что для всякого индекса* $j'\in\{1,\ldots,u_1\}$ *выполнено условие* $\bigl|\Theta(l^2,j')\cup\Theta(l^3,j')\bigr|\geqslant 3$. *Тогда* $K_{\mathbb{C}}(V)=3$.

Доказательство. 1. В силу леммы 6.1.7 равенства $l^1_1=l^1_2=0$ верны для всех наборов $l^1\in L^1$, равенства $l^2_3=l^2_4=0$, $l^2_1>0$, $l^2_5>0$ — для всех наборов $l^2\in L^2$, а равенства $l^3_5=l^3_6=0$ — для всех наборов $l^3\in L^3$.

2. В силу леммы 6.1.12 верно неравенство $\operatorname{trop}(V[1,2,3,4,5])\leqslant 3$. Теорема 6.1.2 показывает, что в данном случае $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V[1,2,3,4,5])\leqslant 3$. Согласно определению 1.3.23 найдется матрица $F'\in\mathbf{H}^{5\times n}$, удовлетворяющая условиям $V[1,2,3,4,5]=\deg F'$ и $rank(F')\leqslant 3$.

3. Любые четыре строки матрицы F' таким образом линейно зависимы над полем $\mathbf{H}$. В частности, найдутся элементы λ_{11}, λ_{21}, λ_{31} и λ_{51} поля $\mathbf{H}$, не все из которых равны нулю, найдутся элементы λ_{12}, λ_{32}, λ_{42} поля $\mathbf{H}$, не все из которых равны нулю, для которых при любом $j\in\{1,\ldots,n\}$ выполнены условия

$$\lambda_{11}f'_{1j}+\lambda_{21}f'_{2j}+\lambda_{31}f'_{3j}+\lambda_{51}f'_{5j}=0,\lambda_{12}f'_{1j}+\lambda_{32}f'_{3j}+\lambda_{42}f'_{4j}+\lambda_{52}f'_{5j}=0.\quad(6.2.31)$$

Положим также $\lambda_{41}=\lambda_{61}=\lambda_{22}=\lambda_{62}=0$. Умножая равенства (6.2.31) на ненулевые элементы поля $\mathbf{H}$, мы можем считать, не ограничивая общности, что $\min\limits_{\theta=1}^{6}\{\deg\lambda_{\theta 1}\}=\min\limits_{\theta=1}^{6}\{\deg\lambda_{\theta 2}\}=0$. В силу леммы 6.1.14 верно, что $l^1=(\deg\lambda_{11},\ldots,\deg\lambda_{61})\in L^1$, $l^2=(\deg\lambda_{12},\ldots,\deg\lambda_{62})\in L^2$.

4. Согласно условию леммы некоторый набор $l^3\in L^3$ удовлетворяет условию $\bigl|\Theta(l^2,j')\cup\Theta(l^3,j')\bigr|\geqslant 3$ при любом $j'\in\{1,\ldots,u_1\}$. Положим теперь $\lambda_{23}=\lambda_{43}=0$, $\lambda_{13}=\xi_1t^{l^3_1}$, $\lambda_{33}=\xi_3t^{l^3_3}$, $\lambda_{53}=\xi_5t^{l^3_5}$, $\lambda_{63}=\xi_6t^{l^3_6}$. В силу бесконечности поля $\mathbb{C}$ найдется число $\xi_\iota\in\mathbb{C}^*$, удовлетворяющее условиям

$$deg(\lambda_{pi'}\lambda_{q3}-\lambda_{qi'}\lambda_{p3})=\min\{\deg\lambda_{pi'}+\deg\lambda_{q3},\deg\lambda_{qi'}+\deg\lambda_{p3}\}\qquad(6.2.32)$$

для любых различных индексов $p,q\in\{1,2,3,4,5,6\}$ и любого $i'\in\{1,2\}$.

5. Положим $f_{k'''j'''}=f'_{k'''j'''}$ при $k'''\in\{1,2,3,4,5\}$ и $j'''\in\{u_1+u_2+1,\ldots,n\}$. В силу пункта 2 верно равенство $\deg f_{k'''j'''}=v_{k'''j'''}$. Положим также

$$f_{6j'''}=-\frac{\lambda_{13}f_{1j'''}+\ldots+\lambda_{53}f_{5j'''}}{\lambda_{63}}.\qquad(6.2.33)$$

Согласно пункту 1 и равенству (6.2.30) слагаемое $\lambda_{53}f_{5j'''}$ имеет нулевую степень, а все остальные слагаемые в числителе имеют положительные степени. Таким образом, мы получаем $\deg f_{6j'''}=0=v_{6j'''}$, и более того, в силу равенства (6.2.33) условие

$$\lambda_{1i}f_{1j}+\lambda_{2i}f_{2j}+\lambda_{3i}f_{3j}+\lambda_{4i}f_{4j}+\lambda_{5i}f_{5j}+\lambda_{6i}f_{6j}=0\qquad(6.2.34)$$

выполнено при любых $j \in \{u_1 + u_2 + 1, \ldots, n\}$ и $i = 3$. Равенства (6.2.31) показывают, что условие (6.2.34) выполнено также при любых $j \in \{u_1 + u_2 + 1, \ldots, n\}$ и $i \in \{1, 2\}$.

6. В силу пункта 4 для любого индекса $j' \in \{1, \ldots, u_1\}$ матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{32} & \lambda_{33} \\ \lambda_{42} & \lambda_{43} \\ \lambda_{52} & \lambda_{53} \\ \lambda_{62} & \lambda_{63} \end{pmatrix}$$

и набор $(v_{1j'}, v_{3j'}, v_{4j'}, v_{5j'}, v_{6j'})$ удовлетворяют условиям леммы 6.1.17. Поэтому найдутся элементы $f_{1j'}, f_{3j'}, f_{4j'}, f_{5j'}, f_{6j'} \in \mathbf{H}$, удовлетворяющие условию $\deg f_{k'j'} = v_{k'j'}$ при всех $k' \in \{1, 3, 4, 5, 6\}$ и условию (6.2.34) при любых $j \in \{1, \ldots, u_1\}$ и $i \in \{2, 3\}$. Положим

$$f_{2j'} = -\frac{\lambda_{11} f_{1j'} + \lambda_{31} f_{2j'} + \ldots + \lambda_{61} f_{6j'}}{\lambda_{21}}. \tag{6.2.35}$$

В силу пункта 1 и условия (6.2.30) верно равенство $\deg(\lambda_{11} f_{1j'}) = 0$, а все остальные слагаемые в числителе имеют положительные степени. Поэтому мы получаем равенство $\deg f_{2j'} = 0 = v_{2j'}$, и более того, в силу равенства (6.2.35) условие (6.2.34) выполнено при всех $j \in \{1, \ldots, u_1\}$ и $i = 1$.

7. Условие леммы показывает, что неравенство $\left|\Theta(l^1, j'') \cup \Theta(l^3, j'')\right| \geqslant 3$ выполнено для любого индекса $j'' \in \{u_1 + 1, \ldots, u_1 + u_2\}$. Равенства (6.2.32) показывают в этом случае, что матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{33} \\ \lambda_{51} & \lambda_{53} \\ \lambda_{61} & \lambda_{63} \end{pmatrix}$$

и набор $(v_{1j''}, v_{2j''}, v_{3j''}, v_{5j''}, v_{6j''})$ удовлетворяют условиям леммы 6.1.17. Поэтому найдутся элементы $f_{1j''}, f_{2j''}, f_{3j''}, f_{5j''}, f_{6j''} \in \mathbf{H}$, удовлетворяющие условию $\deg f_{k''j''} = v_{k''j''}$ при всех $k'' \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$ и условию (6.2.34) при любых $j \in \{u_1 + 1, \ldots, u_1 + u_2\}$ и $i \in \{1, 3\}$. Положим

$$f_{4j''} = -\frac{\lambda_{12} f_{1j''} + \lambda_{22} f_{2j''} + \lambda_{32} f_{3j''} + \lambda_{52} f_{5j''} + \lambda_{62} f_{6j''}}{\lambda_{42}}. \tag{6.2.36}$$

Пункты 1 и 3 показывают, что $\deg(\lambda_{32} f_{3j''}) = 0$, а все остальные слагаемые в числителе имеют положительные степени. Поэтому мы получаем равенство

$\deg f_{4j''} = 0 = v_{4j''}$. Более того, в силу равенств (6.2.36) условие (6.2.34) выполнено при всех $j \in \{u_1+1, \dots, u_1+u_2\}$ и $i = 2$.

8. Пункты 5–7 показывают, что найдется матрица F, удовлетворяющая условию $\deg F = W$ и условию (6.2.34) при всех $j \in \{1, \dots, n\}$ и $i \in \{1,2,3\}$. Поэтому $rank F \leqslant 3$, и в силу определения 1.3.23 верно равенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) \leqslant 3$. Теорема 6.1.1 показывает теперь, что $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) = 3$. □

Лемма 6.2.10. *Пусть матрица $V \in \mathbb{R}^{6\times n}$ тропического ранга три удовлетворяет условию* (6.2.30). *Предположим, что для некоторых наборов $l^1 \in L^1$, $l^2 \in L^2$, $l^3 \in L^3$ выполнены условия $\left|\Theta(l^2, j') \cup \Theta(l^3, j')\right| \geqslant 3$ при всех $j' \in \{1, \dots, u_1\}$, условия $\left|\Theta(l^1, j'') \cup \Theta(l^3, j'')\right| \geqslant 3$ при всех $j'' \in \{u_1+1, \dots, u_1+u_2\}$ и условия $\left|\Theta(l^1, j''') \cup \Theta(l^2, j''')\right| \geqslant 3$ при всех $j''' \in \{u_1+u_2+1, \dots, n\}$. Тогда $K_{\mathbb{C}}(V) = 3$.*

Доказательство. 1. Из леммы 6.1.7 следуют условия $l^1_1 = l^1_2 = 0$, $l^2_3 = l^2_4 = 0$, $l^2_1 > 0$, $l^2_5 > 0$ и $l^3_5 = l^3_6 = 0$.

2. Для любых $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$ и $i \in \{1,2,3\}$ мы полагаем

$$\lambda_{ki} = \zeta_{ki} t^{l^i_k},$$

если значение $l^i_k \in \mathbb{R}$ определено, и полагаем $\lambda_{ki} = 0$, если $l^i_k = \infty$. Бесконечность поля $\mathbb{C}$ позволяет найти число $\zeta_{ki} \in \mathbb{C}^*$, удовлетворяющее условию

$$\deg(\lambda_{pi'}\lambda_{qi''} - \lambda_{qi'}\lambda_{pi''}) = \min\{\deg \lambda_{pi'} + \deg \lambda_{qi''}, \deg \lambda_{qi'} + \deg \lambda_{pi''}\}$$

при любых различных $p, q \in \{1,2,3,4,5,6\}$ и различных $i', i'' \in \{1,2,3\}$. Обозначим матрицу, состоящую из элементов (λ_{ki}), через $\Lambda \in \mathbf{H}^{6\times 3}$.

3. Пусть $j' \in \{1, \dots, u_1\}$, $j'' \in \{u_1+1, \dots, u_1+u_2\}$, $j''' \in \{u_1+u_2+1, \dots, n\}$. В силу условия леммы и рассуждений пункта 2 матрица $\Lambda[1,2,3,4,5|1,2]$ и набор $(v_{1j'''}, v_{2j'''}, v_{3j'''}, v_{4j'''}, v_{5j'''})$ удовлетворяют условиям леммы 6.1.17. Аналогично показывается, что матрица $\Lambda[1,2,3,5,6|1,3]$ и набор $(v_{1j''}, v_{2j''}, v_{3j''}, v_{5j''}, v_{6j''})$ тоже удовлетворяют условиям леммы 6.1.17, и, наконец, что матрица $\Lambda[1,3,4,5,6|2,3]$ и набор $(v_{1j'}, v_{3j'}, v_{4j'}, v_{5j'}, v_{6j'})$ также удовлетворяют условиям леммы 6.1.17. Таким образом, при всех $k' \in \{1,3,4,5,6\}$, $k'' \in \{1,2,3,5,6\}$ и $k''' \in \{1,2,3,4,5\}$ найдутся элементы $f_{k'j'}$, $f_{k''j''}$ и $f_{k'''j'''}$, удовлетворяющие условиям $\deg f_{k'j'} = v_{k'j'}$, $\deg f_{k''j''} = v_{k''j''}$ и $\deg f_{k'''j'''} = v_{k'''j'''}$, а также (вне зависимости от того, как определены элементы $f_{2j'}$, $f_{4j''}$ и $f_{6j'''}$) условиям (6.2.34) при всех $i \in \{1,2\}$, если $j \in \{u_1+u_2+1, \dots, n\}$, при всех $i \in \{1,3\}$, если $j \in \{u_1+1, \dots, u_1+u_2\}$, и при всех $i \in \{2,3\}$, если $j \in \{1, \dots, u_1\}$.

4. Теперь мы определяем элементы $f_{2j'}$, $f_{4j''}$ и $f_{6j'''}$ с помощью равенств (6.2.35), (6.2.36) и (6.2.33), соответственно. Заметим, что в силу пункта 1 и равенства (6.2.30) выполнены условия $\deg f_{2j'} = 0 = v_{2j'}$, $\deg f_{4j''} = 0 = v_{4j''}$ и $\deg f_{6j'''} = 0 = v_{6j'''}$.

5. Пункты 3–4 показывают, что найдется матрица F, удовлетворяющая условию $\deg F = W$ и условию (6.2.34) при всех $j \in \{1, \dots, n\}$ и $i \in \{1, 2, 3\}$. Поэтому $rank F \leqslant 3$, и в силу определения 1.3.23 верно равенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) \leqslant 3$. Теорема 6.1.1 показывает теперь, что $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) = 3$. □

Теорема 6.2.11. *Пусть матрица $V \in \mathbb{R}^{6\times n}$ имеет тропический ранг три, а ее шаблон $\mathcal{P}(V)$ образован столбцами $(0\,0\,\infty\,\infty\,\infty\,\infty)^\top$, $(\infty\,\infty\,0\,0\,0\,0)^\top$, $(\infty\,\infty\,\infty\,\infty\,0\,0)^\top$. Тогда $K_{\mathbb{C}}(V) = 3$.*

Доказательство. 1. С точностью до перестановок строк и столбцов верно, что

$$\mathcal{P}(V) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0\dots0 & \infty\dots\infty & \infty\dots\infty \\ 0\dots0 & \infty\dots\infty & \infty\dots\infty \\ \infty\dots\infty & 0\dots0 & \infty\dots\infty \\ \infty\dots\infty & 0\dots0 & \infty\dots\infty \\ \infty\dots\infty & 0\dots0 & 0\dots0 \\ \underbrace{\infty\dots\infty}_{u_1} & \underbrace{0\dots0}_{u_2} & \underbrace{0\dots0}_{u_3} \end{array}\right). \tag{6.2.37}$$

В силу леммы 6.1.11 мы можем считать, не ограничивая общности, что минимальный элемент любого столбца матрицы V равен нулю.

2. Лемма 6.1.7 показывает, что условия $l^1_1 = l^1_2 = 0$, $l^1_3 > 0$ и $l^1_5 > 0$ выполнены для любого набора $l^1 \in L^1$, условия $l^2_3 = l^2_4 = 0$, $l^2_1 > 0$ и $l^2_5 > 0$ — для любого набора $l^2 \in L^2$, и, наконец, условия $l^3_5 = l^3_6 = 0$, $l^3_1 > 0$ и $l^3_3 \geqslant 0$ — для любого набора $l^3 \in L^3$.

3. В силу пункта 2 и равенства (6.2.37) условие $6 \in \Theta(l^3, j'')$ выполнено для любых $l^3 \in L^3$ и $j'' \in \{u_1 + 1, \dots, u_1 + u_2\}$. Таким образом, мы имеем $\bigl|\Theta(l^1, j'') \cup \Theta(l^3, j'')\bigr| \geqslant 3$ для любого набора $l^1 \in L^1$.

Рассмотрим теперь два частных случая A и B.

Случай A. Предположим, что мощность множества L^2 отлична от 1. Поскольку тропический ранг матрицы V равен трем, множество L^2 непусто. Таким образом, найдутся два различных элемента, принадлежащие множеству L^2. Напомним, что в силу пункта 2 условие $l^2 = (l^2_1, \infty, 0, 0, l^2_5, \infty)$ выполнено для любого $l^2 \in L^2$. Рассмотрим четыре возможные случаи A1–A5.

A1. Предположим, что значение l^2_1 не зависит от выбора $l^2 \in L^2$. В этом случае для любых $l^2 \in L^2$ и $j \in \{1, \dots, n\}$ выполнено условие $\bigl|\Theta(l^2, j) \setminus \{5\}\bigr| \geqslant 2$. Теперь мы можем видеть, что условие $\bigl|\Theta(l^1, j) \cup \Theta(l^2, j)\bigr| \geqslant 3$ выполняется при всех $l^1 \in L^1$ (иначе мы имели бы

$\Theta(l^1, j) = \Theta(l^2, j) = \{1, 3\}$, что невозможно в силу пункта 2). Из пункта 3 следует теперь, что матрица V с точностью до перестановок строк и столбцов удовлетворяет условию леммы 6.2.9, поэтому $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) = 3$.

A2. Предположим теперь, что значение l_5^2 не зависит от выбора $l^2 \in L^2$. В этом случае для любых $l^2 \in L^2$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено условие $\bigl|\Theta(l^2, j) \setminus \{1\}\bigr| \geqslant 2$. Теперь мы можем видеть, что в силу пункта 2 условие $\bigl|\Theta(l^2, j) \cup \Theta(l^3, j)\bigr| \geqslant 3$ выполняется при всех $l^3 \in L^3$. Из пункта 3 следует теперь, что матрица V с точностью до перестановок строк и столбцов удовлетворяет условию леммы 6.2.9, поэтому $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) = 3$.

A3. Теперь предположим, что значение выражения $l_1^2 - l_5^2 = d_{15}$ не зависит от выбора $l^2 \in L^2$. Рассмотрим произвольные наборы $(l_1^2, \infty, 0, 0, l_5^2, \infty)$ и $(\ell_1^2, \infty, 0, 0, \ell_5^2, \infty)$ из множества L^2, удовлетворяющие условию $l_1^2 < \ell_1^2$. Тогда в силу леммы 6.1.13 условие $(l_1^2 + \alpha, \infty, 0, 0, l_5^2 + \alpha, \infty) \in L^2$ выполняется для всех $\alpha \in [0, \ell_1^2 - l_1^2]$.

В силу предположения случая A множество L^2 содержит не менее двух элементов, поэтому для любого набора $(l_1^2, \infty, 0, 0, l_5^2, \infty) \in L^2$ и для достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполнено либо условие $(l_1^2 + \varepsilon, \infty, 0, 0, l_5^2 + \varepsilon, \infty) \in L^2$, либо условие $(l_1^2 - \varepsilon, \infty, 0, 0, l_5^2 - \varepsilon, \infty) \in L^2$. Это означает, что для любого индекса $j \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено либо условие $\{1, 5\} \subset \Theta(l^2, j)$, либо условие $\{3, 4\} \subset \Theta(l^2, j)$. Таким образом, если $d_{15} \geqslant 0$, то в силу пункта 2 условие $\bigl|\Theta(l^1, j) \cup \Theta(l^2, j)\bigr| \geqslant 3$ выполнено при всех $l^1 \in L^1$. Аналогично, если $d_{15} \leqslant 0$, то условие $\bigl|\Theta(l^2, j) \cup \Theta(l^3, j)\bigr| \geqslant 3$ выполнено при всех $l^3 \in L^3$. Из пункта 3 следует теперь, что матрица V с точностью до перестановок строк и столбцов удовлетворяет условию леммы 6.2.9, поэтому $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) = 3$.

A4. Предположим теперь, что существуют наборы $l^2 = (l_1^2, \infty, 0, 0, l_5^2, \infty)$ и $\widetilde{l^2} = (\widetilde{l_1^2}, \infty, 0, 0, \widetilde{l_5^2}, \infty)$ из множества L^2, удовлетворяющие условиям $l_1^2 < \widetilde{l_1^2}$ и $l_5^2 > \widetilde{l_5^2}$. Тогда в силу леммы 6.1.13 набор $\ell = (l_1^2, \infty, 0, 0, \widetilde{l_5^2}, \infty)$ также принадлежит множеству L^2. Если для некоторого индекса $j \in \{1, \ldots, n\}$ выполнены условия $1 \in \Theta(\ell, j)$ и $|\Theta(\ell, j)| = 2$, то мы можем заменить координату l_1^2 в наборе ℓ на большее число и получить набор $\widetilde{l^2}$. В этом случае выполнено условие $\Theta(\widetilde{l^2}, j) = \Theta(\ell, j) \setminus \{1\}$, что противоречит условию $\widetilde{l^2} \in L^2$. Таким образом, из условия $|\Theta(\ell, j)| = 2$ вытекает условие $1 \notin \Theta(\ell, j)$. Аналогично может быть показано, что условие $|\Theta(\ell, j)| = 2$ влечет условие $5 \notin \Theta(\ell, j)$. Таким образом, обязательно выполнено либо условие $|\Theta(\ell, j)| \geqslant 3$, либо условие $\Theta(\widetilde{l^2}, j) = \{3, 4\}$. Из пункта 3 следует теперь, что матрица V и наборы l^1,ℓ^2,l^3 удовлетворяет условию леммы 6.2.10, поэтому $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) = 3$.

A5. Предположим, что найдутся наборы $l^2 = (l_1^2, \infty, 0, 0, l_5^2, \infty)$ и $\widetilde{l^2} = (\widetilde{l_1^2}, \infty, 0, 0, \widetilde{l_5^2}, \infty)$ из множества L^2, удовлетворяющие условиям $l_1^2 < \widetilde{l_1^2}$, $l_5^2 < \widetilde{l_5^2}$

и $\widetilde{l_1^2} - l_1^2 \neq \widetilde{l_5^2} - l_5^2$. Рассмотрим случай, когда число $h = \widetilde{l_1^2} - l_1^2$ меньше числа $\widetilde{l_5^2} - l_5^2$, а противоположный случай может быть рассмотрен аналогично.

Заметим, что набор $(l_1^2+\delta, \infty, \delta, \delta, l_5^2+\delta, \infty)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы V при любом $\delta \in \mathbb{R}$. Поэтому в силу леммы 6.1.13 набор $(\min\{\widetilde{l_1^2}, l_1^2+\delta\}, \infty, 0, 0, \min\{\widetilde{l_5^2}, l_5^2+\delta\}, \infty)$ также реализует тропическую зависимость строк матрицы V. Таким образом, набор $(\widetilde{l_1^2}-\varepsilon, \infty, 0, 0, l_5^2+h-\varepsilon, \infty)$ принадлежит множеству L^2 при любом неотрицательном достаточно малом ε. Для набора $\ell = (\widetilde{l_1^2}, \infty, 0, 0, l_5^2 + h, \infty)$ и произвольного индекса $j \in \{1, \ldots, n\}$ мы тогда имеем одно из условий $\Theta(\ell, j) = \{1, 5\}$, $\Theta(\ell, j) = \{3, 4\}$ или $|\Theta(\ell, j)| \geqslant 3$. Заметим, что случай $\Theta(\ell, j) = \{1, 5\}$ на самом деле невозможен, потому что мы можем заменить координату l_5^2+h в наборе ℓ на большее значение и получить набор $\widetilde{l^2} \in L^2$. Из пункта 3 теперь следует, что матрица V и наборы l^1,ℓ^2,l^3 удовлетворяют условию леммы 6.2.10, поэтому $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) = 3$.

A6. Чтобы завершить разбор случая A, мы должны проверить, что пункты A1–A5 исчерпывают все возможности. В самом деле, обозначим через λ_1 точную нижнюю грань чисел l_1^2 и через λ_5 точную нижнюю грань чисел l_5^2 по всем наборам $(l_1^2, \infty, 0, 0, l_5^2, \infty) \in L^2$. Если для каждого набора $(\widetilde{l_1^2}, \infty, 0, 0, \widetilde{l_5^2}, \infty) \in L^2$ выполнено одно из условий $\widetilde{l_1^2} = \lambda_1$ и $\widetilde{l_5^2} = \lambda_5$, то мы попадаем в условия одного из пунктов A1, A2 или A4.

В противном случае найдутся наборы $(\widehat{l_1^2}, \infty, 0, 0, \widehat{l_5^2}, \infty)$ и $(\overline{l_1^2}, \infty, 0, 0, \overline{l_5^2}, \infty)$ из множества L^2, удовлетворяющие условиям $\widehat{l_1^2} < \overline{l_1^2}$ и $\widehat{l_5^2} < \overline{l_5^2}$. Мы можем считать, не ограничивая общности, что выполнено также условие $\overline{l_1^2} - \overline{l_5^2} = \widehat{l_1^2} - \widehat{l_5^2} = g$, — в противном случае мы попадаем в условия пункта A5.

Далее, если не выполняются условия пункта A3, то найдется набор $(\zeta_1^2, \infty, 0, 0, \zeta_5^2, \infty)$ из множества L^2, удовлетворяющий условию $\zeta_1^2 - \zeta_5^2 \neq g$. Если верно либо условие $\zeta_1^2 \notin \{\widehat{l_1^2}, \overline{l_1^2}\}$, либо условие $\zeta_5^2 \notin \{\widehat{l_5^2}, \overline{l_5^2}\}$, то мы находимся в условиях либо случая A4, либо случая A5.

Наконец, если выполнено одно из условий $\zeta_1^2 \in \{\widehat{l_1^2}, \overline{l_1^2}\}$ и $\zeta_5^2 \in \{\widehat{l_5^2}, \overline{l_5^2}\}$, то мы имеем либо $\zeta_1^2 = \widehat{l_1^2}$ и $\zeta_5^2 = \overline{l_5^2}$, либо $\zeta_1^2 = \overline{l_1^2}$ и $\zeta_5^2 = \widehat{l_5^2}$. В этих случаях из леммы 6.1.13 следует, что

$$\left(\frac{\overline{l_1^2} + \widehat{l_1^2}}{2}, \infty, 0, 0, \overline{l_5^2}, \infty\right) \quad \text{или} \quad \left(\overline{l_1^2}, \infty, 0, 0, \frac{\overline{l_5^2} + \widehat{l_5^2}}{2}, \infty\right)$$

является элементом множества L^2, поэтому мы снова оказываемся в условиях пункта A5. Рассмотрение случая A завершено.

Случай B. Теперь мы будем предполагать, что множество L^2 состоит из одного элемента l^2, а также, что для любого набора $l^1 \in L^1$ выполнено условие

$l_3^1 < l_5^1$. Будем доказывать, что в этом случае верно равенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) = 3$.

B1. В силу леммы 6.1.12 тропический ранг матрицы $V[1,2,3,4,5]$ не превосходит трех. Из теоремы 6.1.2 следует тогда, что ранг Капранова этой матрицы также не превосходит трех. Согласно определению 1.3.23 найдется матрица $G'' \in \mathbf{H}^{5\times n}$, удовлетворяющая условиям $V[1,2,3,4,5] = \deg G''$ и $rank(G'') \leqslant 3$. Аналогично, найдется матрица G', удовлетворяющая условиям $V[1,3,4,5,6] = \deg G'$ и $rank(G') \leqslant 3$.

B2. Любые четыре строки матрицы G' и любые четыре строки матрицы G'', таким образом, линейно зависимы над полем $\mathbf{H}$. В частности, найдутся элементы λ_{11}, λ_{21}, λ_{31} и λ_{51} из поля $\mathbf{H}$, не все из которых равны нулю, найдутся элементы λ_{12}, λ_{32}, λ_{42} и λ_{52} из поля $\mathbf{H}$, не все из которых равны нулю, для которых при любом $j \in \{1,\dots,n\}$ выполнены условия

$$\lambda_{11}g''_{1j}+\lambda_{21}g''_{2j}+\lambda_{31}g''_{3j}+\lambda_{51}g''_{5j} = 0, \lambda_{12}g''_{1j}+\lambda_{32}g''_{3j}+\lambda_{42}g''_{4j}+\lambda_{52}g''_{5j} = 0, \quad (6.2.38)$$

$$\widetilde{\lambda}_{12}g'_{1j}+\widetilde{\lambda}_{32}g'_{3j}+\widetilde{\lambda}_{42}g'_{4j}+\widetilde{\lambda}_{52}g'_{5j} = 0, \lambda_{13}g'_{1j}+\lambda_{33}g'_{3j}+\lambda_{53}g'_{5j}+\lambda_{63}g'_{6j} = 0. \quad (6.2.39)$$

Положим также $\lambda_{41}{=}\lambda_{61}{=}\lambda_{22}{=}\lambda_{62}{=}\widetilde{\lambda_{22}}{=}\widetilde{\lambda_{62}}{=}\lambda_{23}{=}\lambda_{43}{=}0$. Умножая равенства (6.2.38) и (6.2.39) на ненулевые элементы поля $\mathbf{H}$, мы считаем, не ограничивая общности, что

$$\min_{\theta=1}^{6}\{\deg\lambda_{\theta1}\} = \min_{\theta=1}^{6}\{\deg\lambda_{\theta2}\} = \min_{\theta=1}^{6}\{\deg\widetilde{\lambda}_{\theta2}\} = \min_{\theta=1}^{6}\{\deg\lambda_{\theta3}\} = 0.$$

B3. Из леммы 6.1.14 теперь следуют условия $(\deg\lambda_{11},\dots,\deg\lambda_{61}) \in L^1$, $(\deg\lambda_{12},\dots,\deg\lambda_{62}) \in L^2$, $(\deg\widetilde{\lambda}_{12},\dots,\deg\widetilde{\lambda}_{62}) \in L^2$ и $(\deg\lambda_{13},\dots,\deg\lambda_{63}) \in L^3$.

B4. Предположение случая B показывает, что выполнено условие

$$(\deg\lambda_{12},\dots,\deg\lambda_{62}) = (\deg\widetilde{\lambda}_{12},\dots,\deg\widetilde{\lambda}_{62}),$$

поэтому, умножая строки матрицы G'' на элементы поля $\mathbf{H}$ нулевой степени, мы считаем, не ограничивая общности, что $(\lambda_{12},\dots,\lambda_{62}) = (\widetilde{\lambda}_{12},\dots,\widetilde{\lambda}_{62})$.

B5. Мы также полагаем $g_{k''j''} = g''_{k''j''}$ для всех $k'' \in \{1,2,3,4,5\}$ и $j'' \in \{u_1+u_2+1,\dots,n\}$, тогда выполнено равенство $\deg g_{k''j''} = v_{k''j''}$. Положим также

$$g_{6j''} = -\frac{\lambda_{13}g_{1j''}+\dots+\lambda_{53}g_{5j''}}{\lambda_{63}}. \quad (6.2.40)$$

Заметим, что $\deg(\lambda_{53}g_{5j''}) = 0$ и в силу пункта 1 все остальные слагаемые в числителе имеют положительные степени. Таким образом, мы получаем

условие $\deg g_{6j''} = 0 = v_{6j''}$; более того, из равенства (6.2.40) следует, что условие

$$\lambda_{1i}g_{1j} + \ldots + \lambda_{6i}g_{6j} = 0 \tag{6.2.41}$$

выполняется для всех $j \in \{u_1 + u_2 + 1, \ldots, n\}$ и $i = 3$. Равенство (6.2.38) показывает, что условие (6.2.41) выполняется также для всех $j \in \{u_1 + u_2 + 1, \ldots, n\}$ и $i \in \{1, 2\}$.

B6. Теперь положим $g_{k'j'} = g'_{k'j'}$ для всех $k' \in \{1, 3, 4, 5, 6\}$ и $j' \in \{1, \ldots, u_1\}$, тогда выполнено равенство $\deg g_{k'j'} = v_{k'j'}$. Положим также

$$g_{2j'} = -\frac{\lambda_{11}g_{1j'} + \lambda_{31}g_{3j'} + \ldots + \lambda_{61}g_{6j'}}{\lambda_{21}}. \tag{6.2.42}$$

Заметим, что $\deg(\lambda_{11}g_{1j'}) = 0$ и в силу пункта 1 все остальные слагаемые в числителе имеют положительные степени. Таким образом, мы получаем условие $\deg g_{1j'} = 0 = v_{1j'}$; более того, из равенства (6.2.42) следует, что условие (6.2.41) выполняется для всех $j \in \{1, \ldots, u_1\}$ и $i = 1$. Равенство (6.2.39) показывает, что условие (6.2.41) выполняется также для всех $j \in \{1, \ldots, u_1\}$ и $i \in \{2, 3\}$.

B7. Наконец, рассмотрим случай $\jmath \in \{u_1 + 1, \ldots, u_1 + u_2\}$.

B7.1. В силу пункта 2 выполнено условие $\deg \lambda_{53} = 0$. Согласно лемме 6.1.16 найдутся элементы $g_{3\jmath}, g_{5\jmath} \in \mathbf{H}$, удовлетворяющие условиям $\deg g_{3\jmath} = v_{3\jmath} = 0$, $\deg g_{5\jmath} = v_{5\jmath} = 0$ и $\deg(\lambda_{33}g_{3\jmath} + \lambda_{53}g_{5\jmath}) = 0$.

B7.2. В силу пункта B3 выполнено условие $(\deg \lambda_{11}, \ldots, \deg \lambda_{61}) \in L^1$, поэтому из предположения пункта B следует условие $\deg(\lambda_{31}g_{3\jmath}) < \deg(\lambda_{51}g_{5\jmath})$. Из определения множества L^1 теперь следует, что либо индекс $\tau = 1$, либо индекс $\tau = 2$ доставляет минимум выражению $\min\limits_{\tau=1}^{6}\{\deg \lambda_{\tau 1} + v_{\tau\jmath}\}$. В силу бесконечности поля $\mathbb{C}$ найдутся элементы $g_{1\jmath}$ и $g_{2\jmath}$, удовлетворяющие условиям $\deg g_{1\jmath} = v_{1\jmath}$, $\deg g_{2\jmath} = v_{2\jmath}$ и $\lambda_{11}g_{1\jmath} + \lambda_{21}g_{2\jmath} + \lambda_{31}g_{3\jmath} + \lambda_{51}g_{5\jmath} = 0$. В силу пункта B2 выполнено условие $\lambda_{41} = \lambda_{61} = 0$, поэтому условие (6.2.41) выполняется для всех $j \in \{u_1 + 1, \ldots, u_1 + u_2\}$ и $i = 1$ при любом выборе $g_{4\jmath}$ и $g_{6\jmath}$.

B7.3. Положим

$$g_{6\jmath} = -\frac{\lambda_{13}g_{1\jmath} + \lambda_{33}g_{3\jmath} + \lambda_{53}g_{5\jmath}}{\lambda_{63}}. \tag{6.2.43}$$

В силу пункта 1 выполнено условие $\deg(\lambda_{13}g_{1\jmath}) > 0$, поэтому из пункта B7.1 следует условие $\deg g_{6\jmath} = 0 = v_{6\jmath}$. Согласно пункту B2 верны равенства $\lambda_{23} = \lambda_{43} = 0$, поэтому условие (6.2.41) выполняется для всех $j \in \{u_1+1, \ldots, u_1+u_2\}$ и $i = 3$ при любом выборе элемента $g_{4\jmath}$.

B7.4. Положим, наконец

$$g_{4\jmath} = -\frac{\lambda_{12}g_{1\jmath} + \lambda_{22}g_{2\jmath} + \lambda_{32}g_{3\jmath} + \lambda_{52}g_{5\jmath} + \lambda_{62}g_{6\jmath}}{\lambda_{42}}. \tag{6.2.44}$$

Заметим, что выполнено условие $\deg(\lambda_{32}g_{3j}) = 0$, и в силу пункта 2 все остальные слагаемые в числителе имеют положительные степени. Таким образом, верны равенства $\deg g_{4j} = 0 = v_{4j}$, и потому равенство (6.2.44) доказывает условие (6.2.41) для всех $j \in \{u_1+1, \dots, u_1+u_2\}$ и $i = 2$.

B8. Пункты B5–B7 показывают, что найдется матрица F, удовлетворяющая условию $\deg F = W$ и условию (6.2.41) при всех $i \in \{1,2,3\}$ и $j \in \{1,\dots,n\}$. Поэтому $rank F \leqslant 3$, и в силу определения 1.3.23 верно равенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) \leqslant 3$. Применение теоремы 6.1.1 показывает теперь, что выполнено равенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) = 3$, и завершает разбор случая B.

Теперь мы **завершим** доказательство теоремы 6.2.11. Оставшаяся часть рассуждений будет проведена методом *от противного*.

F0. В самом деле, предположим, что $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) \neq 3$.

F1. Частные случаи A и B показывают, что $L^2 = \{l^2\}$, а также $\ell^1_5 \leqslant \ell^1_3$ для некоторого набора $\ell^1 \in L^1$.

F2. Если для некоторого индекса $\widetilde{j} \in \{u_1+u_2+1, \dots, n\}$ выполнено условие $\left|\Theta(\ell^1, \widetilde{j}) \cup \Theta(l^2, \widetilde{j})\right| \geqslant 3$, то в силу пункта 3 матрица V удовлетворяет условию леммы 6.2.9 с точностью до перестановок строк и столбцов, что противоречит предположению пункта F0.

Таким образом, найдется индекс $\widetilde{j} \in \{u_1+u_2+1, \dots, n\}$, для которого выполнено условие $\left|\Theta(\ell^1, \widetilde{j}) \cup \Theta(l^2, \widetilde{j})\right| = 2$. В силу пунктов 2 и F1 выполнено условие $\Theta(\ell^1, \widetilde{j}) = \Theta(l^2, \widetilde{j}) = \{1,5\}$, поэтому равенство $l^2 = (b, \infty, 0, 0, a+b, \infty)$ выполнено при некоторых $a, b > 0$. Столбец матрицы V с индексом $\widetilde{j}$ в этом случае имеет вид $(a\,\alpha\,\gamma_1\,\gamma_2\,0\,0)^{\top}$, где $\alpha > a$, $\gamma_1 > a+b$ и $\gamma_2 > a+b$.

F3. Аналогично, для любого набора $l^3 \in L^3$ найдется индекс $\widetilde{j}' \in \{1,\dots,u_1\}$, удовлетворяющий условию $\left|\Theta(l^2, \widetilde{j}') \cup \Theta(l^3, \widetilde{j}')\right| = 2$. Из определений множеств L^2 и L^3 следует, что выполнено равенство $\Theta(l^2, \widetilde{j}') = \Theta(l^3, \widetilde{j}')$, и множество $\Theta(l^2, \widetilde{j}')$ совпадает с одним из множеств $\{1,3\}$, $\{1,5\}$ и $\{3,5\}$. В пункте F2 было доказано равенство $l^2 = (b, \infty, 0, 0, a+b, \infty)$ для некоторых положительных a и b, поэтому условия $\Theta(l^2, \widetilde{j}') = \{1,5\}$ и $\Theta(l^2, \widetilde{j}') = \{3,5\}$ не могут выполняться, как показывают рассуждения случая 2. Таким образом, мы получаем равенства $\Theta(l^2, \widetilde{j}') = \Theta(l^3, \widetilde{j}') = \{1,3\}$, и в этом случае столбец матрицы V с индексом $\widetilde{j}'$ имеет вид $(0\,0\,b\,\beta_1\,\nu_1\,\nu_2)^{\top}$, где $\beta_1 > b$, $\nu_1 > b$ и $\nu_2 > b$.

F4. Обозначим через V' матрицу, полученную из V перестановкой третьей и четвертой строк. Через L'^2 обозначим множество всех наборов $(l'^2_1, \infty, l'^2_3, l'^2_4, l'^2_5, \infty)$, которые реализуют тропическую зависимость строк матрицы V' и удовлетворяют условию $\min\{l'^2_1, l'^2_3, l'^2_4, l'^2_5\} = 0$. В силу пункта 2 выполнены равенства $l'^2_3 = l'^2_4 = 0$, и поэтому $L'^2 = L^2$.

Перестановка строк не влияет на ранг Капранова матрицы, поэтому ранг Капранова матрицы V' не равен трем. В этом случае рассуждения пунктов F0–F3 применимы также и к матрице V', и потому в силу пункта F3 матрица V содержит столбец $(0\,0\,\beta_2\,b\,\nu_3\,\nu_4)^\top$, где $\beta_2 > b$, $\nu_3 > b$ и $\nu_4 > b$.

F5. Рассмотрим матрицу V'', которая получена из V перестановкой первой и второй строк. Обозначим через L''^2 множество всех наборов $(l_1''^2, \infty, l_3''^2, l_4''^2, l_5''^2, \infty)$, которые реализуют тропическую зависимость строк матрицы V'' и удовлетворяют условию $\min\{l_1''^2, l_3''^2, l_4''^2, l_5''^2\} = 0$; в этом случае верны равенства $l_3''^2 = l_4''^2 = 0$, и множество L''^2 является одноэлементным в силу пункта F1. Согласно пункту F2 при некоторых положительных a' и b' выполнено условие $L''^2 = \{(a' + b', \infty, 0, 0, b', \infty)\}$ (отметим, что равенство $(a, b) = (a', b')$ не обязательно выполняется в этом случае). Применяя результаты пунктов F2–F4 к матрице V'', мы видим, что следующие столбцы содержатся в матрице V'':

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b' \\ \beta_1' \\ \nu_5 \\ \nu_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_2' \\ b' \\ \nu_7 \\ \nu_8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ \alpha' \\ \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.2.45}$$

где $a' > 0$, $b' > 0$, $\alpha' > a'$, $\gamma_1' > a' + b'$, $\gamma_2' > a' + b'$, $\beta_1' > b'$, $\beta_2' > b'$, и числа $\nu_5, \ldots, \nu_8$ превосходят b'.

Учитывая результаты пунктов F2–F5, мы видим, что столбцы

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ \beta_1 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_2 \\ b \\ \nu_3 \\ \nu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b' \\ \beta_1' \\ \nu_5 \\ \nu_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_2' \\ b' \\ \nu_7 \\ \nu_8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha' \\ a' \\ \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.2.46}$$

принадлежат матрице V.

