Отзыв научного консультанта
на диссертационную работу Шитова Я. Н.
«Линейная алгебра над полукольцами»,
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертационная работа Шитова Ярослава Николаевича «Линейная алгебра над полукольцами», представленная на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (физико-математические науки), посвящена развитию линейно-алгебраической теории над полукольцами, разработке методов изучения структуры полуколец и алгебраических инвариантов матриц над полукольцами, а также применению полученных результатов к решению проблем линейной алгебры, дискретной геометрии, тропической математики, комбинаторной оптимизации, теории полугрупп и теории полуколец. Рассматриваемые в диссертации понятия и полученные результаты непосредственным образом связаны с рядом актуальных проблем комбинаторной оптимизации, вычислительной геометрии, теории вычислительной сложности и других областей науки.

Рассматриваемая в диссертации тематика в течение нескольких последних десятилетий активно исследуется ведущими мировыми ученными и научными коллективами как в связи с возникающими в ней глубокими теоретическими проблемами, так и в связи с интересными приложениями в экономике, теории массовых коммуникаций, интернет-поиске, генетике. Таким образом, актуальность темы диссертации обусловлена наличием большого числа открытых проблем, а также многочисленных приложений результатов, получаемых в этой области. Представленная работа не только решает ряд глубоких и важных открытых вопросов, сформулированных в работах В.П. Маслова, М.М. Капранова, Б. Штурмфельса и других, но и предлагает новые связи между различными областями линейной алгебры над полукольцами, в частности над полукольцом неотрицательных целых чисел и над макс-алгебрами. Также хочется отдельно отметить, что в работе предложены и развиты новые методы исследования, уже играющие важную роль в развитии этой научной области. В этом смысле особую роль играет метод сведения вычислительных задач линейной алгебры к проблемам теории графов, разработанный автором; этот метод позволил получить полезную информацию о взаимном поведении различных матричных инвариантов, а также доказать важные результаты, связанные со сложностью вычисления этих инвариантов. Еще один важный метод, разработанный диссертантом, позволяет получать нижние оценки сложности расширений многогранников, в частности, он позволил получить серьезные продвижения в теории расширенных представлений. Оба метода получили высокую оценку математического сообщества.

В качестве основных результатов диссертации хочу отметить следующие крупные научные проблемы, решенные диссертантом и бывшие до опубликования его работ открытыми:

- проблема Бисли и Лаффи 2009 года: диссертантом показано, что для решения задачи оптимизации линейного функционала на выпуклом n-угольнике достаточно решить соответствующую задачу линейного программирования, содержащую [6(n+1)/7] неравенств,
- разработка новых быстрых алгоритмов факторизации матриц и решение соответствующих проблем Барвинка 1996 года и Девелина, Сантоса, Штурмфельса 2005 года,
- доказательство гипотезы Джонсон и Камбитеса 2011 года о подгруппах полугруппы тропических матриц;
- решение проблем Бутковича 1994 года и Гобера 1997 года о вычислительной сложности ранга булевой матрицы;
- решение проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса 2005 года о геометрической характеризации ранга Капранова тропической матрицы;
- решение проблемы Чан, Йенсена и Рубеи 2011 года о тропическом базисе идеала, порожденного минорами фиксированного порядка;
- решение проблемы Картрайта и Чан 2012 года о комбинаторной характеризации симметрического ранга тропической матрицы;
- решение проблемы Барвинка 1996 года о вычислительной сложности факторизации тропических матриц;
- решение проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса 2005 года, а именно, построение быстрого алгоритма распознавания матриц факторизационного ранга три;
- доказательство гипотезы Ли 2013 года о связи граничного и классического рангов вещественных матриц.

Отдельно отмечу, что первые два результата имеют важное прикладное значение.

Совокупность полученных результатов несомненно является новым крупным научным достижением в области линейной алгебры. Решен ряд открытых проблем и предложены новые оригинальные методы их исследования. Полученные результаты открывают ряд новых научных направлений в алгебре, дискретной геометрии и теории полугрупп и вносят фундаментальный вклад в их развитие.

Рассмотрим содержание работы по главам.

В главе 1 диссертантом приводятся базовые понятия теории полуколец и матриц над полукольцами. Оказывается, что такие фундаментальные понятия, как размерность пространства, линейная зависимость векторов и ранг матрицы, допускают различные трактовки в полукольцевой линейной алгебре; в самом деле, для различных приложений оказывается полезным рассматривать различные понятия размерности и линейной зависимости, а также различные ранговые функции матриц. В главе приведены определения этих понятий и изучены их основные свойства.

