

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Шитова Ярослава Николаевича «Линейная алгебра над полукольцами», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

### АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Диссертационная работа Шитова Ярослава Николаевича посвящена развитию теории линейной алгебры над полукольцами, где полукольцо определяется как множество с операциями сложения и умножения, которое является абелевым моноидом по сложению и полугруппой по умножению, и в котором умножение дистрибутивно относительно сложения. В рамках диссертации осуществляется разработка методов исследования алгебраических структур полуколец разного вида и решение ряда фундаментальных задач, поставленных в последние годы в литературе по рассматриваемой теме.

Начало исследований полуколец относится к концу XIX – началу XX века и связано с именами Р. Дедекинда, Э. Нетер, В. Крулля. Интерес к этому направлению стал быстро расти во второй половине XX века, в частности, в связи с изучением тропических (идемпотентных) полуколец с идемпотентным сложением, а также векторов и матриц над такими полукольцами, которые оказались удобным инструментом представления для многих теоретических и прикладных задач в различных областях, включая, например, задачи оптимизации и исследования операций.

Среди первых работ в области тропической математики, изучающей теорию и приложения тропических полуколец, были работы Санкт-Петербургских (Ленинградских) математиков В. Н. Воробьева и А. А. Корбута.

Новый мощный импульс развития тропическая математика получила в трудах научной школы, возглавляемой акад. В. П. Масловым, в рамках построения и изучения теории идемпотентного анализа как области исследования полумодулей функций со значением в полукольце с идемпотентным сложением. В настоящее время изучение теории и приложений тропических и им подобных полуколец сформировалось в важное научное направление, результаты которого отражены в более чем десяти монографиях и нескольких сотнях статей, опубликованных зарубежными и российскими авторами, и охватывающих широкий круг задач в различных областях, от криптографии и теории игр до математической статистики и биоинформатики.

В последние десятилетия наряду с расширением области приложений математических моделей и методов на основе полуколец, существенно возросло число теоретических исследований, в которых изучение полуколец осуществляется в контексте классических разделов математики, включая линейную и комбинаторную алгебру, теорию матриц, алгебраическую геометрию, теорию графов, теорию сложности вычислений и т.п. При этом была выдвинута серия гипотез и сформулирован ряд открытых проблем, например, гипотеза о вычислительной сложности факторизации матриц, проблема распознавания целочисленных тропических матриц заданного факторизационного ранга, проблема о тропическом базисе идеала, порожденного минорами фиксированного порядка, проблема о сложности расширения выпуклого многоугольника и др.

Учитывая, что указанные гипотезы и открытые проблемы имеют фундаментальное значение для дальнейшего развития теории линейной алгебры над полукольцами и ряда смежных областей, диссертационное исследование Шитова Я. Н., направленное на разработку новых эффективных методов полукольцевой линейной алгебры, тропической математики и теории неотрицательных матриц, а также на применение этих методов для проверки

выдвинутых гипотез и решения поставленных проблем, представляется весьма актуальным.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ И ИХ НОВИЗНА

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Разработаны методы изучения структуры полуколец и полугрупп матриц над ними. На основе применения этих методов решена проблема о мощности базиса свободного полумодуля, а также подтверждена гипотеза о том, что всякая подгруппа полугруппы тропических матриц порядка  $n$  содержит нормальную абелеву подгруппу индекса, не большего  $n!$ . Получена характеристика матричных полугрупп, ранговые функции на которых монотонны относительно порядков Грина, доказана монотонность ранговых функций тропических матриц.

2. Построена теория, которая связывает понятия линейной алгебры над полукольцами с результатами дискретной математики и направлена на исследование ранговых функций матриц. В рамках построенной теории разработан метод шаблонов, основанный на изучении комбинаторной структуры матриц методами булевой линейной алгебры, с помощью которого получен быстрый алгоритм распознавания тропических матриц фиксированного ранга, а также показано, что факторизационный ранг и ранг Капранова не допускают характеристики в терминах смешанного разбиения симплекса, индуцируемого тропической матрицей.

Кроме того, разработаны методы исследования вычислительной сложности ранговых функций булевых и тропических матриц, применение которых позволило доказать, что задачи вычисления тропического ранга, детерминантного ранга и изоляционного числа матрицы являются NP-трудными. Доказана гипотеза о связи граничного и классического рангов вещественных матриц, получены достаточные условия для существования факторизации булевых матриц в терминах числа нулевых элементов, а также

построена оценка размера матрицы полного факторизационного ранга в терминах других ранговых функций.

3. Разработаны методы комбинаторного анализа инвариантов тропической линейной алгебры, с помощью которых решена проблема о тропическом базисе идеала, порожденного минорами фиксированного порядка матрицы переменных, а также доказано, что симметрический ранг тропической матрицы не допускает характеристики в терминах так называемого графа различий этой матрицы. Кроме того, показано, что функции тропического и детерминантного ранга и ранга Гондрана-Мину остаются ограниченными, если ограничена хотя бы одна из них. Приведены примеры тропических матриц минимального размера с различными тропическим рангом и рангом Капранова, а также с различными строчным и столбцовым рангами Гондрана-Мину

4. Изучен ряд задач, относящихся к проблеме факторизации матриц над полукольцами. В частности, показано, что задача распознавания тропических матриц, допускающих представление в виде произведения матриц размеров  $m \times k$  и  $k \times n$ , является NP-трудной при ограниченном  $k$ , а также разработан полиномиальный по времени алгоритм распознавания матриц факторизационного ранга три. Приведен пример серии неотрицательных симметрических матриц ранга три, имеющих ровно по одному отрицательному собственному значению, не все из которых допускают представление в виде произведения неотрицательных матриц размеров  $n \times k$  и  $k \times n$  при фиксированном  $k$ . Получена верхняя оценка неотрицательного ранга матрицы в терминах ее классического ранга и показано, что всякий выпуклый  $n$ -угольник допускает описание с помощью не более, чем  $6(n + 1)/7$  линейных неравенств с точностью до линейной проекции.