F6. В силу пункта F4 мы можем считать, не ограничивая общности, что $a \leqslant a'$ и $b \leqslant b'$. Рассмотрим подматрицу, образованную первой, третьей, четвертой и пятой строками и первым, вторым, пятым и шестым столбцами формулы (6.2.46):

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & \alpha' \\ b & \beta_2 & \gamma_1 & \gamma_1' \\ \beta_1 & b & \gamma_2 & \gamma_2' \\ \nu_1 & \nu_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что перманент матрицы S равен $a+2b$, и минимум в выражении (1.3.5) достигается на единственной перестановке $(132) \in \mathcal{S}_4$. В силу определения 1.3.22 в этом случае выполнено неравенство $\operatorname{trop}(V) \geqslant 4$. Полученное противоречие показывает, что предположение пункта F0 неверно. $\square$

Теперь мы готовы разобрать случай (i) теоремы 6.2.1.

Теорема 6.2.12. *Случай (i) теоремы 6.2.1 не реализуется.*

Доказательство. 1. Предположим, что матрица V реализует случай (i), тогда выполнены условия $\operatorname{trop}(V) = 3$, $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) > 3$ и

$$\mathcal{P}(V) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0\ldots0 & \infty\ldots\infty & \infty\ldots\infty \\ 0\ldots0 & \infty\ldots\infty & \infty\ldots\infty \\ \infty\ldots\infty & 0\ldots0 & \infty\ldots\infty \\ \infty\ldots\infty & 0\ldots0 & \infty\ldots\infty \\ \infty\ldots\infty & \infty\ldots\infty & 0\ldots0 \\ \underbrace{\infty\ldots\infty}_{u_1} & \underbrace{\infty\ldots\infty}_{u_2} & \underbrace{0\ldots0}_{u_3} \end{array}\right). \tag{6.2.47}$$

В силу леммы 6.1.11 мы можем считать, не ограничивая общности, что минимальный элемент любого столбца матрицы V равен 0.

2. Для любого $i \in \{1,2,3\}$ мы полагаем

$$\mu_i = \min_{j\in\{1,\ldots,n\}:v_{2i-1,j}\neq v_{2i,j}} \{\min\{v_{2i-1,j}, v_{2i,j}\}\}. \tag{6.2.48}$$

Заметим, что если условие $v_{2i-1,j} = v_{2i,j}$ выполнено при любом $j \in \{1,\ldots,n\}$, то строки с индексами $(2i-1)$ и $2i$ матрицы V совпадают. Тогда в силу теоремы 6.1.2 мы получаем равенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) = \operatorname{trop}(V)$, которое противоречит условию теоремы. Поэтому множество всех индексов j, удовлетворяющих условию $v_{2i-1,j} \neq v_{2i,j}$, непусто, и потому $\mu_i \in \mathbb{R}$, а в силу пункта 1 выполнено условие $\mu_i > 0$.

3. Через $g(i)$ мы обозначаем произвольный индекс $j \in \{1,\ldots,n\}$, доставляющий минимум выражению (6.2.48), то есть, удовлетворяющий условию $\mu_i = \min\{v_{2i-1,g(i)}, v_{2i,g(i)}\}$, $v_{2i-1,g(i)} \neq v_{2i,g(i)}$.

4. Переставляя строки и столбцы матрицы V, мы можем считать, не ограничивая общности, что выполнены условия $g(1) \in \{u_1+1,\ldots,u_1+u_2\}$ и $g(3) \in \{1,\ldots,u_1\}$.

Предположим, что условие $\min\{v_{5j'}, v_{6j'}\} < \mu_3$ выполнено для любого индекса $j' \in \{u_1+1,\ldots,u_1+u_2\}$. Тогда в силу пункта 2 при любом $j' \in \{u_1+1,\ldots,u_1+u_2\}$ выполнено условие $v_{5j'} = v_{6j'} < \mu_3$, и мы имеем

$$\max_{j'=u_1+1}^{u_1+u_2} \{v_{5j'}\} = \overline{\mu_3} < \mu_3.$$

Теперь прибавим $-\overline{\mu_3}$ к каждому элементу последних двух строк матрицы V и достаточно малое $-\varepsilon < 0$ к каждому элементу первых двух строк. Полученная матрица удовлетворяет условиям теоремы 6.2.11, которая дает противоречие с пунктом 1.

Таким образом, неравенство $\min\{v_{5h(3)}, v_{6h(3)}\} \geqslant \mu_3$ выполнено при некотором $h(3) \in \{u_1+1, \ldots, u_1+u_2\}$. Аналогично, условие $\min\{v_{1h(1)}, v_{2h(1)}\} \geqslant \mu_1$ выполнено для некоторого $h(1) \in \{u_1+u_2+1, \ldots, n\}$.

5. Из пункта 1 следуют равенства $v_{3g} = v_{4g} = 0$ при всех $g \in \{u_1 + 1, \ldots, u_1 + u_2\}$. В силу пункта 4 верны равенства $v_{3g(1)} = v_{4g(1)} = 0$, а числа $v_{5g(1)}$ и $v_{6g(1)}$ положительны. Аналогично, мы получаем условия $v_{1g(3)} = v_{2g(3)} = v_{5h(1)} = v_{6h(1)} = 0$, $v_{3g(3)} > 0$ и $v_{4g(3)} > 0$.

6. Предположим, что матрица V содержит столбцы (индексы этих столбцов мы обозначим через γ_1 и γ_2, соответственно) следующих видов:

$$(\mu_1\, \psi_1\, 0\, 0\, \omega_1\, \omega_2)^\top, \tag{6.2.49}$$

$$(\psi_2\, \mu_1\, 0\, 0\, \omega_3\, \omega_4)^\top, \tag{6.2.50}$$

где $\psi_1 > \mu_1$ и $\psi_2 > \mu_1$, а каждое из чисел $\omega_1, \ldots, \omega_4$ превосходит $\mu_1 + \mu_3$. Заметим, что в силу пункта 5 матрица $V[5, 6, 1, 2|n, g(3), \gamma_1, \gamma_2]$ равна

$$S = \begin{pmatrix} 0 & m' & \omega_1 & \omega_3 \\ 0 & m'' & \omega_2 & \omega_4 \\ \chi_1 & 0 & \mu_1 & \psi_2 \\ \chi_2 & 0 & \psi_1 & \mu_1 \end{pmatrix},$$

где числа χ_1 и χ_2 положительны. Из пункта 3 следует также, что $m' \neq m''$ и $\min\{m', m''\} = \mu_3$. Перманент матрицы S равен $2\mu_1 + \mu_3$, и минимум в выражении (1.3.5) достигается на единственной перестановке, поэтому матрица S тропически невырождена и $\operatorname{trop}(V) \geqslant 4$. Противоречие показывает, что не более, чем один из столбцов (6.2.49) и (6.2.50) встречается в матрице V. Мы можем считать, не ограничивая общности, что столбец (6.2.49) не встречается в матрице V.

7. Рассмотрим набор (l_1, l_2, l_3, l_5), который удовлетворяет условию $\min\{l_1, l_2, l_3, l_5\} = 0$ и реализует тропическую зависимость строк матрицы $V[1, 2, 3, 5]$. Согласно лемме 6.1.7 выполнены условия $l_1{=}l_2{=}0$, $l_3 > 0$, $l_5 > 0$.

Предположим, что $l_3 \neq \mu_1$. Поскольку минимум на множестве $\{v_{1g(1)} + l_1, v_{2g(1)} + l_2, v_{3g(1)} + l_3, v_{5g(1)} + l_5\} = \{v_{1g(1)}, v_{2g(1)}, l_3, v_{5g(1)} + l_5\}$ достигается по крайней мере дважды, рассуждения пункта 3 показывают, что $l_5 < \min\{l_3, \mu_1\}$. Из пункта 5 теперь следует, что $v_{5h(1)} + l_5 < \min\{l_3, \mu_1\}$, а из пункта 4 — что $\min\{v_{1h(1)} + l_1, v_{2h(1)} + l_2, v_{3h(1)} + l_3\} \geqslant \min\{l_3, \mu_1\}$.

Противоречие с определением 6.1.3 показывает, что на самом деле $l_3 = \mu_1$. Если $l_5 < \mu_1$, то в силу пункта 5 верно неравенство $v_{5h(1)} + l_5 < \mu_1$, а в силу пункта 4 — неравенство $\min\{v_{1h(1)}, v_{2h(1)}, v_{3h(1)} + \mu_1\} \geqslant \mu_1$. Это также противоречит определению 6.1.3, поэтому $l_5 \geqslant \mu_1$.

8. Из теоремы 6.1.19 следует, что любые четыре строки матрицы V тропически линейно зависимы. В силу пункта 7 найдутся числа $y_1 \in \mathbb{R}$ и $y_1 \geqslant \mu_1$, для которых набор $(0, 0, \mu_1, y_1)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $V[1, 2, 3, 5]$. Аналогичные рассуждения показывают, что найдутся числа $y_3 \in \mathbb{R}$ и $y_3 \geqslant \mu_3$, для которых набор $(\mu_3, y_3, 0, 0)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $V[1, 3, 5, 6]$.

9. Есть две возможности для индекса $g(2)$ — случай A, когда выполнено условие $g(2) \in \{u_1 + u_2 + 1, \ldots, n\}$, и случай B, когда выполнено условие $g(2) \in \{1, \ldots, u_1\}$. Мы рассмотрим эти случаи отдельно друг от друга.

Случай A. Действительно, пусть $g(2) \in \{u_1 + u_2 + 1, \ldots, n\}$.

A1. Рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта 4, показывают, что при некотором $h(2) \in \{1, \ldots, u_1\}$ выполнено условие $\min\{v_{3h(2)}, v_{4h(2)}\} \geqslant \mu_2$.

A2. Рассуждения, аналогичные рассуждениям пунктов 7–8, показывают, что найдутся числа $y_2 \in \mathbb{R}$ и $y_2 \geqslant \mu_2$, для которых набор $(y_2, 0, 0, \mu_2)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $V[1, 3, 4, 5]$.

A3. Рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта 6 позволяют нам считать, не ограничивая общности, что следующие столбцы не принадлежат матрице V:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \psi' \\ 0 \\ 0 \\ \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1'' \\ \omega_2'' \\ \mu_3 \\ \psi'' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_1''' \\ \omega_2''' \\ \mu_2 \\ \psi''' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\psi' > \mu_1$, $\psi'' > \mu_3$, $\psi''' > \mu_2$, $\omega_1' > \mu_1 + \mu_3$, $\omega_2' > \mu_1 + \mu_3$, $\omega_1'' > \mu_2 + \mu_3$, $\omega_2'' > \mu_2 + \mu_3$, $\omega_1''' > \mu_1 + \mu_2$ и $\omega_2''' > \mu_1 + \mu_2$.

A4. Положим

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & t^{y_2} & 2t^{\mu_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2t^{\mu_1} & 1 & t^{y_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ t^{y_1} & 2t^{\mu_2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы будем строить матрицу F, удовлетворяющую условиям $\deg F = V$ и

$$\lambda_{1i} f_{1j} + \lambda_{2i} f_{2j} + \lambda_{3i} f_{3j} + \lambda_{4i} f_{4j} + \lambda_{5i} f_{5j} + \lambda_{6i} f_{6j} = 0 \qquad (6.2.51)$$

при всех $i \in \{1,2,3\}$ и $j \in \{1,\dots,n\}$.

A5. Сначала предположим, что $j \in \{1,\dots,u_1\}$. В силу пункта 1 выполнены равенства $v_{1j} = v_{2j} = 0$, а в силу пункта A3 верно одно из неравенств $v_{5j} \neq \mu_3$, $v_{6j} \leqslant \mu_3$, $v_{3j} \leqslant \mu_2 + \mu_3$ или $v_{4j} \leqslant \mu_2 + \mu_3$. Пункты 8 и A2 показывают, что в любом из этих случаев матрица

$$\begin{pmatrix} t^{y_2} & 2t^{\mu_3} \\ 1 & t^{y_3} \\ 1 & 0 \\ 2t^{\mu_2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(которая получается из матрицы Λ удалением первого столбца и второй строки) и набор $(v_{1j}, v_{3j}, v_{4j}, v_{5j}, v_{6j})$ удовлетворяет условиям леммы 6.1.17. Таким образом, найдутся элементы $f_{1j}, f_{3j}, f_{4j}, f_{5j}, f_{6j} \in \mathbf{H}$, удовлетворяющие условиям $\deg f_{k'j} = v_{k'j}$ при всех $k' \in \{1,3,4,5,6\}$ и $\lambda_{1i'} f_{1j} + \lambda_{3i'} f_{3j} + \lambda_{4i'} f_{4j} + \lambda_{5i'} f_{5j} + \lambda_{6i'} f_{6j} = 0$ при $i' \in \{2,3\}$. В силу равенств $\lambda_{22} = \lambda_{23} = 0$ условие (6.2.51) выполнено для $i \in \{2,3\}$ при любом выборе элемента f_{2j}.

Положим

$$f_{2j} = -\lambda_{11} f_{1j} - \lambda_{31} f_{3j} - \lambda_{41} f_{4j} - \lambda_{51} f_{5j} - \lambda_{61} f_{6j}. \tag{6.2.52}$$

Теперь условие (6.2.51) выполняется и для $i = 1$. Равенство (6.2.47) показывает, что $\lambda_{11} f_{1j}$ — это единственное слагаемое неположительной степени в правой части равенства (6.2.52). Таким образом, мы имеем равенства $\deg f_{2j} = 0 = v_{2j}$.

A6. Отметим, что случай, когда $j \in \{1,\dots,u_1\}$ (то есть, случай A5), совпадает с точностью до перенумерации строк и столбцов матрицы V со случаями, когда $j \in \{u_1+1,\dots,u_1+u_2\}$ или $j \in \{u_1+u_2+1,\dots,n\}$. Таким образом, для любого индекса $j \in \{1,\dots,n\}$ мы можем найти элементы $f_{1j},\dots,f_{6j} \in \mathbf{H}$ степеней $v_{1j},\dots,v_{6j}$, соответственно, которые удовлетворяют условиям (6.2.51) при всех $i \in \{1,2,3\}$.

В силу определения матрицы Λ любая строка построенной матрицы F является линейной комбинацией ее первой, третьей и пятой строк. В силу определения 1.3.23 выполнено неравенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) \leqslant 3$. Противоречие с рассуждениями пункта 1 завершает разбор случая A.

Случай B. Теперь предположим, что $g(2) \in \{1,\dots,u_1\}$.

B1. Рассуждения, аналогичные рассуждениям пункта 4, показывают, что для некоторого $h(2) \in \{u_1+u_2+1,\dots,n\}$ выполнено условие $\min\{v_{3h(2)}, v_{4h(2)}\} \geqslant \mu_2$.

B2. В силу леммы 6.1.12 выполнено условие $\mathrm{trop}(V[1,2,3,4,5]) \leqslant 3$; теорема 6.1.2 показывает, что в этом случае $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V[1,2,3,4,5]) \leqslant 3$. В силу определения 1.3.23 найдется матрица $F' \in \mathbf{H}^{5\times n}$, для которой выполнены условия $V[1,2,3,4,5] = \deg F'$ и $rank(F') \leqslant 3$.

Любые четыре строки матрицы F' являются, таким образом, линейно зависимыми над полем $\mathbf{H}$. В частности, найдутся элементы λ_{11}, λ_{21}, λ_{31} и λ_{51} из поля $\mathbf{H}$, не все из которых равны нулю, найдутся элементы λ_{12}, λ_{32}, λ_{42} и λ_{52} из поля $\mathbf{H}$, не все из которых равны нулю, для которых при любом $j \in \{1,\ldots,n\}$ выполнены условия

$$\lambda_{11}f'_{1j}+\lambda_{21}f'_{2j}+\lambda_{31}f'_{3j}+\lambda_{51}f'_{5j} = 0, \lambda_{12}f'_{1j}+\lambda_{32}f'_{3j}+\lambda_{42}f'_{4j}+\lambda_{52}f'_{5j} = 0. \quad (6.2.53)$$

B3. Умножая равенства (6.2.53) на ненулевые элементы поля $\mathbf{H}$, мы считаем, не ограничивая общности, что выполнены условия $\min\{\deg\lambda_{11}, \deg\lambda_{21}, \deg\lambda_{31}, \deg\lambda_{51}\} = 0$ и $\min\{\deg\lambda_{12}, \deg\lambda_{32}, \deg\lambda_{42}, \deg\lambda_{52}\} = 0$. В силу леммы 6.1.14 наборы $(\deg\lambda_{11}\deg\lambda_{21}\deg\lambda_{31}\deg\lambda_{51})$ и $(\deg\lambda_{12}\deg\lambda_{32}\deg\lambda_{42}\deg\lambda_{52})$ реализуют тропическую зависимость строк матриц $V[1,2,3,5]$ и $V[1,3,4,5]$, соответственно. В силу пункта 7 верны равенства $\deg\lambda_{11} = \deg\lambda_{21} = 0$, $\deg\lambda_{31} = \mu_1$ и $\deg\lambda_{51} = y_1 \geqslant \mu_1$. Аналогично мы получаем равенства $\deg\lambda_{32} = \deg\lambda_{42} = 0$, $\deg\lambda_{12} = \mu_2$ и $\deg\lambda_{52} = y_2 \geqslant \mu_2$. Положим также $\lambda_{41} = \lambda_{61} = \lambda_{22} = \lambda_{62} = 0$.

B4. В силу пункта 8 набор $(\mu_3, y_3, 0, 0)$ реализует тропическую зависимость строк матрицы $V[1,3,5,6]$. Положим $\lambda_{23} = \lambda_{43} = 0$ и также $\lambda_{13} = \xi_1 t^{\mu_3}$, $\lambda_{33} = \xi_3 t^{y_3}$, $\lambda_{53} = \xi_5$ и $\lambda_{63} = \xi_6$, где элементы $\xi_\iota \in \mathbb{C}^*$ выбраны таким образом, что условия

$$\deg(\lambda_{p1}\lambda_{q3} - \lambda_{q1}\lambda_{p3}) = \min\{\deg\lambda_{p1} + \deg\lambda_{q3}, \deg\lambda_{q1} + \deg\lambda_{p3}\} \quad (6.2.54)$$

выполнены при любых различных индексах $p, q \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Отметим, что существование таких элементов $\{\xi_\iota\}$ следует из бесконечности поля $\mathbb{C}$.

B5. Пусть $j' \in \{u_1 + u_2 + 1, \ldots, n\}$. Положим $f_{k'j'} = f'_{k'j'}$ для всех $k' \in \{1,2,3,4,5\}$. В силу пункта B2 выполнено равенство $\deg f_{k'j'} = v_{k'j'}$. Положим также

$$f_{6j'} = -\frac{\lambda_{13}f_{1j'} + \lambda_{23}f_{2j'} + \ldots + \lambda_{53}f_{5j'}}{\lambda_{63}}. \quad (6.2.55)$$

Заметим, что выполнено равенство $\deg(\lambda_{53}f_{5j'}) = 0$, и в силу условия (6.2.47) все остальные слагаемые в числителе имеют положительные степени. Таким образом, мы доказали равенства $f_{6j'} = 0 = v_{6j'}$; более того, из равенства (6.2.55) следует, что условие

$$\lambda_{1i}f_{1j} + \lambda_{2i}f_{2j} + \lambda_{3i}f_{3j} + \lambda_{4i}f_{4j} + \lambda_{5i}f_{5j} + \lambda_{6i}f_{6j} = 0 \quad (6.2.56)$$

выполнено при любом $j \in \{u_1+u_2+1,\dots,n\}$ и $i=3$. Условие (6.2.53) показывает, что равенство (6.2.56) также выполнено при любых $j \in \{u_1+u_2+1,\dots,n\}$ и $i \in \{1,2\}$.

B6. Предположим теперь, что $j'' \in \{1,\dots,u_1\}$. Равенство (6.2.54) и пункты B3–B4 показывают, что матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{32} & \lambda_{33} \\ \lambda_{42} & \lambda_{43} \\ \lambda_{52} & \lambda_{53} \\ \lambda_{62} & \lambda_{63} \end{pmatrix}$$

и набор $(v_{1j''}, v_{3j''}, v_{4j''}, v_{5j''}, v_{6j''})$ удовлетворяют условиям леммы 6.1.17. Таким образом, найдутся элементы $f_{1j''}, f_{3j''}, f_{4j''}, f_{5j''}, f_{6j''} \in \mathbf{H}$, для которых условие $\deg f_{k''j''} = v_{k''j''}$ выполнено при любом $k'' \in \{1,3,4,5,6\}$, а условие (6.2.56) — при любых $j \in \{1,\dots,u_1\}$ и $i \in \{2,3\}$. Положим также

$$f_{2j''} = -\frac{\lambda_{11}f_{1j''} + \lambda_{31}f_{3j''} + \ldots + \lambda_{61}f_{6j''}}{\lambda_{21}}. \tag{6.2.57}$$

Заметим, что $\deg(\lambda_{11}f_{1j''}) = 0$, и в силу условия (6.2.47) все остальные слагаемые в числителе имеют положительные степени. Таким образом, мы доказали равенства $\deg f_{2j''}=0=v_{2j''}$; более того, из равенства (6.2.57) следует, что условие (6.2.56) также выполнено при любом $j \in \{1,\dots,u_1\}$ и $i=1$.

B7. Наконец, положим $j''' \in \{u_1+1,\dots,u_1+u_2\}$. В силу пункта 1 верны равенства $v_{3j'''} = v_{4j'''} = 0$, из пункта 6 следует, что выполнено одно из условий $v_{1j'''} \neq \mu_1$, $v_{2j'''} \leqslant \mu_1$, $v_{5j'''} \leqslant \mu_1+\mu_3$ или $v_{6j'''} \leqslant \mu_1+\mu_3$. В силу пунктов B3–B4 в каждом из этих случаев матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{33} \\ \lambda_{51} & \lambda_{53} \\ \lambda_{61} & \lambda_{63} \end{pmatrix}$$

и набор $(v_{1j'''}, v_{2j'''}, v_{3j'''}, v_{5j'''}, v_{6j'''})$ удовлетворяют условиям леммы 6.1.17, и потому найдутся элементы $f_{1j'''}, f_{2j'''}, f_{3j'''}, f_{5j'''}, f_{6j'''}$, для которых условие $\deg f_{k'''j'''} = v_{k'''j'''}$ выполнено при любом $k''' \in \{1,2,3,5,6\}$, а условие (6.2.56) выполнено при всех $j \in \{u_1+1,\dots,u_1+u_2\}$ и $i \in \{1,3\}$. Положим также

$$f_{4j'''} = -\frac{\lambda_{12}f_{1j'''} + \lambda_{22}f_{2j'''} + \lambda_{32}f_{3j'''} + \lambda_{52}f_{5j'''} + \lambda_{62}f_{6j'''}}{\lambda_{42}}. \tag{6.2.58}$$

Заметим, что $\deg(\lambda_{32} f_{3j'''}) = 0$, и в силу условия (6.2.47) все остальные слагаемые в числителе имеют положительные степени. Таким образом, мы доказали равенства $\deg f_{4j'''} = 0 = v_{4j'''}$; более того, из равенства (6.2.58) следует, что условие (6.2.56) также выполнено при любом $j \in \{u_1+1, \ldots, u_1+u_2\}$ и $i = 2$.

B8. Пункты B5–B7 показывают существование матрицы F, удовлетворяющей условиям $V = \deg F$ и (6.2.56) при всех $i \in \{1,2,3\}$ и $j \in \{1,\ldots,n\}$. В силу пунктов B3–B4 любая строка матрицы F является линейной комбинацией ее первой, третьей и пятой строк. В силу определения 1.3.23 выполнено неравенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(V) \leqslant 3$. Противоречие с рассуждениями пункта 1 завершает разбор случая B и доказательство теоремы. □

Теперь мы можем доказать основной результат раздела.

Теорема 6.2.13. *Если матрица $A \in \mathbb{R}^{6\times n}$ имеет тропический ранг 3, то ее ранг Капранова также равен трем.*

Доказательство. Если $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(A) > 3$, то в силу теоремы 6.2.1, мы можем считать, не ограничивая общности, что матрица A удовлетворяет условиям одного из случаев (i)–(v). Теоремы 6.2.2, 6.2.3, 6.2.6, 6.2.8, 6.2.12 показывают, что ни один из этих случаев не реализуется, и поэтому выполнено неравенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(A) \leqslant 3$. Из теоремы 6.1.1 теперь следует равенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(A) = 3$. □

6.3 Доказательство основного результата

В этом разделе мы завершаем доказательство основного результата главы. Нам потребуется следующий пример.

Пример 6.3.1. *[45] Пусть*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathrm{trop}(C) = 3$, $K_{\mathbb{C}}(C) = 4$.

Доказательство. Доказательство может быть проведено непосредственно применением определений 1.3.22 и 1.3.23. Другое доказательство содержится в разделе 7 статьи [45]. □

Также нам потребуется следующая теорема.

Теорема 6.3.2. *Пусть матрица* $A \in \mathbb{R}^{d\times n}$ *такова, что* $\operatorname{trop}(A) = r$, $K_{\mathbb{C}}(A) > r$. *Тогда существуют матрицы* $A' \in \mathbb{R}^{(d+1)\times n}$ *и* $A'' \in \mathbb{R}^{d\times(n+1)}$, *удовлетворяющие условиям* $\operatorname{trop}(A') = \operatorname{trop}(A'') = r$ *и* $K_{\mathbb{C}}(A') = K_{\mathbb{C}}(A'') > r$.

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу определений 1.3.22 и 1.3.23 тропический ранг и ранг Капранова матрицы инвариантны относительно добавления повторяющейся строки или столбца. □

Следующая теорема показывает, что тропический ранг и ранг Капранова могут быть увеличены на один путем добавления к матрице некоторого столбца и некоторой строки.

Теорема 6.3.3. *Пусть матрица* $A \in \mathbb{R}^{d\times n}$ *такова, что* $\operatorname{trop}(A) = r$, $K_{\mathbb{C}}(A) > r$. *Тогда существует матрица* $B \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(n+1)}$, *удовлетворяющая условиям* $\operatorname{trop}(B) = r+1$, $K_{\mathbb{C}}(B) > r+1$.

Доказательство. В силу леммы 6.1.11 мы можем считать, не ограничивая общности, что минимальный элемент каждой строки и каждого столбца матрицы A равен 0. Обозначим через P любое число, большее максимального элемента матрицы A. Положим

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & P \\ & A & & \dots \\ & & & P \\ \hline P & \dots & P & 0 \end{array}\right).$$

Из леммы 6.1.11 следует, что $\operatorname{trop}(B) \leqslant r+1$. Выбор числа P также показывает, что матрица $B[h_1,\dots,h_r,d+1|c_1,\dots,c_r,n+1]$ является тропически невырожденной, если матрица $A[h_1,\dots,h_r|c_1,\dots,c_r]$ тропически невырождена. Поэтому $\operatorname{trop}(B) = r+1$.

Осталось проверить, что $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(B) > r+1$. В самом деле, рассмотрим матрицу F над полем $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$, для которой $\deg F = A$. Положим

$$D = \mathbf{I}_{d+1} - \sum_{k=1}^{d} \frac{f_{k,n+1}\mathbf{U}_{k,d+1}}{f_{d+1,n+1}} \in \mathbf{H}^{(d+1)\times(d+1)},$$

где через $\mathbf{I}_{d+1}$ обозначена единичная матрица порядка $d+1$, а через $\mathbf{U}_{k,d+1}$ — матричные единицы. Поскольку матрица D невырождена, мы имеем $rank(DF) = rank(F)$. Также заметим, что

$$DF = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \overline{A} & & \dots \\ & & & 0 \\ \hline f_{d+1,1} & \dots & f_{d+1,n} & f_{d+1,n+1} \end{array}\right), \tag{6.3.1}$$

где матрица $\overline{A}$ удовлетворяет условию $\deg \overline{A} = A$. По условию теоремы $rank(\overline{A}) > r$, поэтому из равенства (6.3.1) следует, что $rank(DF) = rank(\overline{A}) + 1$. Таким образом, $rank(F) > r + 1$. □

Теперь мы можем получить решение проблемы 1.3.34.

Теорема 6.3.4. *Пусть d, n, r — положительные целые числа и $r \leqslant \min\{d, n\}$. Матрицы размера $d \times n$ тропического ранга, меньшего r, всегда имеют ранг Капранова, меньший r, в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий:*

(1) $r \leqslant 3$;

(2) $r = \min\{d, n\}$;

(3) $r = 4$ и $\min\{d, n\} \leqslant 6$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}^{d\times n}$. Если $\mathrm{trop}(A) < \min\{d, n\}$, то из теоремы 6.1.1 следует, что $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(A) < \min\{d, n\}$. Если $\mathrm{trop}(A) < 3$, то теорема 6.1.1 влечет $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{trop}(A)$. Если же $\mathrm{trop}(A) = 3$ и $\min\{d, n\} \leqslant 6$, то из теорем 6.1.2 и 6.2.13 следует условие $\mathrm{trop}(A) = \mathrm{K}_{\mathbb{C}}(A)$.

Теперь предположим, что условия (1)–(3) нарушаются. Нам требуется построить матрицу $B \in \mathbb{R}^{d\times n}$, удовлетворяющую условиям $\mathrm{trop}(B) < r$, $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(B) \geqslant r$. В самом деле, при $r = 4$ и $\min\{d, n\} \geqslant 7$ мы можем построить ее с помощью примера 6.3.1 и теоремы 6.3.2. Если же $5 \leqslant r \leqslant \min\{d, n\} - 1$ и $\min\{d, n\} \geqslant 6$, то мы используем матрицу из примера 5.1.9 (тропический ранг которой равен 4 в силу предложения 5.1.13) и применяем теоремы 6.3.2 и 6.3.3. □

Отметим, что основной результат главы — теорема 1.3.35 — следует из доказанной теоремы 6.3.4. В самом деле, в силу теоремы 1.3.28 неравенство $\mathrm{trop}(B) < r$ влечет неравенство $\mathrm{K}_{\mathbb{C}}(B) < r$ для всех матриц $B \in \mathbb{R}^{d\times n}$ в том и только том случае, если миноры порядка r матрицы переменных размера $d \times n$ образуют тропический базис порождаемого ими идеала.

Глава 7

Факторизация тропических матриц

В этой главе изучается проблема факторизации тропических матриц и свойства связанной с этой проблемой функции факторизационного ранга. Исследование факторизации матриц над тропическим полукольцом началось в 90-е годы прошлого века в связи с приложениями в комбинаторной оптимизации [6] и продолжалось впоследствии [8]. Последнее десятилетие было отмечено бурным развитием методов тропической математики, и были найдены новые приложения тропической факторизации в линейной алгебре [45] и алгебраической геометрии [44]. Изложенные результаты основаны на дальнейшем развитии тропических методов и позволяют получить решения ряда открытых проблем, возникших в связи с приложениями в комбинаторной оптимизации, тропической геометрии и линейной алгебре.

7.1 Предварительные сведения

В этой главе мы рассматриваем матрицы над тропическим полукольцом $(\mathbb{R}, \min, +)$ и называем их, как обычно, просто *тропическими матрицами*. Операции над векторами и матрицами мы определяем в соответствии с обычными операциями над полукольцом, то есть, заменяя в классических определениях сложение и умножение тропическими аналогами $\oplus = \min$ и $\otimes = +$. В частности, тропической линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ называется вектор $(\lambda_1 \otimes a_1) \oplus \ldots \otimes (\lambda_n \otimes a_n)$, где через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ обозначены произвольные вещественные числа. Тропической линейной оболочкой векторов $a_1, \ldots, a_n$ называется множество всех тропических линейных комбинаций этих векторов. Упомянем определение понятия факторизационного ранга для тропических матриц, которое мы приводим в соответствии с общим

определением 1.2.10.

Определение 7.1.1. *Факторизационным рангом* тропической матрицы A называется минимальное число k, для которого найдутся тропическая матрица B размера $m \times k$ и тропическая матрица C размера $k \times n$, удовлетворяющие условию $A = B \otimes C$.

В терминах тропической линейной оболочки определение факторизационного ранга может быть сформулировано следующим образом.

Лемма 7.1.2. *[45] Факторизационный ранг матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ равен наименьшей мощности множества α, содержащего строки матрицы A в своей тропической линейной оболочке.*

Доказательство. Если $A = B \otimes C$, то тропическая линейная оболочка строк матрицы C содержит строки матрицы A, как показывает определение тропического умножения матриц. Наоборот, если тропическая линейная оболочка некоторых строк $C'_{(1)}, \ldots, C'_{(k)}$ содержит строки матрицы A, то найдутся элементы B'_{it}, удовлетворяющие условию $A_{(i)} = \bigoplus_{t=1}^{k} B'_{it} \otimes C'_{(i)}$ при любом i, то есть, выполнено равенство $A = B' \otimes C'$. □

Заметим, что выполнено условие $(B \otimes C)^\top = C^\top \otimes B^\top$, поэтому факторизационный ранг тропической матрицы инвариантен относительно транспонирования. Таким образом, утверждение леммы 7.1.2 останется верным и для столбцов матрицы A. Следующая лемма, полезная для дальнейших рассуждений, следует теперь из леммы 7.1.2.

Лемма 7.1.3. *[1] Матрица, полученная удалением некоторой строки или некоторого столбца имеет факторизационный ранг равный или меньший на единицу, чем факторизационный ранг исходной матрицы. Удаление строки (столбца, соответственно), которая являлась тропической линейной комбинацией остальных строк (столбцов, соответственно), не влияет на факторизационный ранг матрицы.*

Доказательство. Предположим, что тропическая линейная оболочка множества α содержит строки матрицы A. Если матрица A' получена из A добавлением некоторой строки a', то тропическая линейная оболочка множества $\alpha \cup \{a'\}$ содержит строки матрицы A'. Второе утверждение леммы следует непосредственно из леммы 7.1.2. □

Отметим, что факторизационный ранг тропической матрицы в некоторых источниках также называется *комбинаторным рангом* [7] и *рангом Барвинка* [45]. Также понятие факторизационного ранга участвует в формулировках

ряда проблем оптимизации, например в так называемой *задаче коммивояжера со складами* [8]. С точки зрения тропической геометрии факторизационный ранг можно понимать как минимальную слабую размерность полумодуля, содержащего столбцы заданной матрицы [44].

Использование тропических методов для исследования задач, возникающих в различных приложениях, проявляет важность исследований вычислительной сложности тропических инвариантов [50, 103]. Проблема вычисления факторизационного ранга тропической матрицы исследуется в течение последних 20 лет [6, 44, 45]; несложно видеть, что эта проблема разрешима алгоритмически. В самом деле, определение 7.1.1 может быть сформулировано на языке логики первого порядка теории вещественных чисел с порядком и сложением, и потому вычисление факторизационного ранга может быть проведено применением алгоритма элиминации кванторов для этой теории [56].

Крайне высокая вычислительная сложность алгоритма элиминации кванторов делает упомянутый алгоритм непригодным для практического применения. Другой алгоритм был разработан Девелином в работе [44], в которой была развита теория тропических касательных многообразий. В этой работе была получена характеризация факторизационного ранга с точки зрения тропической геометрии, и эта характеризация позволила получить алгоритм вычисления ранга. К сожалению, ни алгоритм Девелина, ни какой-либо другой алгоритм, видимо, не позволят вычислять факторизационный ранг тропической матрицы за полиномиальное время. В самом деле, проблема вычисления этого ранга оказывается NP-сложной даже для тропических 01-матриц [45]. Другими словами, общая *проблема тропической факторизации матриц* — существуют ли матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$, удовлетворяющие условию $A = B \otimes C$, для данных матрицы A и числа k? — оказывается NP-трудной.

Помимо общей проблемы вычисления факторизационного ранга большой интерес вызывает проблема распознавания матриц фиксированного ранга. Этот интерес вызван во многом приложениями в комбинаторной оптимизации: некоторые важные проблемы комбинаторной оптимизации допускают быстрые решения в тех случаях, когда матрицы данных имеют ограниченный факторизационный ранг [6, 7]. В частности, задача коммивояжера допускает быстрое решение, если факторизационный ранг матрицы расстояний ограничен заранее фиксированным числом; такой вариант имеет название *задачи коммивояжера со складами* [8]. Матрицы ограниченного факторизационного ранга естественным образом возникают также и в других вопросах комбинаторной оптимизации [6] и тропической геометрии [45]. Эти замечания приводят нас к следующему вопросу о тропических факторизациях матриц.

Проблема 7.1.4. *[6, 7] Существует ли алгоритм, решающий задачу тропической факторизации матриц за полиномиальное время при любом фик-*

сированном k?

В работе [6] Барвинок предполагал, что проблема 7.1.4 допускает положительное решение и также упомянул эту проблему в работе [7]. Дальнейшие исследования проблемы распознавания матриц фиксированного факторизационного ранга проводились в работах [28, 43, 44, 45, 76], но эта проблема оставалась открытой даже в случае $k = 3$ и была снова сформулирована в статье [45].

Проблема 7.1.5. *[45, раздел 8, вопрос 2] Существует ли полиномиальный по времени алгоритм распознавания тропических матриц факторизационного ранга три?*

В работе [45] были также сформулированы несколько других проблем, связанных со сложностью тропической факторизации матриц. Одна из них посвящена вопросу о том, могут ли матрицы ограниченного факторизационного ранга быть заданы в терминах рангов своих подматриц.

Проблема 7.1.6. *[45, раздел 8, вопрос 3a] Существует ли число $\Theta(k)$, удовлетворяющее следующему условию: любая тропическая матрица факторизационного ранга, не меньшего k, обязательно имеет подматрицу факторизационного ранга, не меньшего k, содержащую не более $\Theta(k)$ строк и не более $\Theta(k)$ столбцов?*

Предположим, что удалось получить положительное решение проблемы 7.1.6 при некотором фиксированном k. Чтобы решить проблему распознавания матриц факторизационного ранга, меньшего k, нам достаточно в этом случае посчитать ранги всех подматриц размера, не большего $\Theta(k) \times \Theta(k)$. Число таких подматриц, как несложно видеть, имеет полиномиальный характер роста при увеличении размера матрицы, а ранг каждой из таких подматриц может быть посчитан за ограниченное время с помощью алгоритма элиминации кванторов. Таким образом, мы увидели, что положительное решение проблемы 7.1.6 влекло бы положительное решение проблемы 7.1.4.

В работе [45] был также поставлен вопрос о том, существуют ли быстрые алгоритмы вычисления факторизационного ранга для матриц с ограниченным тропическим рангом. Отметим, что в главе 5 нами была исследована аналогичная проблема для функции ранга Гондрана–Мину тропических матриц: мы доказали теорему 5.3.11 и построили полиномиальный по времени алгоритм вычисления ранга Гондрана–Мину матриц с фиксированным тропическим рангом.

Проблема 7.1.7. *[45, раздел 8, вопрос 3b] Существует ли полиномиальный по времени алгоритм вычисления факторизационного ранга матриц с ограниченным тропическим рангом?*

В этой главе мы приводим результаты, посвященные упомянутым проблемам, которые были получены и опубликованы автором диссертации в ряде печатных работ. Прогресс в изучении упомянутых проблем до выхода в свет этих работ обеспечивало в основном исследование тропических матриц факторизационных рангов 1 и 2. В самом деле, множество таких матриц к данному моменту достаточно хорошо изучено: известно, что проблема тропической факторизации при $k \leqslant 2$ допускает линейный по времени алгоритм решения [28, 45]. Кроме того, в работе [45] было показано, что факторизационный ранг матрицы не превосходит двух в том и только том случае, когда все ее миноры порядка 3 имеют факторизационный ранг, не больший двух. Множество матриц размера $d \times n$, имеющих факторизационный ранг 2, было изучено как симплициальный комплекс в работе [43]. В статье [76] было также показано, что множество таких матриц образует многообразие с точностью до тропических проективных преобразований. Несмотря на выход упомянутых работ, проблема быстрого распознавания матриц факторизационного ранга k оставалась открытой при $k \geqslant 3$.

Дадим более подробное описание результатов, изложенных в этой главе, прежде чем приступить к их доказательству. Мы покажем, что при любом $k \geqslant 5$ существуют матрицы сколь угодно большого размера факторизационного ранга k, все подматрицы которых имеют меньший факторизационный ранг. Далее будет доказано, что любая тропическая матрица факторизационного ранга 4 содержит подматрицу, имеющую факторизационный ранг 4 и содержащую не более 1539 строк и не более 1539 столбцов. Этот результат позволит нам получить полное решение проблемы 7.1.6, а также построить полиномиальный по времени алгоритм распознавания матриц факторизационного ранга 3, то есть, решить проблему 7.1.5. Наконец, мы докажем NP-полноту задачи распознавания тропических матриц факторизационного ранга, не большего 7, что приведет нас к решениям проблем 7.1.4 и 7.1.7.

7.2 Факторизация и ранги подматриц

В работе [45] было показано, что любая тропическая матрица факторизационного ранга r содержит подматрицу размера $r \times r$ полного факторизационного ранга при всех $r \leqslant 3$. Предложение 2.2 той же работы показывает, что аналогичный результат оказывается неверным при $r \geqslant 5$. Вопрос же о том, любая ли матрица факторизационного ранга 4 содержит минор порядка 4 полного факторизационного ранга, оставался открытым. В этом разделе доказывается результат, дающий отрицательный ответ на этот вопрос, — доказательство этого результата было опубликовано автором диссертации в статье [163]. Бо-

лее того, мы приведем отрицательное решение проблемы 7.1.6 для всех $k \geqslant 5$ в этом разделе.

7.2.1 Матрицы ранга 4

В этом разделе мы доказываем, что для распознавания матриц факторизационного ранга 4 недостаточно вычислять ранги их подматриц размера 4×4. А именно, приводим пример матрицы размера 5×4 факторизационного ранга 4, все подматрицы размера 4×4 которой имеют ранги, не большие трех.

Пример 7.2.1. *Любая подматрица размера* 4×4 *матрицы*

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет факторизационный ранг, не больший трех.

Доказательство. Сначала отметим, что в силу факторизации

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

факторизационный ранг матрицы $\mathcal{K}[1,2,3,4]$ не превосходит трех. Далее, при $\alpha \in \{3,4\}$ верно равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому факторизационные ранги подматриц $\mathcal{K}[1,2,3,5]$ и $\mathcal{K}[1,2,4,5]$ не превосходят трех. Наконец, для $\beta \in \{-1,1\}$ выполнено равенство

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & \beta & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которое показывает, что матрицы $\mathcal{K}[1,3,4,5]$ и $\mathcal{K}[2,3,4,5]$ также имеют факторизационные ранги, не превосходящие трех. □

Для доказательства основного результата подраздела нам также требуется следующий пример.

