Отзыв официального оппонента
на диссертационную работу
Шитова Ярослава Николаевича
«Линейная алгебра над полукольцами»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»

В последнее время в прикладной математике все более значимой становится роль методов полукольцевой линейной алгебры, что во-многом обусловлено развитием тропической математики и теории неотрицательных матриц. Диссертация представляет собой фундаментальное исследование по теории матриц над полукольцами (главы 4–8). Благодаря разработанным диссертантом новым подходам и методам, основанным на анализе структур линейной алгебры с точки зрения теории полуколец, ему удалось получить ответы на целый ряд открытых вопросов, относящихся к указанным областям.

Диссертационное исследование, изложенное на 302 страницах, состоит из введения, восьми глав, заключения и списка литературы из 170 источников.

Во введении диссертант указывает основные направления развития современной линейной алгебры, а также теории полуколец и тропической математики. Он доказывает важность рассмотренных им проблем для указанных областей науки и формулирует цели и задачи исследования. Автор дает исторический обзор и краткое описание содержания работы по главам, формулирует основные полученные им результаты.

В главе 1 Я.Н. Шитов вводит в рассмотрение понятия, которые рассматриваются в диссертационной работе. Базовые понятия теории полуколец и тропической математики рассматриваются в контексте проблем современной линейной алгебры и снабжаются примерами. Известно, что такие важные понятия, как размерность линейного пространства, линейная зависимость векторов и ранг матрицы, допускают неравносильные определения в полукольцевой линейной алгебре. В частности, для приложений оказывается полезным рассматривать различные понятия размерности и линейной зависимости, а также различные ранговые функции матриц. Отметим, что некоторые результаты, доказанные автором в главе 1 и характеризующие базовые свойства понятий линейной алгебры над полукольцами, не были известны ранее. В этой связи отметим пример 1.1.29, показывающий неравносильность полукольцевой и классической линейной зависимостей векторов даже в том случае, когда их координаты взяты из полукольца, вложенного в поле. Этот пример опубликован автором в журнале «Linear & Multilinear Algebra» в 2014 г.

Глава 2 посвящена исследованию поведения основных объектов линейной алгебры над полукольцами в общем случае. Диссертант применяет понятия линейной зависимости, размерности и ранга к изучению структурных свойств полуколец. В частности, автор изучает полукольца, факторизационный ранг матриц над которыми совпадает с рангом Гондрана-Мину, и арифметические свойства функции ранга Гондрана-Мину. Результаты этой главы опубликованы Я.Н. Шитовым в нескольких работах, среди которых публикации в журналах «Journal of Algebra» и «Linear Algebra and its Applications».

В главе 3 диссертант исследует структуру полугруппы квадратных матриц фиксированного порядка над полукольцом. Многие вопросы, связанные с полугрупповой структурой множества матриц, в том числе описание отношений Грина, подгрупп, идемпотентов, представляют серьезный интерес. Диссертантом приводится исследование поведения ранговых функций тропических матриц относительно отношений и порядков Грина на полугруппе тропических матриц. Построено нетривиальное тождество, которому удовлетворяют тропические матрицы порядка три, существование которого было содержанием недавней гипотезы Изхакяна и Марголиса. Кроме того, в этой главе автор доказывает, что всякая подгруппа полугруппы тропических матриц размера $n \times n$ содержит нормальную подгруппу без кручения индекса, не большего $n!$. Этот результат дает решение проблемы Джонсон и Камбитеса 2011 г. и позволяет улучшить результат д'Алессандро и Паску 2003 г.; указанный результат опубликован автором в журнале «Journal of Algebra».

