

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор федерального государственного  
бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования «Московский педаго-  
гогический

государственный университет»

академик РАН и РАО,

доктор физико-математических наук

профессор Селтенков А.Л.



## ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования «Московский педагогический  
государственный университет» на диссертационную работу Шитова  
Ярослава Николаевича «Линейная алгебра над полукольцами»,  
представленную на соискание учёной степени доктора физико –  
математических наук по специальности 01.01.06 – математическая  
логика, алгебра и теория чисел.

Диссертационная работа представляет собой фундаментальное исследова-  
ние в области современной линейной алгебры, а также тропической математики  
и теории колец. Диссертантом были решены важнейшие проблемы, относящие-  
ся к перечисленным областям, что позволяет оценить его работу как выдающийся  
вклад в развитие современной линейной алгебры и тропической математики.  
В частности, Я.Н. Шитову удалось решить стоявшую с 1996 года и упомяну-  
тую в ряде известных публикаций последнего времени проблему А. Барвинка о  
вычислительной сложности факторизации тропических матриц. Среди других  
важнейших проблем, решенных диссертантом – проблема о тропическом бази-  
се, поставленная в 2005 году Девелином, Сантосом и Штурмфельсом, а также  
проблемы о булевых матрицах, поставленные в известных работах Бутковича  
1994 года и Гобера 1997 года.

Диссертационная работа состоит из введения, восьми глав, разбитых на разделы, заключения и списка цитируемой литературы.

Во введении диссертант описывает тему своего исследования, а также обосновывает актуальность этой темы и описывает некоторые ее приложения. Автор приводит краткий обзор содержания работы.

В первой главе диссертант вводит определения основных понятий теории полуколец, тропической математики, а также напоминает некоторые важные результаты, относящиеся к указанным областям науки. Диссертант приводит формулировку одного из основных результатов — теоремы о тропическом базисе — но ее доказательству посвящена одна из последующих глав.

Во второй главе Я.Н. Шитов обращается к вопросам линейной алгебры над общими полукольцами. Он доказывает верхнюю оценку размерности базиса свободного полумодуля, тем самым давая решение проблемы Тан. Автор изучает свойства ранговых функций матриц над полукольцами общего вида и получает ряд сильных результатов, — в том числе, характеризацию идемпотентных полуколец, над которыми верны неравенства на ранг произведения матриц.

В третьей главе диссертант исследует структуру матриц с точки зрения теории полуколец. Автор показывает, что всякая подгруппа полугруппы тропических матриц порядка  $n$  допускает точное представление мономиальными матрицами того же размера, что позволяет решить проблему Джонсон и Камбитеса 2011 года. Кроме того, Я.Н. Шитов исследует свойства монотонности ранговых функций матриц относительно порядков Грина и строит нетривиальное полугрупповое тождество, которому удовлетворяют тропические матрицы порядка три.

В четвертой главе изучаются свойства булевых матриц, проблема их факторизации и вычисления ранговых функций. Диссертант приводит решение проблемы Гобера 1997 года, показывая, что задача вычисления детерминантного ранга булевой матрицы относится к классу NP-полных задач; автор дает также решение проблемы Бутковича, доказывая, что задача вычисления тропического ранга относится к тому же классу.

В пятой главе диссертант исследует ранговые функции тропических матриц. Одним из основных методов, используемых для получения результатов главы, является метод шаблонов тропических матриц, который был разработан диссертантом и излагается в данной главе. Автор получает решение проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса о теоретико-графической характеристике

функций факторизационного ранга и ранга Капранова тропической матрицы, а также решение проблемы Картрайта и Чан о симметрическом ранге. Диссертант получает верхние оценки ранга Гондрана-Мину и детерминантного ранга в терминах тропического ранга матрицы.

Шестая глава является одной из центральных в тексте диссертации; она целиком посвящена решению упомянутой выше проблемы о тропическом базисе.

Седьмая глава посвящена проблеме факторизации тропических матриц. Автор приводит решение проблемы Барвинка 1996 года, бывшей, несмотря на заметный интерес математического сообщества, долгое время открытой. Кроме того, диссертант приводит построение алгоритмов, которые позволяют распознавать тропические матрицы малого факторизационного ранга за полиномиальное время, и тем самым решает еще одну проблему Девелина, Сантоса и Штурмфельса.

В восьмой главе автор обращается к проблеме факторизации неотрицательных матриц. Он описывает приложения этой проблемы и строит нижнюю оценку неотрицательного ранга с помощью результатов тропической математики. Диссертант приводит решение проблемы Бисли и Лаффи: он показывает, что любая неотрицательная матрица ранга три размера  $n \times n$  может быть представлена в виде суммы  $\lfloor 6(n+1)/7 \rfloor$  неотрицательных матриц ранга один.