Пример 7.2.2. *Факторизационный ранг матрицы*

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

равен четырем.

Доказательство. Рассуждение проведем методом *от противного*. Предположим, что утверждение примера неверно, тогда найдутся матрицы $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ и $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, удовлетворяющие условию $C = A \otimes B$.

Идея нашего доказательства состоит в следующем. Сначала мы определим несколько пар элементов матриц A и B, каждая из которых в сумме дает нуль, то есть, минимальный элемент матрицы C. Впоследствии это позволит нам получить несколько неравенств, связывающих другие элементы матриц A и B, и получить противоречие.

Шаг 1. В силу определения произведения матриц верны равенства

$$\min_{t\in\{1,2,3\}} \{A_{it} + B_{tj}\} = C_{ij} \tag{7.2.1}$$

при всех $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для всякого $p \in \{2, 3, 4\}$ обозначим через t_p наименьший из индексов, доставляющих минимум левой части равенства (7.2.1) при $i = j = p$. В силу определения матрицы C имеем $A_{pt_p} + B_{t_pp} = C_{pp} = 0$.

Шаг 2. Если равенство $t_p = t_q$ выполнено для некоторых $p, q \in \{2, 3, 4\}$, то в силу равенств (7.2.1) выполнено условие $C_{pq}+C_{qp} \leqslant A_{pt_p}+B_{t_pq}+A_{qt_q}+B_{t_qp}$. Из шага 1 следует таким образом, что $C_{pq} + C_{qp} \leqslant 0$, и тогда из определения матрицы C мы получаем $p = q$. Как следствие, имеем $\{t_2, t_3, t_4\} = \{1, 2, 3\}$.

Шаг 3. В силу шага 2 минимум в левой части равенства (7.2.1) при $i = 2$ и $j = 1$ доставляется некоторым индексом t_u, где $u \in \{2, 3, 4\}$, то есть, $A_{2t_u} + B_{t_u1} = 0$. В силу шага 1 имеем $A_{ut_u} + B_{t_uu} = 0$, поэтому из равенств (7.2.1) следует условие $A_{2t_u} + B_{t_uu} \geqslant 0$. Таким образом, мы получаем условие $A_{ut_u} + B_{t_u1} \leqslant 0$, откуда в силу равенства (7.2.1) вытекает условие $C_{u1} \leqslant 0$. Итак, мы получаем $u = 2$, то есть, $A_{2t_2} + B_{t_21} = 0$. В силу шага 1 имеем также $B_{t_21} = B_{t_22}$.

Шаг 4. В силу шага 2 минимум в левой части равенства (7.2.1) при $i = 1$ и $j = 4$ доставляется некоторым индексом t_v, где $v \in \{2, 3, 4\}$, то есть, $A_{1t_v}+B_{t_v4} = 0$. В силу шага 1 имеем $A_{vt_v}+B_{t_vv} = 0$, поэтому из равенств (7.2.1) следует условие $A_{vt_v} + B_{t_v4} \geqslant 0$. Таким образом, мы получаем условие $A_{1t_v} +$

$B_{t_v v} \leqslant 0$, откуда в силу равенства (7.2.1) вытекает условие $C_{1v} \leqslant 0$. Итак, мы получаем $v = 4$, то есть, $A_{1t_4} + B_{t_4 4} = 0$. В силу шага 1 имеем также $A_{1t_4} = A_{4t_4}$.

Шаг 5. В силу равенства (7.2.1) значение каждого из выражений $A_{1t_4}+B_{t_4 1}$ и $A_{4t_2} + B_{t_2 2}$ не меньше четырех. Из шагов 3 и 4 следует теперь, что $A_{4t_4} + B_{t_4 1} \geqslant 4$ и $A_{4t_2} + B_{t_2 1} \geqslant 4$. Поскольку также $C_{41} = 3$, из равенства (7.2.1) следует условие $A_{4t_3} + B_{t_3 1} = 3$.

Шаг 6. Из равенства (7.2.1) также следует, что значения $A_{1t_2} + B_{t_2 1}$ и $A_{4t_4} + B_{t_4 2}$ не меньше четырех. Из шагов 3 и 4 также следует теперь, что $A_{1t_2}+B_{t_2 2} \geqslant 4$ и $A_{1t_4}+B_{t_4 2} \geqslant 4$. Поскольку также $C_{12} = 3$, из равенства (7.2.1) следует условие $A_{1t_3} + B_{t_3 2} = 3$.

Шаг 7. Наконец, равенство (7.2.1) показывает, что значения $A_{1t_3} + B_{t_3 1}$ и $A_{4t_3} + B_{t_3 2}$ не меньше четырех. Таким образом, мы получаем неравенство $A_{1t_3}+B_{t_3 1}+A_{4t_3}+B_{t_3 2} \geqslant 8$. С другой стороны, из шагов 5 и 6 следует, что $A_{1t_3}+B_{t_3 1}+A_{4t_3}+B_{t_3 2} = 6$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теперь мы можем найти факторизационный ранг матрицы $\mathcal{K}$.

Лемма 7.2.3. *Факторизационный ранг матрицы $\mathcal{K}$ равен четырем.*

Доказательство. Положим

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

и заметим, что произведение матриц $D \otimes \mathcal{K}$ равно матрице C из примера 7.2.2. Таким образом, факторизационный ранг матрицы C не превосходит факторизационного ранга матрицы $\mathcal{K}$. □

Мы показали, что матрица $\mathcal{K}$ из примера 7.2.1 имеет факторизационный ранг 4 в то время как все ее подматрицы размера 4×4 имеют меньшие факторизационные ранги. Отметим, что в сравнении с матрицей из предложения 2.2 работы [45], которая показывает отсутствие характеризации матриц ранга r в терминах рангов миноров порядка r при всех $r \geqslant 5$, матрица $\mathcal{K}$ имеет достаточно сложную структуру. Нам не удалось построить матрицу с такими же свойствами для $r = 4$, состоящую из нулей и единиц; тем не менее, представленная матрица $\mathcal{K}$ с более сложной структурой позволяет решить эту проблему. Докажем теперь основной результат этого подраздела.

Теорема 7.2.4. *Если факторизационный ранг тропической матрицы A равен $r \leqslant 3$, то матрица A содержит подматрицу размера $r \times r$ полного*

факторизационного ранга. Для любого целого числа $r > 3$ найдется матрица факторизационного ранга r, все подматрицы размера $r \times r$ которой имеют факторизационные ранги, меньшие r.

Доказательство. Утверждение тривиально при $r = 1$; если факторизационный ранг матрицы A равен двум, то в силу определения найдется пара столбцов матрицы A, которые не совпадают в смысле тропической проективной эквивалентности. Таким образом, в этом случае найдутся индексы i, j, u, v, которые удовлетворяют условию $A_{ij} + A_{uv} \neq A_{iv} + A_{uj}$, что доказывает случай $r = 2$. В случае $r = 3$ результат теоремы следует из предложения 6.1 работы [45], а в случае $r \geqslant 5$ из предложения 2.2 той же работы. Наконец, в силу леммы 7.2.3 матрица $\mathcal{K}$ из примера 7.2.1 позволяет доказать утверждение в случае $r = 4$. □

7.2.2 Отрицательное решение проблемы 7.1.6 для $k \geqslant 5$

В предыдущем подразделе мы получили полное решение проблемы о том, при каких k множество матриц факторизационного ранга k может быть определено в терминах рангов миноров порядка k этих матриц. Теперь мы обратимся к проблеме характеризации факторизационного ранга в терминах миноров произвольного конечного порядка. А именно, нас будет интересовать проблема 7.1.6: найдется ли число $\Theta(k)$, для которого любая тропическая матрица факторизационного ранга k обязательно имеет подматрицу факторизационного ранга k, содержащую не более $\Theta(k)$ строк и не более $\Theta(k)$ столбцов?

Известен следующий результат: как показывает предложение 2.2 работы [45], если бы нужное $\Theta(k)$ существовало, то оно было бы ограничено снизу функцией, имеющей экспоненциальный рост при возрастающем k. В этом подразделе мы приведем пример, показывающий, что такого $\Theta(k)$ на самом деле не существует ни при каком $k \geqslant 5$.

Фиксируем произвольное целое число $\nu > 1$ и будем использовать его обозначение всюду в этом подразделе. Нашей целью будет построение матрицы C, удовлетворяющей следующим свойствам: (i) всякая подматрица матрицы C, содержащая не более ν строк и не более ν столбцов, имеет факторизационный ранг, не больший четырех; (ii) факторизационный ранг самой матрицы C превосходит четыре.

Пример 7.2.5. *Обозначая через u произвольный элемент множества $\{1, \ldots, \nu + 1\}$, а через v — произвольный элемент из $\{1, \ldots, \nu + 2\}$, зададим элементы матрицы $C = C(\nu) \in \mathbb{R}^{(\nu+6)\times(\nu+6)}$ следующим образом:*

(1) положим $C_{uv} = \min\{10u + 10v - 10, 20u + 1, 20v - 9\}$, если пара (u, v) не совпадает ни с парой $(\nu, \nu + 1)$, ни с парой $(\nu + 1, \nu + 1)$;

(2) положим $C_{\nu,\nu+1} = 20\nu - 1$, $C_{\nu+1,\nu+1} = 20\nu + 11$,
(3) $C_{u,\nu+3} = 0$, $C_{u,\nu+4} = C_{u,\nu+5} = C_{u,\nu+6} = 2$,
(4) $C_{\nu+2,u} = 10u - 3$, $C_{\nu+3,u} = 11$, $C_{\nu+4,u} = C_{\nu+5,u} = 2$, $C_{\nu+6,u} = 0$;
(5) зададим матрицу $C[\nu+2,\ldots,\nu+6|\nu+2,\ldots,\nu+6]$ *как*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем доказывать, что факторизационный ранг заданной матрицы не может быть меньше пяти.

Теорема 7.2.6. *Факторизационный ранг матрицы* $C(\nu)$ *превосходит* 4.

Доказательство. Предположим противное. В силу определения ранга тогда выполнено равенство $C = A \otimes B$ для некоторых матриц $A \in \mathbb{R}^{(\nu+6)\times 4}$ и $B \in \mathbb{R}^{4\times(\nu+6)}$, то есть, верны равенства

$$\min_{q=1}^{4}\{A_{sq} + B_{qt}\} = C_{st} \tag{7.2.2}$$

при всех $s, t \in \{1,\ldots,\nu+6\}$.

1. Заметим, что произведение матриц $A \otimes B$ останется неизменным, если прибавить произвольное число $r \in \mathbb{R}$ к каждому элементу столбца матрицы A с индексом q и прибавить $-r$ к каждому элементу строки матрицы B с индексом q. Поэтому мы можем считать, не ограничивая общности, что при каждом $q \in \{1,2,3,4\}$ строка матрицы B с индексом q состоит из неотрицательных чисел и содержит нуль. В этом случае матрица A также состоит из неотрицательных элементов, поскольку из условия примера 7.2.5 следует, что элементы матрицы $C = A \otimes B$ неотрицательны.

2. Обозначим через A' подматрицу матрицы A, образованную строками с индексами $\nu+1, \nu+4, \nu+5, \nu+6$, а через B' — подматрицу матрицы B, образованную столбцами с индексами $\nu+3, \nu+4, \nu+5, \nu+6$. Из определения матрицы C следует, что произведение матриц $A' \otimes B'$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.2.3}$$

где звездочками обозначены произвольные (возможно, различные) положительные числа. В силу шага 1 матрицы A' и B' неотрицательны, поэтому матрицы A' и B' имеют вид (7.2.3) с точностью до перестановок строк и столбцов. Заметим, что применение одной и той же перестановки на множествах индексов столбцов матрицы A и строк матрицы B не изменит произведения этих матриц, поэтому мы можем считать, не ограничивая общности, что матрицы A' и B' в точности имеют вид (7.2.3).

3. В силу шага 1 элементы матриц A и B неотрицательны, поэтому из шага 2 следует, что равенство $A_{\nu+5,q} = 0$ выполнено в том и только том случае, если $q = 3$. Поэтому из равенства (7.2.2) следует, что равенство $B_{3t} = 0$ выполнено в том и только том случае, если $C_{\nu+5,t} = 0$, где t может быть произвольным индексом из множества $\{1, \ldots, \nu + 6\}$. Аналогично из шага 2 следует, что условие $A_{\nu+6,q} = 0$ выполнено в том и только том случае, если $q = 4$, поэтому из равенства (7.2.2) следует, что равенство $B_{4t} = 0$ оказывается верным тогда и только тогда, когда $C_{\nu+6,t} = 0$.

4. Из шага 2 следует также, что равенство $B_{q,\nu+3} = 0$ выполнено в том и только том случае, если $q = 1$; равенство $B_{q,\nu+4} = 0$ — в том и только том случае, если $q = 2$; равенство $B_{q,\nu+5} = 0$ — в том и только том случае, если $q = 3$. Поэтому из равенства (7.2.2) следует, что равенство $A_{s1} = 0$ оказывается верным тогда и только тогда, когда $C_{s,\nu+3} = 0$; равенство $A_{s2} = 0$ — тогда и только тогда, когда $C_{s,\nu+4} = 0$; равенство $A_{s3} = 0$ — тогда и только тогда, когда $C_{s,\nu+5} = 0$; здесь индекс s меняется на множестве $\{1, \ldots, \nu + 6\}$.

5. В частности, из шагов 3 и 4 следует, что элементы $A_{\nu+1,1}$, $A_{\nu+3,1}$, $A_{\nu+2,2}$, $A_{\nu+3,3}$, $B_{3,\nu+2}$, $B_{4,\nu+1}$ и $B_{4,\nu+2}$ равны 0.

6. Из равенств (7.2.2) следует также, что неравенство $\min\{A_{s3} + B_{3,\nu+2}, A_{s4} + B_{4,\nu+2}\} \geqslant C_{s,\nu+2}$ выполнено для всех $s \in \{1, \ldots, \nu + 6\}$. В силу шага 5 верны равенства $B_{3,\nu+2} = B_{4,\nu+2} = 0$, поэтому мы получаем $\min\{A_{s3}, A_{s4}\} \geqslant C_{s,\nu+2}$. Применяя определение матрицы C, мы получаем неравенства $A_{i3} \geqslant 20i + 1$ и $A_{i4} \geqslant 20i + 1$ для всех $i \in \{1, \ldots, \nu\}$.

7. Аналогично, из шага 5 следует равенство $A_{\nu+1,1} = 0$, поэтому из условия (7.2.2) следует неравенство $B_{1t} \geqslant C_{\nu+1,t}$, верное при любых $t \in \{1, \ldots, \nu+6\}$. Для любых $j \in \{1, \ldots, \nu+1\}$ мы получаем отсюда $B_{1j} \geqslant 20j-9$.

8. В силу шага 5 выполнено также равенство $B_{4,\nu+1} = 0$, и поэтому из условия (7.2.2) следует неравенство $A_{\nu+2,4} \geqslant C_{\nu+2,\nu+1} = 10\nu+7$. Далее, в силу шага 5 выполнены равенства $A_{\nu+3,1} = A_{\nu+3,3} = 0$, поэтому из условия (7.2.2) следует неравенство $\min\{B_{11}, B_{31}\} \geqslant C_{\nu+3,1}$, откуда $B_{11} \geqslant 11$ и $B_{31} \geqslant 11$.

9. В силу шага 8 число $A_{\nu+2,q} + B_{q1}$ не превосходит семи в том и только том случае, если $q = 2$. В силу определения матрицы C верно равенство $C_{\nu+2,1} = 7$, поэтому из условия (7.2.2) вытекает равенство $A_{\nu+2,2}+B_{21} = 7$. Из шага 5 теперь следует условие $A_{\nu+2,2} = 0$, и мы получаем равенство $B_{21} = 7$.

10. Теперь выберем произвольное $i \in \{1, \ldots, \nu\}$ и положим $j = i$ или $j = i+1$. В силу определения матрицы C имеем неравенство $C_{ij} \leqslant 10i+10j-10$. Из шагов 6 и 7 следует, что числа A_{i3}, A_{i4} и B_{1j} всегда будут превосходить число C_{ij}. Из равенства (7.2.2) теперь следует условие $A_{i2}+B_{2j} = C_{ij}$. Теперь мы получаем следующую систему из $2\nu+1$ линейных (в классическом смысле) уравнений с $2\nu+1$ вещественными переменными: имеем $B_{21} = 7$ и

$$A_{i2} + B_{2i} = C_{ii}, \;\; A_{i2} + B_{2,i+1} = C_{i,i+1}, \text{ при всех } i \in \{1, \ldots, \nu\}. \qquad (7.2.4)$$

Решая систему, мы получаем, в частности, равенство $B_{2,\nu+1} = 10\nu + 6$. Из условия (7.2.2) следует неравенство $C_{\nu+2,\nu+1} \leqslant A_{\nu+2,2}+B_{2,\nu+1}$, а в силу шага 5 верно равенство $A_{\nu+2,2} = 0$. Таким образом, верно неравенство $C_{\nu+2,\nu+1} \leqslant 10\nu + 6$, но в силу определения матрицы C выполнено условие $C_{\nu+2,\nu+1} = 10\nu + 7$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теперь покажем, что факторизационный ранг любой подматрицы матрицы $C(\nu)$ размера $\nu \times \nu$ не превосходит четырех.

Теорема 7.2.7. *Пусть $\mu \in \{1, \ldots, \nu+1\}$. Тогда факторизационный ранг матрицы C', полученной из $C(\nu)$ удалением столбца с индексом μ, не превосходит четырех.*

Доказательство. Нам нужно привести пример матриц $A \in \mathbb{R}^{(\nu+6)\times 4}$ и $B \in \mathbb{R}^{4\times(\nu+5)}$, удовлетворяющих условию $A \otimes B = C'$. Обозначая произвольный элемент множества $\{1, \ldots, \nu+1\}$ через i, а произвольный элемент из $\{1, \ldots, \nu+1\} \setminus \{\mu\}$ — через j, зададим эти матрицы следующим образом.

Положим $A_{i1} = 0$ и $A_{i3} = A_{i4} = 20i+1$ для всех i; положим $A_{i2} = 10i-7$, если $i < \mu$; положим $A_{i2} = 10i-8$, если $\mu \leqslant i < \nu+1$, и, наконец, $A_{\nu+1,2} = 20\nu + 21$. Положим также $B_{1j} = 20j - 9$ и $B_{4j} = 0$ для всех j; положим $B_{3j} = 10j-3$, если $j \neq 1$, и $B_{31} = 11$. Определим B_{2j} как $10j-3$, если $j < \mu$ или $j = \nu+1$, и положим $B_{2j} = 10j-2$ в противном случае (то есть, когда $\mu < j < \nu+1$). Наконец, положим, что матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10\nu+7 \\ 0 & 11 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 20\nu+20 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 20\nu+20 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

равны, соответственно, подматрице матрицы A, образованной строками с индексами $\nu+2, \ldots, \nu+6$, и подматрице матрицы B, образованной столбцами с индексами $\nu+2, \ldots, \nu+6$. Теперь можно проверить непосредственно, что произведение матриц $A \otimes B$ равно матрице C'. □

Заметим, что факторизационный ранг подматрицы не может быть больше ранга всей матрицы; поэтому в силу теоремы 7.2.7 любая подматрица матрицы $C(\nu)$ размера $\nu \times \nu$ имеет факторизационный ранг, не больший четырех. Таким образом, матрица $C(\nu)$ дает отрицательное решение проблемы 7.1.6 при $k \geqslant 5$. Чтобы доказать основной результат этого подраздела, нам потребуется еще одна техническая лемма.

Лемма 7.2.8. *Пусть тропическая матрица A состоит из неотрицательных чисел и содержит нуль в каждой строке и каждом столбце. Выберем положительное число h, большее любого элемента матрицы A. Тогда факторизационный ранг матрицы*

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & h \\ & A & & \vdots \\ & & & h \\ \hline h & \dots & h & 0 \end{array}\right)$$

превосходит факторизационный ранг матрицы A на единицу.

Доказательство. Пусть $A' = B \otimes C$ для некоторых матриц $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Заметим, что произведение матриц $B \otimes C$ останется неизменным, если прибавить произвольное число $r \in \mathbb{R}$ к каждому элементу столбца матрицы B с индексом q и прибавить $-r$ к каждому элементу строки матрицы C с индексом q. Поэтому мы можем считать, не ограничивая общности, что выполнены условия

$$\min\{C_{\tau 1}, \dots, C_{\tau,n-1}\} = 0 \text{ при всех } \tau \in \{1, \dots, k\}. \tag{7.2.5}$$

Если последний столбец матрицы C содержит неположительное число C_{tn}, то в силу условия $B_{it} + C_{tn} \geqslant A'_{in}$ мы получаем неравенство $B_{it} \geqslant h$ для всех $i \in \{1, \dots, m-1\}$. В этом случае из равенства (7.2.5) следует условие $B_{it} + C_{tj} > A'_{ij}$, верное для всех $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Таким образом, всякая строка матрицы A является тропической линейной комбинацией всех строк матрицы C, кроме строки с индексом t. Поэтому факторизационный ранг матрицы A в этом случае не превосходит $k-1$ в силу леммы 7.1.2.

В противном случае, если последний столбец матрицы C состоит из положительных чисел, то в силу равенства $A'_{mn} = 0$ элемент B_{mt} отрицателен при некотором t. Из равенства (7.2.5) следует теперь, что матрица A' содержит отрицательные элементы, что противоречит условию леммы. Поэтому факторизационный ранг матрицы A обязан быть на единицу меньше, чем факторизационный ранг матрицы A'. Применение леммы 7.1.3 завершает доказательство. □

Теперь мы можем доказать основной результат этого подраздела и получить отрицательное решение проблемы 7.1.6 при всех $k \geqslant 5$.

Теорема 7.2.9. *Для любых целых чисел $k \geqslant 5$ и ν существует матрица $\mathcal{C}(k, \nu)$, удовлетворяющая следующим условиям: (i) факторизационный ранг матрицы $\mathcal{C}(k, \nu)$ не меньше, чем k; (ii) всякая подматрица матрицы C, содержащая не более ν строк и не более ν столбцов, имеет факторизационный ранг, меньший k.*

Доказательство. Применим лемму 7.2.8 к матрице из примера 7.2.5. □

Еще один интересный результат может быть выведен из теоремы 7.2.9.

Теорема 7.2.10. *Для любых целых чисел $k \geqslant 5$ и ν существует матрица факторизационного ранга k, содержащая более ν строк и более ν столбцов, все собственные подматрицы которой имеют факторизационные ранги, меньшие k.*

Доказательство. Следует из леммы 7.1.3 и теоремы 7.2.9. □

7.3 Распознавание матриц ранга три

В этом разделе излагается полное решение проблемы 7.1.6. Как показано в работе [45], значения $\Theta(1) = 1$, $\Theta(2) = 2$ и $\Theta(3) = 3$ дают положительное решение проблемы 7.1.6 для $k \in \{1, 2, 3\}$. Иными словами, любая тропическая матрица факторизационного ранга $k \in \{1, 2, 3\}$ содержит подматрицу факторизационного ранга k размера $k \times k$; оказывается, более того, что такая подматрица может быть найдена с помощью алгоритма, работающего за время, линейное по размеру матрицы [163].

В разделе 7.2 было приведено отрицательное решение проблемы 7.1.6 для $k > 4$, а также сделан шаг в направлении решения этой проблемы для $k = 4$. Результаты примера 7.2.1 и леммы 7.2.3 доказывают следующее утверждение.

Пример 7.3.1. *Факторизационный ранг любой подматрицы матрицы $\mathcal{K}$ из примера 7.2.1 не превосходит* 3*, а факторизационный ранг самой матрицы $\mathcal{K}$ равен* 4*.*

Таким образом, значение величины $\Theta(4)$, дающее положительное решение проблемы 7.1.6 для $k = 4$, не может быть меньше пяти. В этом разделе мы доказываем, что для положительного решения достаточно в качестве $\Theta(4)$ выбрать число 1539. Таким образом, в качестве основного результата раздела мы

получаем полное решение проблемы 7.1.6. Как следствие основного результата раздела будет также получено положительное решение проблемы 7.1.5: построен алгоритм распознавания тропических матриц факторизационного ранга 3 за полиномиальное время. Этот результат был опубликован автором диссертации в работе [157].

7.3.1 Факторизация матриц тропического ранга 2

Приведем доказательство основного результата раздела в частном случае матриц тропического ранга 2. Напомним, что матрица $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *тропически вырожденной*, если минимум в выражении $\min_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\left\{s_{1,\sigma(1)}+\ldots+s_{n,\sigma(n)}\right\}$, где через $\mathcal{S}_n$ обозначена симметрическая группа множества $\{1,\ldots,n\}$, достигается по крайней мере дважды. *Тропическим рангом* матрицы $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ называется наибольший размер ее тропически невырожденной квадратной подматрицы. Напомним, кроме того, что тропические матрицы M и M' одного размера *тропически проективно эквивалентными* (или просто *эквивалентными*), если найдутся числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, $\beta_1,\ldots,\beta_n$, для которых $M_{ij} = M'_{ij}+\alpha_i+\beta_j$ при всех i и j. В силу своих определений тропический и факторизационный ранги постоянны на каждом классе эквивалентности. Для изложения результатов о факторизации матриц тропического ранга 2 будет полезен следующий пример.

Пример 7.3.2. *Рассмотрим положительные числа a, b, c, d и неотрицательное число h; предположим, что $c > h$ и $d > h$. Тогда матрица*

$$A = \begin{pmatrix} d & h & 0 & 0 \\ h & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

имеет факторизационный ранг, равный 4.

Доказательство. Предположим противное; тогда найдутся матрицы $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ и $C \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, удовлетворяющие условию $A = B \otimes C$. Учитывая симметричность матрицы A, мы получаем с точностью до эквивалентности

$$B = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & u_3 & u_4 \\ u_5 & 0 & u_6 \\ u_7 & u_8 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4 \end{pmatrix},$$

где через u_i и v_j обозначены положительные числа. Отсюда следует, что $d = A_{11} = \min\{v_1,u_1,u_2\}$ и $c = A_{22} = \min\{v_2,u_3,u_4\}$, и поэтому числа u_1,

u_2 и v_2 превосходят h. С другой стороны, мы имеем равенство $h = A_{12} = \min\{v_2, u_1, u_2\}$, что приводит к противоречию. $\square$

Докажем ключевое для рассуждений этого подраздела утверждение.

Лемма 7.3.3. *Рассмотрим матрицу $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, тропический ранг которой не превосходит 2. Предположим, что никакая строка (и никакой столбец, соответственно) матрицы B не может быть представлен в виде тропической линейной комбинации остальных строк (столбцов, соответственно) матрицы B. Если $\min\{m, n\} \geqslant 4$, то матрица B содержит подматрицу размера 4×4 факторизационного ранга 4.*

Доказательство. Мы можем считать с точностью до эквивалентности, что равенство $B_{in} = 0$ выполнено для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$, а равенство $\min_{i=1}^{m}\{B_{ij'}\} = 0$ — для всех $j' \in \{1, \ldots, n\}$. Если матрица B не содержит строки, полностью состоящей из нулей, то для некоторых индексов i', i'', j' и j'' выполнены условия $B_{i'j'} = B_{i''j''} = 0$ и $B_{i'j''} > 0$. Для любого индекса $\widetilde{i}$ матрица $B[i', i'', \widetilde{i}|j', j'', n]$ является тропически вырожденной, и поэтому выполнено одно из условий $B_{\widetilde{i}j'} = 0$ и $B_{\widetilde{i}j''} = 0$. Таким образом, последний столбец матрицы B является тропической суммой остальных столбцов матрицы B, и мы получаем противоречие.

Поэтому матрица B на самом деле содержит строку, полностью состоящую из нулей. С точностью до перестановок строк и столбцов равенство $B_{ij} = 0$ выполнено, если $i = m$ или $j = n$; в противном случае выполнено условие $B_{ij} \geqslant 0$. Таким образом, матрица B эквивалентна матрице

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \overline{A} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & a \end{array}\right),$$

где $a \geqslant 0$ и матрица $\overline{A}$ состоит из неотрицательных элементов и содержит по крайней мере один нуль. Заметим, что сумма последних двух строк и сумма последних двух столбцов матрицы A являются нулевыми векторами, поэтому матрица $\overline{A}$ не содержит нулевых строк или столбцов. По предположению леммы матрица $A[i_1, i_2, m|j_1, j_2, n]$ является тропически вырожденной при любых индексах i_1, i_2, j_1 и j_2, поэтому два наименьших числа среди $A_{i_1j_1}$, $A_{i_1j_2}$, $A_{i_2j_1}$

и $A_{i_2j_2}$ равны оба значению выражения $\min\{A_{i_1j_1}, A_{i_1j_2}, A_{i_2j_1}, A_{i_2j_2}\}$. Поэтому

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} & & & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & A' & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & A'' & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{array}\right),$$

где обе матрицы A' и A'' содержат положительные элементы. Поскольку ни один столбец матрицы A не представляется в виде линейной комбинации остальных столбцов, мы видим, что ни матрица A', ни матрица A'' не могут иметь размера $k \times 1$ при $k > 1$. Аналогично мы заключаем, что $a > 0$, и ни матрица A', ни матрица A'' не могут иметь размера $1 \times k$.

В силу предположения $\min\{m, n\} \geqslant 4$ мы можем считать, что матрица A' имеет размер $p \times q$ при $p > 1$ и $q > 1$; обозначим через h (тогда $h \geqslant 0$) наименьший элемент матрицы A'. Если некоторая строка матрицы A' (для определенности мы будем считать, что это первая строка) состоит полностью из элементов h, то первая строка матрицы A является тропической линейной комбинацией строк с индексами 2 и m, и мы получаем противоречие. Аналогично показывается, что никакой столбец матрицы A' не состоит полностью из элементов h. Таким образом, найдутся индексы i_1, i_2, j_1 и j_2, удовлетворяющее условиям $A_{i_1j_2} = h$, $A_{i_1j_1} > h$ и $A_{i_2j_2} > h$. Поскольку матрица $A[i_1, i_2, m|j_1, j_2, n]$ тропически вырождена, выполнено также условие $A_{i_2j_1} = h$. Пример 7.3.2 показывает теперь, что матрица $A[i_1, i_2, \widehat{i}, m|j_1, j_2, \widehat{j}, n]$ (где через $(\widehat{i}, \widehat{j})$ обозначены индексы положительного элемента матрицы A'') имеет факторизационный ранг 4. □

Теперь мы можем привести положительное решение проблемы 7.1.6 в случае матриц, тропический ранг которых не превосходит 2.

Теорема 7.3.4. *Предположим, что тропический ранг матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ не превосходит двух, а ее факторизационный ранг не меньше 4. Тогда матрица A содержит подматрицу размера 4×4 факторизационного ранга 4.*

Доказательство. Если $\max\{m, n\} < 4$, то факторизационный ранг матрицы A не может быть больше 3, и мы получаем противоречие. В силу леммы 7.1.3 мы можем считать, что что никакая строка (и никакой столбец, соответственно) матрицы A не может быть представлен в виде тропической линейной комбинации остальных строк (столбцов, соответственно) матрицы A. Теперь результат следует из леммы 7.3.3. □

7.3.2 Множители с наперед заданными элементами

В этом подразделе рассматривается проблема, связанная с общей проблемой факторизации тропических матриц. Будет изучен вопрос о том, может ли тропическая матрица быть представлена в виде произведения двух матриц, некоторые из элементов которых заданы наперед. Исследование этой проблемы будет важным шагом на пути к доказательству основного результата раздела; приведем ее точную формулировку.

Заданы тропические матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B' \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $C' \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Нас будет интересовать, в каких случаях матрица A может быть представлена в виде произведения матриц $B \in \mathbb{R}^{m\times(k+1)}$ и $C \in \mathbb{R}^{(k+1)\times n}$ так, чтобы первые k столбцов матрицы B совпадали со столбцами матрицы B', а первые k строк матрицы C совпадали со строками матрицы C'. Вводя обозначение $A' = B' \otimes C'$, мы сводим эту проблему к вопросу разрешимости системы уравнений

$$A_{ij} = \min\{x_i + y_j, A'_{ij}\}, \tag{7.3.1}$$

где индексы (i, j) пробегают множество $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$.

Рассуждения этого подраздела часто будут требовать рассмотрения матриц, сравнимых в смысле частичного порядка $A \leqslant A'$, заданного выполнением условия $A_{ij} \leqslant A'_{ij}$ для любой пары индексов i и j. Паре (A, A') тропических матриц размера $m \times n$, удовлетворяющих условию $A \leqslant A'$, мы ставим в соответствие двудольный граф $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A, A')$ на множестве $(\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_m\}, \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\})$, между вершинами $\mathcal{R}_i$ и $\mathcal{C}_j$ которого проходит ребро в том и только том случае, если $A_{ij} < A'_{ij}$.

Докажем сначала лемму, которая позволит нам в дальнейших рассуждениях ограничиваться рассмотрением матриц более простого вида.

Лемма 7.3.5. *Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и связный двудольный граф G на множестве $(\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_m\}, \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\})$. Тогда найдется матрица A', эквивалентная матрице A, и остовное дерево T графа G, удовлетворяющие условию $A'_{ij} = 0$, если $(\mathcal{R}_i, \mathcal{C}_j) \in T$, и условию $A'_{ij} \geqslant 0$, если $(\mathcal{R}_i, \mathcal{C}_j) \in G$.*

Доказательство. 1. Предположим, что дерево $T' \subset G$ проходит через те вершины $\mathcal{R}_i$ и $\mathcal{C}_j$, для которых i принадлежит множеству $I \subset \{1, \dots, m\}$, а j — множеству $J \subset \{1, \dots, n\}$. Предположим также, что матрица A' эквивалентна матрице A и удовлетворяет условию $A'_{ij} = 0$ в случае $(\mathcal{R}_i, \mathcal{C}_j) \in T'$ и условию $A'_{ij} \geqslant 0$ в случае, если $(\mathcal{R}_i, \mathcal{C}_j) \in G$ и $(i, j) \in I \times J$.

2. Предположим, что одно из множеств $\overline{I} = \{1, \dots, m\} \setminus I$ и $\overline{J} = \{1, \dots, n\} \setminus J$ непусто. Тогда в силу связности граф G содержит ребро $(\mathcal{R}_{i'}, \mathcal{C}_{j'})$, для которого пара (i', j') принадлежит либо множеству $I \times \overline{J}$, либо множеству $\overline{I} \times J$. Поэтому найдется элемент A_{i_0,j_0}, минимальный среди всех элементов

$A_{i',j'}$, которые удовлетворяют условиям $(i',j') \in \bigl(I \times \overline{J}\bigr) \cup \bigl(\overline{I} \times J\bigr)$ и $(\mathcal{R}_{i'}, \mathcal{C}_{j'}) \in G$. Будем считать, не ограничивая общности, что пара (i_0, j_0) принадлежит множеству $I \times \overline{J}$. Прибавляя $-A_{i_0,j_0}$ к каждому элементу столбца матрицы A с индексом j_0, обозначаем полученную матрицу через A''; полагаем также $T'' = T' \cup \{(\mathcal{R}_{i_0}, \mathcal{C}_{j_0})\}$.

3. Заметим, что дерево T'' и матрица A'' удовлетворяют условиям пункта 1, причем дерево T'' содержит большее число вершин, чем дерево T. Поэтому максимальное дерево T', удовлетворяющее условиям пункта 1, является остовным для графа G. □

Докажем еще одну техническую лемму.

Лемма 7.3.6. *Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и предположим, что $A_{ij} > 0$ в том и только том случае, если $i - j \in \{0, 1, 1-n\}$. Если при этом $n > 2$, то факторизационный ранг матрицы A превосходит 2.*

Доказательство. 1. Предположим противное. Тогда найдутся матрицы $B \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ и $C \in \mathbb{R}^{2\times n}$, удовлетворяющие условию $A = B \otimes C$. Если условия $C_{1j} \geqslant C_{1j'}$ и $C_{2j} \geqslant C_{2j'}$ выполнены для некоторых различных индексов j и j', то мы получаем условие

$$A_{ij} = \min\{B_{i1} + C_{1j}, B_{i2} + C_{2j}\} \geqslant \min\{B_{i1} + C_{1j'}, B_{i2} + C_{2j'}\} = A_{ij'}$$

для всех i. Это противоречит условию леммы и показывает, что значения выражений $C_{1j} - C_{1j'}$ и $C_{2j} - C_{2j'}$ ненулевые и имеют различные знаки.

2. Будем обозначать через j_- значение $j-1$, взятое по модулю n, а через j_+ — значение $j+1$, взятое по модулю n. Рассмотрим наименьший элемент C_{1j} первой строки матрицы C и предположим, что $C_{1,j_-} > C_{1,j_+}$ (случай, когда $C_{1,j_-} < C_{1,j_+}$, может быть рассмотрен аналогично); рассуждения пункта 1 показывают, что в этом случае выполнено условие $C_{2j} > C_{2,j_+} > C_{2,j_-}$. В силу условия леммы числа A_{j,j_-} и $A_{j,j}$ положительны, и поэтому выполнены условия $B_{j1} + C_{1j} > 0$ и $B_{j2} + C_{2j_-} > 0$. Таким образом, значение выражения $A_{j,j_+} = \min\{B_{j,1} + C_{1,j_+}, B_{j,2} + C_{2,j_+}\}$ положительно, и мы получаем противоречие. □

Следующая лемма дает доказательство основного результата подраздела в том частном случае, когда граф $\mathcal{G}(A, A')$ является связным.

Лемма 7.3.7. *Пусть факторизационный ранг тропической матрицы $A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$ не превосходит 2. Предположим, что тропическая матрица A удовлетворяет условию $A \leqslant A'$, и граф $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A, A')$ является связным. Если система уравнений (7.3.1) несовместна, то найдутся индексы i_1, i_2, j_1 и j_2, для которых подсистема системы (7.3.1), содержащая уравнения с (i,j) из множества $\{i_1, i_2\} \times \{j_1, j_2\}$, также является несовместной.*

Доказательство. Шаг 1. В силу леммы 7.3.5 мы можем считать, не ограничивая общности, что граф $\mathcal{G}$ содержит остовное дерево T, для которого выполнено условие $A_{ij} = 0$ в случае, если $(\mathcal{R}_i, \mathcal{C}_j) \in T$, и выполнено условие $A_{ij} \geqslant 0$ в случае, если $(\mathcal{R}_i, \mathcal{C}_j) \in \mathcal{G}$.

Шаг 2. Если матрица A состоит из неположительных чисел, то система уравнений (7.3.1) имеет решение $x_1 = \ldots = x_m = y_1 = \ldots = y_n = 0$; таким образом, некоторый элемент $A_{i'j'}$ является положительным. Поскольку T является остовным деревом, граф $T \cup \{(\mathcal{R}_{i'}, \mathcal{C}_{j'})\}$ содержит цикл, проходящий через ребро $(\mathcal{R}_{i'}, \mathcal{C}_{j'})$. Обозначим через G подграф графа $\mathcal{G}$, состоящий из ребер $(\mathcal{R}_i, \mathcal{C}_j) \in \mathcal{G}$, удовлетворяющих условию $A_{ij} = 0$.

Шаг 3. В силу рассуждений шага 2 найдутся индексы $\mathcal{R}_{i_1}$, $\mathcal{C}_{j_1}$, $\mathcal{R}_{i_2}$, $\ldots$, $\mathcal{R}_{i_q}$, $\mathcal{C}_{j_q}$, удовлетворяющие условию $A_{i_1,j_q} > 0$, а также условию $(\mathcal{R}_{i_u}, \mathcal{C}_{j_v}) \in G$ в случае, если $u - v \in \{0, 1\}$. Предположим, что значение q является минимальным, при котором могут быть выполнены перечисленные условия.

Шаг 4. Заметим, что подсистема системы (7.3.1), содержащая уравнения с (i, j) из множества $\{i_1, \ldots, i_q\} \times \{j_1, \ldots, j_q\}$, является несовместной. Если $q = 2$, то лемма доказана.

Шаг 5. В противном случае верно, что $q > 2$. Тогда минимальность значения q показывает, что условия $A_{i_u,j_v} \leqslant 0$ и $(\mathcal{R}_{i_u}\, \mathcal{C}_{j_v}) \notin G$ выполнены для любых u и v, удовлетворяющих условию $u - v \notin \{0, 1, 1 - q\}$. Используя результат шага 1, мы заключаем, что условие $A'_{i_u,j_v} > 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $u - v \in \{0, 1, 1 - q\}$, откуда следует противоречие с леммой 7.3.6. □

Теперь мы обратим внимание на случай, когда граф $\mathcal{G}(A, A')$ не является связным. Следующая лемма посвящена разбору того частного случая, когда этот граф состоит из двух компонент связности.