Глава 4 посвящена исследованию ранговых функций над двухэлементной булевой решеткой $\{0, 1\}$. Диссертант отмечает важность исследования таких ранговых функций: в виду существования вложения булева полукольца $\{0, 1\}$ в тропическое полукольцо, изучение ранговых функций булевых матриц представляет интерес с точки зрения тропической линейной алгебры. Основные результаты этой главы: автором проведено исследование вычислительной сложности ранговых функций булевых матриц, получены необходимые и достаточные условия существования нетривиальной факторизации булевых матриц, а также получены результаты о взаимном поведении ранговых функций булевых матриц. Диссертанту удалось получить решение проблемы Бутковича 1994 г., проблемы Гобера 1997 г., а также недавней проблемы Фризен и Тайса, и показать, что задачи вычисления тропического, детерминантного и изоляционного рангов булевой матрицы полны в классе NP. Эти результаты были опубликованы диссертантом в статье в журнале «Linear Algebra and its Applications». Также диссертант показывает, что достаточно большие булевы матрицы с ограниченным тропическим рангом допускают нетривиальную факторизацию; этот результат представляет интерес как сам по себе, так и с точки зрения приведенных в тексте диссертации важных практических приложений. Работа, посвященная оценкам тропического ранга матриц указанного типа, была опубликована диссертантом в журнале «Математический сборник».

В главе 5 диссертант начинает подробное рассмотрение вопросов тропической линейной алгебры. В частности, в этой главе проведено исследование свойств ранговых функций тропических матриц. Важную роль в доказательствах играет метод шаблонов, сводящий в определенной мере изучение тропической матрицы к рассмотрению соответствующей булевой матрицы того же размера. Особое внимание уделено тем функциям, которые используются в различных приложениях тропической линейной алгебры: детерминантному и тропическому рангам, рангам Капранова и Гондрана-Мину и факторизационному рангу. Как отмечает автор, указанные ранговые функции возникают из рассмотрения проблем комбинаторной оптимизации алгебраической геометрии, теории расписаний, дискретных динамических систем и ряда других. Диссертантом решены проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса и проблема Картрайта и Чан о геометрической характеризации ранговых функций, а также проблема Акян, Гобера и Гутермана о матрицах с различными строчным и столбцовым рангами. Результаты этой главы опубликованы автором в серии работ, вышедших в журналах «Proceedings of the AMS», «European Journal of Combinatorics» и других известных международных изданиях.

В главе 6 автор доказывает теорему, дающую решение проблемы Чан, Йенсена и Рубеи 2011 г. о тропическом базисе идеала, порожденного минорами фиксированного порядка. Его доказательство выделено в отдельную главу ввиду технической сложности используемых комбинаторных подходов. Эта проблема была известна ранее из работы Девелина, Сантоса и Штурмфельса, в которой был явно сформулирован несколько более частный вопрос. Проблема вычисления тропических базисов является фундаментальной для приложений в тропической линейной алгебре, как показывает опубликованная в 2007 г. работа Богарта и др. Действительно, в этой работе доказано, что всякое тропическое многообразие имеет конечный тропический базис; более того, авторы приводят пример алгоритма, вычисляющего тропический базис заданного многообразия. Это означает, что тропические базисы являются аналогом классических базисов Гребнера и позволяют решать проблему принадлежности точки заданному тропическому многообразию. Тем не менее, известные алгоритмы вычисления тропических базисов в силу своей вычислительной сложности непригодны для практического применения. Это и служит мотивацией проблемы Чан, Йенсена и Рубеи: для тропического многообразия матриц фиксированного размера, ранг которых не превосходит заданного числа, не было известно ни одного примера тропического базиса. Отметим, что указанная проблема восходит также к работам известного математика М.М. Капранова. Основной результат обсуждаемой главы может быть сформулирован следующим образом: миноры порядка r матрицы переменных размера $d\times n$ образуют тропический базис в том и только том случае, когда выполнено какое-либо из следующих условий: (1) $r<4$; (2) $r=\min(d,n)$; (3) $r=4$ и $\min(d,n)<7$. Этот результат был опубликован диссертантом в 2013 г. в «Journal of Combinatorial Theory».