## ОБОСНОВАННОСТЬ И ДОСТОВЕРНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обоснованность результатов диссертации подтверждается представленными в работе строгими рассуждениями и исчерпывающими

доказательствами, глубоким изучением существующих результатов, сопоставлением и согласованностью полученных результатов с результатами других авторов, большим числом наглядных примеров, иллюстрирующих доказательства, выводы и заключения работы.

Достоверность результатов опирается на корректное применение существующих и вновь разработанных методов линейной алгебры, теории полуколец, комбинаторной алгебры и теории графов, и подтверждается их апробацией на международных и российских научных конференциях, а также публикацией в ведущих международных научных журналах по профилю диссертации, включая журналы «Advances in Mathematics», «Mathematical Programming», «Proceedings of the AMS», «Journal of Combinatorial Theory», «Journal of Algebra», «Linear Algebra and its Applications», «Linear and Multilinear Algebra».

Результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно. Личный вклад соискателя отражен в 26 публикациях по теме диссертации, подготовленных им единолично; из работы, выполненной в соавторстве, в диссертацию включены только результаты соискателя.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

Тема исследований имеет несомненное прикладное значение. Полученные в работе результаты обеспечивают теоретическую основу для построения эффективных вычислительных алгоритмов и процедур. В частности, результаты, относящиеся к теории расширенных представлений выпуклых многогранников и факторизации матриц, найдут применение при разработке теории и методов решения ряда практических задач оптимизации.

## ЗАМЕЧАНИЯ ПО ДИССЕРТАЦИИ

К замечаниям по тексту диссертационной работы следует отнести следующее.

1. В тексте имеется небольшое число опечаток. В частности, на стр. 6, строка 6 сверху, вместо слов «публикация Ли и Сеунгом» следовало писать «публикация Ли и Сеунга»; на стр. 15, строки 1-3 снизу, вместо «из них» писать «из нее». На стр. 77, строка 13, между словами «выполняется матриц», по-видимому, пропущен предлог «для».

2. Определение линейной независимости в смысле Гондрана-Мину, приведенное в кратком содержании работы на стр. 17, строки 8-12 сверху, не вполне соответствует определению 1.1.19 в главе 1 на стр. 41 в части условия на объединение множеств  $I$  и  $J$ , и, по-видимому, должно быть уточнено.

3. На стр. 19 в формулировке теоремы 2.2.9 и формулах (1-3) использованы символы  $f$ ,  $GMc$  и  $GMr$  без предварительных определений или пояснений, в силу чего об их смысле приходится догадываться из контекста.

4. В определении 1.1.22 на стр. 41 использованы обозначения элементов  $A_{ik}$  некоторой матрицы  $A$ , однако, каким образом определяется эта матрица прямо не указано.

5. В предложении 1.1.24 в условии вместо  $\alpha \subset \beta$  следует, по-видимому, писать  $\beta \subset \alpha$ .

6. Представляется целесообразным пополнить список литературы следующей монографией, имеющей непосредственное отношение к работе:

Głazek, Kazimierz. A Guide to the Literature on Semirings and their Applications in Mathematics and Information Sciences: With Complete Bibliography. Dordrecht: Springer, 2002. 392 p. doi: 10.1007/978-94-015-9964-1

Указанные замечания, однако, носят в основном редакционный характер и не влияют на общую высокую оценку работы.

## ОБЩАЯ ОЦЕНКА ДИССЕРТАЦИИ

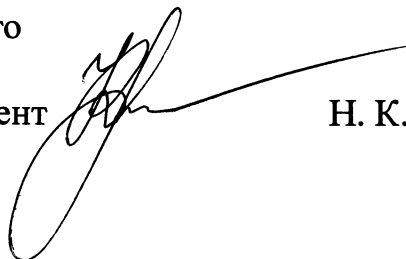
В целом диссертация Шитова Я. Н. представляет собой законченную научно-квалификационную работу. Совокупность научных и практических результатов, представленных в диссертации, можно рассматривать как крупное

научное достижение, которое вносит существенный вклад в развитие теории полуколец, линейной алгебры и тропической математики. Диссертация соответствует критериям раздела II Положения о присуждении ученых степеней. Оформление диссертации отвечает установленным требованиям. Структура и содержание работы соответствуют поставленным целям и задачам исследования. Текст диссертации отличается хорошим литературным языком, обладает внутренней логикой и единством. Результаты диссертационной работы опубликованы в периодических изданиях, рекомендованных ВАК РФ, а также апробированы на международных и всероссийских научных конференциях. Автореферат вполне отражает содержание диссертации.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа ««Линейная алгебра над полукольцами», отвечает требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям Положением о присуждении ученых степеней, утвержденным постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. №842, а ее автор, Шитов Ярослав Николаевич, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент:  
профессор кафедры статистического  
моделирования математико-механического  
факультета СПбГУ,  
доктор физико-математических наук, доцент



Н. К. Кривулин

07 декабря 2015 г.

Адрес: 198504, С.-Петербург,  
Университетский пр-т, д. 28,  
Математико-механический ф-т СПбГУ  
Эл.почта: n.krivulin@spbu.ru  
Телефон: +7(812)4284592