Лемма 7.3.8. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times 2}$, $C \in \mathbb{R}^{2\times n}$, $A' = B \otimes C$ и $A \leqslant A'$. Предположим, что $\{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_k, \mathcal{C}_1 \ldots, \mathcal{C}_s\}$ и $\{\mathcal{R}_{k+1}, \ldots, \mathcal{R}_m, \mathcal{C}_{s+1}, \ldots, \mathcal{C}_n\}$ — компоненты связности графа $\mathcal{G}(A, A')$. Предположим также, что при любых индексах i_1, i_2, j_1 и j_2 подсистема системы (7.3.1), содержащая уравнения с (i, j) из множества $\{i_1, i_2\} \times \{j_1, j_2\}$, является совместной. Наконец, положим $A'_{1,s+1} = B_{11} + C_{1,s+1}$. Тогда для любой пары $(i'', j'') \in \{1, \ldots, k\} \times \{s+1, \ldots, n\}$ выполнено условие $A'_{i''j''} = B_{i''1} + C_{1j''}$, а для любой пары $(i', j') \in \{k + 1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, s\}$ — условие $A'_{i'j'} = B_{i'2} + C_{2j'}$.*

Доказательство. Шаг 1. Предположим, что условия $A'_{i'j'} = B_{i'1} + C_{1j'}$ и $A'_{i''j''} = B_{i''1} + C_{1j''}$ выполнены для некоторых пар индексов $(i', j') \in \{k + 1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, s\}$ и $(i'', j'') \in \{1, \ldots, k\} \times \{s + 1, \ldots, n\}$; предположим

также, что $(\mathcal{R}_{i'}, \mathcal{C}_{j''})$ и $(\mathcal{R}_{i''}, \mathcal{C}_{j'})$ являются ребрами графа $\mathcal{G}$. В этом случае верны неравенства $A_{i'j''} < A'_{i'j''} \leqslant B_{i'1} + C_{1j''}$ и $A_{i''j'} < A'_{i''j'} \leqslant B_{i''1} + C_{1j'}$, откуда следует условие

$$A'_{i'j'} + A'_{i''j''} = B_{i'1} + C_{1j'} + B_{i''1} + C_{1j''} > A_{i'j''} + A_{i''j'}. \tag{7.3.2}$$

В силу условия леммы найдутся числа $x_{i'}$, $x_{i''}$, $y_{j'}$ и $y_{j''}$, удовлетворяющие условиям $x_{i'} + y_{j'} \geqslant A'_{i'j'}$, $x_{i'} + y_{j''} = A_{i'j''}$, $x_{i''} + y_{j'} = A_{i''j'}$ и $x_{i''} + y_{j''} \geqslant A'_{i''j''}$. Поэтому

$$A_{i'j''} + A_{i''j'} = x_{i'} + y_{j'} + x_{i''} + y_{j''} \geqslant A'_{i'j'} + A'_{i''j''},$$

что противоречит условию (7.3.2). Таким образом, предположение шага 1 не реализуется.

Шаг 2. Рассмотрим произвольную пару (i', j'), принадлежащую либо множеству $\{1, \ldots, k\} \times \{s+1, \ldots, n\}$, либо множеству $\{k+1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, s\}$. Описание связных компонент графа $\mathcal{G}$, данное в условии леммы, показывает, что найдутся индексы $\widehat{i}$ и $\widehat{j}$, для которых $(\mathcal{R}_{\widehat{i}}, \mathcal{C}_{j'})$ и $(\mathcal{R}_{i'}, \mathcal{C}_{\widehat{j}})$ являются ребрами графа $\mathcal{G}$. В силу результата шага 1 минимум в выражении

$$A'_{i'j'} = \min_{t \in \{1,2\}} \{B_{i't} + C_{tj'}\}$$

достигается при единственном значении $t \in \{1, 2\}$; значение t, при котором этот минимум достигается, мы будем обозначать через $\tau(i', j')$.

Шаг 3. Предположим, что индексы i_1 и i_2 из множества $\{k+1, \ldots, m\}$ и индекс $g \in \{s+1, \ldots, n\}$ таковы, что $(\mathcal{R}_{i_1}, \mathcal{C}_g)$ и $(\mathcal{R}_{i_2}, \mathcal{C}_g)$ являются ребрами графа $\mathcal{G}$. Для любого индекса $j' \in \{1, \ldots, s\}$ мы можем найти индекс $\widehat{i} \in \{1, \ldots, k\}$, для которого $(\mathcal{R}_{\widehat{i}}, \mathcal{C}_{j'})$ будет ребром графа $\mathcal{G}$. Используя результат шага 1, мы доказываем условия $\tau(i_1, j') \neq \tau(\widehat{i}, g)$ и $\tau(i_2, j') \neq \tau(\widehat{i}, g)$. Таким образом, равенство $\tau(i_1, j') = \tau(i_2, j')$ выполнено при любом $j' \in \{1, \ldots, s\}$.

Шаг 4. В силу условия леммы в графе $\mathcal{G}$ есть путь, содержащий вершины $\mathcal{R}_{k+1}, \ldots, \mathcal{R}_m$. В силу результата шага 3 значение $\tau(i', j')$ (где (i', j') изменяется на множестве $\{k+1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, s\}$) не зависит от i'.

Шаг 5. Предположим, что индексы j_1 и j_2 из множества $\{1, \ldots, s\}$ и индекс $e \in \{1, \ldots, k\}$ таковы, что $(\mathcal{R}_e, \mathcal{C}_{j_1})$ и $(\mathcal{R}_e, \mathcal{C}_{j_2})$ являются ребрами графа $\mathcal{G}$. Для любого индекса $i' \in \{k+1, \ldots, m\}$ мы можем найти индекс $\widehat{j} \in \{s+1, \ldots, n\}$, для которого $(\mathcal{R}_{i'}, \mathcal{C}_{\widehat{j}})$ будет ребром графа $\mathcal{G}$. Используя результат шага 1, мы доказываем условия $\tau(i', j_1) \neq \tau(e, \widehat{j})$ и $\tau(i', j_2) \neq \tau(e, \widehat{j})$. Таким образом, равенство $\tau(i', j_1) = \tau(i', j_2)$ выполнено при любом $i' \in \{k+1, \ldots, m\}$.

Шаг 6. В силу условия леммы в графе $\mathcal{G}$ есть путь, содержащий вершины $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_s$. В силу результата шага 5 значение $\tau(i', j')$ не зависит от j' (где (i', j') изменяется на множестве $\{k+1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, s\}$). Сопоставляя

этот результат с результатом шага 4, мы заключаем, что значение $\tau(i', j')$ не зависит ни от i', ни от j'.

Шаг 7. Результат шага 6 может быть применен к матрицам $A^\top$ и $A'^\top$ вместо A и A', и это покажет, что значение $\tau(i'', j'')$ не зависит ни от индекса $i'' \in \{1, \ldots, k\}$, ни от индекса $j'' \in \{s+1, \ldots, n\}$. В силу шага 1 выполнено условие $\tau(i', j') \neq \tau(i'', j'')$, что завершает доказательство. □

Теперь мы можем доказать основной результат подраздела в том частном случае, когда граф $\mathcal{G}(A, A')$ содержит ровно две компоненты связности.

Лемма 7.3.9. *Предположим, что факторизационный ранг тропической матрицы $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ не превосходит 2, а матрица A удовлетворяет условию $A \leqslant A'$. Предположим, что множества $\{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_k, \mathcal{C}_1 \ldots, \mathcal{C}_s\}$ и $\{\mathcal{R}_{k+1}, \ldots, \mathcal{R}_m, \mathcal{C}_{s+1}, \ldots, \mathcal{C}_n\}$ являются компонентами связности графа $\mathcal{G}(A, A')$. Если система уравнений (7.3.1) несовместна, то найдутся индексы i_1, i_2, j_1 и j_2, для которых подсистема системы (7.3.1), содержащая уравнения с (i, j) из множества $\{i_1, i_2\} \times \{j_1, j_2\}$, также несовместна.*

Доказательство. Шаг 1. В силу леммы 7.3.7 мы можем считать, не ограничивая общности, что подсистема системы (7.3.1), составленная из уравнений с (i, j) из множества $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, s\}$ (равно как и подсистема, составленная из уравнений с (i, j) из $\{k+1, \ldots, m\} \times \{s+1, \ldots, n\}$) имеет решение. В силу лемм 7.3.5 и 7.3.7 с точностью до эквивалентности выполнено условие $A_{i'j'} = 0$, если $(\mathcal{R}_{i'}, \mathcal{C}_{j'})$ является ребром графа $\mathcal{G}$, и верно неравенство $A_{ij} \leqslant 0$ для любой пары (i, j), принадлежащей либо множеству $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, s\}$, либо множеству $\{k+1, \ldots, m\} \times \{s+1, \ldots, n\}$.

Шаг 2. Обозначим через $A_{i_1 j_1}$ наибольший элемент подматрицы $A[1, \ldots, k | s+1, \ldots, n]$ и через $A_{i_2 j_2}$ — наибольший элемент подматрицы $A[k+1, \ldots, m | 1, \ldots, s]$. Если верно неравенство $A_{i_1 j_1} + A_{i_2 j_2} \leqslant 0$, то набор чисел, заданных как $x_1 = \ldots = x_k = -y_1 = \ldots = -y_s = A_{i_1 j_1}$ и $x_{k+1} = \ldots = x_m = y_{s+1} = \ldots = y_n = 0$, является решением системы (7.3.1). Полученное противоречие показывает, что значение выражения $A_{i_1 j_1} + A_{i_2 j_2}$ положительно.

Шаг 3. Не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что $A_{i_1 j_1} = B_{i_1 1} + C_{1 j_1}$. В силу леммы 7.3.8 мы также можем считать, что условие $A_{i'j'} = B_{i'1} + C_{1j'} < B_{i'2} + C_{2j'}$ выполнено для любой пары (i', j'), принадлежащей множеству $\{1, \ldots, k\} \times \{s+1, \ldots, n\}$. Тогда значение $B_{i_1 1}$ является максимальным среди элементов $B_{11}, \ldots, B_{k1}$, как показывает максимальность числа $A_{i_1 j_1}$. Похожим образом мы в силу леммы 7.3.8 заключаем, что значение $C_{2 j_2}$ максимально среди элементов $C_{21}, \ldots, C_{2s}$.

Шаг 4. Предположим, что $(\mathcal{R}_{i_1}, \mathcal{C}_{j_2})$ не является ребром графа $\mathcal{G}$, тогда значение $A_{i_1 j_2}$ является неположительным и совпадает либо с $B_{i_1 1} + C_{1 j_2}$,

либо с $B_{i_1 2} + C_{2 j_2}$. В первом из этих случаев мы в силу шага 3 имеем неравенства $A'_{i' j_2} \leqslant B_{i' 1} + C_{1 j_2} \leqslant A_{i_1 j_2}$ для всех индексов $i' \in \{1, \ldots, k\}$; во втором из этих случаев для всех индексов $j' \in \{1, \ldots, s\}$ выполнены неравенства $A'_{i_1 j'} \leqslant B_{i_1 2} + C_{2 j'} \leqslant A_{i_1 j_2}$. Таким образом, либо значение $A'_{i' j_2}$ неположительно при всех $i' \in \{1, \ldots, k\}$, либо значение $A'_{i_1 j'}$ неположительно при всех $j' \in \{1, \ldots, s\}$. В силу шага 1 либо $(\mathcal{R}_{i'}, \mathcal{C}_{j_2})$ не является ребром графа $\mathcal{G}$ ни при каких i', либо $(\mathcal{R}_{i_1}, \mathcal{C}_{j'})$ не является ребром графа $\mathcal{G}$ ни при каких j'. Таким образом, мы получаем противоречие с тем фактом, что множество $\{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_k, \mathcal{C}_1 \ldots, \mathcal{C}_s\}$ является связным в топологии графа $\mathcal{G}$, и потому на самом деле $(\mathcal{R}_{i_1}, \mathcal{C}_{j_2})$ является ребром графа $\mathcal{G}$.

Шаг 5. Рассуждения, аналогичные рассуждениям шага 4 показывают, что $(\mathcal{R}_{i_2}, \mathcal{C}_{j_1})$ является ребром графа $\mathcal{G}$. Подсистема системы (7.3.1), содержащая уравнения с (i, j) из множества $\{i_1, i_2\} \times \{j_1, j_2\}$ выглядит в этом случае следующим образом:

$$x_{i_1} + y_{j_1} \geqslant A_{i_1 j_1}, \quad x_{i_2} + y_{j_2} \geqslant A_{i_2 j_2}, \quad x_{i_1} + y_{j_2} = 0, \quad x_{i_2} + y_{j_1} = 0,$$

и она является несовместной, поскольку в силу шага 2 выполнено неравенство $A_{i_1 j_1} + A_{i_2 j_2} > 0$. □

Приведем еще несколько технических лемм, полезных для доказательства основного результата подраздела в полной общности.

Лемма 7.3.10. *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 2}$, $C \in \mathbb{R}^{2 \times n}$. Предположим, что перестановки σ и τ на множестве $\{1, \ldots, n\}$ удовлетворяют условиям $B_{i1} + C_{1,\tau(i)} > A_{i,\tau(i)}$ и $B_{i2} + C_{2,\sigma(i)} > A_{i,\sigma(i)}$ при любом $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $A \neq B \otimes C$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда при всех i выполнены условия $B_{i1} + C_{1,\tau(i)} > B_{i2} + C_{2,\tau(i)}$ и $B_{i2} + C_{2,\sigma(i)} > B_{i1} + C_{1,\sigma(i)}$. Таким образом, при всех i оказывается верным неравенство $C_{1,\tau(i)} - C_{1,\sigma(i)} > C_{2,\tau(i)} - C_{2,\sigma(i)}$. Чтобы получить противоречие, достаточно просуммировать эти неравенства по всем i. □

Лемма 7.3.11. *Рассмотрим ориентированный граф V на множестве вершин $\{1, \ldots, n\}$, который не содержит ориентированных циклов. Тогда найдется перестановка ϕ на множестве $\{1, \ldots, n\}$, удовлетворяющая условию $\phi(i) > \phi(j)$ для любого ребра графа V, проходящего из i в j.*

Доказательство. Для $n = 1$ доказывать нечего, и мы продолжаем рассуждение индукцией по n. Поскольку граф V не содержит ориентированных циклов, найдется вершина (обозначим ее номер через v_1), из которой

не исходит ни одно ребро графа V. В силу предположения индукции найдется биективное отображение ϕ' множества $\{1,\dots,n\}\setminus\{v_1\}$ на множество $\{2,\dots,n\}$, удовлетворяющее условию $\phi'(i)>\phi'(j)$ для любой пары индексов $i,j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{v_1\}$ такой, что в графе V есть ребро, проходящее из i в j. Наконец, мы можем задать перестановку ϕ условиями $\phi(v_1)=1$ и $\phi(i)=\phi'(i)$ при $i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{v_1\}$. $\square$

Теперь мы можем доказать основной результат этого подраздела.

Теорема 7.3.12. *Рассмотрим тропические матрицы A и A' размера $m\times n$ и предположим, что факторизационный ранг матрицы A' не превосходит 2. Если система уравнений (7.3.1) несовместна, то найдутся индексы i_1, i_2, j_1 и j_2, для которых подсистема системы (7.3.1), содержащая уравнения с (i,j) из множества $\{i_1,i_2\}\times\{j_1,j_2\}$, также несовместна.*

Доказательство. От противного. Предположим, что для любых индексов i_1, i_2, j_1 и j_2, подсистема системы (7.3.1), содержащая уравнения с (i,j) из множества $\{i_1,i_2\}\times\{j_1,j_2\}$, имеет решение.

Шаг 1. Если условие $A\leqslant A'$ нарушается, одно из уравнений системы (7.3.1) является противоречием; поэтому мы можем считать, что выполнено условие $A'\leqslant A$, и рассматривать граф $\mathcal{G}=\mathcal{G}(A,A')$. Предположим сначала, что граф $\mathcal{G}$ содержит изолированную вершину; можно считать, не ограничивая общности рассуждений, что вершина $\mathcal{R}_{i'}$ изолирована. В этом случае равенство $A_{i'j}=A'_{i'j}$ выполнено при всех $j\in\{1,\dots,n\}$. Замена переменной $x_{i'}=\max_{j=1}^n\{A_{i'j}-y_j\}$ показывает, что несовместность системы уравнений (7.3.1) влечет несовместность подсистемы, содержащей уравнения с (i,j) из множества $(\{1,\dots,m\}\setminus\{i'\})\times\{1,\dots,n\}$. Поэтому мы можем считать, что граф $\mathcal{G}$ не содержит изолированных вершин.

Шаг 2. В силу результата шага 1 компоненты связности графа $\mathcal{G}$ могут быть описаны как $\{\mathcal{R}_{u_{t-1}+1},\dots,\mathcal{R}_{u_t},\mathcal{C}_{v_{t-1}+1}\dots,\mathcal{C}_{v_t}\}$, где $0=u_0<u_1<\ldots<u_q=m$ и $0=v_0<v_1<\ldots<v_q=n$, а индекс t изменяется на множестве $\{1,\dots,q\}$. Через $\varkappa(i)$ мы будем обозначать индекс компоненты, содержащей вершину $\mathcal{R}_i$, то есть, через $\varkappa(i)$ будет обозначено минимальное число k, удовлетворяющее условию $u_k\geqslant i$. Аналогично, через $\sigma(j)$ мы будем обозначать индекс компоненты, содержащей вершину $\mathcal{C}_j$, то есть, через $\sigma(j)$ будет обозначено минимальное число s, удовлетворяющее условию $u_s\geqslant j$.

Шаг 3. Если пара (i,j) удовлетворяет условию $\varkappa(i)\neq\sigma(j)$, то в силу леммы 7.3.8 минимум в выражении

$$A'_{ij}=\min_{t\in\{1,2\}}\{B_{it}+C_{tj}\}$$

достигается при единственном значении $t \in \{1, 2\}$, и то значение, на котором он достигается, мы будем обозначать через $\tau(i, j)$. Лемма 7.3.8 показывает также, что значение $\tau(i, j)$ зависит только от $\varkappa(i)$ и $\sigma(j)$.

Поэтому мы можем писать $T(k, s)$ (где k и s — произвольные различные индексы из множества $\{1, \ldots, q\}$) вместо $\tau(i', j')$ для любых индексов i' и j', удовлетворяющих условиям $\varkappa(i') = k$ и $\sigma(j') = s$.

Шаг 4. Предположим, что найдутся индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \{1, \ldots, q\}$, удовлетворяющие условиям $T(\alpha_1, \alpha_2) = \ldots = T(\alpha_{p-1}, \alpha_p) = T(\alpha_p, \alpha_1)$. Тогда в силу леммы 7.3.8 выполнены условия $T(\alpha_2, \alpha_1) = \ldots = T(\alpha_p, \alpha_{p-1}) = T(\alpha_1, \alpha_p) \neq T(\alpha_1, \alpha_2)$, что противоречит условию леммы 7.3.10. Таким образом, индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ с указанным свойством не существует.

Шаг 5. В силу леммы 7.3.11 и результата шага 4 мы можем считать, не ограничивая общности, что равенство $T(k, s) = 1$ выполнено при $k < s$, а равенство $T(k, s) = 2$ — при $k > s$.

Шаг 6. Пользуясь результатом леммы 7.3.7, мы можем считать, что $q > 1$. В силу лемм 7.3.5 и 7.3.7 с точностью до эквивалентности условие $A_{ij} = 0$ выполнено, если $(\mathcal{R}_i, \mathcal{C}_j)$ является ребром графа $\mathcal{G}$, а условие $A_{ij} \leqslant 0$ — в случае $\varkappa(i) = \sigma(j)$.

Шаг 7. Рассмотрим матрицу $H \in \mathbb{R}^{q \times q}$, элемент с индексом (k, s) которой задан как наибольший элемент подматрицы $A[u_{k-1}+1, \ldots, u_k | v_{s-1}+1, \ldots, v_s]$. В частности, при любом k выполнено равенство $H_{kk} = 0$ в силу результата шага 6. Предположим, что для любой перестановки ψ на множестве $\{1, \ldots, q\}$ выполнено неравенство $H_{1\psi(1)} + \ldots + H_{q\psi(q)} \leqslant 0$. Тогда мы используем лемму 3.3.10 и находим числа $r_1, \ldots, r_q \in \mathbb{R}$, для которых значение выражения $H_{ks} - r_k + r_s$ неположительно при всех k и s. Теперь мы видим, что наборы чисел $x_i = r_{\varkappa(i)}$ и $y_j = -r_{\sigma(j)}$ являются решением системы (7.3.1). Полученное противоречие показывает, что найдется перестановка ψ, удовлетворяющая условию $H_{1\psi(1)} + \ldots + H_{q\psi(q)} > 0$.

Шаг 8. В силу результата шага 8 найдутся индексы $g_1, \ldots, g_l \in \{1, \ldots, q\}$, удовлетворяющие неравенству $H_{g_1,g_2} + \ldots + H_{g_{l-1},g_l} + H_{g_l,g_1} > 0$; мы будем считать, что значение l минимально при этих условиях.

Мы можем также считать, не ограничивая общности рассуждений, что выполнено условие $\{g_1, \ldots, g_l\} = \{1, \ldots, l\}$; с точностью до эквивалентности матриц элементы $H_{g_1,g_2}, \ldots, H_{g_{l-1},g_l}, H_{g_l,g_1}$ являются положительными.

Шаг 9. Если $l = 2$, то мы получаем противоречие с результатом леммы 7.3.9; поэтому $l > 2$.

Шаг 10. В силу результата шага 9 условие $|g_\mu - g_\nu| > 1$ выполнено для некоторых μ и ν, удовлетворяющих также условию $\nu - \mu \in \{1, 1 - l\}$. В частности, мы можем считать, не ограничивая общности рассуждений, что $g_2 - g_1 > 1$.

Шаг 11. В силу определения матрицы H, данного на шаге 7, найдутся индексы $\widetilde{i}$ и $\widetilde{j}$, удовлетворяющие условиям $\varkappa(\widetilde{i}) = g_1$, $\sigma(\widetilde{j}) = g_2$ и $A_{\widetilde{i}\widetilde{j}} = H_{g_1,g_2}$; в частности, мы имеем в этом случае неравенство $A_{\widetilde{i}\widetilde{j}} > 0$.

Шаг 12. В силу шага 8 найдется индекс $z \in \{3, 4, \ldots, l\}$, удовлетворяющий условию $g_z = g_1 + 1$. Поэтому из неравенства $H_{g_1,g_1+1} \geqslant 0$ следовало бы, что элемент H_{g_1,g_z} неотрицателен, а все числа $H_{g_z,g_{z+1}}, \ldots, H_{g_{l-1},g_l}, H_{g_l,g_1}$ положительны; полученный результат противоречил бы минимальности значения l, то есть, рассуждениям шага 8. Таким образом, выполнено неравенство $H_{g_1,g_1+1} < 0$. Аналогично мы можем проверить выполнение неравенства $H_{g_1+1,g_2} < 0$.

Шаг 13. В силу шага 12 для любых индексов i'' и j'', удовлетворяющих условиям $\varkappa(i'') = g_1 + 1$ и $\sigma(j'') = g_1 + 1$, элементы $A_{\widetilde{i}j''}$ и $A_{i''\widetilde{j}}$ отрицательны. Поскольку выполнены условия $\varkappa(\widetilde{i}) \neq \sigma(j'')$ и $\varkappa(i'') \neq \sigma(\widetilde{j})$, мы получаем неравенства $A_{\widetilde{i}j''} = A'_{\widetilde{i}j''} < 0$ и $A_{i''\widetilde{j}} = A'_{i''\widetilde{j}} < 0$.

Шаг 14. Из результатов шагов 5 и 13 следует, что выполнены условия $B_{\widetilde{i}1} + C_{1j''} = A'_{\widetilde{i}j''} < 0$ и $B_{i''1} + C_{1\widetilde{j}} = A'_{i''\widetilde{j}} < 0$. Аналогично, из шагов 5 и 11 следует условие $B_{\widetilde{i}1} + C_{1\widetilde{j}} = A'_{\widetilde{i}\widetilde{j}} > 0$.

Шаг 15. В силу шага 14 неравенство $B_{i''1} + C_{1j''} < 0$ справедливо для любых индексов i'' и j'', удовлетворяющих условиям $\kappa(i'') = g_1 + 1$ и $\sigma(j'') = g_1 + 1$. Отсюда следует выполнение условия $A'_{i''j''} \leqslant B_{i''1} + C_{1j''} < 0$, и мы получаем противоречие с результатом шага 6. □

7.3.3 Полное решение проблемы 7.1.6

Приступим к изложению завершающей части доказательства основных результатов раздела. Важную роль в рассуждениях будут играть результаты подраздела 7.3.2 и, в частности, теорема 7.3.12. Кроме того, нам потребуются несколько дополнительных предположений, которые будут полезны для разбора важных частных случаев основного результата.

Обозначение 7.3.13. Всюду в этом подразделе мы будем использовать символ A для обозначения тропической матрицы размера $m \times n$, состоящей из неотрицательных чисел, содержащей нуль в каждой строке и в каждом столбце и имеющей факторизационный ранг, не меньший четырех. Мы обозначаем наибольший элемент строки матрицы A с индексом i через ρ_i и предполагаем, что $\rho_i > 0$. Также мы обозначаем наибольший элемент столбца матрицы A с индексом j через γ_j и предполагаем, что $\gamma_j > 0$.

Обозначение 7.3.14. Будем предполагать, что для любых индексов $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3\}$ выполнено условие $A_{k_1,k_2} = 0$ в случае, если $k_1 = k_2$, и выполнено условие $A_{k_1,k_2} > 0$ в случае, если $k_1 \neq k_2$.

Обозначение 7.3.15. Через B будет обозначаться матрица размера $m \times 3$, элементом B_{ik} которой является либо вещественное число β_{ik}, либо переменная x_{ik}; через C будет обозначаться матрица размера $3 \times n$, элементом C_{kj} которой является либо вещественное число ζ_{kj}, либо переменная y_{kj}.

Отметим, что если бы факторизационный ранг матрицы A не превосходил трех, то система уравнений

$$\min\{B_{i1} + C_{1j}, B_{i2} + C_{2j}, B_{i3} + C_{3j}\} = A_{ij} \tag{7.3.3}$$

с $(i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$ имела бы решение для матриц B и C, состоящих полностью из неизвестных.

Доказательство основного результата раздела имеет следующую структуру. Мы начнем рассматривать систему уравнений (7.3.3) с тех частных случаев, когда матрицы B и C содержат довольно много постоянных элементов и не очень много переменных. В дальнейшем мы будем получать более общие характеризации системы (7.3.3) и наконец, получим ключевой для рассуждений этого раздела результат — характеризацию решений системы в том случае, когда все элементы матрицы B и C неизвестны.

Прежде всего мы будем рассматривать те случаи, когда один из столбцов матрицы B и одна из строк матрицы C не содержат неизвестных.

Лемма 7.3.16. *Предположим, что при любом i элементы 0 и ρ_i принадлежат строке матрицы B с индексом i, а также, что при любом j элементы 0 и γ_j принадлежат столбцу матрицы C с индексом j. Для любой переменной x_{ik} и y_{kj} мы также предполагаем, что выполнено условие $k \in \{1,2\}$. Наконец, мы предполагаем, что в случае $B_{i2} = x_{i2}$ выполнено условие $B_{i3} = 0$, а в случае $C_{2j} = y_{2j}$ выполнено условие $C_{3j} = 0$.*

Тогда найдутся множества $R' \subset \{1,\dots,m\}$ и $S' \subset \{1,\dots,n\}$, мощность каждого из которых не превосходит 2, для которых подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $R' \times S'$, не имеет решений в положительных неизвестных x_{ik} и y_{kj}.

Доказательство. Обозначим через I множество всех индексов $i \in \{1,\dots,m\}$, удовлетворяющих условию $B_{i2} = x_{i2}$; обозначим через J множество всех индексов $j \in \{1,\dots,n\}$, удовлетворяющих условию $C_{2j} = y_{2j}$.

Шаг 1. Предположим, что $i' \in I$. Согласно условию леммы уравнение (7.3.3) с $i = i'$ и любым $j \in \{1,2\dots,n\}$ равносильно (с учетом положительности неизвестных) либо неравенству $x_{i'2} \geqslant \alpha_{i'j}$, либо уравнению $x_{i'2} = \alpha_{i'j}$, либо является тождественно ложным или тождественно истинным. Если значения $x_{i'2}$, удовлетворяющего этим условиям, не существует,

то несовместность системы уравнений (7.3.3) может быть выведена из некоторой пары уравнений.

Таким образом, мы можем считать, что существует значение $x_{i'2} = \xi_{i'2}$, для которого равенство (7.3.3) при $i = i'$ и любом $j \in \{1, 2 \dots, n\}$ выполнено независимо от того, какие положительные значения принимают переменные $y_{\chi j}$.

Шаг 2. Предположим, что $j' \in J$. По аналогии с шагом 1 мы доказываем, что существует значение $y_{2j'} = \psi_{2j'}$, для которого равенство (7.3.3) при $j = j'$ и любом $i \in \{1, 2 \dots, m\}$ выполнено независимо от того, какие положительные значения принимают переменные $x_{i\chi}$.

Шаг 3. Рассмотрим матрицу B', полученную из B заменой элемента $B_{i'2} = x_{i'2}$ числом $B'_{i'2} = \xi_{i'2}$ при всех индексах $i' \in I$; через C' обозначим матрицу, полученную из C заменой элемента $C_{2j'} = y_{2j'}$ числом $C'_{2j'} = \psi_{2j'}$ при всех индексах $j' \in J$. В силу этих определений последние два столбца матрицы B' и последние две строки матрицы C' состоят из постоянных. В силу теоремы 7.3.12 найдутся подмножества $R' \subset \{1, \dots, m\}$ и $S' \subset \{1, \dots, n\}$, мощность каждого из которых не превосходит 2, для которых система уравнений

$$\min\{B_{i1} + C_{1j}, B'_{i2} + C'_{2j}, B_{i3} + C_{3j}\} = A_{ij}, \tag{7.3.4}$$

где $(i, j) \in R' \times S'$, не имеет решений.

Предположим, что матрица $\overline{B} \in \mathbb{R}^{|R'| \times 3}$ (строки которой имеют индексы из множества R') и матрица $\overline{C} \in \mathbb{R}^{3 \times |S'|}$ (столбцы которой имеют индексы из множества S') дает решение подсистемы системы (7.3.3), содержащей уравнения с (i, j) из множества $R' \times S'$. В силу шагов 1 и 2 мы можем заменить значение $\overline{B}_{i'2}$ на $\xi_{i'2}$ и значение $\overline{C}_{2j'}$ на $\psi_{2j'}$ без изменения произведения матриц $\overline{B}$ и $\overline{C}$. Поэтому полученные матрицы $\overline{B}'$ и $\overline{C}'$ являются решением системы уравнений (7.3.4), и мы получаем противоречие. Таким образом, подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i, j) из множества $R' \times S'$, не имеет решений в положительных неизвестных. □

Теперь обратим внимание на тот случай, когда два столбца матрицы B и одна строка матрицы C состоят из постоянных.

Лемма 7.3.17. *Предположим, что первый столбец матрицы B состоит из неизвестных, а все остальные ее элементы — постоянные. Предположим также, что первые две строки матрицы C состоят из неизвестных, а все остальные ее элементы — постоянные.*

Тогда найдется множество $R' \subset \{1, \dots, m\}$, мощность которого не превосходит 4, и множество $S' \subset \{1, \dots, n\}$, мощность которого не превосходит 2, для которых подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с

(i,j) из множества $R' \times S'$, не имеет решений в (не обязательно положительных) неизвестных x_{ik} и y_{kj}.

Доказательство. Шаг 1. В силу условия леммы второй столбец матрицы B состоит из вещественных чисел β_{i2}. Рассмотрим матрицу C', полученную из C заменой значения C_{2j} на $C'_{2j} = \max_{i=1}^{m}\{A_{ij} - \beta_{i2}\}$; в этом случае матрицы A и $A' = B \otimes C'$ удовлетворяют условиям теоремы 7.3.12. Таким образом, найдутся подмножества $R'' \subset \{1,\ldots,m\}$ и $S'' \subset \{1,\ldots,n\}$, мощность каждого из которых не превосходит 2, для которых система уравнений

$$\min\{B_{i'1} + C_{1j'}, B_{i'2} + C'_{2j'}, B_{i'3} + C_{3j'}\} = A_{i'j'}, \tag{7.3.5}$$

где $(i',j') \in R'' \times S''$, не имеет решений.

Шаг 2. Обозначим через $e(s)$ (где s может быть любым элементом множества S'') индекс $e \in \{1,\ldots,m\}$, доставляющий максимум выражению $A_{es} - \beta_{e3}$. Обозначим через R' множество, состоящее из всех индексов r и $e(s)$, где пара (r,s) может быть любым элементом множества $R'' \times S''$.

Предположим, что матрица $\overline{B} \in \mathbb{R}^{|R'|\times 3}$ (строки которой имеют индексы из множества R') и матрица $\overline{C} \in \mathbb{R}^{3\times|S''|}$ (столбцы которой имеют индексы из множества S'') дает решение подсистемы системы (7.3.3), содержащей уравнения с (i,j) из множества $R' \times S''$. В этом случае выполнены условия $\overline{B}_{i2} + \overline{C}_{2j} \geqslant A_{ij}$, то есть, условия $\overline{C}_{2j} \geqslant \max_{i\in R'}\{A_{ij} - \beta_{i2}\} = \max_{i=1}^{m}\{A_{ij} - \beta_{i2}\}$ при всех $j \in S''$. Предыдущее неравенство показывает, что мы можем заменить значение элемента $\overline{C}_{2j}$ на $\overline{C}'_{2j} = \max_{i=1}^{m}\{A_{ij} - \beta_{i2}\}$, не изменяя значения произведения матриц $\overline{B} \otimes \overline{C}$; таким образом, равенство

$$\min\{\overline{B}_{i'1} + \overline{C}_{1j'}, \overline{B}_{i'2} + \overline{C}'_{2j'}, \overline{B}_{i'3} + \overline{C}_{3j'}\} = A_{i'j'}$$

выполняется для любых пар (i',j') из множества $R'' \times S''$. Поэтому матрицы $\overline{B}$ и $\overline{C}'$ являются решением системы уравнений (7.3.5), и мы получаем противоречие с результатом шага 1. Таким образом, подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $R' \times S''$, не имеет решений. □

Следующая лемма будет полезна при рассмотрении того случая, когда некоторая строка матрицы C и некоторый столбец матрицы B заданы.

Лемма 7.3.18. *Предположим, что при любом i элементы 0 и ρ_i принадлежат строке матрицы B с индексом i, а также, что при любом j элементы 0 и γ_j принадлежат столбцу матрицы C с индексом j. Для любой переменной x_{ik} и y_{kj} мы также предполагаем, что выполнено условие $k \in \{1,2\}$. Наконец, мы предполагаем, что в случае $B_{ik} = x_{ik}$ выполнено условие $B_{i3} = 0$.*

Тогда найдутся множества $R' \subset \{1,\dots,m\}$ *и* $S' \subset \{1,\dots,n\}$, *мощность каждого из которых не превосходит* 6, *для которых подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с* (i,j) *из множества* $R' \times S'$, *не имеет решений в положительных неизвестных* x_{ik} *и* y_{kj}.

Доказательство. Обозначим через I_χ (где $\chi \in \{1,2\}$) множество всех индексов $i \in \{1,\dots,m\}$, удовлетворяющих условию $B_{i\chi} = x_{i\chi}$.

Шаг 1. Если некоторое уравнение системы (7.3.3) является противоречием (с учетом положительности неизвестных), то утверждение леммы тривиально. Далее мы можем считать, что ни одно из уравнений (7.3.3) не является противоречием.

Шаг 2. Предположим, что для всякого индекса $\widehat{\imath} \in I_2$ выполнено одно из следующих условий (здесь через $\xi_{\widehat{\imath}2}$ обозначено некоторое положительное число):
(1) для некоторого индекса $\widehat{\jmath} = \widehat{\jmath}(\widehat{\imath})$ уравнение (7.3.3) с $i = \widehat{\imath}$ и $j = \widehat{\jmath}$ равносильно уравнению $x_{\widehat{\imath}2} = \xi_{\widehat{\imath}2}$ с учетом положительности неизвестных;
(2) подстановка $x_{\widehat{\imath}2} = \xi_{\widehat{\imath}2}$ такова, что уравнение (7.3.3) с $i = \widehat{\imath}$ и произвольным индексом j из множества $\{1,\dots,n\}$ удовлетворяется независимо от того, какое положительное значение принимает переменная $y_{\chi j}$.

В этом случае мы рассмотрим матрицу B', полученную из B присвоением значения $B'_{\widehat{\imath}2} = \xi_{\widehat{\imath}2}$ переменной $B_{\widehat{\imath}2} = x_{\widehat{\imath}2}$ при всех значениях индекса $\widehat{\imath} \in I_2$. В силу леммы 7.3.17 найдется множество $R \subset \{1,\dots,m\}$, мощность которого не превосходит 4, и множество $\{s_1, s_2\} \subset \{1,\dots,n\}$, для которого система уравнений

$$\min\{B_{i'1} + C_{1j'}, B'_{i'2} + C_{2j'}, B_{i'3} + C_{3j'}\} = A_{i'j'} \tag{7.3.6}$$

с (i',j') из множества $R \times \{s_1, s_2\}$ не имеет решений.

Обозначим через S' множество, элементами которого являются индексы s_1, s_2 и $\widehat{\jmath}(r)$ (где r должно удовлетворять условию (1) и принимать значения из множества $R \cap I_2$). Предположим, что матрица $\overline{B} \in \mathbb{R}^{|R|\times 3}$ (строки которой имеют индексы из множества R) и матрица $\overline{C} \in \mathbb{R}^{3\times|S'|}$ (столбцы которой имеют индексы из множества S') дает решение подсистемы системы (7.3.3), содержащей уравнения с (i,j) из множества $R \times S'$. В силу условий (1) и (2) из условия $\widehat{\imath} \in I_2$ следует, что мы можем заменить значение элемента $\overline{B}_{\widehat{\imath}2}$ числом $\xi_{\widehat{\imath}2}$, не изменяя значения произведения матриц $\overline{B}$ и $\overline{C}$. Поэтому полученная матрица $\overline{B}'$ и матрица $\overline{C}$ являются решением системы (7.3.6) с (i',j') из множества $R \times \{s_1, s_2\}$, и мы получаем противоречие. Таким образом, подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $R \times S'$, не имеет решений в положительных неизвестных.

Шаг 3. Предположим, что для всякого индекса $\widehat{\imath} \in I_1$ выполнено одно из следующих условий (здесь через $\xi_{\widehat{\imath}1}$ обозначено некоторое положительное

число):
(1) для некоторого индекса $\widehat{\jmath} = \widehat{\jmath}(\widehat{\imath})$ уравнение (7.3.3) с $i = \widehat{\imath}$ и $j = \widehat{\jmath}$ равносильно уравнению $x_{\widehat{\imath}1} = \xi_{\widehat{\imath}1}$ с учетом положительности неизвестных;
(2) подстановка $x_{\widehat{\imath}1} = \xi_{\widehat{\imath}1}$ такова, что уравнение (7.3.3) с $i = \widehat{\imath}$ и произвольным индексом j из множества $\{1, \ldots, n\}$ удовлетворяется независимо от того, какое положительное значение принимает переменная $y_{\chi j}$.

В силу симметрии этого случая и предположения шага 2, утверждение леммы также оказывается верным.

Шаг 4. Предположим, что условие шага 2 не выполняется. Тогда найдется индекс $\widehat{\imath} \in I_2$, для которого условия (1) и (2) нарушаются. Напомним, что согласно шагу 1 ни одно из уравнений (7.3.3) не является противоречием.

4.1. Если строка матрицы C с индексом $\widehat{\jmath}$ не содержит неизвестных или удовлетворяет условию $C_{3\widehat{\jmath}} = 0$, то уравнение (7.3.3) с $i = \widehat{\imath}$ и $j = \widehat{\jmath}$ (с учетом положительности неизвестных) либо равносильно неравенству $x_{\widehat{\imath}2} \geqslant \alpha_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}}$, либо является тавтологией.

4.2. Если выполнено условие $C_{3\widehat{\jmath}} = \gamma_{\widehat{\jmath}}$ и элемент $C_{1\widehat{\jmath}}$ является переменной, то уравнение (7.3.3) с $i = \widehat{\imath}$ и $j = \widehat{\jmath}$ эквивалентно либо неравенству $x_{\widehat{\imath}2} \geqslant A_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}}$ (если $A_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}} = \gamma_{\widehat{\jmath}}$), либо уравнению $x_{\widehat{\imath}2} = A_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}}$ (если $A_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}} < \gamma_{\widehat{\jmath}}$). Поскольку условие (1) из шага 2 не выполняется, выполнено равенство $A_{\widehat{\imath}\widetilde{\jmath}} = \gamma_{\widehat{\jmath}}$ для некоторого индекса $\widehat{\jmath}$, удовлетворяющего предположению пункта 4.2.

4.3. Единственная возможность для индекса $\widehat{\jmath}$, не рассмотренная в пунктах 4.1 и 4.2 — это предположение о том, что выполнено условие $C_{3\widehat{\jmath}} = \gamma_{\widehat{\jmath}}$, а элемент $C_{2\widehat{\jmath}}$ является переменной. В этом случае уравнение (7.3.3) с $i = \widehat{\imath}$ и $j = \widehat{\jmath}$ равносильно либо условию $x_{\widehat{\imath}2} + y_{2\widehat{\jmath}} \geqslant A_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}}$ (если $A_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}} = \min\{\gamma_{\widehat{\jmath}}, \rho_{\widehat{\imath}}\}$), либо условию $x_{\widehat{\imath}2} + y_{2\widehat{\jmath}} = A_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}}$ (если $A_{\widehat{\imath}\widehat{\jmath}} < \min\{\gamma_{\widehat{\jmath}}, \rho_{\widehat{\imath}}\}$). Поскольку условие (2) из шага 2 не выполняется, выполнено равенство $A_{\widehat{\imath}\widetilde{\jmath}} < \min\{\gamma_{\widetilde{\jmath}}, \rho_{\widehat{\imath}}\}$ $\widetilde{\jmath}$ для некоторого индекса $\widehat{\jmath}$, удовлетворяющего предположению пункта 4.3.

Шаг 5. Теперь предположим, что не выполняется предположение шага 3. Тогда найдется индекс $\widehat{\imath}' \in I_1$, для которого нарушаются условия (1') и (2').

Рассуждения шага 5 проходят по аналогии с рассуждениями шага 4. Мы доказываем, что для любого индекса $\widehat{\jmath}'$, удовлетворяющего условиям пункта 4.3, выполнено равенство $A_{\widehat{\imath}'\widehat{\jmath}'} = \gamma_{\widehat{\jmath}'}$, а уравнение (7.3.3) с $i = \widehat{\imath}'$ и $j = \widehat{\jmath}'$ равносильно неравенству $x_{\widehat{\imath}'1} \geqslant A_{\widehat{\imath}'\widehat{\jmath}'}$. Кроме того, мы показываем, что для некоторого индекса $\widetilde{\jmath}'$, удовлетворяющего условиям пункта 4.2, выполнено неравенство $A_{\widehat{\imath}'\widetilde{\jmath}'} < \min\{\gamma_{\widetilde{\jmath}'}, \rho_{\widehat{\imath}'}\}$, а уравнение (7.3.3) с $i = \widehat{\imath}'$ и $j = \widetilde{\jmath}'$ равносильно уравнению $x_{\widehat{\imath}'1} + y_{1\widetilde{\jmath}'} = A_{\widehat{\imath}'\widetilde{\jmath}'}$.