В главе 2 исследуются основные объекты линейной алгебры над абстрактными полукольцами. Автор иллюстрирует основные понятия линейной алгебры над полукольцами, введенные в первой главе, и применяет понятия линейной зависимости, размерности и ранга к изучению свойств различных полуколец. В разделе 2.1 исследуются базисы и линейные отображения полумодулей. В первой части раздела доказывается результат о мощности базиса свободного полумодуля: если наибольшая мощность базиса коммутативного полукольца R, рассматриваемого как модуль над собой, конечна и равна q, то для базисов полумодуля R^n возможны мощности n, n+1, ... , qn и только они. Во второй части раздела 2.1 приводится решение проблемы Уайлдинга, Джонсон и Камбитеса 2013 года о локально самоинъективных кольцах: диссертант доказывает, что групповое кольцо R[G] является локально самоинъективным слева в том и только том случае, когда кольцо R локально самоинъективно слева и группа G локально конечна. В разделе 2.2 обсуждается задача факторизации матриц над различными полукольцами. Эта задача восходит к базовому результату классической линейной алгебры: ранг матрицы A с элементами из некоторого поля равен наименьшему числу k, для которого найдутся матрица B размера m x k и матрица C размера k x n, удовлетворяющие условию A=BC. В разделе 2.2 получено описание полуколец, для матриц над которыми выполняется указанное равенство.

В главе 3 обсуждается структура полугруппы квадратных матриц фиксированного порядка над заданным полукольцом. Отметим, что в отличие от классического случая матриц над полем или кольцом, множество таких матриц не обладает структурой кольца, что в значительной мере затрудняет их изучение. С другой стороны, интерес вызывают многие вопросы, связанные с полугрупповой структурой множества матриц, в том числе описание отношений Грина, подгрупп, идемпотентов и некоторые другие. Изучение этих вопросов, с одной стороны, позволяет получить полезную информацию о свойствах множества матриц с точки зрения полугрупп, и с другой стороны, доказать ряд результатов о структуре полуколец, матрицы над которыми удовлетворяют тем или иным условиям, рассмотрение которых связано с приложениями теории полугрупп. В разделе 3.1 изучается связь отношений Грина на полугруппе матриц порядка n над полукольцом и ранговых функций этих матриц. В разделе 3.2 продолжается изучение тропических матрицы с точки зрения теории полугрупп. Целью этого раздела является доказательство гипотезы, сформулированной Джонсон и Камбитесом в 2011 году. А именно, основным результатом раздела является следующая теорема: если группа G обладает точным представлением тропическими матрицами порядка n, то G содержит нормальную абелеву подгруппу без кручения индекса, не превосходящего n! В разделе 3.3

диссертантом построено тождество для верхнетреугольных тропических матриц порядка три.

Глава 4 посвящена исследованию ранговых функций над бинарным булевым полукольцом. В силу вложения бинарного полукольца в тропическое полукольцо изучение ранговых функций булевых матриц представляет интерес с точки зрения тропической линейной алгебры. В самом деле, понятие тропического ранга булевой матрицы оказывается полезным в различных задачах тропической геометрии. В разделе 4.1 изложены результаты, описывающие сложность вычисления ранговых функций булевых матриц. В частности, получены решения проблем Бутковича 1994 года и Гобера 1997 года о вычислительной сложности ранга булевой матрицы. Раздел 4.2 посвящен проблеме факторизации булевых матриц; необходимость ее изучения обусловлена приложениями в комбинаторике, вычислительной математике и других областях науки. Диссертант доказывает существование факторизации булевых матриц с достаточно большим количеством единичных элементов и приводит примеры матриц, показывающие асимптотическую оптимальность доказанной им теоремы. Раздел 4.3 посвящен комбинаторному анализу свойств ранговых функций, и многие результаты этого раздела находят применение в последующих главах. Кроме того, рассматривается понятие граничного ранга матрицы и решается одна из проблем о связи граничного и классического рангов вещественных матриц, которая до публикаций автора диссертации была открытой.

Глава 5 посвящена исследованию свойств ранговых функций тропических матриц. Особое внимание уделено тем функциям, которые важны для различных приложений тропической линейной алгебры: детерминантному и тропическому рангам, рангам Капранова и Гондрана – Мину, факторизационному рангу. Указанные ранговые функции возникают из рассмотрения проблем комбинаторной оптимизации, алгебраической геометрии, дискретных динамических систем, теории расписаний, алгоритмов кластеризации и ряда других. Для доказательства основных результатов главы важен метод шаблонов тропических матриц, который в целом описан в первом разделе и обоснованию которого посвящен второй раздел этой главы. В разделе 5.1 вводится понятие шаблона тропической матрицы и показывается его связь с понятием смешанного разбиения суммы Минковского выпуклых многогранников. Получен ответ на вопрос Девелина, Сантоса и Штурмфельса 2005 года: приведен пример матриц, которые индуцируют одинаковые смешанные разбиения суммы симплексов и имеют разные факторизационные ранги и разные ранги Капранова. В разделе 5.2 приведено обоснование метода шаблонов, и обсуждается его применение для изучения свойств линейной зависимости в смысле Гондрана-Мину. Раздел 5.3 посвящен обсуждению приложений метода тропических шаблонов.