Глава 7 посвящена проблеме факторизации тропических матриц и свойствам функции факторизационного ранга. Автор доказывает результат о сложности вычисления факторизационного ранга, дающий решение проблемы Барвинка 1996 года. Кроме того, диссертант получает важные результаты о вычислительной сложности распознавания матриц малого факторизационного ранга и, в частности, приводит решение проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса 2005 г. Приведем чуть более подробное описание проблемы Барвинка и поясним, какие приложения может иметь упомянутый фундаментальный результат диссертанта. В 1996 г. Барвинок доказал, что известная комбинаторная задача коммивояжера имеет полиномиальное решение, если тропический факторизационный ранг матрицы расстояний ограничен фиксированным числом; отметим, что такой вариант постановки этой задачи имеет название «задача коммивояжера со складами». Таким образом, проблема распознавания тропических матриц фиксированного факторизационного ранга вызывает большой интерес с точки зрения теории оптимизации. Барвинок не знал, существуют ли быстрые (то есть, работающие за полиномиальное время) алгоритмы решения этой задачи. Эта же проблема была упомянута в работе Девелина, Сантоса и Штурмфельса 2005 г., посвященной тропической геометрии. В этой работе дается геометрическая характеризация факторизационного ранга тропической матрицы, и подчеркивается важность понятия факторизационного ранга для приложений в тропической математике. Впоследствии проблема Барвинка изучалась Девелином, и опубликованные им работы содержали новые алгоритмы вычисления факторизационного ранга. Однако эти алгоритмы не были быстрыми, то есть они не позволяли распознавать тропические матрицы с фиксированным факторизационным рангом за полиномиальное время. Наконец, в работе 2014 г., опубликованной им в журнале «Advances in Mathematics», Я.Н. Шитовым было получено отрицательное решение проблемы Барвинка.

В главе 8 диссертант изучает важную для современных приложений проблему факторизации неотрицательных матриц. Он подробно описывает связь этой проблемы с фундаментальными вопросами теории оптимизации и теории вычислительной сложности. К основным результатам этой главы относятся решение проблемы Бисли и Лаффи и построение тропических нижних оценок сложности расширения выпуклых многогранников. Остановимся более подробно на проблеме сложности расширения выпуклого многоугольника, решение которой было получено диссертантом. Эта проблема была поставлена Бисли и Лаффи в работе 2009 г. в терминах так называемого неотрицательного ранга матрицы, но допускает описание и в рамках геометрических понятий. Она может быть сформулирована следующим образом: верно ли, что для любого $n>3$ найдется выпуклый n-угольник, который не является проекцией никакого многогранника с (n–1) гранями? Такой многогранник называется расширенным представлением исходного многоугольника, а соответствующий инвариант, равный минимально возможному числу граней расширенного представления, – сложностью расширения многоугольника. Диссертант показывает принципиальную важность понятия сложности расширения для задач теории оптимизации. Действительно, построение расширенного представления Q для многогранника P позволяет свести задачу оптимизации заданного линейного функционала над P к аналогичной задаче над Q. Таким образом, если многогранник Q имеет небольшое число граней, рассмотренный подход позволяет строить быстрые алгоритмы решения задач линейного программирования даже для многогранников с большим числом граней. Этот подход был разработан еще в 1991 г. в работе Ианнакакиса, и с тех пор занимает важное место в современных исследованиях; например, недавний заметный результат Фиорини об алгоритмической сложности задачи коммивояжера основан на этом подходе. Рассматриваемой проблеме о сложности расширения многоугольника были также посвящены работа Фиорини, Ротвосса и Тивари, статья Пашковича и Вельтге, работа Пайфле и Падрола, но окончательное ее решение принадлежит Я.Н. Шитову. В его статье 2014 г., опубликованной в журнале «Journal of Combinatorial Theory», доказано, что любой выпуклый n-угольник является проекцией многогранника, содержащего не более 6(n+1)/7 граней. Как следствие этого результата, диссертант доказывает, что неотрицательный ранг любой матрицы размера mxn и классического ранга три не превосходит 6(n+1)/7. Отметим еще два результатов диссертанта по этой теме: им была решена открытая проблема о неотрицательном ранге симметрической матрицы, поставленная в работе 2009 г., а также разработан метод построения нижних оценок для расширенных представлений, основанный на тропическом подходе. Последний результат был опубликован диссертантом в одном из ведущих международных математических журналов «Mathematical Programming». Разработанные Я.Н. Шитовым подходы к решению проблем, связанных с неотрицательными рангами матриц и расширенными представлениями, представляют серьезный интерес для математического сообщества.