Шаг 6. В предположениях шагов 5 и 6 рассмотрим подсистему (7.3.3), содержащую уравнения с (i, j) из множества $\{\widehat{\imath}, \widehat{\imath}'\} \times \{\widetilde{\jmath}, \widehat{\jmath}'\}$. В силу результатов шагов 5 и 6 решение этой системы удовлетворяет условиям $x_{\widehat{\imath}2} \geqslant \gamma_{\widehat{\jmath}'}$, $x_{\widehat{\imath}'1} \geqslant$

$\gamma_{\widetilde{j}}$, $x_{\widehat{i}2} + y_{2\widetilde{j}} < \gamma_{\widetilde{j}}$ и $x_{\widetilde{i}1} + y_{1\widetilde{j}} < \gamma_{\widetilde{j}}$. Поэтому подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $\{\widehat{i},\widetilde{i}\} \times \{\widetilde{j},\widetilde{j}\}$, не имеет решений в положительных неизвестных. Полученный результат доказывает лемму в тех случаях, когда предположения шагов 2 и 3 нарушаются. □

Замечание 7.3.19. *В формулировке леммы 7.3.18 предположение о том, что равенство $B_{i3} = 0$ выполнено в случае $B_{ik} = x_{ik}$, может быть заменено на предположение о том, что равенство $C_{3j} = 0$ выполнено в случае $C_{kj} = y_{kj}$. В самом деле, мы можем рассмотреть пару матриц $(C^\top, B^\top)$ вместо (B, C), поскольку система уравнений (7.3.3) будет в этом случае равносильна условию $C^\top \otimes B^\top = A^\top$.*

Теперь дадим полезную характеризацию системы (7.3.3) в том случае, когда некоторый столбец матрицы B и некоторая строка матрицы C состоят из вещественных чисел.

Лемма 7.3.20. *Предположим, что при любом i элементы 0 и ρ_i принадлежат строке матрицы B с индексом i, а также, что при любом j элементы 0 и γ_j принадлежат столбцу матрицы C с индексом j. Для любой переменной x_{ik} и y_{kj} мы также предполагаем, что выполнено условие $k \in \{1,2\}$. Наконец, если различные индексы k_1, k_2 и k_3 удовлетворяют условиям $B_{ik_1} = C_{k_2 j} = 0$, $B_{ik_3} = \rho_i$ и $C_{k_3 j} = \gamma_j$, то мы предполагаем, что один из элементов B_{ik_2} и $C_{k_1 j}$ не является переменной.*

Тогда найдутся множества $R' \subset \{1,\dots,m\}$ и $S' \subset \{1,\dots,n\}$, мощность каждого из которых не превосходит 6, для которых подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $R' \times S'$, не имеет решений в положительных неизвестных x_{ik} и y_{kj}.

Доказательство. Принимая во внимание результаты леммы 7.3.18 и замечания 7.3.19, мы можем считать, не ограничивая общности рассуждений, что выполнены условия $B_{i3} = \rho_i$ и $C_{3j} = \gamma_j$, а также, что элементы B_{ik} и $C_{k'j}$ являются переменными для некоторых индексов $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$ и $k, k' \in \{1,2\}$. Предположение леммы доказывает, что выполнено равенство $k = k'$ для любой пары i и j с указанным свойством. Теперь доказываемая лемма следует из леммы 7.3.16. □

Обратим теперь внимание на тот случай, когда матрица B содержит наперед заданные строки, но ни один столбец матрицы C наперед не задан.

Лемма 7.3.21. *Предположим, что при любом i элементы 0 и ρ_i принадлежат строке матрицы B с индексом i, а также, что при любом j элементы 0 и γ_j принадлежат столбцу матрицы C с индексом j. Для*

любой переменной x_{ik} мы также предполагаем, что выполнено условие $k \in \{1,2\}$. Наконец, если различные индексы k_1, k_2 и k_3 удовлетворяют условиям $B_{ik_1} = C_{k_2j} = 0$, $B_{ik_3} = \rho_i$ и $C_{k_3j} = \gamma_j$, то мы предполагаем, что один из элементов B_{ik_2} и C_{k_1j} не является переменной.

Тогда найдутся множества $R' \subset \{1,\dots,m\}$ и $S' \subset \{1,\dots,n\}$, мощность каждого из которых не превосходит 12, для которых подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $R' \times S'$, не имеет решений в положительных неизвестных x_{ik} и y_{kj}.

Доказательство. Шаг 1. В силу предположения леммы третий столбец матрицы B состоит из вещественных чисел β_{i3}. Рассмотрим матрицу C', получаемую из C заменой элемента C_{3j} на элемент $C'_{3j} = \max_{i=1}^{m}\{A_{ij} - \beta_{i3}\}$. Заметим, что матрицы B и C' удовлетворяют условиям леммы 7.3.20; поэтому найдутся подмножества $R'' \subset \{1,\dots,m\}$ и $S'' \subset \{1,\dots,n\}$, мощность каждого из которых не превосходит 6, для которых система уравнений

$$\min\{B_{i'1} + C_{1j'}, B_{i'2} + C_{2j'}, B_{i'3} + C'_{3j'}\} = A_{i'j'}, \tag{7.3.7}$$

где $(i',j') \in R \times S$, не имеет положительных решений.

Шаг 2. Обозначим через $e(s)$ (где s может быть любым элементом множества S'') индекс $e \in \{1,\dots,m\}$, доставляющий максимум выражению $A_{es} - \beta_{e3}$. Обозначим через R' множество, состоящее из всех индексов r и $e(s)$, где пара (r,s) может быть любым элементом множества $R'' \times S''$.

Предположим, что матрица $\overline{B} \in \mathbb{R}^{|R'|\times 3}$ (строки которой имеют индексы из множества R') и матрица $\overline{C} \in \mathbb{R}^{3\times|S''|}$ (столбцы которой имеют индексы из множества S'') дает решение подсистемы системы (7.3.3), содержащей уравнения с (i,j) из множества $R' \times S''$. В этом случае выполнены условия $\overline{B}_{i3} + \overline{C}_{3j} \geqslant A_{ij}$, то есть, условия $\overline{C}_{3j} \geqslant \max_{i\in R'}\{A_{ij} - \beta_{i3}\} = \max_{i=1}^{m}\{A_{ij} - \beta_{i3}\}$ при всех $j \in S''$. Предыдущее неравенство показывает, что мы можем заменить значение элемента $\overline{C}_{3j}$ на $\overline{C}'_{3j} = \max_{i=1}^{m}\{A_{ij} - \beta_{i3}\} j \in S''$, не изменяя значения произведения матриц $\overline{B} \otimes \overline{C}$; таким образом, равенство

$$\min\{\overline{B}_{i'1} + \overline{C}_{1j'}, \overline{B}_{i'2} + \overline{C}_{2j'}, \overline{B}_{i'3} + \overline{C}'_{3j'}\} = A_{i'j'}$$

выполняется для любых пар (i',j') из множества $R'' \times S''$. Поэтому матрицы $\overline{B}'$ и $\overline{C}'$ являются решением системы уравнений (7.3.7), и мы получаем противоречие с результатом шага 1. Таким образом, подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $R' \times S''$, не имеет решений в положительных неизвестных. □

Замечание 7.3.22. *В формулировке леммы 7.3.21 предположение о том, что $k \in \{1,2\}$ для любой переменной x_{ik}, может быть заменено на предположение $k \in \{1,2\}$ для любой переменной y_{kj}. В самом деле, мы можем рассмотреть пару матриц $(C^\top, B^\top)$ вместо (B,C), поскольку система уравнений (7.3.3) будет в этом случае равносильна условию $C^\top \otimes B^\top = A^\top$.*

В следующей лемме рассматривается ограничение иного характера; в частности, мы не предполагаем существование строк и столбцов матриц B и C, полностью состоящих из вещественных чисел.

Лемма 7.3.23. *Предположим, что при любом i элементы 0 и ρ_i принадлежат строке матрицы B с индексом i, а также, что при любом j элементы 0 и γ_j принадлежат столбцу матрицы C с индексом j. Если различные индексы k_1, k_2 и k_3 удовлетворяют условиям $B_{ik_1} = C_{k_2j} = 0$, $B_{ik_3} = \rho_i$ и $C_{k_3j} = \gamma_j$, то мы предполагаем, что один из элементов B_{ik_2} и C_{k_1j} не является переменной.*

Тогда найдутся множества $R' \subset \{1,\dots,m\}$ и $S' \subset \{1,\dots,n\}$, мощность каждого из которых не превосходит 12, для которых подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $R' \times S'$, не имеет решений в положительных неизвестных x_{ik} и y_{kj}.

Доказательство. Шаг 1. Если некоторый столбец матрицы B или некоторая строка матрицы C состоят из вещественных чисел (то есть, не содержат переменных), то утверждение леммы следует из леммы 7.3.21 и замечания 7.3.22.

Шаг 2. Предположим, что при некоторых индексах $i_1, i_2 \in \{1,\dots,m\}$ и $\{k_1,k_2,k_3\} = \{1,2,3\}$ выполнено условие $B_{i_1,k_1} = B_{i_2,k_1} = 0$, и оба элемента B_{i_1,k_2} и B_{i_2,k_3} являются переменными. В этом случае условие леммы показывает, что элемент $C_{k_1,j}$ не может быть переменной ни при каком значении индекса $j \in \{1,\dots,n\}$, поэтому результат следует из рассуждений шага 1.

Шаг 3. Теперь предположим, что при некоторых индексах $j_1, j_2 \in \{1,\dots,n\}$ и $\{k_1,k_2,k_3\} = \{1,2,3\}$ выполнено условие $C_{k_1,j_1} = C_{k_1,j_2} = 0$, и оба элемента C_{k_2,j_1} и C_{k_3,j_2} являются переменными. В этом случае условие леммы показывает, что элемент B_{i,k_1} не может быть переменной ни при каком значении индекса $i \in \{1,\dots,m\}$, поэтому результат следует из рассуждений шага 1.

Шаг 4. Наконец, предположим, что условия шагов 1, 2 и 3 нарушаются. В этом случае из условий леммы следует, что найдется циклическая перестановка σ множества $\{1,2,3\}$, для которой условие $B_{ik} = x_{ik}$ влечет равенство $B_{i,\sigma(k)} = 0$, а условие $C_{kj} = y_{kj}$ — равенство $C_{\sigma(k),j} = 0$. Поэтому уравнение (7.3.3) равносильно (с учетом положительности неизвестных) либо неравенству $x_{ik} \geqslant \alpha_{ij}$, либо уравнению $x_{ik} = \alpha_{ij}$, либо является тождественно

ложным или тождественно истинным. Таким образом, несовместность системы уравнений (7.3.3) может быть выведена в этом случае из некоторой пары уравнений. □

Для обсуждения системы (7.3.3) в более общем случае нам потребуется следующая лемма.

Лемма 7.3.24. *Обозначим через r_i максимальный элемент строки матрицы $H \in \mathbb{R}^{p\times q}$, имеющей индекс i; обозначим через c_j максимальный элемент столбца с индексом j. Если наборы чисел u_i и v_j удовлетворяют условию $\min\{u_i, v_j\} = H_{ij}$ для любой пары индексов (i, j), то либо условие $u_i = r_i$ выполняется при любом i, либо условие $v_j = c_j$ выполняется при любом j.*

Доказательство. Если $u_{i'} < r_{i'}$ при некотором i', то неравенство $H_{i'j} < r_{i'}$ выполняется при любом j; это противоречит тому, что элемент $r_{i'}$ содержится в строке i'. Поэтому условие $u_i \geqslant r_i$ выполняется для всех i; аналогично можно показать, что условие $v_j \geqslant c_j$ выполняется для всех j. Наконец, если неравенства $u_i > r_i$ и $v_j > c_j$ верны при некоторых i и j, то элемент H_{ij} превосходит $\min\{r_i, c_j\}$, что противоречит максимальности r_i и c_j. □

Теперь мы рассмотрим систему уравнений (7.3.3), предполагая, что любая строка матрицы B содержит нуль и максимальный элемент соответствующей строки матрицы A; мы также предполагаем, что любой столбец матрицы C содержит нуль и максимальный элемент соответствующего столбца в A.

Лемма 7.3.25. *Предположим, что при любом i элементы 0 и ρ_i принадлежат строке матрицы B с индексом i, а также, что при любом j элементы 0 и γ_j принадлежат столбцу матрицы C с индексом j. Тогда найдутся множества $R \subset \{1, \ldots, m\}$ и $S \subset \{1, \ldots, n\}$, мощность каждого из которых не превосходит 768, для которых подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i, j) из множества $R\times S$, не имеет решений в положительных неизвестных x_{ik} и y_{kj}.*

Доказательство. Через $\mathcal{S}_3$ мы обозначаем симметрическую группу множества $\{1, 2, 3\}$; будем говорить, что *строчный индекс* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *имеет тип* $\sigma \in \mathcal{S}_3$, если выполнены условия $B_{i,\sigma(1)} = \rho_i$ и $B_{i,\sigma(2)} = 0$, а элемент $B_{i,\sigma(3)}$ является переменной. Аналогично, будем говорить, что *столбцовый индекс* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *имеет тип* σ, если выполнены условия $C_{\sigma(1),j} = \gamma_j$ и $C_{\sigma(3),j} = 0$, а элемент $C_{\sigma(2),j}$ является переменной.

Обозначим через Σ множество всех таких перестановок $\sigma \in \mathcal{S}_3$, которые являются и типами некоторых строк матрицы B, и типами некоторых столбцов матрицы C. Для всякой перестановки $\sigma \in \Sigma$ мы будем рассматривать

подматрицу A^σ матрицы A, образованную строками с индексами типа σ и столбцами с индексами типа σ. Через $\rho^\sigma_{\widehat{i}}$ мы будем обозначать максимальный элемент, находящийся в строке матрицы A^σ с индексом $\widehat{i}$; через $\gamma^\sigma_{\widehat{j}}$ мы будем обозначать максимальный элемент, находящийся в столбце матрицы A^σ с индексом $\widehat{j}$.

Рассмотрим отображение $f : \Sigma \to \{1, 2\}$. Через B^f мы обозначим матрицу, полученную из B присвоением значения $\rho^\sigma_{\widehat{i}}$ переменной $B_{\widehat{i},\sigma(3)}$ для любого индекса $\widehat{i}$ типа σ в случае, если перестановка $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяет условию $f(\sigma) = 1$. Через C^f мы обозначим матрицу, полученную из C присвоением значения $\gamma^\sigma_{\widehat{j}}$ переменной $C_{\sigma(2),\widehat{j}}$ для любого индекса $\widehat{j}$ типа σ в случае, если перестановка $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяет условию $f(\sigma) = 2$.

Теперь матрицы B^f и C^f удовлетворяют условиям леммы 7.3.23. (В частности, если множество Σ пусто, то матрицы $B = B^f$ и $C = C^f$ удовлетворяют этим условиям.) Поэтому существуют множества R^f и S^f, мощность каждого из которых не превосходит 12, для которых система уравнений $\min\{B^f_{i1} + C^f_{1j}, B^f_{i2} + C^f_{2j}, B^f_{i3} + C^f_{3j}\} = A_{ij}$, где $(i, j) \in R^f \times S^f$, не имеет положительных решений.

Положим $R = \cup_f R^f$ и $S = \cup_f S^f$ (здесь переменная f изменяется на множестве всех отображений из Σ в $\{1, 2\}$). Будем показывать, что множества R и S удовлетворяют условиям леммы. Предположим противное; тогда существуют матрицы $\overline{B}$ и $\overline{C}$, полученные из B и C присвоением некоторых положительных значений переменным, удовлетворяющие условию $\min\{\overline{B}_{i1} + \overline{C}_{1j}, \overline{B}_{i2} + \overline{C}_{2j}, \overline{B}_{i3} + \overline{C}_{3j}\} = A_{ij}$ при всех $(i, j) \in R \times S$.

Из леммы 7.3.24 теперь следует, что для любой перестановки $\sigma \in \Sigma$ выполнено одно из двух условий:

(1) для любого строчного индекса $\widehat{i}$ типа σ верно равенство $\overline{B}_{\widehat{i},\sigma(3)} = \rho^\sigma_{\widehat{i}}$;

(2) для любого столбцового индекса $\widehat{j}$ типа σ верно равенство $\overline{C}_{\sigma(2),\widehat{j}} = \gamma^\sigma_{\widehat{j}}$.

Положим $\varphi(\sigma) = 1$, если выполнено условие (1) и $\varphi(\sigma) = 2$ в противном случае; таким образом, мы задаем отображение множества Σ в $\{1, 2\}$. Мы видим, что матрицы $\overline{B}$ и $\overline{C}$ являются решением системы уравнений $\min\{B^\varphi_{i1} + C^\varphi_{1j}, B^\varphi_{i2} + C^\varphi_{2j}, B^\varphi_{i3} + C^\varphi_{3j}\} = A_{ij}$, где $(i, j) \in R^\varphi \times S^\varphi$. Полученное противоречие показывает, что подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i, j) из множества $R \times S$, не имеет решений в положительных неизвестных. □

Теперь мы рассмотрим систему уравнений (7.3.3) в случае, когда каждая строка матрицы B и каждый столбец матрицы C содержат нулевые элементы.

Лемма 7.3.26. *Предположим, что каждая строка матрицы B и каждый столбец матрицы C содержат нулевые элементы. Тогда найдутся множества $R' \subset \{1, \ldots, m\}$ и $S' \subset \{1, \ldots, n\}$, мощность каждого из которых не*

превосходит 1536, *для которых подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с* (i,j) *из множества* $R'\times S'$, *не имеет решений в положительных неизвестных* x_{ik} *и* y_{kj}.

Доказательство. Шаг 1. В силу предположения 7.3.13 для всякого индекса $i\in\{1,\dots,m\}$ найдется индекс $g(i)\in\{1,\dots,n\}$, удовлетворяющий условию $A_{i,g(i)}=\rho_i$; тогда также существует индекс $\psi(i)\in\{1,2,3\}$, удовлетворяющий условию $C_{\psi(i),g(i)}=0$. Аналогично, для всякого индекса $j\in\{1,\dots,n\}$ мы можем найти индекс $e(j)$, удовлетворяющий условию $A_{e(j),j}=\gamma_j$, и индекс $\varphi(j)$, удовлетворяющий условию $B_{e(j),\varphi(j)}=0$.

Шаг 2. Рассмотрим матрицу B', полученную из B заменой элемента $B_{i,\psi(i)}$ числом $B'_{i,\psi(i)}=\rho_i$ при всех индексах $i\in\{1,\dots,m\}$; через C' обозначим матрицу, полученную из C заменой элемента $C_{\varphi(j),j}$ числом $C'_{\varphi(j),j}=\gamma_j$ при всех индексах $j\in\{1,\dots,n\}$. В силу леммы 7.3.25 найдутся подмножества $R\subset\{1,\dots,m\}$ и $S\subset\{1,\dots,n\}$, мощность каждого из которых не превосходит 768, для которых система уравнений

$$\min\{B'_{i'1}+C'_{1j'},B'_{i'2}+C'_{2j'},B'_{i'3}+C'_{3j'}\}=A_{i'j'},\tag{7.3.8}$$

где $(i',j')\in R\times S$, не имеет положительных решений.

Шаг 3. Обозначим через R' множество, состоящее из индексов r и $e(s)$, через S' — множество, состоящее из индексов s и $g(r)$ (где пара (r,s) изменяется на множестве $R\times S$). Предположим, что матрица $\overline{B}\in\mathbb{R}^{|R'|\times 3}$ (строки которой имеют индексы из множества R') и матрица $\overline{C}\in\mathbb{R}^{3\times|S'|}$ (столбцы которой имеют индексы из множества S') дает решение подсистемы системы (7.3.3), содержащей уравнения с (i,j) из множества $R'\times S'$. В силу шага 1 неравенства $\overline{B}_{i',\psi(i')}\geqslant\rho_{i'}$ и $\overline{C}_{\varphi(j'),j'}\geqslant\gamma_{j'}$ верны для любых $i'\in R$ и $j'\in S$.

Обозначим через $\overline{B}'$ матрицу, полученную из $\overline{B}$ изменением значения элемента $\overline{B}_{i',\psi(i')}$ на $\rho_{i'}$ при любом $i'\in R$; через $\overline{C}'$ обозначим матрицу, полученную из $\overline{C}$ изменением значения элемента $\overline{C}_{\varphi(j'),j'}$ на $\gamma_{j'}$ при любом $j'\in S$. Поскольку элементы матриц $\overline{B}$ и $\overline{C}$ неотрицательны, указанные изменения не повлияют на произведение матриц $\overline{B}\otimes\overline{C}$; в частности, равенство

$$\min\{\overline{B}'_{i'1}+\overline{C}'_{1j'},\overline{B}'_{i'2}+\overline{C}'_{2j'},\overline{B}'_{i'3}+\overline{C}'_{3j'}\}=A_{i'j'}$$

будет выполняться для любой пары (i',j') из множества $R\times S$. Поэтому матрицы $\overline{B}'$ и $\overline{C}'$ являются решением системы уравнений (7.3.8), и мы получаем противоречие с результатом шага 2. Таким образом, подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $R'\times S'$, не имеет решений в положительных неизвестных. □

Теперь мы можем рассмотреть систему уравнений (7.3.3) в самом общем случае, то есть, для матриц B и C полностью состоящих из неизвестных.

Лемма 7.3.27. *Предположим, что элементами матриц B и C являются вещественные неизвестные. Тогда найдутся множества $R' \subset \{1,\dots,m\}$ и $S' \subset \{1,\dots,n\}$, мощность каждого из которых не превосходит 1539, для которых подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $R' \times S'$, не имеет решений в неотрицательных неизвестных.*

Доказательство. Рассмотрим сначала три возможных случая.

Случай 1. Предположим, что для некоторого индекса $i' \in \{1,\dots,m\}$ числа $A_{i'1}$, $A_{i'2}$ и $A_{i'3}$ являются положительными. В силу предположения 7.3.13 найдется индекс $j' \in \{4,\dots,n\}$, удовлетворяющий условию $A_{i'j'} = 0$. В силу предположения 7.3.14 матрица $A[1,2,3,i'|1,2,3,j']$ является тропически невырожденной, и потому подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $\{1,2,3,i'\} \times \{1,2,3,j'\}$, является несовместной в силу теоремы 1.4 работы [45].

Случай 2. Аналогично, если для некоторого индекса $j'' \in \{1,\dots,n\}$ числа $A_{1j''}$, $A_{2j''}$ и $A_{3j''} > 0$ являются положительными, то в силу предположения 7.3.13 найдется индекс $i'' \in \{1,\dots,m\}$, удовлетворяющий условию $A_{i''j''} = 0$. Как и в случае 1, мы делаем вывод, что подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $\{1,2,3,i''\}\times\{1,2,3,j''\}$, является несовместной.

Случай 3. Наконец, предположим, что для любого индекса $i \in \{1,\dots,m\}$ найдется индекс $u(i) \in \{1,2,3\}$, удовлетворяющий условию $A_{i,u(i)} = 0$; а также, что для любого индекса $j \in \{1,\dots,n\}$ найдется индекс $v(j) \in \{1,2,3\}$, удовлетворяющий условию $A_{v(j),j} = 0$. При любых индексах i, j и $k \in \{1,2,3\}$ мы присваиваем значение 0 переменной B_{ik} в случае, если $A_{ik} = 0$, и присваиваем значение 0 переменной C_{kj} в случае, если $A_{kj} = 0$. Полученные матрицы (в них могут быть как переменные, так и числа) мы обозначим через B' и C', соответственно. В силу леммы 7.3.26 найдутся подмножества $R \subset \{1,\dots,m\}$ и $S \subset \{1,\dots,n\}$, мощность каждого из которых не превосходит 1536, для которых система уравнений

$$\min\{B'_{i1} + C'_{1j}, B'_{i2} + C'_{2j}, B'_{i3} + C'_{3j}\} = A_{ij}, \tag{7.3.9}$$

где $(i,j) \in R \times S$, не имеет положительных решений.

Далее мы положим $R' = \{1,2,3\} \cup R$ и $S' = \{1,2,3\} \cup S$. Будем проверять, что подсистема системы (7.3.3), содержащая уравнения с (i,j) из множества $R' \times S'$ является несовместной. Действительно, рассмотрим неотрицательное

решение $(\overline{B}, \overline{C})$ этой системы. В силу предположения 7.3.14 выполнено равенство

$$\overline{B}[1,2,3|1,2,3] \otimes \overline{C}[1,2,3|1,2,3] = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix},$$

где звездочки обозначают положительные (возможно, различные) числа. Заметим, что пара матриц $(\overline{B}, \overline{C})$ остается решением системы (7.3.9) даже после одновременного применения перестановки σ к множеству столбцовых индексов матрицы B и к множеству столбцовых индексов матрицы C. Таким образом, мы можем считать, не ограничивая общности рассуждений, что для любых индексов $k, k' \in \{1,2,3\}$ элементы $\overline{B}_{k,k'}$ и $\overline{C}_{k,k'}$ равны нулю в случае, когда $k = k'$, и положительны в случае, если $k' \neq k'$. Из равенств (7.3.3), содержащих индексы i и j, удовлетворяющие условию $(i,j) \in \{\widehat{i}\} \times \{1,2,3\}$, следует, что знаки чисел $\overline{B}_{\widehat{i},k}$ и $A_{\widehat{i},k}$ совпадают для всех индексов $\widehat{i}$ и k. Аналогично, при всех индексах $\widehat{j}$ и k совпадают знаки чисел $\overline{C}_{k,\widehat{j}}$ и $A_{k\widehat{j}}$. Таким образом, мы построили положительное решение подсистемы системы (7.3.9), содержащей уравнения с (i,j) из множества $R \times S$, что противоречит рассуждениям предыдущего параграфа. □

Теперь мы можем перейти к доказательству ключевого результата раздела.

Теорема 7.3.28. *Предположим, что факторизационный ранг матрицы $\mathcal{A}$ превосходит 3. Тогда матрица $\mathcal{A}$ содержит подматрицу, имеющую не более 1539 строк, не более 1539 столбцов и факторизационный ранг, больший 3.*

Доказательство. Согласно теореме 7.3.4 мы можем считать, что тропический ранг матрицы $\mathcal{A}$ превосходит 2. В силу леммы 3.3.10 мы также можем считать, что для любых индексов $k_1, k_2 \in \{1,2,3\}$ выполнено условие $\mathcal{A}_{k_1,k_2} = 0$, если $k_1 = k_2$, и условие $\mathcal{A}_{k_1,k_2} > 0$, если $k_1 \neq k_2$. Таким образом, предположение 7.3.14 не влечет ограничения общности рассуждений.

В силу леммы 7.1.3 мы можем считать, что минимальный элемент любой строки и любого столбца матрицы $\mathcal{A}$ равен 0. В этом случае, если при некотором $i' \in \{1,\ldots,m\}$ все элементы $\mathcal{A}_{i'1}$, $\mathcal{A}_{i'2}$ и $\mathcal{A}_{i'3}$ положительны, то найдется индекс $j' \in \{4,\ldots,n\}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{A}_{i'j'} = 0$. В этом случае подматрица $\mathcal{A}[1,2,3,i'|1,2,3,j']$ будет тропически невырождена, и потому будет иметь факторизационный ранг 4 в силу теоремы 1.4 из работы [45]. Аналогично, подматрица размера 4×4 факторизационного ранга 4 может быть найдена в случае, когда при некотором $j' \in \{1,\ldots,n\}$ все элементы $\mathcal{A}_{1j'}$, $\mathcal{A}_{2j'}$ и $\mathcal{A}_{3j'}$ положительны.

Таким образом, мы можем считать, что тропическая сумма первых трех строк матрицы $\mathcal{A}$ является нулевой строкой, а сумма первых трех столбцов — нулевым столбцом. Предположение о том, что всякая строка и всякий столбец матрицы $\mathcal{A}$ содержат положительные элементы, не ограничивает общности рассуждений в силу леммы 7.1.3. Таким образом, предположение 7.3.13 также не ограничивает общности.

Наконец, предположим, что неотрицательная матрица $\mathcal{A}'$ равна произведению $C \otimes D$ тропических матриц $C \in \mathbb{R}^{p \times 3}$ и $D \in \mathbb{R}^{3 \times q}$. При любом $k \in \{1, 2, 3\}$ мы вычитаем c_k, наименьший элемент столбца с индексом k матрицы C, из каждого элемента этого столбца, и прибавляем c_k к каждому элементу строки матрицы D с индексом k. Полученные таким образом матрицы C' и D' состоят из неотрицательных элементов и удовлетворяют условию $C' \otimes D' = \mathcal{A}'$. Доказываемый результат следует теперь из теоремы 7.3.27. □

В силу доказанной теоремы значение $\Theta(4) = 1539$ дает положительное решение проблемы 7.1.6 при $k = 4$. Отметим также, что вопрос об оптимальном значении $\Theta(4)$ остается открытым; пример 7.3.1 показывает, что $\Theta(4) \geqslant 5$. Приведем полезную переформулировку ключевого результата этого раздела.

Следствие 7.3.29. *Любая тропическая матрица факторизационного ранга* 4 *содержит подматрицу факторизационного ранга* 4 *размера, не большего* 1539×1539.

Доказательство. В силу леммы 7.1.2 факторизационный ранг матрицы, полученной из $\mathcal{A}$ удалением одной строки или одного столбца, либо равен факторизационному рангу матрицы $\mathcal{A}$, либо меньше его на единицу. Поэтому результат следует из теоремы 7.3.28. □

Теперь мы можем обратить внимание на проблему сложности вычисления факторизационного ранга. В качестве приложения результатов этого раздела мы можем построить полиномиальный по времени алгоритм распознавания тропических матриц, факторизационный ранг которых не превосходит 3.

Теорема 7.3.30. *Существует полиномиальный по времени алгоритм распознавания тропических матриц, факторизационный ранг которых не превосходит* 3.

Доказательство. В силу теоремы 7.3.28 факторизационный ранг тропической матрицы $\mathcal{A}$ размера $m \times n$ не превосходит 3 в том и только том случае, если факторизационный ранг любой подматрицы матрицы $\mathcal{A}$, содержащей не более 1539 строк и не более 1539 столбцов, не превосходит 3. Число всех таких подматриц не превосходит $(mn)^{1539}$ и потому является полиномиальным по

mn, и факторизационный ранг каждой из таких матриц может быть найден за время $O(1)$ с помощью алгоритма элиминации кванторов [56]. □

Как следствие теоремы 7.3.30 получается один из главных результатов раздела: теперь мы можем построить полиномиальный по времени алгоритм распознавания тропических матриц факторизационного ранга 3 и получить положительное решение проблемы 7.1.5.

Теорема 7.3.31. *Существует полиномиальный по времени алгоритм распознавания тропических матриц факторизационного ранга* 3.

Доказательство. Как показывает теорема 2.4 работы [163] (а также результаты работы [45]), существует полиномиальный по времени алгоритм распознавания матриц, факторизационный ранг которых не превосходит 3. Доказываемое утверждение следует теперь из теоремы 7.3.30. □

Наконец, мы можем доказать еще один из главных результатов раздела и получить полное решение проблемы 7.1.6.

Теорема 7.3.32. *Положим* $\Theta(1) = 1$, $\Theta(2) = 2$, $\Theta(3) = 3$ *и* $\Theta(4) = 1539$. *Если целое число* k *не превосходит четырех, то любая тропическая матрица факторизационного ранга, не меньшего* k, *содержит подматрицу факторизационного ранга, не меньшего* k, *и содержащую не более* $\Theta(k)$ *строк и не более* $\Theta(k)$ *столбцов. Если* $k \geqslant 5$, *то найдутся матрицы факторизационного ранга* k *сколь угодно большого размера, все собственные подматрицы которых имеют факторизационные ранги, меньшие* k.

Доказательство. Для $k \leqslant 3$ результат известен из работы [45]. Из теоремы 7.3.28 следует истинность этого результата при $k = 4$, а из теоремы 7.2.10 — при $k \geqslant 5$. □

7.4 Вычислительная сложность факторизации

В этом разделе мы излагаем результаты работы [154], опубликованной автором диссертации, и получаем отрицательные решения проблем 7.1.4 и 7.1.7. В частности, мы показываем, что задача распознавания матриц, факторизационный ранг которых не превосходит семи, является NP-трудной. Сформулируем в явном виде проблему факторизации тропических матриц ограниченного ранга, которой и посвящен этот раздел. Отметим, что излагаемое доказательство NP-трудности подходит для частного случая целочисленных матриц, поэтому будет удобным сразу предполагать заданные матрицы целочисленными. Фиксировав произвольное целое число k, зададим семейство задач факторизации следующим образом.

Задача 7.4.1. *k-ФАКТОРИЗАЦИЯ ТРОПИЧЕСКИХ МАТРИЦ (k-ФТМ).*

Дана тропическая матрица $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$.

Вопрос: существуют ли тропические матрицы $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$, удовлетворяющие условию $B \otimes C = A$?

Мы можем предполагать, что целые числа в задаче 7.4.1 записываются в десятичной системе, но результаты этого раздела остаются верными даже в случае записи этих чисел в унарной системе. Покажем сейчас, что общая проблема факторизации тропических матриц принадлежит классу NP в случае, если данные матрицы предполагаются целочисленными; нам потребуется следующая техническая лемма.

Лемма 7.4.2. *Пусть факторизационный ранг матрицы $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ не превосходит целого числа k, а g и l обозначают, соответственно, наибольший и наименьший элементы матрицы A. Тогда существуют матрицы $B \in \mathbb{Z}^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{Z}^{k\times n}$, удовлетворяющие условиям $B\otimes C = A$, $|B_{i\tau}| \leqslant |g|+|l|$ и $|C_{\tau j}| \leqslant |g| + |l|$ для любой тройки индексов (i, j, τ).*

Доказательство. В силу определения 7.1.1 найдутся матрицы $B' \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $C' \in \mathbb{R}^{k\times n}$, удовлетворяющие условию $B' \otimes C' = A$. Рассмотрим матрицы B'' и C'', заданные как $B''_{i\tau} = B'_{i\tau} - \{B'_{i\tau}\}$, $C''_{\tau j} = C'_{\tau j} + \{-C'_{\tau j}\}$, где через $\{x\} = x - [x]$ обозначена дробная часть числа x. Матрицы B'' и C'' тогда являются целочисленными, и условие $|(B''_{i\tau}+C''_{\tau j})-(B'_{i\tau}+C'_{\tau j})| < 1$ выполнено для любой тройки индексов (i, j, τ). Поэтому из равенства $B'_{i\tau} + C'_{\tau j} = A_{ij}$ следует равенство $B''_{i\tau} + C''_{\tau j} = A_{ij}$, а неравенство $B'_{i\tau} + C'_{\tau j} \geqslant A_{ij}$ влечет условие $B''_{i\tau}+C''_{\tau j} \geqslant A_{ij}$. Таким образом, мы получаем равенство $B''\otimes C'' = A$.

Далее, мы обозначаем через b_τ наименьший элемент столбца матрицы B'' с индексом τ и вычитаем b_τ из каждого элемента этого столбца. Далее мы прибавляем b_τ к каждому элементу строки матрицы C'' с индексом τ и замечаем, что полученные матрицы B и C удовлетворяют условию $B \otimes C = A$, причем минимальный элемент всякого столбца матрицы B равен нулю. В силу определения умножения матриц никакой элемент матрицы не может быть меньше l. Наконец, элементы матриц B и C, превосходящие $|g| + |l|$, можно заменить на $|g| + |l|$, не изменив произведения матриц $B \otimes C$. □

Покажем, что проблема тропической факторизации лежит в классе NP.

Теорема 7.4.3. *Даны тропическая матрица $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ и целое число k. Задача существования матриц $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$, удовлетворяющих условию $B \otimes C = A$, принадлежит классу NP.*

Доказательство. Легко видеть (этот результат также следует из предложения 2.1 работы [45]), что факторизационный ранг матрицы A не превосходит $\min\{m, n\}$. Таким образом, решение задачи тривиально в случае $k \geqslant \min\{m, n\}$; в случае $k < \min\{m, n\}$ результат следует из леммы 7.4.2. □

Как следствие теоремы 7.4.3 получается следующий результат.

Теорема 7.4.4. *Задача k-ФТМ принадлежит классу NP.*

Доказательство. Следует из теоремы 7.4.3. □

Основным результатом этого раздела будет доказательство NP-полноты задачи k-ФТМ при всех $k \geqslant 7$. Поскольку в силу теоремы 7.4.4 эта задача принадлежит классу NP, нам достаточно построить полиномиальное сведение к задаче k-ФТМ какой-либо известной NP-полной проблемы. Метод построения этого сведения может быть коротко описан следующим образом.

Для построения сведения мы используем матрицы над расширенным тропическим полукольцом $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, и в подразделе 7.4.1 обсуждаются свойства факторизационного ранга таких матриц. В частности, мы объясняем, почему для доказательства NP-полноты будет достаточно рассуждений с матрицами над $\overline{\mathbb{R}}$. В подразделе 7.4.2 мы изучаем частный случай задачи факторизации, который мы назвали *факторизацией промежуточных матриц*. Эта новая задача состоит в поиске матрицы M, факторизационный ранг которой не превосходит заданного числа k и которая удовлетворяет условию $A \leqslant M \leqslant B$ для заданных матриц A и B. Заметим, что при $A = B$ задача факторизации промежуточных матриц равносильна обычной факторизации, и в подразделе 7.4.2 мы показываем, что промежуточные факторизации могут быть в свою очередь сведены к обычным. Ключевым для нашего доказательства является подраздел 7.4.3, в котором строится сведение классической NP-полной задачи о раскраске графа к задаче промежуточной факторизации. Наконец, после доказательства нескольких технических предложений в подразделе 7.4.4, мы доказываем основные результаты в подразделе 7.4.5.

7.4.1 Факторизационный ранг матрицы над $\overline{\mathbb{R}}$

В излагаемом доказательстве мы будем использовать матрицы над тропическим полукольцом, пополненным бесконечным положительным элементом ∞. Это полукольцо мы будем обозначать через $\overline{\mathbb{R}}$ и будем, как обычно, полагать $a \oplus \infty = a$ и $a \otimes \infty = \infty$ для всех $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Определяя факторизационный ранг матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ как матрицы над $\overline{\mathbb{R}}$, мы разрешаем матрицам B и C из определения 7.1.1 содержать бесконечные элементы. Тем не менее, определенная таким образом функция совпадает

на всех тропических матрицах с функцией факторизационного ранга из определения 7.1.1. В самом деле, если матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times k}$ и $C \in \overline{\mathbb{R}}^{k\times n}$ удовлетворяют условию $A = B \otimes C$, то мы можем заменить бесконечные элементы в матрицах B и C на достаточно большие вещественные числа, не изменяя значение произведения этих матриц.

Таким образом, мы можем расширить определение 7.1.1 на случай матриц над $\overline{\mathbb{R}}$ и ввести понятие факторизационного ранга матрицы $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$ как наименьшее число k, для которого найдутся матрицы $B \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times k}$ и $C \in \overline{\mathbb{R}}^{k\times n}$, удовлетворяющие условию $A = B \otimes C$. Следующая техническая лемма будет играть важную роль в рассуждениях этого раздела.

Лемма 7.4.5. *Предположим, что минимальный элемент любого столбца и любой строки матрицы $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$ равен нулю. Рассмотрим матрицу A', полученную из A заменой всякого бесконечного элемента числом $2g + 1$, где через g обозначен максимальный конечный элемент матрицы A. Тогда факторизационные ранги матриц A и A' совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим матрицы $B' \in \mathbb{R}^{m\times k}$ и $C' \in \mathbb{R}^{k\times n}$, удовлетворяющие условию $B' \otimes C' = A'$. Для каждого $\tau \in \{1, \dots, k\}$ мы обозначаем через b_τ наименьший элемент столбца матрицы B' с индексом τ и вычитаем b_τ из каждого элемента этого столбца. Далее мы прибавляем b_τ к каждому элементу строки матрицы C' с индексом τ и замечаем, что полученные матрицы B'' и C'' удовлетворяют условию $B'' \otimes C'' = A$, причем минимальный элемент всякого столбца матрицы B'' и минимальный элемент всякой строки матрицы C'' равны нулю. Далее мы заменяем на ∞ все элементы матриц B'' и C'', большие g, и обозначаем полученные матрицы через B и C; теперь несложно проверить, что выполнено равенство $B \otimes C = A$.

Таким образом мы доказали, что факторизационный ранг матрицы A не превосходит факторизационного ранга матрицы A'. Для завершения доказательства леммы теперь достаточно заметить, что $A' = E \otimes A$, где через E обозначена тропическая матрица размера $m \times m$, удовлетворяющая условию $E_{ij} = 0$, если $i = j$, и условию $E_{ij} = 2g + 1$ в противном случае. □

Еще одно несложное наблюдение будет полезным для наших рассуждений.

Предложение 7.4.6. *Факторизационный ранг матрицы $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$ на единицу меньше факторизационного ранга матрицы $A' \in \overline{\mathbb{R}}^{(m+1)\times(n+1)}$, определенной с помощью равенств $A'_{ij} = A_{ij}$ и $A'_{i,n+1} = A'_{m+1,j} = \infty$ при $i \leqslant m$ и $j \leqslant n$, а также $A'_{m+1,n+1} = 0$.*

Несмотря на то, что определения не предоставляют непосредственной связи между факторизациями матриц над $\mathbb{R}$ и над $\overline{\mathbb{R}}$, использование расширенного полукольца оказывается оправданным в доказательстве NP-полноты задачи k-ФТМ. Заметим, что любая матрица A над $\overline{\mathbb{R}}$ может быть с помощью умножения строк и столбцов на постоянные элементы приведена к матрице A', имеющей такой же факторизационный ранг, состоящей из неотрицательных элементов и содержащей нули во всех строках и всех столбцах. Затем мы сможем применить лемму 7.4.5, чтобы свести проблему факторизации над $\overline{\mathbb{R}}$ к факторизации над тропическим полукольцом $\mathbb{R}$.

