О Т З Ы В

официального оппонента о диссертационной работе
Шитова Ярослава Николаевича
“Линейная алгебра над полукольцами”,
представленной на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Теория полуколец – сравнительно молодой интенсивно развивающийся раздел общей алгебры, имеющий многочисленные применения в самой математике и прикладных вопросах. Интерес к ним объясняется также тем, что полукольца – это обобщения колец, и имеющимися важными примерами полуколец, не являющихся кольцами – такими, как булево полукольцо $\mathbb{B}=\{0,1\}$, тропическое полукольцо $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\},\max,+)$, полукольцо неотрицательных действительных чисел и т.д. Наряду со структурными вопросами в теории матриц над полукольцами, как и во многих других разделах математики, всё большее значение приобретают алгоритмические вопросы: существует ли алгоритм, позволяющий вычислить ту или иную величину, и какова сложность алгоритма? Все эти вопросы – структурные и алгоритмические – нашли достойное место в диссертации. Кроме того, ряд результатов теории матриц над полукольцами автор применяет в других разделах математики – в геометрии и комбинаторике. Тема диссертации безусловно является актуальной.

Диссертация Шитова Я.Н. представляет собой высококачественную научную работу по теории матриц над коммутативными полукольцами, существенно продвигающую теорию. В ней получены ответы на многие трудные вопросы теории матриц над полукольцами, долгое время остававшиеся открытыми. Кроме того, в диссертации обобщены некоторые известные результаты этой теории.

Диссертация содержит введение, в котором приведён обстоятельный исторический обзор исследований по теории матриц над коммутативными полукольцами. Автор приводит основные определения и постановки задач. Кроме того, автор приводит обзор результатов диссертации и отмечает место диссертации в этой теории.

Первая глава также носит вводный характер. Приводятся определения различных (неэквивалентных) понятий линейной зависимости в полукольцах и полумодулях, определения рангов матриц (слабого ранга, ранга Гондрана – Мину, тропического, факторизационного ранга и др.) и отмечаются связи между этими понятиями.

Вторая глава посвящена структурным вопросам теории полуколец и полумодулей над ними. В начале главы исследуются т.н. локально инъективные модули над ассоциативными кольцами и локально самоинъективные справа кольца. Доказывается, что групповое кольцо RG является локально самоинъективным справа в точности тогда, когда кольцо R локально самоинъективно справа, а группа G локально конечна (теорема 2.1.11). Отсюда делается вывод о существовании локально самоинъективного неинъективного кольца. Хотя теорема 2.1.11 не является новой, она хорошо иллюстрирует новые методы исследования, предложенные диссертантом. Далее, доказано, что количество элементов базиса (неприводимой системы образующих полумодуля R^n тивным полукольцом R может принимать значения $n,n+1,\dots,qn$ (где q – мощность базиса R^1) и только их (теорема 2.1.14 и рассуждения п. 2.1.2) – это решает проблему Yi Jia Tan, поставленную в 2014 г. Для коммутативного полукольца S выполнение равенства $f(A)=GMc(A)$ для всех матриц A (где f – факторизационный ранг, а GMc – столбцовый ранг Гондрана – Мину) влечёт вложимость S в поле (теорема 2.2.9). Большое внимание уделено вопросу о том, в каких случаях для рангов матриц над полукольцами выполнены соотношения $rk(AB)\le\min(rkA,rkB)$, $rk(A+B)\le rkA+rkB$, $rk(A\,|\,B)\le rkA+rkB$. Доказан ряд результатов, связывающих идемпотентность, квазиселективность, отсутствие делителей нуля в полукольцах с выполнением этих соотношений.