Выскажем несколько замечаний по диссертации.

1. Замечания имеют, в основном, редакционный характер. В частности, текст диссертации содержит опечатки, например, стилистическую ошибку во втором предложении второго абзаца раздела 4.1. Термин «линейная GM-зависимость» более естественно заменить на «GM-линейная зависимость».

2. Следовало бы упомянуть статьи Л.А. Скорнякова, В.Б. Поплавского, С.Н. Ильина о матрицах над булевыми и дистрибутивными решетками, над кольцоидами.

3. Было бы методически правильным отметить, что тропическое полукольцо изоморфно полуполю неотрицательных вещественных чисел с max-сложением и обычным умножением.

4. Хотя диссертационное исследование Я.Н. Шитова носит монографический характер, ему, по нашему мнению, более соответствует название «Теория матриц над полукольцами».

5. Для читателя был бы полезен и удобен предметный указатель.

Сделанные замечания не влияют на высокую положительную оценку работы.

В целом о диссертации Я.Н. Шитова можно сделать следующие выводы.

1. Тема диссертации, безусловно, актуальна и соответствует научной специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

2. Диссертация представляет собой законченное научное исследование, выполненное на высоком научном уровне. Автор показал себя глубоко и широко образованным профессиональным математиком. Им решены поставленные предшественниками

проблемы, относящиеся к тропической математике и структурной теории полуколец; эти результаты открывают новые перспективы для развития указанных областей математики.

3. Результаты работы являются новыми и опубликованы в 27 статьях в журналах, рекомендованных ВАК РФ, а также в ведущих международных математических журналах, входящих в базы цитирования Web of Science и Scopus. Они апробированы на известных математических форумах.

4. Проведенное исследование имеет важное прикладное значение. В частности, результаты диссертанта могут быть использованы для разработки быстрых алгоритмов решения практических задач оптимизации, возникающих в различных отраслях деятельности.

5. Несмотря на обилие технических деталей в некоторых разделах, текст диссертации написан четко и ясно. В этой связи уместно отметить изложение результатов главы 7, в которой сложные комбинаторные конструкции чередуются с поясняющими комментариями, способствующими доступному ее восприятию.

6. Структура и содержание работы соответствуют поставленным целям и задачам исследования. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

7. Результаты диссертации могут послужить темами различных спецкурсов для чтения в ведущих университетах России и других стран мира.

8. Совокупность полученных Я.Н. Шитовым результатов может быть оценена как крупный вклад в развитие теории полуколец и линейной алгебры.

На основании изложенного можно заключить, что диссертационная работа «Линейная алгебра над полукольцами» отвечает всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям по математике, а ее автор Ярослав Николаевич Шитов заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел».

Официальный оппонент:
доктор физ.-мат. наук, профессор,
зав. кафедрой фундаментальной и
компьютерной математики ВятГГУ ________________________ Вечтомов Е.М.

Вечтомов Евгений Михайлович
E-mail: vecht@mail.ru
Тел.: 8-9123385397 (моб.), 8(8332)208961 (раб.)

ФГБОУ ВО «Вятский государственный
гуманитарный университет»
610002, г. Киров, ул. Красноармейская, 26

Подпись Е.М. Вечтомова удостоверяю:
проректор по НИР и стратегическому
развитию ВятГГУ, к.б.н., доцент __________________________Сазанов А.В.