7.4.2 Факторизация промежуточных матриц

В этом подразделе мы обращаемся к изучению проблемы, которую называем факторизацией *промежуточной матрицы*: даны тропические матрицы $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$, удовлетворяющие условию $A \geqslant B$ (то есть, условиям $A_{ij} \geqslant B_{ij}$ при всех индексах i и j) и целое число r; существует ли матрица M, факторизационный ранг которой не превосходит r, удовлетворяющая условию $A \geqslant M \geqslant B$? Отметим, что эта проблема оказывается равносильной обычной проблеме факторизации (в этом разделе мы будем иногда называть ее *точной факторизацией*), если данные матрицы A и B совпадают. Это наблюдение позволяет свести задачу точной факторизации к промежуточной; целью этого подраздела является построение сведения в обратном направлении при некоторых дополнительных предположениях.

Также нас будет интересовать структура упомянутой выше матрицы B. А именно, мы будем предполагать, что входными данными задачи промежуточной факторизации будут целое число r и тройка матриц $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$, $C \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times k}$ и $D \in \overline{\mathbb{R}}^{k\times n}$; вопросом задачи будет существование матрицы M, факторизационный ранг которой не превосходит r, удовлетворяющей условию $A \geqslant M \geqslant A \oplus (C \otimes D)$. Мы будем показывать, что следующее определение позволяет свести указанную задачу к проблеме точной факторизации.

Определение 7.4.7. Для матриц $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$, $C \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times k}$ и $D \in \overline{\mathbb{R}}^{k\times n}$ определим матрицу $Q = \mathcal{Q}(A, C, D)$, строки которой имеют индексы $1', \ldots, k', 1, \ldots, m$ и столбцы которой имеют индексы $1', \ldots, k', 1, \ldots, n$, следующим образом. Для всевозможных индексов $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, k\}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$ мы положим

(q1) $Q_{\alpha'\beta'} = \infty$, если $\alpha \neq \beta$, и $Q_{\alpha'\beta'} = 0$ в противном случае;
(q2) $Q_{\alpha' j} = D_{\alpha j}$;
(q3) $Q_{i\beta'} = C_{i\beta}$;
(q4) $Q[1, \ldots, m | 1, \ldots, n] = A \oplus (C \otimes D)$.

Иными словами, мы определяем матрицу Q как блочную матрицу

$$\left(\begin{array}{c|c} I_k & D \\ \hline C & A \oplus (C \otimes D) \end{array}\right),$$

где через I_k обозначена тропическая единичная матрица порядка k.

Для доказательства того факта, что определение 7.4.7 является сведением, нам потребуется следующая лемма.

Лемма 7.4.8. *Рассмотрим матрицы $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$, $C \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times k}$ и $D \in \overline{\mathbb{R}}^{k\times n}$. Если найдутся матрицы $U \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times r}$ и $V \in \overline{\mathbb{R}}^{r\times n}$, удовлетворяющие условию $A \geqslant U \otimes V \geqslant A \oplus (C \otimes D)$, то факторизационный ранг матрицы $Q = \mathcal{Q}(A, C, D)$ не превосходит $k + r$.*

Доказательство. Положим $C' = \left(\frac{I_k}{C}\right)$ и $D' = (I_k|D)$, где через I_k обозначена квадратная матрица порядка k с нулями на диагонали, все остальные элементы которой равны ∞. Также положим $U' = \left(\frac{O_{k\times r}}{U}\right)$ и $V' = (O_{r\times k}|V)$, где через $O_{k\times r}$ обозначена матрица размера $k \times r$, состоящая из элементов ∞. Для доказательства леммы теперь достаточно проверить условие $Q = (U' \otimes V') \oplus (C' \otimes D')$. □

Теперь докажем результат, который является обратным к утверждению леммы 7.4.8 при некоторых дополнительных предположениях.

Лемма 7.4.9. *Рассмотрим матрицы $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$, $C \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times k}$ и $D \in \overline{\mathbb{R}}^{k\times n}$ и предположим, что факторизационный ранг подматрицы $A[1, \ldots, r|1, \ldots, r]$ равен r. Предположим также, что для всякого $\kappa \in \{1, \ldots, k\}$ выполнено либо условие $C_{1\kappa} = \ldots = C_{r\kappa} = \infty$, либо условие $D_{\kappa 1} = \ldots = D_{\kappa r} = \infty$. Если факторизационный ранг матрицы $Q = \mathcal{Q}(A, C, D)$ не превосходит $k+r$, то найдется матрица M, факторизационный ранг которой не превосходит r и которая удовлетворяет условию $M \oplus (C \otimes D) = A \oplus (C \otimes D)$.*

Доказательство. Шаг 1. В силу условия леммы найдутся матрицы $U' \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times(k+r)}$ и $V' \in \overline{\mathbb{R}}^{(k+r)\times n}$, удовлетворяющие условию $Q = U' \otimes V'$. Через $Q^{(\tau)}$ мы обозначим произведения столбца матрицы U' и строки матрицы V', имеющих индексы τ. В этом случае мы имеем $Q = Q^{(1)} \oplus \ldots \oplus Q^{(k+r)}$.

Шаг 2. С точностью до перестановок семейства $(Q^{(1)}, \ldots, Q^{(k+r)})$ мы можем считать, что матрица $Q^{(\tau)}[1', \ldots, k'|1', \ldots, k']$ содержит по крайней мере один конечный элемент, если $\tau \leqslant t_0$, и матрица $Q^{(\tau)}[1', \ldots, k'|1', \ldots, k']$ состоит из элементов ∞, если $\tau > t_0$.

Шаг 3. В силу условия леммы и определения 7.4.7 для любого индекса $\kappa \in \{1, \ldots, k\}$ выполнено либо условие $Q_{\kappa' 1} = \ldots = Q_{\kappa' r} = \infty$, либо условие $Q_{1\kappa'} = \ldots = Q_{r\kappa'} = \infty$; поэтому для любого индекса τ выполнено либо условие $Q^{(\tau)}_{\kappa' 1} = \ldots = Q^{(\tau)}_{\kappa' r} = \infty$, либо условие $Q^{(\tau)}_{1\kappa'} = \ldots = Q^{(\tau)}_{r\kappa'} = \infty$. Поскольку матрица $Q^{(\tau)}$ имеет ранг один, если для некоторых индексов $\kappa_1, \kappa_2 \in \{1, \ldots, k\}$ выполнено условие $Q^{(\tau)}_{\kappa'_1 \kappa'_2} \neq \infty$, то для всех индексов $\rho_1, \rho_2 \in \{1, \ldots, r\}$ верно равенство $Q^{(\tau)}_{\rho_1 \rho_2} = \infty$. В силу шага 2 мы получаем равенство $Q[1, \ldots, r|1, \ldots, r] = Q^{(t_0+1)}[1, \ldots, r|1, \ldots, r] \oplus \ldots \oplus Q^{(k+r)}[1, \ldots, r|1, \ldots, r]$.

Шаг 4. По условию леммы для всех индексов $\rho_1, \rho_2 \in \{1, \ldots, r\}$ верно равенство $[C \otimes D]_{\rho_1 \rho_2} = \infty$, поэтому в силу определения 7.4.7 выполнено условие $Q[1, \ldots, r|1, \ldots, r] = A[1, \ldots, r|1, \ldots, r]$. Поскольку факторизационный ранг матрицы $A[1, \ldots, r|1, \ldots, r]$ равен r по условию леммы, мы в виду шага 3 имеем неравенство $t_0 \leqslant k$.

Шаг 5. В силу определения 7.4.7 матрица $Q[1', \ldots, k'|1', \ldots, k']$ содержит нули на диагонали, а остальные ее элементы равны ∞. Из шагов 1 и 2 следует, что $t_0 \geqslant k$, а в силу шага 4 мы теперь имеем равенство $t_0 = k$. Поэтому с точностью до перестановок семейства $(Q^{(1)}, \ldots, Q^{(k)})$ для любого $\tau \in \{1, \ldots, k\}$ элемент $Q^{(\tau)}_{\tau'\tau'} = 0$ является единственным конечным элементом матрицы $Q^{(\tau)}[1', \ldots, k'|1', \ldots, k']$.

Шаг 6. Из шага 1 следуют равенства $Q^{(\tau)}_{i\tau'} \geqslant Q_{i\tau'} = C_{i\tau}$ и $Q^{(\tau)}_{\tau' j} \geqslant Q_{\tau' j} = D_{\tau j}$, верные при всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$. Поскольку матрица $Q^{(\tau)}$ имеет ранг один, мы получаем равенство $Q^{(\tau)}_{ij} + Q^{(\tau)}_{\tau'\tau'} = Q^{(\tau)}_{i\tau'} + Q^{(\tau)}_{\tau' j}$, откуда в силу шага 5 следует условие $Q^{(\tau)}_{ij} \geqslant C_{i\tau} + D_{\tau j}$. Поэтому мы получаем неравенство $Q^{(1)}[1, \ldots, m|1, \ldots, n] \oplus \ldots \oplus Q^{(k)}[1, \ldots, m|1, \ldots, n] \geqslant C \otimes D$, откуда следует условие $Q[1, \ldots, m|1, \ldots, n] \oplus (C \otimes D) = (C \otimes D) \oplus M$, где

$$M = Q^{(k+1)}[1, \ldots, m|1, \ldots, n] \oplus \ldots \oplus Q^{(k+r)}[1, \ldots, m|1, \ldots, n];$$

в силу пункта (q4) определения 7.4.7 мы получаем равенство $A \oplus (C \otimes D) = M \oplus (C \otimes D)$ и завершаем доказательство леммы. $\square$

Теперь мы можем получить основной результат подраздела и доказать, что определение 7.4.7 задает сведение промежуточных факторизаций к точным при некоторых дополнительных предположениях.

Теорема 7.4.10. *Рассмотрим матрицы $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$, $C \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times k}$ и $D \in \overline{\mathbb{R}}^{k \times n}$ и предположим, что факторизационный ранг подматрицы $A[1, \ldots, r|1, \ldots, r]$ равен r. Предположим также, что для всякого $\kappa \in \{1, \ldots, k\}$ выполнено либо условие $C_{1\kappa} = \ldots = C_{r\kappa} = \infty$, либо условие $D_{\kappa 1} = \ldots = D_{\kappa r} = \infty$. Также предположим, что для всех i и j выполнено либо условие $A_{ij} <$*

$[C \otimes D]_{ij}$, *либо условие* $A_{ij} = \infty$. *Факторизационный ранг матрицы* $Q = \mathcal{Q}(A, C, D)$ *не превосходит* $k+r$ *в том и только том случае, если найдется матрица* M, *факторизационный ранг которой не превосходит* r *и которая удовлетворяет условию* $M \oplus (C \otimes D) = A \oplus (C \otimes D)$.

Доказательство. Поскольку для всякого $\kappa \in \{1, \ldots, k\}$ выполнено либо условие $C_{1\kappa} = \ldots = C_{r\kappa} = \infty$, либо условие $D_{\kappa 1} = \ldots = D_{\kappa r} = \infty$, можно заметить, что условия $M \oplus (C \otimes D) = A \oplus (C \otimes D)$ и $A \geqslant M \geqslant A \oplus (C \otimes D)$ равносильны друг другу. Теперь утверждение теоремы следует из лемм 7.4.8 и 7.4.9. □

7.4.3 Раскраска графа и промежуточные факторизации

Этот подраздел является ключевым для нашего доказательства NP-полноты задачи 7-ФТМ. Мы рассмотрим классическую задачу о раскраске графа и построим ее сведение к задаче о факторизации промежуточной матрицы. Задача, на которой основано наше сведение, была рассмотрена еще в классической монографии [59] и может быть сформулирована следующим образом.

Задача 7.4.11. *РАСКРАСКА ГРАФА В ТРИ ЦВЕТА.*

Дан простой граф G *с множеством вершин* $\{1, \ldots, n\}$ *и ребрами* $\{h_1, t_1\}, \ldots, \{h_m, t_m\}$.

Вопрос: существует ли функция $\varphi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3\}$, *удовлетворяющая условию* $\varphi(h_j) \neq \varphi(t_j)$ *при любом* $j \in \{1, \ldots, m\}$*?*

Мы будем говорить, что граф G *допускает раскраску в три цвета*, если ответ на вопрос задачи 7.4.11 положителен. Следующая теорема является классическим результатом теории сложности вычислений.

Теорема 7.4.12. *[59] Задача 7.4.11 полна для класса NP.*

Ответ на вопрос задачи 7.4.11 всегда положителен, если граф G не содержит ребер, поэтому эта задача остается NP-полной и в предположении, что граф G содержит хотя бы одно ребро. Поэтому мы будем предполагать в последующих рассуждениях, что ребра графа G представлены во входных данных задачи 7.4.11 в виде семейства $(h_1, t_1, \ldots, h_m, t_m)$, где $m > 0$.

В этом подразделе мы строим сведение задачи 7.4.11 к задаче существования матрицы M, факторизационный ранг которой не превосходит трех и которая удовлетворяет условию $A \geqslant M \geqslant A \oplus B$ для данных матриц A и B. Чтобы начать строить требуемое сведение, мы определим множество, элементы которого соответствуют вершинам графа G, как

$$\mathcal{V} = \{1^{ver}, \ldots, n^{ver}\},$$

а также два множества, элементы которых соответствуют ребрам, как

$$\mathcal{H} = \{1^{head}, \ldots, m^{head}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{T} = \{1^{tail}, \ldots, m^{tail}\}.$$

Определение 7.4.13. Определим матрицу $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$ следующим образом. Набором индексов строк этой матрицы будет служить множество $\{1,2,3\} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, набором индексов столбцов — множество $\{1,2,3\} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$. Для всех индексов $\chi \in \{1,2,3\}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ и $j \in \{1,\ldots,m\}$, мы полагаем

(a1) $\mathcal{A}_{\chi\psi} = 0$, если индекс $\psi \in \{1,2,3\}$ отличен от χ;
(a2) $\mathcal{A}_{i^{ver},\chi} = 0$;
(a3) $\mathcal{A}_{j^{head},j^{head}} = 40j + 1$;
(a4) $\mathcal{A}_{j^{head},j^{tail}} = \mathcal{A}_{j^{tail},j^{head}} = 40j + 9$;
(a5) элементы матрицы $\mathcal{A}$, не заданные пунктами (a1)–(a4), равны ∞.

Продолжая строить сведение, мы определяем матрицу $\mathcal{B}$.

Определение 7.4.14. Определим матрицу $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G)$ следующим образом. Набором индексов строк этой матрицы будет служить множество $\{1,2,3\} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, набором индексов столбцов — множество $\{1,2,3\} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$. Положим $H = 40m + 21$ и для всех возможных индексов $\psi, \chi \in \{1,2,3\}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ и $g, j \in \{1,\ldots,m\}$ определим

(b1) $\mathcal{B}_{\psi\chi} = \mathcal{B}_{i^{ver}\chi} = \infty$;
(b2) $\mathcal{B}_{\psi j^{head}} = \mathcal{B}_{\psi j^{tail}} = \mathcal{B}_{j^{head}\psi} = \mathcal{B}_{j^{tail}\psi} = 0$;
(b3) $\mathcal{B}_{i^{ver}j^{head}} = (1 - 2|i - h_j|)\, H$ и $\mathcal{B}_{i^{ver}j^{tail}} = (1 - 2|i - t_j|)\, H$;
(b4) $\mathcal{B}_{g^{head}j^{head}} = \mathcal{B}_{g^{head}j^{tail}} = \mathcal{B}_{g^{tail}j^{head}} = \mathcal{B}_{g^{tail}j^{tail}} = 40\min\{g, j\} + 20$.

Далее в этом разделе мы часто будем писать просто 'пункт (a1)', ..., 'пункт (a5)', когда нам будет нужно обратиться к соответствующему пункту определения 7.4.13; мы принимаем также аналогичное соглашение для определения 7.4.14. Как и в определении 7.4.14, символ H будет всегда в этом разделе обозначать число $40m + 21$. Отметим еще один несложный факт.

Наблюдение 7.4.15. *Для любых графа G и индексов α и β, удовлетворяющих условию $[\mathcal{A}(G)]_{\alpha\beta} < \infty$, выполнено неравенство $[\mathcal{A}(G)]_{\alpha\beta} < [\mathcal{B}(G)]_{\alpha\beta}$.*

Теперь мы будем доказывать утверждения, связывающие матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с задачей раскраски графа. А именно, мы будем показывать, что граф G допускает раскраску в три цвета в том и только том случае, если условие

$$\mathcal{A}(G) \geqslant M \geqslant \mathcal{A}(G) \oplus \mathcal{B}(G) \tag{7.4.1}$$

выполняется для некоторой матрицы M, факторизационный ранг которой не превосходит трех. Начнем рассуждения с доказательства следующей леммы.

Лемма 7.4.16. *Пусть простой граф G допускает раскраску в три цвета. Тогда найдется матрица M, факторизационный ранг которой не превосходит трех и которая удовлетворяет условию* (7.4.1).

Доказательство. По условию леммы найдется функция $\varphi : \{1,\dots,n\} \to \{1,2,3\}$, удовлетворяющая условию $\varphi(h_j) \neq \varphi(t_j)$ при всех $j \in \{1,\dots,m\}$. Введем в рассмотрение матрицу U, строки которой имеют индексы из множества $\{1,2,3\} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, а столбцы — индексы из множества $\{1,2,3\}$, следующим образом. Для всех возможных индексов $\psi, \chi \in \{1,2,3\}$, $i \in \{1,\dots,n\}$ и $j \in \{1,\dots,m\}$ мы положим

(u1) $U_{\psi\chi} = \infty$, если $\psi \neq \chi$, и $U_{\psi\chi} = 0$, если $\psi = \chi$;

(u2) $U_{i^{ver}\chi} = \infty$, если $\varphi(i) = \chi$, и $U_{i^{ver}\chi} = 0$, если $\varphi(i) \neq \chi$;

(u3) $U_{j^{head},\varphi(h_j)} = 20j$, $U_{j^{head},\varphi(t_j)} = 20j+8$ и $U_{j^{head},\chi} = \infty$, если $\chi \notin \{\varphi(h_j), \varphi(t_j)\}$;

(u4) $U_{j^{tail},\varphi(h_j)} = 20j+8$ и $U_{j^{tail},\chi} = \infty$, если $\chi \neq \varphi(h_j)$.

Чтобы определить матрицу V, мы присваиваем ее строкам индексы $1,2,3$, а столбцам — индексы из множества $\{1,2,3\} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$. Для всех возможных индексов $\psi, \chi \in \{1,2,3\}$, $i \in \{1,\dots,n\}$ и $j \in \{1,\dots,m\}$ мы полагаем

(v1) $V_{\psi\chi} = 0$, если $\psi \neq \chi$, и $V_{\psi\chi} = \infty$, если $\psi = \chi$;

(v2) $V_{\psi j^{head}} = 20j+1$, если $\psi = \varphi(h_j)$, и $V_{\psi j^{head}} = \infty$, если $\psi \neq \varphi(h_j)$;

(v3) $V_{\psi j^{tail}} = 20j+1$, если $\psi = \varphi(t_j)$, и $V_{\psi j^{tail}} = \infty$, если $\psi \neq \varphi(t_j)$.

Теперь мы будем проверять, что матрицы U и V удовлетворяют условию (7.4.1), то есть, что неравенства

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} \geqslant \min_{\chi=1}^{3}\{U_{\alpha\chi} + V_{\chi\beta}\} \geqslant \min\{\mathcal{A}_{\alpha\beta}, \mathcal{B}_{\alpha\beta}\} \tag{7.4.2}$$

выполнены для любых индексов $\alpha \in \{1,2,3\} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ и $\beta \in \{1,2,3\} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$.

Шаг 1. Если выполнено одно из условий $(\alpha,\beta) \in \{1,2,3\} \times (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})$ и $(\alpha,\beta) \in (\mathcal{H} \cup \mathcal{T}) \times \{1,2,3\}$, то в силу пункта (a5) верно равенство $\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \infty$ и в силу пункта (b2) — равенство $\mathcal{B}_{\alpha\beta} = 0$. Условие (7.4.2) теперь следует немедленно, поскольку все элементы матриц U и V неотрицательны.

Шаг 2. Чтобы проверить условие (7.4.2) для $\alpha \in \{1,2,3\} \cup \mathcal{V}$ и $\beta \in \{1,2,3\}$, достаточно убедиться, что

$$\mathcal{A}[1,2,3,i^{ver}|1,2,3] = U[1,2,3,i^{ver}|1,2,3] \otimes V[1,2,3|1,2,3],$$

то есть, что

$$\begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 0 \\ U_{i^{ver}1} & U_{i^{ver}2} & U_{i^{ver}3} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство верно, поскольку в силу пункта (u2) два элемента из $U_{i^{ver}1}, U_{i^{ver}2}, U_{i^{ver}3}$ равны нулю.

Шаг 3. Заметим, что в силу пункта (a5) выполнено равенство $\mathcal{A}_{i^{ver}j^{head}} = \infty$. Чтобы проверить условие (7.4.2) для индексов $\alpha = i^{ver}$ и $\beta = j^{head}$, нам достаточно теперь убедиться, что при любом индексе χ выполнено неравенство $U_{i^{ver}\chi} + V_{\chi j^{head}} \geqslant \mathcal{B}_{i^{ver}j^{head}}$. Это неравенство легко проверить при $h_j \neq i$, поскольку тогда в силу пункта (b3) выполнено неравенство $\mathcal{B}_{i^{ver}j^{head}} < 0$. С другой стороны, если $h_j = i$, то в силу пунктов (u2) и (v2) выполнено равенство $U_{i^{ver}\chi} + V_{\chi j^{head}} = \infty$.

Аналогично, чтобы проверить условие (7.4.2) для индексов $\alpha = i^{ver}$ и $\beta = j^{tail}$, нам достаточно убедиться, что при любом индексе χ выполнено неравенство $U_{i^{ver}\chi} + V_{\chi j^{tail}} \geqslant \mathcal{B}_{i^{ver}j^{tail}}$. Это неравенство легко проверить при $t_j \neq i$, поскольку тогда в силу пункта (b3) выполнено неравенство $\mathcal{B}_{i^{ver}j^{tail}} < 0$. С другой стороны, если $t_j = i$, то в силу пунктов (u2) и (v3) выполнено равенство $U_{i^{ver}\chi} + V_{\chi j^{head}} = \infty$.

Итак, мы проверили условие (7.4.2) для всех $(\alpha, \beta) \in \mathcal{V} \times (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})$.

Шаг 4. Теперь предположим, что $\alpha \in \{g^{head}, g^{tail}\}$ и $\beta \in \{j^{head}, j^{tail}\}$.

4.1. Тогда в силу пунктов (u3) и (u4) при любом $\chi \in \{1, 2, 3\}$ выполнено неравенство $U_{\alpha\chi} \geqslant 20g$, а в силу пунктов (v2) и (v3) — условие $V_{\chi\beta} \geqslant 20j + 1$.

4.2. Предположим, что g и j различны. Тогда в силу пункта (a5) выполнено равенство $\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \infty$, и из пункта 4.1 тогда следует неравенство $U_{\alpha\chi} + V_{\chi\beta} \geqslant 40 \min\{j, g\} + 21$, то есть, выполнено условие $U_{\alpha\chi} + V_{\chi\beta} > \mathcal{B}_{\alpha\beta}$ в виду пункта (b4). Последнее неравенство доказывает условие (7.4.2).

4.3. Предположим теперь, что $\alpha = \beta = g^{tail}$. В этом случае мы имеем равенство $U_{\alpha\chi} + V_{\chi\beta} = \infty$ в виду пунктов (u4) и (v3), поскольку $\varphi(h_j) \neq \varphi(t_j)$. Поскольку также верно равенство $\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \infty$, условие (7.4.2) выполнено.

4.4. Если $g = j$, но условие пункта 4.3 нарушается, то мы можем проверить непосредственно, что выполнено равенство $\mathcal{A}_{\alpha\beta} = \min_{\chi=1}^{3}\{U_{\alpha\chi} + V_{\chi\beta}\}$, и заключить выполнение условия (7.4.2).

Пункты 4.2–4.4 исчерпывают все возможности для шага 4, поэтому условие (7.4.2) выполнено для всех $(\alpha, \beta) \in (\mathcal{H} \cup \mathcal{T}) \times (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})$. Наконец, заметим, что условия шагов 1–4 исчерпывают все возможности для индексов (α, β). □

Для доказательства леммы 7.4.16 в обратном направлении нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 7.4.17. *Предположим, что столбцы матрицы $V \in \overline{\mathbb{R}}^{3\times v}$ с индексами 1, 2 и 3 образуют подматрицу $\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$. Предположим, что матрица $U \in \overline{\mathbb{R}}^{u\times 3}$ такова, что все элементы, стоящие в столбцах матрицы $U \otimes V$ с индексами 1, 2 и 3, неотрицательны. Если для некоторого g*

при всех $\chi \in \{1,2,3\}$ *выполнено равенство* $[U \otimes V]_{g\chi} = 0$, *то неравенство* $[U \otimes V]_{ij} \geqslant [U \otimes V]_{gj}$ *выполнено для любых индексов* i *и* j.

Доказательство. В силу условия леммы выполнено неравенство

$$(U_{i1} \otimes (0\,\infty\,\infty)) \oplus (U_{i2} \otimes (\infty\,0\,\infty)) \oplus (U_{i3} \otimes (\infty\,\infty\,0)) \geqslant (0\,0\,0),$$

в котором достигается равенство при $i = g$. Таким образом, выполнены условия $U_{g\chi} = 0$ и $U_{i\chi} \geqslant 0$ при всех i и χ. Таким образом, мы доказываем условие $\min_{\chi=1}^{3}\{U_{i\chi}+V_{\chi j}\} \geqslant \min_{\chi=1}^{3}\{U_{g\chi}+V_{\chi j}\}$ для любых i и j, что и требовалось. □

Нам потребуется еще одна техническая лемма. Будем называть тропическую матрицу $A \in \overline{\mathbb{R}}^{k\times k}$ *мономиальной*, если найдется перестановка σ, удовлетворяющая условию $A_{ij} = \infty$ в том и только том случае, если $j \neq \sigma(i)$.

Лемма 7.4.18. *Если тропическая матрица* U' *размера* $3 \times k$ *и тропическая матрица* V' *размера* $k \times 3$ *удовлетворяют условию* $U' \otimes V' = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$, *то* $k \geqslant 3$. *Более того, если* $k = 3$, *то одна из матриц* U' *и* V' *мономиальна.*

Доказательство. Обозначим через $\mathrm{Sup}(U', i)$ множество всех индексов j, удовлетворяющих условию $U'_{ij} \neq \infty$. В силу определения тропического произведения, из условия $\mathrm{Sup}(U', i) \subset \mathrm{Sup}(U', i')$ следует условие $\mathrm{Sup}(U' \otimes V', i) \subset \mathrm{Sup}(U' \otimes V', i')$. Поэтому мы видим, что множества $\mathrm{Sup}(U', 1)$, $\mathrm{Sup}(U', 2)$ и $\mathrm{Sup}(U', 3)$ образуют антицепь по включению. Это доказывает первое утверждение леммы, а в случае $k = 3$ мы можем заметить, что выполнено либо условие $|\mathrm{Sup}(U', i)| = 1$ для всех i, либо условие $|\mathrm{Sup}(U', i)| = 2$ для всех i. В первом случае мономиальна матрица U', а во втором — матрица V'. □

Вычислим факторизационный ранг важной подматрицы матрицы $\mathcal{A}(G)$.

Лемма 7.4.19. *Факторизационный ранг матрицы* $\mathcal{A}[1,2,3|1,2,3]$ *равен* 3.

Доказательство. В силу пунктов (a1) и (a5), требуемая подматрица имеет вид $\begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$, поэтому утверждение леммы следует из леммы 7.4.18. □

Воспользуемся леммами 7.4.17 и 7.4.18 и совершим еще один шаг на пути к доказательству основного результата подраздела.

Лемма 7.4.20. *Предположим, что существует матрица* M, *факторизационный ранг которой не превосходит трех и которая удовлетворяет условию* (7.4.1). *Тогда такая матрица* M *может быть выбрана среди матриц вида* $U \otimes V$, *где подматрица, образованная столбцами с индексами* 1, 2 *и* 3 *матрицы* V *имеет вид* $A' = \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$.

Доказательство. Обозначим через V' подматрицу матрицы V, образованную столбцами с индексами 1, 2 и 3, а через U' — подматрицу матрицы U, образованную ее строками с этими индексами.

Шаг 1. Мы можем прибавить вещественное число r к каждому элементу столбца матрицы U с индексом i и прибавить $-r$ к каждому элементу строки матрицы V с этим индексом i; эти преобразования не повлияют на произведение матриц $U \otimes V$. Аналогично, мы можем действовать одновременно перестановкой σ на множествах индексов столбцов матрицы U и строк матрицы V, не изменяя произведения матриц $U \otimes V$.

Шаг 2. В силу пункта (b1) равенство $B_{\chi\psi} = \infty$ выполнено при всех $\chi, \psi \in \{1, 2, 3\}$, а в силу пунктов (a1) и (a5) матрица, образованная строками и столбцами матрицы A с индексами 1, 2 и 3 равна A'. Поэтому матрица $U' \otimes V'$ также равна A' в силу условия (7.4.1).

Шаг 3. Если матрица U' мономиальна, то мы применяем рассуждения шага 1 и заключаем, что матрица U' имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 0 \end{smallmatrix}\right)$. В этом случае $V' = U' \otimes V'$, то есть, $V' = A'$ в силу шага 2, и лемма доказана.

Шаг 4. Предположим теперь, что матрица V' мономиальна. Применим рассуждения шага 1 и заключим, что матрица V' имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Далее, в силу пунктов (a2) и (b1), для любого $\chi \in \{1, 2, 3\}$ верны равенства $A_{i^{ver}\chi} = 0$ и $B_{i^{ver}\chi} = \infty$; поэтому из условия (7.4.1) следует равенство $[U \otimes V]_{i^{ver}\chi} = 0$. Теперь применим лемму 7.4.17 и получим неравенство $[U \otimes V]_{1^{head}1^{head}} \geqslant [U \otimes V]_{h_1{}^{ver}1^{head}}$. Из условия (7.4.1) теперь следует неравенство $[U \otimes V]_{1^{head}1^{head}} \geqslant \mathcal{B}_{h_1{}^{ver}1^{head}}$, откуда в силу пункта (b3) следует условие $[U \otimes V]_{1^{head}1^{head}} \geqslant H$. Таким образом, мы получили противоречие с условием (7.4.1), поскольку в силу пункта (a3) выполнено условие $A_{1^{head}1^{head}} = 41 < H$. Таким образом, предположение шага 4 не реализуется.

Поскольку в силу шага 2 верно равенство $U' \otimes V' = A'$, лемма 7.4.18 показывает, что предположения шагов 3 и 4 исчерпывают все возможности. □

Теперь мы готовы получить результат, обратный результату леммы 7.4.16.

Лемма 7.4.21. *Если найдется матрица M, факторизационный ранг которой не превосходит трех и которая удовлетворяет условию* (7.4.1)*, то граф G допускает раскраску в три цвета.*

Доказательство. В силу условия леммы найдутся матрицы U (строки которой имеют индексы из множества $\{1, 2, 3\} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, а столбцы имеют индексы $1, 2, 3$) и V (ее строки имеют индексы $1, 2, 3$, а столбцы — индексы из множества $\{1, 2, 3\} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$), удовлетворяющие условию

$$\mathcal{A}(G) \geqslant U \otimes V \geqslant \mathcal{A}(G) \oplus \mathcal{B}(G). \tag{7.4.3}$$

Шаг 1. В силу леммы 7.4.20 мы можем считать, что матрица V', образованная столбцами с индексами 1, 2 и 3 матрицы V, равна $\begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$.

Шаг 2. Если строка матрицы U с индексом α содержит отрицательный элемент, то в силу шага 1 найдется индекс $\psi \in \{1,2,3\}$, удовлетворяющий условию $[U \otimes V]_{\alpha\psi} < 0$. Это противоречит условию (7.4.3), поскольку матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ содержат только неотрицательные числа в столбцах с индексами 1, 2 и 3. Поэтому все элементы матрицы U неотрицательны.

Шаг 3. Фиксируя некоторый индекс $i \in \{1,\ldots,n\}$, мы в силу пунктов (a2) и (b1) получаем для всех $\chi \in \{1,2,3\}$ равенства $\mathcal{A}_{i^{ver}\chi} = 0$ и $\mathcal{B}_{i^{ver}\chi} = \infty$. Теперь в силу условия (7.4.3) оказывается верным равенство $[U \otimes V]_{i^{ver}\chi} = 0$. Принимая во внимание результат шага 1, мы получаем

$$(U_{i^{ver}1} \otimes (\infty\, 0\, 0)) \oplus (U_{i^{ver}2} \otimes (0\, \infty\, 0)) \oplus (U_{i^{ver}3} \otimes (0\, 0\, \infty)) = (0\, 0\, 0).$$

Шаг 4. Из результата шага 3 следует, что равенства $U_{i^{ver}\psi'} = U_{i^{ver}\psi''} = 0$ выполнены для некоторых различных ψ' и ψ'' из множества $\{1,2,3\}$. Обозначим через $\varphi(i)$ элемент множества $\{1,2,3\}\setminus\{\psi',\psi''\}$. Отметим, что φ является функцией из $\{1,\ldots,n\}$ в $\{1,2,3\}$.

Шаг 5. Предположим, что граф G не допускает раскраски в три цвета. В этом случае найдется ребро $\{h_j, t_j\}$, удовлетворяющее условию $\varphi(h_j) = \varphi(t_j)$; мы вводим обозначение $\{\chi_1,\chi_2\} = \{1,2,3\} \setminus \{\varphi(h_j)\}$.

Шаг 6. Заметим, что в силу пунктов (a5) и (b3) выполнены равенства $\mathcal{A}_{h_j{}^{ver}j^{head}} = \infty$ и $\mathcal{B}_{h_j{}^{ver}j^{head}} = H$, поэтому из условия (7.4.3) следует, что

$$U_{h_j{}^{ver}\chi_1} + V_{\chi_1 j^{head}} \geqslant H.$$

В силу результатов шагов 4 и 5 верно равенство $U_{h_j{}^{ver}\chi_1} = 0$, откуда следует неравенство $V_{\chi_1 j^{head}} \geqslant H$. Аналогично получается неравенство $V_{\chi_2 j^{head}} \geqslant H$.

Шаг 7. По аналогии с рассуждениями шага 6 мы доказываем равенства $\mathcal{A}_{t_j{}^{ver}j^{tail}} = \infty$ и $\mathcal{B}_{t_j{}^{ver}j^{tail}} = H$. Теперь в силу условия (7.4.3) мы имеем

$$U_{t_j{}^{ver}\chi_1} + V_{\chi_1 j^{tail}} \geqslant H.$$

В силу результатов шагов 4 и 5 верно равенство $U_{t_j{}^{ver}\chi_1} = 0$, откуда следует неравенство $V_{\chi_1 j^{tail}} \geqslant H$. Аналогично доказывается неравенство $V_{\chi_2 j^{tail}} \geqslant H$.

Шаг 8. Обратим внимание на матрицу, образованную строками и столбцами матрицы $U \otimes V$ с индексами j^{head} и j^{tail}. В силу (7.4.3) мы получаем

$$\begin{pmatrix} 40j+1 & 40j+9 \\ 40j+9 & \infty \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} U_{j^{head}\chi_1} & U_{j^{head}\chi_2} & U_{j^{head}\varphi(h_j)} \\ U_{j^{tail}\chi_1} & U_{j^{tail}\chi_2} & U_{j^{tail}\varphi(h_j)} \end{pmatrix} \otimes$$

$$\otimes \begin{pmatrix} V_{\chi_1 j^{head}} & V_{\chi_1 j^{tail}} \\ V_{\chi_2 j^{head}} & V_{\chi_2 j^{tail}} \\ V_{\varphi(h_j) j^{head}} & V_{\varphi(h_j) j^{tail}} \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 40j+1 & 40j+9 \\ 40j+9 & 40j+20 \end{pmatrix}.$$

Шаг 9. В силу шагов 2 и 6 выполнено условие

$$\min\{U_{j^{head}\chi_1} + V_{\chi_1 j^{head}}, U_{j^{head}\chi_2} + V_{\chi_2 j^{head}}, U_{j^{tail}\chi_1} + V_{\chi_1 j^{head}}, U_{j^{tail}\chi_2} + V_{\chi_2 j^{head}}\} \geqslant H.$$

Из шагов 2 и 7 также следует, что

$$\min\{U_{j^{head}\chi_1} + V_{\chi_1 j^{tail}}, U_{j^{head}\chi_2} + V_{\chi_2 j^{tail}}, U_{j^{tail}\chi_1} + V_{\chi_1 j^{tail}}, U_{j^{tail}\chi_2} + V_{\chi_2 j^{tail}}\} \geqslant H.$$

Шаг 10. Замечая, что в силу определений выполнено неравенство $H > 40j+20$, мы применяем результаты шагов 8 и 9. Тогда мы видим, что матрица

$$M' = \begin{pmatrix} U_{j^{head}\varphi(h_j)} \\ U_{j^{tail}\varphi(h_j)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} V_{\varphi(h_j)j^{head}} & V_{\varphi(h_j)j^{tail}} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию

$$\begin{pmatrix} 40j+1 & 40j+9 \\ 40j+9 & \infty \end{pmatrix} \geqslant M' \geqslant \begin{pmatrix} 40j+1 & 40j+9 \\ 40j+9 & 40j+20 \end{pmatrix},$$

которое приводит к противоречию; итак, предположение шага 5 неверно. □

Следующая теорема подводит итог рассуждениям этого подраздела.

Теорема 7.4.22. *Существование раскраски графа G в три цвета равносильно существованию матрицы M, факторизационный ранг которой не превосходит трех и которая удовлетворяет условию $\mathcal{A}(G) \geqslant M \geqslant \mathcal{A}(G) \oplus \mathcal{B}(G)$.*

Доказательство. Следует непосредственно из лемм 7.4.16 и 7.4.21. □

7.4.4 Факторизация матрицы $\mathcal{B}(G)$

Для завершения доказательства NP-полноты мы будем применять результаты теорем 7.4.10 и 7.4.22. Тем не менее, сделать это непосредственно сейчас нельзя: теорема 7.4.10 требует, чтобы матрица $\mathcal{B}$ была специальным образом представлена в виде произведения двух тропических матриц. Целью этого подраздела и будет получение такого представления матрицы $\mathcal{B}(G)$; мы начнем с описания одного из сомножителей.

Определение 7.4.23. Определим матрицу $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$ следующим образом. Пусть $\{1,2,3\} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ будет множеством индексов ее строк и $\{1,2,3,4\}$ — множеством индексов столбцов. Положим

(c1) $\mathcal{C}_{\alpha 1} = 0$, если $\alpha \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, и $\mathcal{C}_{\alpha 1} = \infty$ в противном случае;
(c2) $\mathcal{C}_{\chi 2} = 0$, если $\chi \in \{1,2,3\}$, и $\mathcal{C}_{i^{ver}2} = \infty$, если $i \in \{1,\ldots,n\}$;
(c3) $\mathcal{C}_{j^{head}2} = \mathcal{C}_{j^{tail}2} = 40j+20$ при $j \in \{1,\ldots,m\}$;
(c4) $\mathcal{C}_{\alpha 3} = (2i+1)H$, если $\alpha = i^{ver}$, и $\mathcal{C}_{\alpha 3} = \infty$ в противном случае;
(c5) $\mathcal{C}_{\alpha 4} = (2n+1-2i)H$, если $\alpha = i^{ver}$, и $\mathcal{C}_{\alpha 4} = \infty$ в противном случае.

Определим теперь второй множитель в факторизации матрицы $\mathcal{B}$.

Определение 7.4.24. Определим матрицу $\mathcal{D} = \mathcal{D}(G)$ следующим образом. Пусть $\{1,2,3,4\}$ будет множеством индексов ее строк и $\{1,2,3\} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ — множеством индексов столбцов. Положим

(d1) $\mathcal{D}_{1\chi} = 0$ при $\chi \in \{1,2,3\}$;
(d2) $\mathcal{D}_{1j^{head}} = \mathcal{D}_{1j^{tail}} = 40j + 20$ при $j \in \{1,\ldots,m\}$;
(d3) $\mathcal{D}_{2\chi} = \mathcal{D}_{3\chi} = \mathcal{D}_{4\chi} = \infty$ при $\chi \in \{1,2,3\}$;
(d4) $\mathcal{D}_{2j^{head}} = \mathcal{D}_{2j^{tail}} = 0$ при $j \in \{1,\ldots,m\}$;
(d5) $\mathcal{D}_{3j^{head}} = -2h_jH$ и $\mathcal{D}_{3j^{tail}} = -2t_jH$ при $j \in \{1,\ldots,m\}$;
(d6) $\mathcal{D}_{4j^{head}} = 2(h_j - n)H$ и $\mathcal{D}_{4j^{tail}} = 2(t_j - n)H$ при $j \in \{1,\ldots,m\}$.

Сначала отметим простой факт о матрицах $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$.

Наблюдение 7.4.25. *Для любого $\tau \in \{1,\ldots,4\}$ выполнено либо условие $\mathcal{C}_{1\tau} = \mathcal{C}_{2\tau} = \mathcal{C}_{3\tau} = \infty$, либо условие $\mathcal{D}_{\tau 1} = \mathcal{D}_{\tau 2} = \mathcal{D}_{\tau 3} = \infty$.*

Теперь проверим, что произведение тропических матриц $\mathcal{C}(G)$ и $\mathcal{D}(G)$ действительно равно матрице $\mathcal{B}(G)$ из определения 7.4.14.

Лемма 7.4.26. *Для любого графа G выполнено условие $\mathcal{B}(G) = \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{D}(G)$.*

Доказательство. Рассмотрим пять возможностей для индексов $\alpha \in \{1,2,3\} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ и $\beta \in \{1,2,3\} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$.

Шаг 1. Для $\beta \in \{1,2,3\}$ мы имеем равенство $\mathcal{D}_{\tau\beta} = 0$, если $\tau = 1$, и условие $\mathcal{D}_{\tau\beta} = \infty$ в противном случае. Поэтому выполнено условие $[\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}]_{\alpha\beta} = \mathcal{C}_{\alpha 1}$, то есть, равенство $[\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}]_{\alpha\beta} = 0$ верно при $\alpha \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, а условие $[\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}]_{\alpha\beta} = \infty$ — в противном случае. Сверяя полученный результат с пунктами (b1) и (b2) определения 7.4.14, мы получаем равенство $[\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}]_{\alpha\beta} = \mathcal{B}_{\alpha\beta}$.