Особо отметим следующие крупные научные достижения автора диссертации: решена проблема Барвинка 1996 года о сложности факторизации тропических матриц; решены проблемы Бутковича 1994 года и Гобера 1997 года о вычислительной сложности ранга булевой матрицы; решена проблема Девелина, Сантоса и Штурмфельса 2005 года о характеристике факторизационного ранга тропической матрицы в терминах теории графов; решена проблема Чан, Йенсена и Рубеи 2011 года о тропическом базисе; доказана гипотеза Ли 2013 года о граничном ранге вещественной матрицы; дан ответ на вопрос Акян, Гобера и Гутермана 2008 года о тропических матрицах с различными строчным и столбцовым рангами; доказана гипотеза Тан 2014 года о мощности базиса свободного полумодуля; доказана гипотеза Джонсон и Камбитеса 2011 года о точных представлениях мономиальными матрицами групп, состоящих из тропических матриц; решена проблема Бисли и Лаффи 2009 года о неотрицательном ранге матрицы.

Диссертация Я.Н. Шитова является выдающейся научной работой и вносит фундаментальный вклад в развитие современной линейной алгебры. Работа вызывает не меньший интерес и с точки зрения тропической математики, структурной теории полуколец и других активно развивающихся областей современной линейной алгебры. Представленная диссертация является самостоятельно выполненной, законченной научно-исследовательской работой, посвященной решению важнейших проблем в области линейной алгебры.

Перечисленные основные результаты являются научными результатами самого высокого уровня. В целом, диссертация Я.Н. Шитова заслуживает самой высокой оценки. Полученные результаты могут быть использованы в организациях, занимающихся решением задач в области тропической математики, линейной и абстрактной алгебры, например в МГУ, СПбГУ, НИУ ВШЭ, КГУ, НГУ, МИАН, ВЦ РАН, МПГУ, РГТЭУ, ИВМ РАН и других.

В качестве недостатков диссертации следует отметить типографические неточности. Например, на странице 14 диссертант использует кавычки-«лапки», хотя в русскоязычных текстах принято использовать кавычки-«елочки». При изложении результатов главы 2 следовало бы дать более подробное описание приложений теории колец. Кроме того, столь солидная и весьма интересная работа должна была бы сопровождаться более четким и широким списком открытых проблем. Это несомненно дало бы возможность лучше представить перспективы дальнейших исследований.

Отмеченные недостатки не снижают общей положительной характеристики диссертации. Диссертация логично построена, содержит обширный тщательно проработанный список литературы и ряд важных примеров, иллюстрирующих как полученные результаты, так и невозможность их дальнейшего расширения. Структура и содержание работы соответствуют поставленным целям и задачам исследования. Полученные результаты являются новыми и вносят заметный вклад в развитие современной линейной алгебры; результаты снабжены полными и хорошо изложенными доказательствами.

Все основные результаты диссертации опубликованы в 27 работах, из них 26 написаны автором самостоятельно и одна - в соавторстве с научным консультантом. Все 27 работ опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов. Автореферат написан очень четко и информативно. Содержание диссертации соответствует содержанию автореферата и опубликованных работ.

Тема, содержание и результаты диссертации Шитова Ярослава Николаевича отвечают Паспорту специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Все изложенное позволяет сделать вывод, что диссертация представляет собой законченную научно-квалификационную работу на актуальную тему, полностью отвечает требованиям пп. 9, 10, 11, 13, 14 Положения о порядке присуждения ученых степеней ВАК Министерства образования и науки РФ от 24 сентября 2013 г. № 842, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор Ярослав Николаевич Шитов заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук.

Отзыв подготовлен Гришиным Александром Владимировичем, профессором кафедры алгебры федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский педагогический государственный университет», доктором физико – математических наук (специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел).

Отзыв обсуждён и единогласно утверждён на заседании кафедры алгебры (протокол № 5 от 23.11.2015).

Заведующий кафедрой алгебры федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский педагогический государственный университет»

д.ф.-м.н., профессор



Фомин А.А.



Контактные данные  
Гришин Александр Владимирович  
кафедра алгебры федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский педагогический государственный университет»  
107140, город Москва, улица Краснопрудная, дом 14, кабинет 212  
тел. (499)264 – 46 – 83  
E-mail: algebra@mpgu.edu