В главе 6 построена теория, позволяющая решить, в частности, проблему из области тропической алгебраической геометрии, которая была впервые сформулирована в печатном виде Чан, Йенсеном и Рубеи в 2011 году, но частные случаи этой проблемы изучались ранее Девелином, Сантосом, Штурмфельсом и другими математиками. Основной результат главы представлен следующей теоремой: миноры порядка r матрицы переменных размера d x n образуют тропический базис в том и только том случае, когда выполнено какое-либо из следующих условий: (1) $r<4$; (2) $r=\min(d,n)$; (3) $r=4$ и $\min(d,n)<7$.

В главе 7 изучается проблема факторизации тропических матриц и свойства связанной с этой проблемой функции факторизационного ранга. Важной проблемой, связанной с изучением факторизационного ранга, является его вычислительная сложность. Эта проблема разрешима алгоритмически применением алгоритма элиминации кванторов. Однако крайне высокая вычислительная сложность алгоритма элиминации кванторов делает упомянутый алгоритм непригодным для практического применения, и потому встает вопрос о вычислительной сложности задачи факторизации тропических матриц. Автор доказывает, что факторизация матриц является NP-сложной проблемой, даже если их ранг не превосходит трех, тем самым решая проблему Барвинка 1996 года. Диссертант приводит быстрый алгоритм факторизации матриц ранга три, решая тем самым проблему Девелина, Сантоса и Штурмфельса 2005 года.

Глава 8 посвящена обсуждению важной для различных приложений и бурно развивающейся в настоящее время теории факторизации неотрицательных матриц. В разделе 8.1 автор строит контрпример к гипотезе Бисли и Лаффи 2009 года и доказывает следующую теорему: Существуют симметрические неотрицательные матрицы A классического ранга три, имеющие ровно одно отрицательное собственное значение и сколь угодно большой неотрицательный ранг. Результаты, изложенные в разделе 8.2, находят важные приложения в теории расширенных представлений многогранников. Автор показывает, что неотрицательный ранг матрицы порядка n и ранга три не превосходит $6n/7 + 1$. В качестве следствия этого результата доказано, что всякий выпуклый n-угольник является проекцией многогранника с не более, чем $6n/7 + 1$ гранями. В разделе 8.3 исследования нижних оценок сложности расширения многогранников продолжаются с использованием тропических методов.

В качестве недостатка диссертации должен отметить ряд типографических погрешностей. В частности, такие обозначения как rank, det, trop и подобные должны набираться прямым шрифтом, в то время как диссертант в некоторых случаях использует курсив (например, в формулировке теоремы 4.3.27 и в пункте 2 доказательства теоремы 6.2.2). Отмеченные недостатки не снижают общей положительной характеристики работы, содержащей яркие и важные результаты.

Таким образом, в работе Я.Н. Шитова открыт ряд новых научных направлений и внесен фундаментальный вклад в их развитие, в частности, разработаны новые оригинальные методы исследования, чем обусловлена научная новизна и значимость представленной диссертационной работы.

Практическое значение работы состоит в полном и всестороннем исследовании рассматриваемых теоретических проблем. Полученные результаты являются новыми, актуальными, достоверными, все материалы своевременно опубликованы в центральной печати в России и за рубежом и прошли всестороннюю квалифицированную апробацию. Система предложенных и доказанных автором теоретических положений несомненно является новым научным достижением в алгебре.

Автореферат достаточно полно и правильно отражает основные результаты диссертации. Диссертационная работа Шитова Ярослава Николаевича «Линейная алгебра над полукольцами» в целом является законченным научным достижениям и удовлетворяет всем требованиям предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (физико-математические науки), а ее автор заслуживает присуждения искомой ученой степени.

Научный консультант:

25.05.2015 г.

д.ф.-м.н. А. Э. Гутерман
профессор кафедры высшей алгебры
ФГБОУ ВО «Московский
государственный университет имени М.В. Ломоносова»,
guterman@list.ru, 8(495)-939-16-11,
119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, ГЗ МГУ, механико-математический факультет, каф. высшей алгебры

Подпись профессора А.Э. Гутермана заверяю:

и.о. декана Механико-математического факультета МГУ
д.ф.-м.н., профессор В. Н. Чубариков