Шаг 2. Для $\alpha \in \{1,2,3\}$ и $\beta \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ мы имеем равенство $\mathcal{C}_{\alpha\tau} = 0$, если $\tau = 2$, и условие $\mathcal{C}_{\alpha\tau} = \infty$ в противном случае. Поэтому $[\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}]_{\alpha\beta} = \mathcal{D}_{2\beta} = 0$; с другой стороны, равенство $\mathcal{B}_{\alpha\beta} = 0$ также выполнено в силу пункта (b2).

Шаг 3. Для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ верны условия $\alpha \in \{g^{head}, g^{tail}\}$ и $\beta \in \{j^{head}, j^{tail}\}$ при некоторых $g, j \in \{1,\ldots,m\}$. В этом случае мы имеем равенства $\mathcal{C}_{\alpha 3} = \mathcal{C}_{\alpha 4} = \infty$, откуда

$$[\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}]_{\alpha\beta} = \min\{\mathcal{C}_{\alpha 1} + \mathcal{D}_{1\beta}, \mathcal{C}_{\alpha 2} + \mathcal{D}_{2\beta}\} = \min\{40g + 20, 40j + 20\}.$$

В силу пункта (b4) теперь мы получаем равенство $[\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}]_{\alpha\beta} = \mathcal{B}_{\alpha\beta}$.

Шаг 4. Теперь предположим, что $\alpha = i^{ver}$ и $\beta = j^{head}$ для некоторых $i \in \{1,\ldots,n\}$ и $j \in \{1,\ldots,m\}$. В этом случае $\mathcal{C}_{\alpha 1} = \mathcal{C}_{\alpha 2} = \infty$, откуда

$$[\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}]_{\alpha\beta} = \min\{\mathcal{C}_{\alpha 3} + \mathcal{D}_{3\beta}, \mathcal{C}_{\alpha 4} + \mathcal{D}_{4\beta}\} = \min\{(2i - 2h_j + 1)H, (2h_j - 2i + 1)H\},$$

то есть, $[\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}]_{\alpha\beta} = H - 2|i - h_j|H = \mathcal{B}_{\alpha\beta}$ в силу пункта (b3).

Шаг 5. Наконец, предположим, что $\alpha = i^{ver}$ и $\beta = j^{tail}$ для некоторых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m\}$. В этом случае $\mathcal{C}_{\alpha 1} = \mathcal{C}_{\alpha 2} = \infty$, откуда

$$[\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}]_{\alpha\beta} = \min\{\mathcal{C}_{\alpha 3} + \mathcal{D}_{3\beta}, \mathcal{C}_{\alpha 4} + \mathcal{D}_{4\beta}\} = \min\{(2i - 2t_j + 1)H, (2t_j - 2i + 1)H\},$$

то есть, $[\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}]_{\alpha\beta} = H - 2|i - t_j|H = \mathcal{B}_{\alpha\beta}$ в силу пункта (b3).

Шаги 1–5 исчерпывают все возможности для индексов α и β. □

Закончим изложение результатов подраздела следствием леммы 7.4.26.

Следствие 7.4.27. *Для любых графа G и индексов α и β, удовлетворяющих условию $[\mathcal{A}(G)]_{\alpha\beta} < \infty$, выполнено неравенство $[\mathcal{A}(G)]_{\alpha\beta} < [\mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{D}(G)]_{\alpha\beta}$.*

Доказательство. Следует из наблюдения 7.4.15 и леммы 7.4.26. □

7.4.5 Доказательство основных результатов

Применим описанные методы к доказательству NP-полноты задачи 7-ФТМ.

Теорема 7.4.28. *Задача 7-ФТМ полна для класса NP.*

Доказательство. Рассмотрим простой граф G и построим матрицы $\mathcal{A}(G)$ из определения 7.4.13, $\mathcal{C}(G)$ из определения 7.4.23 и $\mathcal{D}(G)$ из определения 7.4.24. Тогда в силу леммы 7.4.19, наблюдения 7.4.25 и следствия 7.4.27 эти матрицы удовлетворяют условиям теоремы 7.4.10. Таким образом, факторизационный ранг матрицы $Q(G) = \mathcal{Q}(\mathcal{A}(G), \mathcal{C}(G), \mathcal{D}(G))$ не превосходит 7 в том и только том случае, если найдутся матрицы $U \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times 3}$ и $V \in \overline{\mathbb{R}}^{3 \times n}$, удовлетворяющие условию $\mathcal{A}(G) \geqslant U \otimes V \geqslant \mathcal{A}(G) \oplus (\mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{D}(G))$. В силу леммы 7.4.26 верно равенство $\mathcal{B}(G) = \mathcal{C}(G) \otimes \mathcal{D}(G)$, поэтому по теореме 7.4.22 факторизационный ранг матрицы $Q(G)$ не превосходит 7 в том и только том случае, если граф G допускает раскраску в три цвета. Ясно, что построение матрицы $Q(G)$ по заданному графу G занимает полиномиальное время. Наконец, мы применяем тропическое умножение строк и столбцов матрицы $Q(G)$ на соответствующие числа и пользуемся леммой 7.4.5, завершая построение полиномиального сведения задачи 7.4.11 к задаче 7-ФТМ. В силу теоремы 7.4.4 задача 7-ФТМ также принадлежит классу NP. □

Мы можем теперь доказать NP-полноту задачи k-ФТМ при любом $k \geqslant 7$.

Теорема 7.4.29. *Задача k-ФТМ является NP-полной при всяком $k \geqslant 7$.*

Доказательство. Для любой матрицы M мы с помощью предложения 7.4.6 построим матрицу M', факторизационный ранг которой не превосходит k в том и только том случае, если факторизационный ранг матрицы V не превосходит 7. Остается применить тропическое умножение строк и столбцов матрицы M' на соответствующие числа и воспользоваться леммой 7.4.5, чтобы завершить построение сведения задачи 7-ФТМ к задаче k-ФТМ. □

Еще один результат, который может быть получен как следствие теоремы 7.4.28, дает решение проблемы 7.1.7. В отличие от ситуации с рангом Гондрана–Мину, который в силу теоремы 5.3.11 может быть найден за полиномиальное время, если тропический ранг матрицы ограничен, решение проблемы 7.1.7 оказывается отрицательным.

Теорема 7.4.30. *Задача вычисления факторизационного ранга матрицы, тропический ранг которой не превосходит семи, является NP-трудной.*

Доказательство. Пользуясь непосредственно определением тропического ранга, мы можем сравнить с числом 7 тропический ранг данной матрицы размера $m \times n$ за время $O(m^8 n^8)$. Далее, в силу теоремы 1.2.17 факторизационный ранг матрицы не может быть меньше тропического ранга, поэтому доказываемая теорема следует из теоремы 7.4.28. □

Глава 8

Факторизация неотрицательных матриц

Эта глава посвящена обсуждению важной для различных приложений и бурно развивающейся в настоящее время теории факторизации неотрицательных матриц. Обсуждение некоторых приложений этой теории приведено во введении к нашей работе; в данной же главе будет подробно рассказано о связи факторизации матриц и расширенных представлений многогранников, которые важны для современных исследований в комбинаторной оптимизации и теории сложности. Приводимые в главе результаты были опубликованы автором диссертации в ряде печатных работ; помимо изложения их доказательств мы также указываем на возможные применения этих результатов в теории расширенных представлений и некоторых других приложениях.

8.1 Неотрицательный ранг

В этой главе изучаются неотрицательные матрицы, то есть, вещественные матрицы, состоящие из неотрицательных элементов. Задача факторизации таких матриц состоит в нахождении матриц $B \in \mathbb{R}_+^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}_+^{k\times n}$, удовлетворяющих условию $A = BC$ при данных матрице A и числе k. Нас еще будет интересовать связанное с этой задачей понятие неотрицательного ранга.

Определение 8.1.1. [33] Неотрицательным рангом матрицы $A \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$ называется наименьшее целое число k, при котором матрица A представима в виде суммы k неотрицательных матриц ранга один.

Отметим, что понятие неотрицательного ранга легко переформулировать [33] в терминах факторизации: неотрицательный ранг матрицы $A \in$

$\mathbb{R}_+^{m\times n}$ равен наименьшему целому числу k, для которого существуют матрицы $B \in \mathbb{R}_+^{m\times k}$ и $C \in \mathbb{R}_+^{k\times n}$, удовлетворяющие условию $A = BC$. При таком способе определения, правда, надо оговорить отдельно, что неотрицательный ранг нулевой матрицы полагается равным нулю [33]. Отметим, что рассуждения этого абзаца позволяют думать о неотрицательном ранге как о функции факторизационного ранга из определения 1.2.10, заданной на полукольце неотрицательных матриц.

Зачастую мы будем рассматривать и ранг матрицы A в обычном смысле, то есть, как размерность линейной оболочки ее столбцов в пространстве $\mathbb{R}^m$. В этой главе мы будем называть указанное понятие *обычным* или *классическим* рангом матрицы A, чтобы не спутать его с понятием неотрицательного ранга матрицы. Также для нас будет полезным рассмотрение выпуклых *многомерных многогранников*, то есть, ограниченных множеств, заданных как пересечения полупространств пространства $\mathbb{R}^d$; для краткости мы будем называть такие множества просто *многогранниками*, хотя слово "многогранник" в указанном смысле обычно используется лишь в случае $d = 3$.

В этой главе мы подробно остановимся на приложении неотрицательных факторизаций, связанном с так называемыми расширенными представлениями многогранников [141]. Рассмотрим выпуклый многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$. *Расширением* [55, 61] многогранника P называется другой многогранник $Q \subset \mathbb{R}^d$, из которого P может быть получен как образ под действием линейной проекции $\mathbb{R}^d$ на $\mathbb{R}^n$. *Расширенным представлением* [61, 82] многогранника P называется описание многогранника Q в терминах линейных уравнений и неравенств и описание проекции $\mathbb{R}^d$ на $\mathbb{R}^n$, переводящей Q в P. *Размером* [61, 82] расширенного представления Q называется число гиперграней многогранника Q. *Сложность расширения* [61, 82] многогранника P — наименьший из возможных размеров расширенных представлений этого многогранника, то есть, наименьшее из возможных число неравенств в описании многогранника Q. Отметим, что число гиперграней многогранника Q зачастую может быть значительно меньшим [55] в сравнении с числом гиперграней P; этот феномен позволяет уменьшить сложность проблем линейного программирования, важных для многочисленных приложений [34, 55, 82].

Важный результат, дающий характеризацию расширенных представлений с точки зрения линейной алгебры, был получен в 1991 году Ианнакакисом [141]. Предположим, что многогранник P (с v вершинами и f гипергранями) задан как множество всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям $c_i(x) \geqslant \beta_i$ и $c_j(x) = \beta_j$ при всех $i \in \{1, \ldots, f\}$ и $j \in \{f+1, \ldots, q\}$, где через $c_1, \ldots, c_q$ обозначены некоторые линейные функционалы на пространстве $\mathbb{R}^n$. *Слабой матрицей инцидентностей* (далее мы будем называть ее просто *слабой матрицей*) многогранника P назовем матрицу $S = S(P)$ размера $f \times v$,

элементы которой заданы как $S_{it} = c_i(p_t) - \beta_i$, где через $p_1, \ldots, p_v$ обозначены вершины многогранника P. Легко видеть, что слабая матрица неотрицательна; следующий хорошо известный результат описывает ранг матрицы $S(P)$ в терминах размерности многогранника P.

Предложение 8.1.2. *[70, лемма 3.1] Классический ранг слабой матрицы многогранника на единицу превосходит размерность этого многогранника.*

Теорема Ианнакакиса указывает на связь расширенных представлений и неотрицательного ранга и формулируется следующим образом [61, 82, 141].

Теорема 8.1.3. *[82, теорема 2] Сложность расширения многогранника P равна неотрицательному рангу слабой матрицы этого многогранника.*

Подробно обсудив одно из приложений неотрицательных факторизаций, мы напомним, что их теория оказывается полезной для других областей знания — в анализе данных, статистике, вычислительной биологии и в многочисленных иных приложениях [33]. Как показывает, в частности, теорема 8.1.3, оказывается очень важным вопрос о нахождении верхних и нижних оценок для неотрицательного ранга в терминах иных матричных инвариантов; эти и многие другие вопросы теории неотрицательных факторизаций остаются открытыми и в настоящее время [54, 61, 82]. Завершим раздел решением одной проблемы, посвященной верхней оценке неотрицательного ранга.

Проблема 8.1.4. *[12, вопрос 4.4] Ограничен ли функцией числа k неотрицательный ранг симметрической матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ классического ранга k, имеющей ровно одно отрицательное собственное значение?*

Указанная проблема оставалась открытой до опубликования автором диссертации статьи [148], в которой было получено ее отрицательное решение.

Теорема 8.1.5. *Существуют симметрические матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ классического ранга три, имеющие ровно одно отрицательное собственное значение и сколь угодно большой неотрицательный ранг.*

Доказательство. Фиксируем целое число $k \geqslant 3$ и положим $h_{i+1} = \mathrm{e}^{-1/h_i}$ для всех $i \leqslant k$ и малого вещественного числа $h_1 > 0$. Определим матрицу Λ размера 3×3, положив $\Lambda_{rs} = -1$ при $\{r, s\} = \{2, 3\}$ и $\Lambda_{rs} = 1$ в противном случае; определим матрицу B размера $2k \times 3$, положив $B_{2i-1,1} = B_{2i,1} = 1$, $B_{2i,2} = 14 + h_i$, $B_{2i-1,3} = 6 + h_i$, $B_{2i-1,2} = 4 + h_i - h_i/(7 + h_i^2)$ и $B_{2i,3} = (21 + 8h_i + 4h_i^2 - h_i^3)/(21 + h_i + 3h_i^2)$. В этом случае матрица $A = B\Lambda B^\top$ симметрична и имеет ранг 3, и всякий главный минор порядка 3 матрицы

A неположителен в силу неравенства $\det \Lambda < 0$. Поэтому характеристический многочлен $\det(A - \lambda I)$ имеет либо один, либо три отрицательных корня. Второй из этих вариантов невозможен в силу теоремы Фробениуса–Перрона, поскольку верно равенство $A_{pq} = 0$, если при некотором i выполнено условие $\{p, q\} = \{2i - 1, 2i\}$, и верно неравенство $A_{pq} > 0$ в противном случае. Неотрицательный ранг матрицы A инвариантен относительно перестановок ее строк и столбцов и потому не превосходит $\log_2 k$ в силу предложения 1.3 из работы [12]. □

8.2 Факторизация матриц ранга три

Несмотря на серьезные усилия, прилагаемые [53, 54, 61, 69] в последнее время к изучению верхних и нижних оценок на неотрицательный ранг матрицы, до недавнего времени оставался открытым вопрос о существовании какой-либо нетривиальной верхней оценки неотрицательного ранга в терминах классической ранговой функции. Легко видеть, что неотрицательный и классический ранги матрицы совпадают [33] друг с другом, если одна из этих функций не превосходит двух. Тем не менее, никакой верхней оценки неотрицательного ранга матрицы размера $m \times n$ (кроме тривиальной $\min\{m, n\}$) не было известно даже в случае, когда классический ранг матрицы равен трем.

Проблема 8.2.1. *[12, гипотеза 3.2] Фиксируем целое число $n \geqslant 3$. Существует ли матрица размера $n \times n$ классического ранга три, неотрицательный ранг которой равен n?*

В виду предложения 8.1.2 и теоремы 8.1.3 мы можем задаться также связанным с проблемой 8.2.1 вопросом о существовании (двумерного) n-угольника, сложность расширения которого равна n. Для $n \leqslant 5$ положительное решение проблемы 8.2.1 было получено в работе [61]. В статье [69] было отмечено, что любой выпуклый шестиугольник, координаты вершин которого алгебраически независимы, имеет сложность расширения, равную шести, и таким образом получено положительное решение проблемы 8.2.1 при $n = 6$. Для любого $n \geqslant 7$ эта проблема оставалась открытой.

Лин и Чу в работе [101] объявили о получении положительного решения проблемы 8.2.1 при любом n, но впоследствии оказалось, что их рассуждения содержат ошибку [61, 75]. Отрицательное решение проблемы 8.2.1 было получено в работе [61] в частном случае квадратных матриц, соответствующих метрикам, задаваемых конечными наборами точек прямой. Глубокое исследование таких матриц было проведено в работе [75], и были получены верхние оценки логарифмического роста для некоторых частных случаев. Подробно-

му исследованию расширенных представлений многоугольников была посвящена работа [55], однако и она оставила вопрос о существовании n-угольника сложности расширения n открытым.

В этом разделе мы излагаем полное решение проблемы 8.2.1, которое было получено автором диссертации в работе [155]. Мы докажем, что решение этой проблемы при $n > 6$ оказывается отрицательным; на самом деле будет также приведена верхняя оценка неотрицательного ранга матрицы в терминах классической ранговой функции. Мы покажем, что неотрицательный ранг матрицы размера $m \times n$ классического ранга три не может превосходить $\left\lceil \frac{6 \min\{m,n\}}{7} \right\rceil$. Также мы ответим на упомянутый вопрос о сложности многоугольников и покажем, что выпуклый n-угольник не может иметь сложности расширения, превосходящей $\left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$. Иными словами, мы докажем, что любой выпуклый n-угольник допускает описание с помощью $\left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$ линейных неравенств с точностью до линейной проекции.

8.2.1 Факторизация слабой матрицы семиугольника

В этом подразделе будет показано, что слабые матрицы выпуклых семиугольников не могут иметь неотрицательного ранга, равного семи. Наше внимание будет обращено на квадратные матрицы порядка семь, в связи с чем окажется весьма удобным ввести следующее соглашение.

Обозначение 8.2.2. В рассуждениях этого подраздела индексы строк и столбцов рассматриваемых матриц будут пониматься как элементы кольца $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. В частности, запись $A_{3+6,6+1}$ будет пониматься как элемент матрицы A, стоящий во второй строке и седьмом столбце. Кроме того, мы используем символы i и j в этом подразделе только для обозначения таких индексов, и операции над i и j понимаются в смысле операций кольца $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Введем в рассмотрение матрицы специального вида, который будет важен для рассуждений этого подраздела. Напомним, что через $W[i, j, k]$ обозначается матрица, образованная строками матрицы W с индексами i, j и k.

Определение 8.2.3. Дан набор $\alpha = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ вещественных чисел. Через $W(\alpha)$ мы будем обозначать матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^\top$$

размера 7×3, а через $\mathcal{V}(\alpha)$ — квадратную матрицу порядка 7, заданную соотношением $[\mathcal{V}(\alpha)]_{ij} = \det W[i-1, j-2, j-1]$.

Следующая лемма указывает на симметрию в построении матрицы $\mathcal{V}$.

Лемма 8.2.4. *Матрицы $\mathcal{V}(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ и $\mathcal{V}(b_3, b_2, b_1, a_3, a_2, a_1)$ совпадают с точностью до перестановок строк и столбцов.*

Доказательство. Произведем перестановку (16)(25)(34) на множестве индексов строк и перестановку (17)(26)(35) — на множестве индексов столбцов матрицы $\mathcal{V}(b_3, b_2, b_1, a_3, a_2, a_1)$. □

Следующая лемма дает факторизацию матрицы $\mathcal{V}$ в частном случае.

Лемма 8.2.5. *Дан набор $\psi = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ вещественных чисел, для которого матрица $V = \mathcal{V}(\psi)$ удовлетворяет условию $V_{ij} > 0$ при всех i и j, для которых $i \notin \{j-1, j\}$. Если также $a_1 + b_1 \geqslant a_2 + b_2$ и $a_3 + b_3 \geqslant a_2 + b_2$, то неотрицательный ранг матрицы V не превосходит семи.*

Доказательство. Достаточно проверить равенство $V = FG$ при

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & V_{41}+V_{47} & V_{61} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1-a_2+b_1-b_2 & 1 \\ V_{31} & 0 & 0 & 1 & V_{37} & 0 \\ V_{41} & 1 & 0 & 0 & V_{47} & 0 \\ -a_2+a_3-b_2+b_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_{61} & V_{31}+V_{37} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{31} & 1 & V_{47} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & V_{32}/V_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{21}/V_{31} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{13} & 1 & V_{65} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & V_{57}/V_{47} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{65}/V_{47} & 1 \\ V_{72} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & V_{57} \end{pmatrix}.$$

□

Укажем способ построения по заданной матрице новых матриц, имеющих такой же неотрицательный ранг, как и исходная.

Лемма 8.2.6. *Дан набор $\psi = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ вещественных чисел, для которого матрица $V = \mathcal{V}(\psi)$ удовлетворяет условию $V_{ij} > 0$ при всех i и j, для которых $i \notin \{j-1, j\}$. Положим $\alpha_1 = (1-a_3-b_3)/(1-b_3)$, $\alpha_2 = (a_1-a_1b_3-a_3+a_3b_1)/(a_1-a_1b_3)$, $\alpha_3 = (a_2-a_2b_3-a_3+a_3b_2)/(a_2-a_2b_3)$, $\beta_1 = a_3$, $\beta_2 = a_3/a_1$ и $\beta_3 = a_3/a_2$. В этом случае матрица $U = \mathcal{V}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ удовлетворяет условию $U_{ij} > 0$ при всех i и j, для которых $i \notin \{j-1, j\}$, и имеет такой же неотрицательный ранг, как и матрица V.*

Доказательство. Проверим условие $V = Q_1 U Q_2$ при

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(1-b_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1/a_3 \\ a_2/a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_1 a_2 (1-b_3)}{a_3} \\ a_2(1-b_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3(1-b_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-b_3}{a_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_1(1-b_3)}{a_3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь утверждение леммы следует из того, что числа $1 - b_3 = V_{42}$, $a_1 = V_{63}$, $a_2 = V_{73}$ и $a_3 = V_{13}$ положительны. □

Зададим шесть полезных последовательностей вещественных чисел.

Определение 8.2.7. Дан набор $\psi = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ вещественных чисел, для которого матрица $V = \mathcal{V}(\psi)$ удовлетворяет условию $V_{ij} > 0$ при всех i и j, для которых $i \notin \{j-1, j\}$. Рассмотрим последовательности $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ и $\beta_3(t)$ вещественных чисел, заданных соотношениями $\alpha_1(0) = a_1$, $\alpha_2(0) = a_2$, $\alpha_3(0) = a_3$, $\beta_1(0) = b_1$, $\beta_2(0) = b_2$ и $\beta_3(0) = b_3$, а также

$$\alpha_1(t+1) = \frac{1 - \alpha_3(t) - \beta_3(t)}{1 - \beta_3(t)},$$

$$\alpha_{\chi+1}(t+1) = \frac{\alpha_\chi(t) - \alpha_\chi(t)\beta_3(t) - \alpha_3(t) + \alpha_3(t)\beta_\chi(t)}{\alpha_\chi(t) - \alpha_\chi(t)\beta_3(t)} \text{ при } \chi \in \{1, 2\},$$

$$\beta_1(t+1) = \alpha_3(t), \;\; \beta_2(t+1) = \alpha_3(t)/\alpha_1(t), \;\; \beta_3(t+1) = \alpha_3(t)/\alpha_2(t).$$

Замечание 8.2.8. *В силу леммы 8.2.6 последовательности $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ и $\beta_3(t)$ корректно определены.*

Оказывается, что введенные последовательности цикличны.

Лемма 8.2.9. *Дан набор $\psi = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ вещественных чисел, для которого матрица $V = \mathcal{V}(\psi)$ удовлетворяет условию $V_{ij} > 0$ при всех i и j, для которых $i \notin \{j-1, j\}$. Тогда $\alpha_1(7) = a_1$, $\alpha_2(7) = a_2$, $\alpha_3(7) = a_3$, $\beta_1(7) = b_1$, $\beta_2(7) = b_2$ и $\beta_3(7) = b_3$.*

Доказательство. Лемма доказывается непосредственной проверкой. □

Укажем еще одно свойство введенных последовательностей.

Лемма 8.2.10. *Дан набор $\psi = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ вещественных чисел, для которого матрица $V = \mathcal{V}(\psi)$ удовлетворяет условию $V_{ij} > 0$ при всех i и j, для которых $i \notin \{j-1, j\}$. Тогда условие $\alpha_1(2) + \beta_1(2) \leqslant \alpha_2(2) + \beta_2(2)$ влечет выполнение условия $\alpha_2(6) + \beta_2(6) < \alpha_3(6) + \beta_3(6)$.*

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что

$$\alpha_2(2) + \beta_2(2) - \alpha_1(2) - \beta_1(2) = \frac{(-a_3 + a_2(1-b_3))\, V_{32}V_{21}}{V_{31}V_{73}V_{42}V_{52}},$$

поэтому знак числа $\alpha_2(2) + \beta_2(2) - \alpha_1(2) - \beta_1(2)$ совпадает со знаком числа $-a_3 + a_2(1-b_3)$. Аналогично показывается, что

$$\alpha_3(6) + \beta_3(6) - \alpha_2(6) - \beta_2(6) = \frac{V_{46}\,(-a_3 + a_1(1-b_3))}{V_{15}V_{36}},$$

поэтому знак числа $\alpha_3(6) + \beta_3(6) - \alpha_2(6) - \beta_2(6)$ совпадает со знаком числа $-a_3 + a_1(1-b_3)$. Осталось заметить, что $1 - b_3 = V_{42} > 0$ и $a_1 - a_2 = V_{37} > 0$. □

Следующая лемма дает условие, выполнение которого необходимо для того, чтобы матрица $\mathcal{V}$ имела полный неотрицательный ранг.

Лемма 8.2.11. *Дан набор $\psi = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ вещественных чисел, для которого матрица $V = \mathcal{V}(\psi)$ удовлетворяет условию $V_{ij} > 0$ при всех i и j, для которых $i \notin \{j-1, j\}$, и имеет неотрицательный ранг 7. Тогда или условие $\alpha_1(t) + \beta_1(t) < \alpha_2(t) + \beta_2(t) < \alpha_3(t) + \beta_3(t)$ выполнено при всех t, или условие $\alpha_1(t) + \beta_1(t) > \alpha_2(t) + \beta_2(t) > \alpha_3(t) + \beta_3(t)$ выполнено при всех t.*

Доказательство. Предположим, что выполнено неравенство $\alpha_1(t) + \beta_1(t) \leqslant \alpha_2(t) + \beta_2(t)$ при некотором t. Применяя лемму 8.2.10 к набору $\psi' = (\alpha_1(t+5), \alpha_2(t+5), \alpha_3(t+5), \beta_1(t+5), \beta_2(t+5), \beta_3(t+5))$ и принимая во внимание результат леммы 8.2.9, мы заключаем, что $\alpha_2(t+4) + \beta_2(t+4) < \alpha_3(t+4) + \beta_3(t+4)$. Из леммы 8.2.5 теперь следует неравенство $\alpha_1(t+4) + \beta_1(t+4) < \alpha_2(t+4) + \beta_2(t+4)$, и поэтому условие $\alpha_1(t+4k) + \beta_1(t+4k) < \alpha_2(t+4k) +$

$\beta_2(t+4k) < \alpha_3(t+4k) + \beta_3(t+4k)$ выполнено для любого положительного числа k.

Теперь предположим, что выполнено условие $\alpha_1(t) + \beta_1(t) > \alpha_2(t) + \beta_2(t)$. В силу леммы 8.2.5 выполнено неравенство $\alpha_2(t) + \beta_2(t) > \alpha_3(t) + \beta_3(t)$, и потому из леммы 8.2.10 следует выполнение условия $\alpha_1(t+3) + \beta_1(t+3) > \alpha_2(t+3) + \beta_2(t+3)$. Наконец, мы можем заключить, что неравенство $\alpha_1(t+3k) + \beta_1(t+3k) > \alpha_2(t+3k) + \beta_2(t+3k) > \alpha_3(t+3k) + \beta_3(t+3k)$ выполнено для любого положительного числа k. □

Наконец, мы можем показать, что матрица $\mathcal{V}(\psi)$ не может иметь полного неотрицательного ранга.

Лемма 8.2.12. *Дан набор $\psi = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ вещественных чисел, для которого матрица $V = \mathcal{V}(\psi)$ удовлетворяет условию $V_{ij} > 0$ при всех i и j, для которых $i \notin \{j-1, j\}$. Тогда неотрицательный ранг матрицы $\mathcal{V}$ не превосходит* 6.

Доказательство. Предположим противное и применим результаты лемм 8.2.4 и 8.2.11. Теперь мы можем считать, не ограничивая общности рассуждений, что условие $\alpha_1(t) + \beta_1(t) < \alpha_2(t) + \beta_2(t) < \alpha_3(t) + \beta_3(t)$ выполнено для любого неотрицательного целого числа t. Заметим, что верно равенство $\alpha_3(0) + \beta_3(0) - \alpha_1(0) - \beta_1(0) = a_3 + b_3 - a_1 - b_1$, и непосредственная проверка также доказывает равенства

$$\alpha_2(1) + \beta_2(1) - \alpha_1(1) - \beta_1(1) = \frac{V_{13}\,(b_1 + (a_1 - 1)b_3)}{V_{63}V_{42}},$$

$$\alpha_2(2) + \beta_2(2) - \alpha_1(2) - \beta_1(2) = \frac{V_{13}V_{21}\,(a_2(1 - b_3) - a_3)}{V_{73}V_{31}V_{42}V_{52}}.$$

Заметив также, что $1 - b_3 = V_{42} > 0$ и $V_{37} = a_1 - a_2 > 0$, мы получаем

$$b_3(1-a_1) < b_1,\ \ a_3 < a_2(1-b_3),\ \ a_3+b_3 > a_1+b_1,\ \ b_3 < 1,\ \text{ и }\ a_1 > a_2. \quad (8.2.1)$$

Проверим теперь, что условия (8.2.1) приводят к противоречию. Действительно, первое из этих неравенств означает, что $a_1 + b_1 > a_1 + b_3 - b_3a_1$, а принимая во внимание третье неравенство, мы получим условие $a_3 + b_3 > a_1 + b_3 - b_3a_1$. Таким образом, мы получаем неравенство $a_3 > a_1(1 - b_3)$, из которого следует условие $a_3 > a_2(1 - b_3)$ в виду последних двух неравенств. □

Теперь проверим, что квадратные матрицы порядка 7 более общего вида тоже имеют неотрицательные ранги, не превосходящие шести.

Лемма 8.2.13. *Предположим, что матрица U размера 7×7 классического ранга три удовлетворяет условию $U_{ij}=0$, если $i\in\{j-1,j\}$, и условию $U_{ij}>0$ в противном случае. Тогда неотрицательный ранг матрицы U не превосходит шести.*

Доказательство. Через U' обозначим матрицу, полученную из U умножением третьего столбца на число U_{54}/U_{53}, пятого столбца — на число U_{24}/U_{25}, третьей строки — на число $\frac{U_{25}}{U_{24}U_{35}}$, четвертой строки — на число $\frac{U_{53}}{U_{43}U_{54}}$ и, наконец, строк с индексом i' (где i' пробегает множество $1,2,5,6,7$) — на число $1/U_{i'4}$. Тогда мы имеем

$$U'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3 & 1 & b_3 & U'_{16} & U'_{17}\\ U'_{21} & 0 & 0 & 1 & 1 & U'_{26} & U'_{27}\\ U'_{31} & U'_{32} & 0 & 0 & 1 & U'_{36} & U'_{37}\\ U'_{41} & U'_{42} & 1 & 0 & 0 & U'_{46} & U'_{47}\\ U'_{51} & U'_{52} & 1 & 1 & 0 & 0 & U'_{57}\\ U'_{61} & U'_{62} & a_1 & 1 & b_1 & 0 & 0\\ 0 & U'_{72} & a_2 & 1 & b_2 & U'_{76} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку классический ранг матрицы U' равен трем, найдутся вещественные числа $c_1,\dots,c_7$, удовлетворяющие условиям $U'_{ij}=c_j\det U'[i,j-1,j|3,4,5]$ при любых i и j. Таким образом, при любых i и j выполнено условие $U'_{ij}=c_jV_{ij}$, где через V обозначена матрица $\mathcal{V}(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3)$ из определения 8.2.3. Поскольку $V_{13}=V_{32}$ и $V_{72}=V_{21}$, числа c_1, c_2 и c_3 имеют одинаковый знак. Аналогично числа c_5, c_6 и c_7 также имеют одинаковый знак в силу равенств $V_{65}=V_{46}$ и $V_{76}=V_{57}$. Далее, в силу условия $V_{24}=V_{25}=V_{43}=1$ верны равенства $c_3=c_4=c_5=1$, поэтому все числа $c_1,\dots,c_7$ положительны. Таким образом, мы можем заключить, что матрицы U и V получаются друг из друга умножением строк и столбцов на положительные числа, поэтому утверждение леммы следует из леммы 8.2.12. □

Теперь мы можем доказать основной результат этого подраздела.

Теорема 8.2.14. *Неотрицательный ранг слабой матрицы выпуклого семиугольника не может превосходить шести.*

Доказательство. В силу предложения 8.1.2 слабая матрица S выпуклого семиугольника имеет классический ранг 3. Поэтому матрица S удовлетворяет условиям леммы 8.2.13 с точностью до перестановок строк и столбцов. □

8.2.2 Основные результаты раздела

Начнем изложение основных результатов со следствия теоремы 8.2.14, дающего отрицательное решение проблемы 8.2.1 в случае $n = 7$.

Теорема 8.2.15. *Предположим, что классический ранг матрицы $A \in \mathbb{R}_+^{7\times n}$ равен трем. Тогда неотрицательный ранг матрицы A не превосходит* 6.

Доказательство. Рассмотрим стандартный симплекс Δ, состоящий из точек $(x_1, \ldots, x_7)$ с неотрицательными координатами, удовлетворяющими условию $\sum_{i=1}^{7} x_i = 1$. Поскольку симплекс Δ содержит 7 гиперграней, пересечением этого симплекса и линейного пространства, порожденного над $\mathbb{R}$ столбцами матрицы A, является многоугольник I с k вершинами, причем $k \leqslant 7$. Построим матрицу S из столбцов координат вершин многоугольника I, тогда верно равенство $A = SB$ для некоторой неотрицательной матрицы B. Если $k < 7$, то результат теоремы следует непосредственно из факторизации $A = SB$, а если $k = 7$, — то из теоремы 8.2.14, в силу которой неотрицательный ранг матрицы S как слабой матрицы для многоугольника I не превосходит 6. □

Теперь мы можем привести нетривиальную верхнюю оценку неотрицательного ранга матриц классического ранга 3 и получить отрицательное решение проблемы 8.2.1 в случае $n \geqslant 7$.

Теорема 8.2.16. *Неотрицательный ранг матрицы $A \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$ классического ранга три не может превосходить $\left\lceil \frac{6\min\{m,n\}}{7} \right\rceil$.*

Доказательство. В силу теоремы 8.2.15 любые семь строк матрицы A могут быть представлены в виде линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами некоторых шести строк неотрицательных чисел, поэтому неотрицательный ранг матрицы A не превосходит $\left\lceil \frac{6m}{7} \right\rceil$. Для завершения доказательства осталось заметить, что неотрицательный ранг матрицы инвариантен относительно транспозиции. □

Принимая во внимание результат работы [69], утверждающий существование шестиугольника со сложностью расширения 6, мы можем воспользоваться теоремой 8.2.16 для получения полного решения проблемы 8.2.1. А именно, оказывается верной следующая теорема.

Теорема 8.2.17. *Если $n \geqslant 7$, то неотрицательный ранг матрицы ранга три размера $m \times n$ всегда меньше n. При $k \in \{3, 4, 5, 6\}$ существуют матрицы размера $k \times k$ классического ранга три, неотрицательный ранг которых равен k.*

Доказательство. Теорема 4 работы [61] гарантирует существование матриц указанного вида при $k \leqslant 5$. В работе [69] приведен пример матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

классического ранга 3 и неотрицательного ранга 6. Наконец, при $n \geqslant 7$ утверждение теоремы следует из теоремы 8.2.16. □

Наконец, мы можем доказать верхнюю оценку сложности расширения выпуклых многоугольников.

Теорема 8.2.18. *Сложность расширения n-угольника не превосходит $\left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$.*

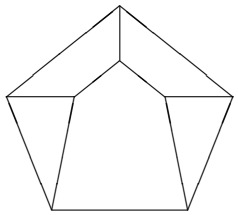
Доказательство. В силу предложения 8.1.2 и теоремы 8.2.16 неотрицательный ранг слабой матрицы n-угольника не может превосходить $\left\lceil \frac{6n}{7} \right\rceil$, поэтому результат следует из теоремы 8.1.3. □

В завершение раздела приведем некоторые результаты, полученные после публикации автором диссертации работы [155]. Авторами работы [115] было получено новое доказательство теоремы 8.2.18, основанное на чисто геометрических методах. Как отмечают авторы работы [116], семиугольник стал одним из все еще немногих многогранников, сложность расширения которых известна точно.

Также в работе [116] было доказано интересное свойство оптимальных расширений выпуклых семиугольников: они обязательно имеют *скрытые вершины*. Пусть многогранник Q является расширенным представлением многогранника P, иными словами, P является образом Q под действием линейной проекции π. Вершина $v \in Q$ такого расширенного представления называется *скрытой*, если $\pi(v)$ является внутренней точкой многогранника P. В работе [116] упоминаются многочисленные расширенные представления многогранников, рассмотренные разными авторами за последние годы в связи с различными приложениями. Далее в этой работе отмечается, что все упомянутые представления не содержат скрытых вершин, и формулируется вопрос: для любого ли многогранника P оптимальное расширенное представление не содержит скрытых вершин? Семиугольники позволяют получить ответ на этот вопрос.

Теорема 8.2.19. *[116] Всякое оптимальное расширенное представление выпуклого семиугольника общего вида содержит скрытые вершины.*

Отметим, что под семиугольником *общего вида* в приведенной теореме можно понимать такой, координаты вершин которого алгебраически независимы. Кроме того, из результатов работы [116] следует, что любое оптимальное расширенное представление выпуклого семиугольника общего вида имеет комбинаторную структуру, показанную на рисунке.



8.3 Нижние оценки сложности представлений

В этом разделе мы разрабатываем методы исследования сложности расширенных представлений многогранников, основанные на тропическом подходе, и получаем новые нижние оценки этой сложности. Полезным для нашего построения объектом будет кольцо Мальцева–Неймана $\mathcal{R}$ над множеством вещественных чисел. Напомним, что элементами кольца $\mathcal{R}$ являются формальные суммы вида $a(t) = \sum_{e\in\mathbb{R}} a_e t^e$ с вещественными коэффициентами, *носитель* $E(a) = \{e \in \mathbb{R} : a_e \neq 0\}$ которых является вполне упорядоченным подмножеством множества $\mathbb{R}$. Как обычно, *степенью* ненулевой суммы $a \in \mathcal{R}$ называется показатель степени *главного члена*, то есть, $\deg a = \min E(a)$. Степень нулевого элемента кольца $\mathcal{R}$ полагается равной $+\infty$.

8.3.1 Теория первого порядка вещественных полей

Отметим, что кольцо $\mathcal{R}$ является полем в силу теоремы 1.3.5. Напомним, что поле K называется *упорядоченным*, если оно содержит подмножество P (элементы которого называются *положительными*), которое замкнуто относительно операций сложения и умножения, и K является объединением непересекающихся множеств P, $-P$ и $\{0\}$. Будем называть элемент r поля $\mathcal{R}$ положительным, если его главный член положителен; теперь легко убедиться, что поле $\mathcal{R}$ является упорядоченным. В последующем изложении результатов раздела мы будем обозначать множество положительных элементов поля $\mathcal{R}$ через $\mathcal{R}_+$.

Легко видеть, что квадрат любого элемента упорядоченного поля K неотрицателен, и потому многочлен $x^2 + 1$ неприводим над полем K. Поле K называется *вещественно замкнутым*, если кольцо $K[x]/(x^2+1)$ является алгебраически замкнутым полем. Приведем доказательство полезного утверждения, содержательная часть которого принадлежит Поонену [119].

Лемма 8.3.1. *Поле $\mathcal{R}$ является вещественно замкнутым.*

Доказательство. Будем показывать, что кольцо $\mathcal{R}[x]/(x^2+1)$ изоморфно кольцу Мальцева-Неймана $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ над комплексными числами. Рассмотрим произвольный элемент c поля $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ и заметим, что вещественная и мнимая части элемента c принадлежат кольцу $\mathcal{R}$, поскольку любое подмножество вполне упорядоченного множества также вполне упорядочено. Поэтому любой элемент поля $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ может быть представлен в виде $r_1 + ir_2$, где элементы r_1 и r_2 принадлежат кольцу $\mathcal{R}$, а через i обозначена мнимая единица. Доказательство может быть теперь завершено применение следствия 4 из работы [119], в силу которого поле $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ алгебраически замкнуто. □

Рассмотрим теперь произвольное поле R. Выражением первого порядка над R называется любая корректная формула, в которой участвуют переменные, изменяющиеся на множестве R, операции сложения и умножения, предикат равенства, константы 0 и 1, логические операторы, скобки, а также кванторы $\forall$ и $\exists$. Подробное обсуждение теорий первого порядка различных полей содержится в монографии [49], а в нашей работе будет обращено внимание на случай вещественно замкнутых полей. Классический результат Тарского и Зайденберга утверждает, что любое выражение α первого порядка над вещественно замкнутым полем R равносильно некоторой бесквантворной формуле β (иными словами, формуле, зависящей от того же набора переменных и принимающей такие же истинностные значения, что и α). Таким образом, все вещественные поля *элементарно эквивалентны* между собой, то есть, любое выражение первого порядка является верным над вещественно замкнутым полем R в том и только том случае, если оно верно над полем вещественных чисел. Отмечая, что исчерпывающее обсуждение элементарной эквивалентности указанных полей содержится в главе 1 монографии [49], мы сформулируем результат, важный для обоснования методов, разрабатываемых в этом разделе.