В третьей главе изучаются полугруппы матриц над полукольцами. Доказана монотонность ранга Гондрана – Мину GMr относительно предпорядков Грина. К сожалению, автор не делает обобщающий вывод о том, что GMr постоянен на классах отношений Грина. Что касается ранга Капранова, то он монотонен на матрицах $n\times n$ в случае, когда базовое поле содержит не менее $n+2$ элементов и немонотонен для базового поля порядка меньшего, чем n (теорема 3.1.11). Интересны результаты главы 3 о подгруппах полугруппы тропических $n\times n$-матриц. А именно, теоремы 3.2.4 и 3.2.5 утверждают, что всякая подгруппа этой полугруппы имеет точное представление мономиальными $n\times n$-матрицами и содержит нормальную абелеву подгруппу без кручения индекса не больше $n!$ – тем самым получен ответ на вопрос Джонсон и Камбитеса 2011 г. Отсюда выводится (следствие 3.2.6), что порядок любой периодической подгруппы не превосходит $n!$ В главе 3 доказано, что полугруппа матриц 3×3 над тропическим полукольцом $(\overline{\mathbb{R}},\min,+)$ удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству, что даёт частичный ответ на вопрос Ижакяна и Марголиса 2010 г.

В четвёртой главе основное внимание привлечено к вопросу, поставленному Бутковичем в 1994 г.: может ли тропический ранг быть найден за полиномиальное время, и аналогичным вопросам де Шуттера 1995 г. и Фризена и Тайса 2013 г. о детерминантном ранге и изоляционном числе. Автором доказано, что для данной булевой матрицы A и числа k установить, больше ли числа k изоляционное число, или детерминантный ранг, или тропический ранг матрицы A, является NP-полной задачей (теорема 4.1.3). Ряд результатов главы 4 состоит в оценке количества нулей булевой матрицы полного факторизационного ранга. Другие результаты этой главы заключаются в установлении связей различных рангов булевых матриц (детерминантного, тропического и др.) друг с другом и с размерами матриц.

В главе 5 исследуются ранги тропических матриц. Вводится понятие тропического шаблона матрицы. Устанавливаются связи между рангами матрицы и её шаблона. Неравенства для рангов, выведенные в главе 4, обобщаются на тропические матрицы. Кроме того, доказано, что при фиксированном k установить, истинно ли неравенство $GMr\,A<k$ (для тропической матрицы A), можно за полиномиальное время (теорема 5.3.10) и для матрицы тропического ранга, не превосходящего k, найти её ранг Гондрана – Мину $GMr\,A$ можно также за полиномиальное время (теорема 5.3.11).

Глава 6 посвящена одной проблеме, касающейся матрицы переменных. Вначале автор доказывает, что матрица $6\times n$ тропического ранга 3 имеет ранг Капранова, также равный 3 (теорема 6.2.13). Затем автор находит необходимые и достаточные условия того, что для данных d,n и $r\le\min(d,n)$ все матрицы $d\times n$ тропического ранга, меньшего r, имеют ранг Капранова, также меньший r (теорема 6.3.4). Отсюда автор выводит теорему, дающую положительное решение упомянутой проблемы.

В седьмой главе основное внимание привлечено к проблеме, поставленной в 2005 г.: существует ли функция $\Theta(k)$ такая, что любая матрица факторизационного ранга, не меньшего k, обязательно содержит подматрицу ранга, не меньшего k, размера не более $\Theta(k)\times\Theta(k)$? Автор доказывает, что при $k\ge 5$ такой функции не существует, а при $k=4$ можно взять $\Theta(k)=1539$. Отсюда автор делает заключение о наличии полиномиального алгоритма распознавания матриц ранга, не превосходящего 4. В случае положительного ответа факторизационный ранг может быть найден за полиномиальное время. Тем самым проблема полностью решена.

Заключительная восьмая глава посвящена неотрицательным матрицам. Бисли и Лаффи в 2009 г. поставили вопрос: для всякого ли $n\ge 3$ существует неотрицательная матрица $n \times n$ классического ранга 3, неотрицательный ранг которой равен n? Ранее было известно, что ответ положительный при $n \leq 6$. В диссертации доказано, что ответ отрицательный при всех $n \geq 7$. А именно, доказано, что неотрицательная матрица $m \times n$ классического ранга 3 имеет неотрицательный ранг не более $\left\lceil \frac{6}{7} \min(m,n) \right\rceil$ (теорема 8.2.16. Кроме того, получен ответ на один вопрос о неотрицательных симметрических матрицах. Полученные результаты используются для исследования расширенных представлений многоугольников.