Теорема 8.3.2. *Поля $\mathbb{R}$ и $\mathcal{R}$ элементарно эквивалентны.*

8.3.2 Теорема Иаккакакиса над $\mathcal{R}$

В этом подразделе мы даем обобщение теоремы 8.1.3, которое позволит нам в дальнейшем применить тропические методы к изучению сложности расширенных представлений. Для этой цели нам потребуется обобщить базовые геометрические понятия (такие как гиперплоскость, многогранник, выпуклая оболочка, расстояние) на случай поля $\mathcal{R}$, и мы зададим их в точности такими же формулами, как над вещественными числами. Отметим, что расстояние между точками $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ пространства $\mathcal{R}^n$, задаваемое фор-

мулой $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$, не является метрикой в классическом смысле: оно может принимать значения из множества $\mathcal{R}_+$, а не только из $\mathbb{R}_+$.

Поскольку мы определили базовые геометрические понятия над $\mathcal{R}$, мы можем говорить о расширенных представлениях и слабой матрице выпуклого многогранника $\mathcal{P}$ из $\mathcal{R}^n$, а также о сложности расширения многогранника $\mathcal{P}$. Тем не менее, обобщение теоремы 8.1.3 на случай многогранников из $\mathcal{R}^n$ не следует непосредственно из этих определений. Чтобы получить это обобщение, мы должны указать, каким образом понятия, используемые в теореме 8.1.3, могут быть записаны на языке первого порядка.

Лемма 8.3.3. *Для любых целых чисел k, n, v найдется формула первого порядка, утверждающая, что сложность расширения многогранника $\operatorname{conv}\{s_1, \ldots, s_v\} \subset \mathcal{R}^n$ не превосходит k.*

Доказательство. Предположим, что расширенное представление использует новые переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+t}$, и число их фиксировано. Тогда требуемая формула утверждает, что при некоторых $A \in \mathcal{R}^{(n+t)\times(n+t)}$, $A' \in \mathcal{R}^{k\times(n+t)}$, $b \in \mathcal{R}^{n+t}$ и $b' \in \mathcal{R}^k$ условие

$$[\exists x_{n+1}, \ldots, x_{n+t}\ Ax = b \wedge A'x \geqslant b'] \leftrightarrow [(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{conv}\{s_1, \ldots, s_v\}]$$

справедливо при всех $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{R}$. Осталось заметить, что мы можем предполагать $t \leqslant k$, не ограничивая общности рассуждения. □

Теперь мы можем доказать результаты Ианнакакиса над произвольным вещественно замкнутым полем. Легко видеть, что для любых целых чисел f, k и n утверждения $\dim P \leqslant k$, $\operatorname{rank} S(P) \leqslant k$ и $\operatorname{rank}_+ S(P) \leqslant k$ задаются формулами первого порядка (через $S(P)$ обозначена слабая матрица многогранника P).

Теорема 8.3.4. *Теорема 8.1.3 и предложение 8.1.2 верны для многогранников над любым упорядоченным полем.*

Доказательство. Обозначим $\operatorname{conv}(s_1, \ldots, s_v)$ через P, а формулу из леммы 8.3.3 — через $\operatorname{xc}_k(P)$. В таких обозначениях теорема 8.1.3 утверждает, что для всех $A \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $b \in \mathcal{R}^m$, $s_1, \ldots, s_v \in \mathcal{R}^n$ выполнено условие

$$[\forall x \in \mathcal{R}^n Ax \geqslant b \leftrightarrow x \in P] \to \bigwedge_{k=1}^{v} [\operatorname{xc}_k(P) \leftrightarrow \operatorname{rank}_+ S(P, A, b) \leqslant k]\,.$$

Предложение 8.1.2 в свою очередь равносильно выполнению условия

$$[\forall x \in \mathcal{R}^n Ax \geqslant b \leftrightarrow x \in P] \to \bigwedge_{k=1}^{v} [\dim P \leqslant k-1 \leftrightarrow \operatorname{rank} S(P, A, b) \leqslant k]$$

при любых $A \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $b \in \mathcal{R}^m$ и $s_1, \ldots, s_v \in \mathcal{R}^n$. □

Следующая теорема показывает, как полученные результаты могут использоваться для изучения вещественных многогранников.

Теорема 8.3.5. *Для любого многогранника $P \subset R^n$ над вещественно замкнутым полем R найдется вещественный многогранник с такими же сложностью расширения и комбинаторной структурой, как у многогранника P.*

Доказательство. Подмножество $S' \subset S = \{s_1, \ldots, s_v\}$ является гранью многогранника $P = \mathrm{conv}(S)$ в том и только том случае, если найдется линейная форма l и скаляр λ, удовлетворяющие условиям $l(s') = \lambda$ и $l(s) > \lambda$ при любых $s' \in S'$ и $s \in S \setminus S'$. Таким образом, для любой решетки Φ найдется формула первого порядка $F_\Phi(P)$, утверждающая, что Φ является решеткой граней многогранника P. Теперь результат следует из леммы 8.3.3. □

8.3.3 Вспомогательные определения и утверждения

Основная идея описываемого метода изучения расширенных представлений состоит в сведении задачи поиска неотрицательных факторизаций матриц к задаче тропической факторизации. Стоит отметить, что с теоретической точки зрения последняя из этих задач оказывается весьма сложной: проблема представления тропической матрицы в виде произведения матриц размера $m \times k$ и $k \times n$ оказывается NP-трудной уже при $k = 7$ в силу теоремы 7.4.29. С другой стороны, аналогичная задача для неотрицательных матриц допускает [4] полиномиальный по времени алгоритм решения для любого фиксированного k. С практической же точки зрения ситуация выглядит иным образом: нетривиальной задачей представляется [154] даже вычисление неотрицательного ранга заданной непосредственно матрицы размера 8×8, в то время как существуют и успешно применялись на практике алгоритмы, вычисляющие факторизационные ранги тропических матриц достаточно большого размера [27, 44]. В дальнейшем изложении мы покажем, как тропические факторизации позволяют получить новую полезную информацию о задаче факторизации неотрицательных матриц и сложности расширенных представлений многогранников.

Лемма 8.3.6. *Рассмотрим матрицу C с элементами из $\mathcal{R}_+$ и обозначим через A матрицу* $\deg C$. *Тогда ни строчный, ни столбцовый ранги Гондрана–Мину матрицы A не превосходят ранга матрицы C.*

Доказательство. Обозначим через r ранг матрицы C размера $m \times n$ и рассмотрим множество U произвольных индексов строк матрицы C. Обозначая через $C_{i\cdot}$ строку матрицы C с индексом i, мы получаем, что сумма $\sum_{i=1}^{m} \rho_i C_{i\cdot}$ является нулевой строкой для некоторых чисел ρ_i (где i изменяется на множестве U) из $\mathcal{R}$, не все из которых равны нулю. Обозначая через I множество тех i, которые удовлетворяют условию $\rho_i \geqslant 0$, а через J — множество $U \setminus I$, мы получаем $\sum_{i\in I} |\rho_i| C_{i\cdot} = \sum_{j\in J} |\rho_j| C_{j\cdot}$. Поскольку все элементы в последнем неравенстве неотрицательны, мы можем применить к нему отображение степени, которое является гомоморфизмом $\mathcal{R}_+$ в тропическое полукольцо. Обозначая $\lambda_i = \deg \rho_i$, мы получаем равенство $\bigoplus_{i\in I} \lambda_i \otimes A_{i\cdot} = \bigoplus_{j\in J} \lambda_j \otimes A_{j\cdot}$, из которого следует линейная зависимость строк матрицы A с индексами из U в смысле Гондрана–Мину, поскольку условие $\rho_i \neq 0$ влечет $\lambda_i \neq \infty$.

Таким образом, любое семейство, содержащее $r+1$ строк матрицы A, является линейно зависимым по Гондрану–Мину, поэтому строчный ранг Гондрана–Мину матрицы A не превосходит r. Случай столбцового ранга Гондрана–Мину может быть разобран аналогичными рассуждениями. □

8.3.4 Тропическая оценка сложности расширения

Теперь мы можем доказать нижнюю оценку сложности расширения выпуклого многогранника, которая будет служить обобщением классической булевой нижней оценки [61, 70]. Через $GM(A)$ в оставшейся части раздела мы будем обозначать число $\max\{GMr(A), GMc(A)\}$.

Теорема 8.3.7. *Рассмотрим многогранник $\mathcal{P}$ размерности d, сложность расширения которого не превосходит k. Через $S \in \mathcal{R}^{m\times n}$ обозначим слабую матрицу многогранника $\mathcal{P}$, а через Q — матрицу $\deg S$. Тогда существуют тропические матрицы $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times k}$ и $B \in \overline{\mathbb{R}}^{k\times n}$, удовлетворяющие условиям $A \otimes B = Q$ и $GM(A) + GM(B) \leqslant d + k + 1$.*

Доказательство. В силу теоремы 8.3.4 неотрицательный ранг матрицы S не превосходит k, поэтому равенство $S = A'B'$ выполняется для некоторых матриц $A \in \mathcal{R}_+^{m\times k}$ и $B \in \mathcal{R}_+^{k\times n}$. Поскольку отображение степени задает гомоморфизм полукольца $\mathcal{R}_+$ в тропическое полукольцо, мы получаем $\deg S = \deg A' \otimes \deg B'$. Положим $A = \deg A'$ и $B = \deg B'$; тогда $Q = A \otimes B$.

Наконец, предположим, что $GM(A) + GM(B) > d + k + 1$; тогда в силу леммы 8.3.6 выполнено условие $\operatorname{rank} A' + \operatorname{rank} B' > d + k + 1$. Из неравенства Фробениуса теперь следует условие $\operatorname{rank}(A'B') > d+1$, откуда $\operatorname{rank} S > d+1$, что противоречит теореме 8.3.4. □

Отметим полезное следствие теоремы 8.3.7 и сформулируем его в терминах факторизационного ранга тропических матриц.

Теорема 8.3.8. *Рассмотрим многогранник $\mathcal{P}$ в пространстве $\mathcal{R}^d$ и обозначим через S его слабую матрицу, а через Q — матрицу $\deg S$. Тогда факторизационный ранг тропической матрицы Q не превосходит сложности расширения многогранника $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Следует из теоремы 8.3.7. □

Представляется интересным отметить, какой смысл имеет полученная оценка сложности расширения в случае обычного многогранника P из вещественного пространства $\mathbb{R}^n$. В этом случае всякий элемент слабой матрицы S многогранника будет либо свободным членом, либо нулем, и потому будет иметь степень, равную 0 или ∞. Заметим, что матрица $\deg S$ может быть рассмотрена как булева матрица, и ее булев факторизационный ранг равен факторизационному рангу $\deg S$ как тропической матрицы. Поэтому мы видим, что классическая [61, 70] нижняя оценка, связанная с булевым факторизационным рангом, получается как частный случай теоремы 8.3.8, и в этом смысле доказанная теорема улучшает эту оценку.

8.3.5 Приложения тропических методов

В этом подразделе мы иллюстрируем полученные результаты, применяя их к изучению проблем, связанных с расширенными представлениями многогранников малой размерности. Напомним, что теорема 8.2.18 показывает, что при любом $n \geqslant 7$ существуют расширенные представления n-угольника размера, меньшего n. С другой стороны, существуют шестиугольники, сложность расширения которых равна шести: этот результат был приведен в работе [69] без подробного доказательства. Полное доказательство, приведенное в работе [150], оказалось технически сложным; в этом подразделе мы приводим короткое доказательство этого факта, основанное на тропических методах.

В следующей лемме мы присваиваем строкам и столбцам матрицы A индексы из кольца $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; в частности, выражения $i-2$ и $i+4$ будут относиться к одному и тому же индексу. Будем говорить, что матрица D *покрывает* элемент (i,j) матрицы A, если $D_{ij} = A_{ij}$. Тропическую матрицу будем называть *конечной*, если все ее элементы принадлежат $\mathbb{R}$.

Лемма 8.3.9. *Факторизационный ранг тропической матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} \infty & \alpha & 0 & 0 & \gamma & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \infty & \infty & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \infty & \infty & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

равен шести, если числа α, β и γ положительны и различны.

Доказательство. От противного. Предположим, что найдутся матрицы $A^{(i)}$ тропического ранга один, которые удовлетворяют условию $A = A^{(1)} \oplus \dots A^{(5)}$. Положим $D = \cup_{t=1}^{6} \{(t, t-2), (t, t+1)\}$.

Шаг 1. Заметим, что матрицы вида $A[t, t+3|t-2, t+1]$ — единственные конечные подматрицы матрицы A, содержащие не менее трех элементов из множества D. Матрицы такого вида имеют ранг два, поэтому матрица $A^{(i)}$ может покрывать не более, чем три элемента из множества D.

Шаг 2. Поскольку $|D| = 12$, найдутся матрицы $A^{(i_1)}$ и $A^{(i_2)}$, которые покрывают по три элемента из множества D. В силу шага 1 матрицы $A^{(i_1)}$ и $A^{(i_2)}$ покрывают ровно три конечных элемента матрицы A, из которых один или два положительны.

Шаг 3. Поскольку матрица A содержит 24 конечных элемента, три матрицы $A^{(j)}$ (где $j \notin \{i_1, i_2\}$) покрывают по крайней мере 18 конечных элементов. Заметим, что если конечная подматрица A' матрицы A ранга один содержит не менее шести элементов, то A' является нулевой подматрицей размера 3×2. Поэтому матрицы $A^{(j)}$ не могут покрывать положительные конечные элементы матрицы A; из шага 2 теперь следует, что матрицы $A^{(1)}, \dots, A^{(5)}$ покрывают не более четырех конечных положительных элементов матрицы A. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теперь мы можем построить шестиугольник, сложность расширения которого равна шести.

Пример 8.3.10. *Предположим, что числа α, β и γ положительны и различны и рассмотрим точки $v_1 = (0, 0)$, $v_2 = (-t^\alpha, 1)$, $v_3 = (0, 2)$, $v_4 = (1, 1 + t^\beta)$, $v_5 = (2, 0)$, $v_6 = (1, -t^\gamma)$ на плоскости $\mathcal{R}^2$. Тогда сложность расширения шестиугольника $V = \operatorname{conv}\{v_1, \dots, v_6\}$ равна шести.*

Доказательство. Обозначим через S матрицу, элемент (i, j) которой равен расстоянию от вершины v_i до прямой линии, содержащей v_j и v_{j+1}. Тогда S является слабой матрицей многоугольника V, и матрица $\deg S$ совпадает с матрицей A из леммы 8.3.9. Теперь результат может быть доказан применением следствия 8.3.8. □

Из теоремы 8.3.5 теперь следует существование вещественного шестиугольника, сложность расширения которого равна шести.

Заключение

Диссертация вносит фундаментальный вклад в развитие линейной алгебры, структурной теории колец и полуколец и тропической математики. Автором решены крупные математические проблемы и доказаны важные гипотезы, относящиеся к указанным областям науки. Отметим следующие результаты:

- решена проблема Уайлдинга, Джонсон и Камбитеса 2013 года [140] о кольцах, которые допускают продолжение линейных функций с конечно порожденных подмодулей на свободный модуль;
- доказана гипотеза Тан 2014 года [132] о размерности свободного полумодуля;
- доказана гипотеза Джонсон и Камбитеса 2011 года [80] о подгруппах полугруппы тропических матриц;
- решены проблемы Бутковича [22] 1994 года и Гобера [60] 1997 года о вычислительной сложности ранга булевой матрицы;
- решена проблема Девелина, Сантоса и Штурмфельса 2005 года [45] о геометрической характеризации ранга Капранова тропической матрицы;
- решена проблема Бутковича 2010 года [25] и разработан быстрый алгоритм распознавания тропических матриц фиксированного ранга Гондрана–Мину;
- решена проблема Чан, Йенсена и Рубеи 2011 года [31] о тропическом базисе идеала, порожденного минорами фиксированного порядка;
- решена проблема Картрайта и Чан 2012 года [27] о комбинаторной характеризации симметрического ранга тропической матрицы;
- дан ответ на вопрос Акян, Гобера и Гутермана 2008 года [1] о тропических матрицах с различными строчным и столбцовым рангами;

- решена проблема Барвинка 1996 года [7] о вычислительной сложности факторизации тропических матриц;
- решена проблема Девелина, Сантоса и Штурмфельса 2005 года [45] и разработан быстрый алгоритм распознавания матриц факторизационного ранга три;
- доказана гипотеза Ли 2013 года [100] о связи граничного и классического рангов вещественных матриц;
- построен контрпример к гипотезе Бисли и Лаффи 2009 года [12] о связи неотрицательного ранга и спектра симметрической матрицы;
- решена проблема Бисли и Лаффи 2009 года [12] и показано, что всякий выпуклый n-угольник является проекцией многогранника с $[6(n+1)/7]$ гранями.

Литература

[1] M. Akian, S. Gaubert, A. Guterman, Linear independence over tropical semirings and beyond, *Contemporary Mathematics*, AMS, **495** (2009), 1–38.

[2] M. Akian, S. Gaubert, A. Guterman, Tropical polyhedra are equivalent to mean payoff games, *Internat. J. Algebra Comput.*, **22.01** (2012).

[3] F. d'Alessandro, E. Pasku, A combinatorial property for semigroups of matrices, *Semigroup Forum*, **67** (2003), 22–30.

[4] S. Arora, R. Ge, R. Kannan, A. Moitra, Computing a nonnegative matrix factorization — provably, in *Proceedings of the 44th symposium on Theory of Computing*, ACM, 2012.

[5] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, J.P. Quadrat, *Synchronization and Linearity*, Wiley, 1992.

[6] A.I. Barvinok. *Combinatorial Optimization and Computations in the Ring of Polynomials*, DIMACS Technical Report 93-13, 1993.

[7] A.I. Barvinok. Two Algorithmic Results for the Traveling Salesman Problem, *Mathematics of Operations Research*, **21(1)** (1996), 65–84.

[8] A. Barvinok, E. Kh. Gimadi, A. I. Serdyukov. The maximum traveling salesman problem, in *The Traveling Salesman problem and its variations*, (G. Gutin and A. Punnen, eds.), Kluwer, 2002.

[9] A. Barvinok, D.S. Johnson, G.J. Woeginger, and R. Woodroofe. The maximum traveling salesman problem under polyhedral norms, in Integer programming and combinatorial optimization, *Lecture Notes in Comput. Sci*, **1412**, Springer, Berlin, 1998.

[10] L. B. Beasley, Isolation number versus Boolean rank, *Linear Algebra Appl.*, **436** (2012), 3469–3474.

[11] L. B. Beasley, A. E. Guterman, Rank inequalities over semirings, *J. Korean Math. Soc.* **42(2)** (2005), 223–241.

[12] L. B. Beasley, T. J. Laffey, Real rank versus nonnegative rank, *Linear Algebra Appl.*, **431** (2009), 2330–2335.

[13] L. B. Beasley, S. G. Lee, S. Z. Song, Linear operators that preserve zero-term rank of Boolean matrices, *J. Korean Math. Soc.*, **36(6)** (1999), 1181–1190.

[14] L. B. Beasley, N. J. Pullman, Boolean-rank-preserving operators and Boolean-rank-1 spaces, *Linear Algebra Appl.*, **59** (1984), 55–77.

[15] L. B. Beasley, N. J. Pullman, Semiring rank versus column rank, *Linear Algebra Appl.*, **101** (1988), 33–48.

[16] A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative matrices*, The Mathematical Sciences, Classics in Applied Mathematics, 1979.

[17] S. Bezrukov, D. Froncek, S. J. Rosenberg, P. Kovar, On biclique coverings, *Discrete Math.*, **308** (2008), 319–323.

[18] R. Bieri, J. R. J. Groves, The geometry of the set of characters induced by valuations, *J. Reine Angew. Math.*, **347** (1984), 168–195.

[19] T. Bogart, A. N. Jensen, D. Speyer, B. Sturmfels, R. R. Thomas, Computing tropical varieties, *J. Symb. Comp.*, **42(1-2)** (2007), 54–73.

[20] R. A. Brualdi, R. Manber, and J. A. Ross, On the minimum rank of regular classes of matrices of zeros and ones, *J. Combin. Theory Ser. A*, **41** (1986), 32–49.

[21] T. van den Boom, B. De Schutter, Properties of MPC for max-plus-linear systems, *Eur. J. Control*, **8(5)** (2002), 453–462.

[22] P. Butkovic, Strong regularity of matrices - a survey of results, *Discrete Applied Math.*, **48** (1994), 45–68.

[23] P. Butkovic, Max-algebra: the linear algebra of combinatorics? *Linear Algebra Appl.*, **367** (2003), 313–335.

[24] P. Butkovic, *Introduction to max-algebra*, preprint, 2008.

[25] P. Butkovic, *Max-linear Systems: Theory and Algorithms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London Limited, 2010.

[26] P. Butkovic, R. A. Cuninghame-Green, S. Gaubert, Reducible spectral theory with applications to the robustness of matrices in max-algebra, *SIAM J. Matr. Anal. Appl.*, **31(3)** (2009), 1412–1431.

[27] D. Cartwright, M. Chan, Three notions of tropical rank for symmetric matrices, *Combinatorica*, **32(1)** (2012), 55–84.

[28] E. Cela, R. Rudolf, G. Woeginger, On the Barvinok rank of matrices, in *Proc. Symposium on Combinatorial Optimization (CO98)*, Brussels, 1998.

[29] T. M. Chan, All-pairs shortest paths for unweighted undirected graphs in $o(mn)$ time, *ACM Transactions on Algorithms*, **8(4).34** (2012).

[30] T. M. Chan, More algorithms for all-pairs shortest paths in weighted graphs, *SIAM Journal on Computing*, **39(5)** (2010), 2075–2089.

[31] M. Chan, A. N. Jensen, E. Rubei, The 4x4 minors of a 5xn matrix are a tropical basis, *Linear Algebra Appl.*, **435(7)** (2011), 1598–1611.

[32] G. Cohen, S. Gaubert, J.-P. Quadrat, Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now, *Ann. Rev. Control*, **23** (1999), 207–219.

[33] J. E. Cohen, U. G. Rothblum, Nonnegative ranks, decompositions, and factorizations of nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.*, **190** (1993), 149–168.

[34] M. Conforti, G. Cornuejols, G. Zambelli, Extended formulations in combinatorial optimization, *4OR*, **8(1)** (2010), 1–48.

[35] F. Cools, J. Draisma, S. Payne, E. Robeva, A tropical proof of the BrillЦ-Noether Theorem, *Adv. Math.*, **230(2)** (2012), 759–776.

[36] R. A. Cuninghame-Green, Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour, *Operational Research Quarterly*, **13(1)** (1962), 95–100.

[37] R. A. Cuninghame-Green, *Minimax Algebra*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[38] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York-London, 1962.

[39] D. de Caen, D. A. Gregory, Primes In the Semigroup of Boolean Matrices, *Linear Algebra Appl.*, **37** (1981), 119–134.

[40] D. de Caen, D. A. Gregory, N. J. Pullman, The Boolean rank of zero-one matrices, in *Proceedings of the 3rd Caribbean Conference on Combinatorics and Computing*, Department of Mathematics, University of the West Indies, Barbados, 1981.

[41] R. Dedekind. Uber die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, supplement to: P.G. Lejeune Dirichlet, *Vorlesungen ber Zahlentheorie*, 4te Aufl. Druck und Verlag, Braunschweig, 1894.

[42] B. De Schutter, *Max-algebraic system theory for discrete event systems*, Ph.D. thesis, Katholieke Univ. Leuven, 1996.

[43] M. Develin, *The moduli space of n tropically collinear points in* $\mathbb{R}^d$, Collect. Math., **56(1)** (2005), 1–19.

[44] M. Develin, *Tropical Secant Varieties of Linear Spaces*, Discr. Comp. Geom., **35(1)** (2006), 117–129.

[45] M. Develin, F. Santos, B. Sturmfels, On the rank of a tropical matrix, in *Discrete and Computational Geometry* (E. Goodman, J. Pach and E. Welzl, eds.), MSRI Publications, Cambridge Univ., Press, 2005.

[46] M. Dietzfelbinger, J. Hromkovic, G. Schnitger, A comparison of two lower-bound methods for communication complexity, *Theor. Comp. Sci.*, **168(1)** (1996), 39–51.

[47] M. Einsiedler, M. Kapranov, D. Lind. Non-Archimedean amoebas and tropical varieties, *J. Reine Angew. Math.*, **601** (2006), 139–157.

[48] A. Ene, W. G. Horne, N. Milosavljevic, P. Rao, R. Schreiber R. E. Tarjan, Fast exact and heuristic methods for role minimization problems, in *Proceedings of the 13th ACM Symposium on Access Control Models and Technologies*, ACM, New York, 2008.

[49] E. Engeler, *Metamathematik der Elementarmathematik*, Springer-Verlag, 1983.

[50] S. M. Ermakov, N. K. Krivulin, Efficient algorithms for tandem queueing system simulation, *Applied Mathematics Letters*, **7(6)** (1994), 39–43.

[51] F. O. Farid, I. A. Khan, Q.-W. Wang, On matrices over an arbitrary semiring and their generalized inverses, *Linear Algebra Appl.*, **439** (2013), 2085–2105.

[52] D. Farkas, Self-Injective Group Algebras, *J. Algebra*, **25** (1973), 313–315.

[53] S. Fiorini, V. Kaibel, K. Pashkovich, D. O. Theis, Combinatorial bounds on nonnegative rank and extended formulations, *Discrete Math.*, **313(1)** (2013), 67–83.

[54] S. Fiorini, S. Massar, S. Pokutta, H. R. Tiwary, R. de Wolf, Linear vs. semidefinite extended formulations: exponential separation and strong lower bounds, in *Proc. 44th Symp. on Th. of Comp.*, ACM, 2012.

[55] S. Fiorini, T. Rothvoß, H. R. Tiwary, Extended formulations for polygons, *Disc. Comp. Geom.*, **48(3)** (2012), 1-11.

[56] J. Ferrante, C. Rackoff, A decision procedure for the first order theory of real addition with order, *SIAM J. Computing*, **4** (1975), 69–76.

[57] P. C. Fishburn, P. L. Hammer, Bipartite dimensions and bipartite degrees of graphs, *Discrete Math.*, **160(1-3)** (1996), 127–148.

[58] M. Friesen, D. O. Theis, Fooling-sets and rank in nonzero characteristic, in *The Seventh European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*, Scuola Normale Superiore, 2013.

[59] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

[60] S. Gaubert, Methods and applications of (max,+) linear algebra, in *Proc. STACS 97*, Springer Berlin Heidelberg, 1997.

[61] N. Gillis, F. Glineur, On the Geometric Interpretation of the Nonnegative Rank, *Linear Algebra Appl.*, **437** (2012), 2685–2712.

[62] J. Goguen, The logic of inexact concepts, *Synthese*, **19** (1968/9), 325–373.

[63] J. S. Golan, *Semirings and their applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[64] M. Gondran, M. Minoux, Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioides et leur interpretation en theorie des graphes, *EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathematiques, Informatique*, **2** (1977), 25-41.

[65] M. Gondran, M. Minoux. L'independance lineaire dans les dioides, *E.D.F. — Bulletin de la Direction des Etudies et Recherches, Serie C — Mathematiques, Informatique*, **1** (1978), 67–90.

[66] M. Gondran, M. Minoux, Linear Algebra in Dioids: A Survey of Recent Results, *Annals of Discrete Mathematics*, **19** (1984), 147–164.

[67] M. Gondran, M. Minoux, *Graphs and Algorithms*, Wiley-Interscience, New York, 1984.

[68] M. Gondran, M. Minoux. *Graphs, Dioids and Semirings: New Models and Algorithms*, Springer Science+Business Media, LLC, 2008.

[69] J. Gouveia, P. A. Parillo, R. R. Thomas. Lifts of convex sets and cone factorizations, *Mathematics of Operations Research*, **38(2)** (2013), 248–264.

[70] J. Gouveia, R. Z. Robinson, R. R. Thomas. Polytopes of minimum positive semidefinite rank, *Discrete and Computational Geometry*, **50(3)** (2013), 679–699.

[71] D. A. Gregory, N. J. Pullman, K. F. Jones, J. R. Lundgren, Biclique Coverings of Regular Bigraphs and Minimum Semiring Ranks of Regular Matrices, *J. Combin. Theory Ser. B*, **51** (1991), 73–89.

[72] Y. Han, T. Takaoka, An $O(n^3 \log\log n/\log^2 n)$ Time Algorithm for All Pairs Shortest Paths, in *Proc. Algorithm Theory–SWAT 2012*, Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[73] K. A. S. Hefner, J. R. Lundgren, Minimum matrix rank of k-regular $(0,1)$ matrices, *Linear Algebra Appl.*, **133** (1990), 43–52.

[74] B. Heidergott, G. J. Olsder, J. van der Woude. *Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max- Plus Algebra and Its Applications*, Princeton Univ. Press, 2006.

[75] P. Hrubeš, On the nonnegative rank of distance matrices, *Information Processing Letters*, **112(11)** (2012), 457–461.

[76] A. Hultman, J. Jonsson, The topology of the space of matrices of Barvinok rank two, *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, **51(2)** (2010), 373–390.

[77] Z. Izhakian, Basics of linear algebra over the extended tropical semiring, *Contemp. Math.*, **495** (2010), 173–191.

[78] Z. Izhakian, Semigroup identities in the monoid of triangular tropical matrices, *Semigroup Forum*, **88(1)** (2014), 145–161.

[79] Z. Izhakian, S. W. Margolis, Semigroup identities in the monoid of two-by-two tropical matrices, *Semigroup Forum*, **80(2)** (2010), 191–218.

[80] M. Johnson, M. Kambites, Multiplicative structure of 2×2 tropical matrices, *Linear Algebra Appl.*, 435 (2011), 1612–1625.

[81] M. Johnson, M. Kambites, Green's J-order and the rank of tropical matrices, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **217(2)** (2013), 280–292.

[82] V. Kaibel, Extended Formulations in Combinatorial Optimization, *Optima*, **85** (2011), 2–7.

[83] A. M. Kanan, Z. Z. Petrovic, Note on cardinality of bases in semilinear spaces over zerosumfree semirings, *Linear Algebra Appl.*, **439** (2013) 2795–2799.

[84] K. H. Kim, F. W. Roush, Generalized fuzzy matrices, *Fuzzy sets and systems*, **4(3)** (1980), 293–315.

[85] K. H. Kim, F. W. Roush, *Factorization of polynomials in one variable over the tropical semiring*, preprint, arXiv:0501167.

[86] K. H. Kim, N. F. Roush, Kapranov rank vs. tropical rank, *Proc. Amer. Math. Soc.* **134(9)**(2006), 2487–2494.

[87] V. Klee, R. Ladner, and R. Manber. Sign-solvability revisited, *Linear Algebra Appl.*, **59** (1984), 131–158.

[88] V. N. Kolokol'tsov, V. P. Maslov, *Idempotent Analysis and Applications*, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[89] И. Б. Кожухов, Самоинъективные полугрупповые кольца инверсных полугрупп, *Известия высших учебных заведений. Математика*, **2** (1981), 46–51.

[90] I. B. Kozhukhov, On self-injective semigroup rings, *Russian Mathematical Surveys*, **52(3)** (1997), 609–610.

[91] N. K. Krivulin, A max-algebra approach to modeling and simulation of tandem queueing systems, *Mathematical and Computer Modelling*, **22(3)** (1995), 25–37.

[92] Н. К. Кривулин, Собственные значения и векторы матрицы в идемпотентной алгебре, *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.*, **2** (2006), 29–40.

[93] Н. К. Кривулин, О решении обобщенных линейных векторных уравнений в идемпотентной алгебре, *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.*, **1** (2006), 23–36.

[94] Н. К. Кривулин, *Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем*, Издательство Санкт-Петербургского университета, Санкт-Петербург, 2009.

[95] Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems, *Linear Algebra Appl.* **468** (2015), 211–232.

[96] W. Krull, Die verschiedenen Arten der Hauptidealringe, in *Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss.*, A. Loewy (ed.), 1924.

[97] H. W. Kuhn, The Hungarian Method for the assignment problem, *Naval Research Logistics Quarterly*, **2** (1955), 83–97.

[98] А. Г. Курош, *Лекции по общей алгебре*, 2-е изд., Москва, Наука, 1973.

[99] D. D. Lee, H. S. Seung, Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization, *Nature*, **401** (1999), 788–791.

[100] Z. Li, Y. Gao, M. Arav, F. Gong, W. Gao, F. J. Hall, H. van der Holst, Sign patterns with minimum rank 2 and upper bounds on minimum ranks, *Linear Multilinear Algebra* **61(7)** (2013), 895–908.

[101] M. M. Lin and M. T. Chu, On the nonnegative rank of Euclidean distance matrices, *Linear Algebra Appl.*, **433** (2010), 681–689.

[102] Г. Л. Литвинов, Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **326** (2005), 145–182.

[103] G. L. Litvinov, Idempotent and tropical mathematics; complexity of algorithms and interval analysis, *Computers and Mathematics with Applications*, **65(10)** (2013), 1483-1496.

[104] G. Litvinov, V. Maslov, Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications, in *Idempotency*, J. Gunawardena (ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[105] D. Maclagan, B. Sturmfels, *Introduction to tropical geometry*, volume **161** of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2015.

[106] Yun Mao, L. Saul, J. M. Smith, IDES: An Internet Distance Estimation Service for Large Networks, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **24(12)** (2006), 2273–2284.

[107] В. П. Маслов, О новом принципе суперпозиции для задач оптимизации, *УМН*, **42:3(255)** (1987), 39–48.

[108] G. Mikhalkin, Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry, in *Different faces of geometry*, Int. Math. Ser. (N. Y.), Kluwer, Plenum, New York, 2004, 257–300.

[109] G. Mikhalkin, Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$, *J. Amer. Math. Soc.*, **18(2)** (2005), 313–377.

[110] H. Minc, *Permanents*, Addison-Wesley, Reading, 1978.

[111] E. Noether, Abstrakter Aufbau der idealtheorie in algebraischen Zahl-und Funktionenkörpern, *Math. Ann.*, **96(1)** (1927), 26–61.

[112] J. Okninski, *Semigroup algebras*, Marcel Dekker, New York, 1991.

[113] P. Paatero, Least squares formulation of robust non-negative factor analysis, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, **37(1)** (1997), 23–35.

[114] L. Pachter, B. Sturmfels, *Algebraic Statistics for Computational Biology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

[115] A. Padrol, J. Pfeifle, *Polygons as slices of higher-dimensional polytopes*, preprint, arXiv:1404.2443.

[116] K. Pashkovich, S. Weltge, *Hidden Vertices in Extensions of Polytopes*, preprint, arXiv:1404.2752.

[117] D. S. Passman, On the ring of quotients of a group ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **33(2)** (1972), 221–225.

[118] J.-E. Pin, Tropical semirings, in *Idempotency*, Publ. Newton Inst., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[119] B. Poonen, Maximally complete fields, *Enseign. Math.*, **39(1–2)** (1993), 87–106.

[120] P. L. Poplin, R. E. Hartwig. Determinantal identities over commutative semirings, *Linear Algebra Appl.*, **387** (1984), 99–132.

[121] O. A. Pshenitsyna, Factor and term ranks for matrix union over a semiring, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, **9(3)** (2003), 175–197.

[122] S. Ramanujan, A proof of Bertrand's postulate, *J. Ind. Math. Soc.*, **11** (1919), 181–182.

[123] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, T. Theobald, First steps in tropical geometry, *Contemporary Mathematics*, AMS, **377**(2004), 1–38.

[124] F. Santos, The Cayley trick and triangulations of products of simplices, *Contemporary Mathematics*, AMS, **374** (2005), 151–178.

[125] M. N. Schmidt, J. Larsen, F. T. Hsiao, Wind noise reduction using non-negative sparse coding, in *Proc. IEEE Workshop on Machine Learning for Signal Processing*, 2007.

[126] Q.-Y. Shu, X.-P. Wang, Bases in semilinear spaces over zerosumfree semirings, *Linear Algebra Appl.*, **435** (2011), 2681–2692.

[127] Q.-Y. Shu, X.-P. Wang, The cardinality of bases in semilinear spaces over commutative semirings, *Linear Algebra Appl.*, **459** (2014), 83–100.

[128] G. Shu, D. Lee, M. Yannakakis, A note on broadcast encryption key management with applications to large scale emergency alert systems, in *Proceedings of the 20th International Parallel and Distributed Processing Symposium*, IEEE Computer Society, Washington, 2006.

[129] I. Simon, Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring, in *Mathematical foundations of computer science*, Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, Berlin, 1988.

[130] D. Speyer, B. Sturmfels, The tropical Grassmanian, *Adv. Geom.*, **4** (2004), 389–411.

[131] D. Speyer, B. Sturmfels, Tropical Mathematics, *Mathematics Magazine*, **82(3)** (2009), 163–173.

[132] Yi-Jia Tan, Bases in semimodules over commutative semirings, *Linear Algebra Appl.*, **443** (2014), 139–152.

[133] C. Thomassen. The Even Cycle Problem for Directed Graphs, *J. Amer. Math. Soc.*, **5** (1992), 217–229.

[134] H. S. Vandiver, Note on a simple type of algebra in which cancellation law of addition does not hold, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40** (1934), 914–920.

[135] S. A. Vavasis, On the complexity of nonnegative matrix factorization, *SIAM Journal on Optimization*, **20(3)** (2009), 1364–1377.

[136] E. M. Vechtomov, I. V. Lubyagina, Cyclic semirings with idempotent non-commutative addition, *Journal of Mathematical Sciences*, **185(3)** (2012), 367–380.

[137] E. M. Vechtomov, A. A. Petrov, Multiplicatively idempotent semirings, *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, **18(4)** (2013), 41–70.

[138] N. N. Vorobyev, Extremal algebra of positive matrices, *Elektron. Informationsverarbeitung und Kybernetik*, **3** (1967), 39–71.

[139] E. Wagneur, Moduloids and pseudomodules 1. Dimension theory, *Discrete Math.*, **98(1)** (1991), 57–73.

[140] D. Wilding, M. Johnson, M. Kambites, Exact rings and semirings, *J. Algebra*, **388** (2013), 324–337.

[141] M. Yannakakis, Expressing combinatorial optimization problems by linear programs, *Comput. System Sci.*, **43** (1991), 441–466.

[142] S. Zhao, X.-P. Wang, Invertible matrices and semilinear spaces over commutative semirings, *Information Sciences*, **180** (2010), 5115–5124.

[143] U. Zwick, All pairs shortest paths using bridging sets and rectangular matrix multiplication, *Journal of the ACM*, **49(3)** (2002), 289–317.

Публикации автора по теме диссертации

[144] Ya. Shitov, Tropical lower bounds for extended formulations, *Mathematical Programming*, **153(1)** (2015), 67–74.

[145] Ya. Shitov, Mixtures of star trees and deficiency graphs, *European Journal of Combinatorics*, **44** (2015), 140–143.

[146] Ya. Shitov, Bases of a free semimodule are small, *Linear Algebra and Its Applications*, **466** (2015), 38–40.

[147] Ya. Shitov, Two concepts of singularity for matrices over semirings, *Linear and Multilinear Algebra*, **63(1)** (2015), 201–220.

[148] Ya. Shitov, Nonnegative rank of a matrix with one negative eigenvalue, *Linear and Multilinear Algebra*, **63(2)** (2015), 221.

[149] Ya. Shitov, On the max-min and tropical CP-rank conjectures, *Linear and Multilinear Algebra*, DOI 10.1080/03081087.2015.1032199, 2015.

[150] Ya. Shitov, Studying nonnegative factorizations with tools from linear algebra over a semiring, *Communications in Algebra*, **43** (2015), 4359–4366.

[151] Ya. Shitov, Sign patterns of rational matrices with large rank, *European Journal of Combinatorics*, **42** (2014), 107–111.

[152] Ya. Shitov, Group rings that are exact, *Journal of Algebra*, **403** (2014), 179–184.

[153] Ya. Shitov, Tropical semimodules of dimension two, *Алгебра и Анализ*, **26(2)** (2014), 224–236.

[154] Ya. Shitov, The complexity of tropical matrix factorization, *Advances in Mathematics*, **254** (2014), 138–156.

[155] Ya. Shitov, An upper bound for nonnegative rank, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **122** (2014), 126–132.

[156] Ya. Shitov, Mixed subdivisions and ranks of tropical matrices, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **142** (2014), 15–19.

[157] Ya. Shitov, Detecting matrices of combinatorial rank three, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **126** (2014), 166–176.

[158] Ya. Shitov, How many Boolean polynomials are irreducible?, *International Journal of Algebra and Computataion*, **24** (2014), 1183–1190.

[159] Я. Шитов, О булевых матрицах полного факторизационного ранга, *Математический сборник*, **204(11)** (2013), 151–160.

[160] Ya. Shitov, On the complexity of Boolean matrix ranks, *Linear Algebra and Its Applications*, **439** (2013), 2500–2502.

[161] Ya. Shitov, When do the r-by-r minors of a matrix form a tropical basis?, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **120** (2013), 1166–1201.

[162] Ya. Shitov, Tropical matrices and group representations, *Journal of Algebra*, **370** (2012), 1–4.

[163] Ya. Shitov, On tropical matrices of small factor rank, *Linear Algebra and its Applications*, **437** (2012), 2727–2732.

[164] Ya. N. Shitov, A. E. Guterman, Tropical patterns of matrices and the Gondran-Minoux rank function, *Linear Algebra and its Applications*, **437** (2012), 1793–1811.

[165] Я. Шитов, О матрицах с различными тропическим рангом и рангом Капранова, *Математические заметки*, **92** (2012), 316–320.

[166] Ya. Shitov, On the Kapranov ranks of tropical matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **436** (2012), 3247–3253.

[167] Я. Шитов, О совпадении факторизационного ранга и ранга Гондрана–Мину матриц над полукольцом, *Фундаментальная и прикладная математика*, **17(6)** (2011/2012), 223–232.

[168] Я. Шитов, Пример матрицы размера 6x6 с различными тропическим рангом и рангом Капранова, *Вестник Московского Университета, Серия 1*, **66(5)** (2011), 58–61.

[169] Ya. Shitov, Inequalities for Gondran-Minoux rank and idempotent semirings, *Linear Algebra and its Applications*, **435** (2011), 1769–1777.

[170] Я. Шитов, Минимальный пример матрицы, различающей GM- и d-ранги в макс-алгебрах, *Фундаментальная и прикладная математика*, **14(4)** (2008), 231–268.