Результаты диссертации являются новыми, за исключением теоремы 2.1.11, которая не относится к основным результатам работы, а лишь иллюстрирует разработанную автором методологию. Результаты получены автором самостоятельно и представляют большой научный интерес. Утверждения снабжены убедительными доказательствами, которые зачастую используют весьма тонкие рассуждения. Доказательства некоторых утверждений занимают десятки страниц. Впрочем, некоторые доказательства следовало бы изложить подробнее. Автором разработаны собственные методы исследования матриц над полукольцами, в частности, метод шаблонов.

Автореферат диссертации полно и правильно отражает её содержание.

Отмечу некоторые недостатки работы. Название работы слишком общо. В работе рассматриваются лишь коммутативные полукольца, а из линейной алгебры лишь те вопросы, которые связаны с понятием линейной зависимости и ранга матрицы. К сожалению, автор обошёл молчанием некоторые работы, в которых исследуются ранги матриц над полукольцами, в частности, работы Е.Е.Маренича. Следовало бы отметить также, что факторизационный ранг матриц (см. определение 8.1.1) ранее исследовался под названием ранг Шайна, NP-трудность задачи вычисления этого ранга для булевых матриц была доказана Дж. Марковским (Semigroup Forum, 1992).

В условия теорем 2.2.9 и 2.3.14 следует добавить коммутативность полукольца, а в теорему 3.1.2 отсутствие делителей нуля. Доказательство леммы 3.3.1 не вполне ясное. Заявленное соотношение $\tau\sigma \in \Sigma(AB)$ не доказано (впрочем, его доказательство не составляет труда); рассуждения, связанные с алгебраически независимыми элементами (шаг 3), непонятны. В доказательстве теоремы 4.2.7 непонятно заключение о столбцах матрицы A (п. 2,3). Что-то не так в определении 6.1.6, так как ему удовлетворяют векторы $a_1 = a_2 = (0, \infty)$. Определение 8.1.1 неполное: следует сказать, что понимается под матрицами ранга 1 Доказательство теоремы 8.1.5 весьма лаконично. На с. 270 (1-й абзац) написано, что «рассуждения этого абзаца позволяют думать о неотрицательном ранге как о функции факторизационного ранга», тогда как рассуждения абзаца говорят о равенстве рангов. В замечании 1.3.5 следовало писать «достигается не менее, чем на двух», а не «достигается на двух». Аналогично этому в условии следствия 3.3.4 надо «хотя бы одно», а не «одно». Имеются опечатки. Например, на с. 99 (во 2-й-3-й строке снизу) должно быть написано «d-невырожденной», а не «d-вырожденной». На с. 100 (15-я строка снизу) должно быть «перманент», а не «определитель». В конце формулировки леммы 8.2.5 должно быть «шести», а не «семи». На с. 111 в последней строке должно быть $\binom{k}{\left[\frac{k}{2}\right]}$, а не $\binom{\left[\frac{k}{2}\right]}{k}$. В списке литературы под номером 120 неправильно указан год издания.

Отмеченные недостатки не изменяют общего положительного впечатления о работе. Результаты диссертации опубликованы в печати и докладывались на конференциях и семинарах. Они могут быть использованы в спецкурсах по общей алгебре, читаемых в МГУ, МПГУ, Новосибирском, Приволжском (Казанском) университете, Вятском ГГУ и других университетах страны и быть полезны специалистам научно-исследовательских институтов и вычислительных центров. Полученные результаты и разработанные автором диссертации методы несомненно будут являться основой для дальнейших исследований в теории полуколец и теории матриц.

Считаю, что диссертационная работа “Линейная алгебра над полукольцами” удовлетворяет всем требованиям “Положения о порядке присуждения учёных степеней”, а её автор Шитов Я.Н. заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Автор отзыва Кожухов Игорь Борисович, доктор физико-математических наук, профессор.
Место работы, должность: Национальный исследовательский университет “МИЭТ”, профессор кафедры Высшая математика – 1
Домашний адрес и телефон: 124460, Москва, корпус 1209, кв. 51, 916-715-55-02.
Электронная почта: kozhuhov_i_b@mail.ru

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры ВМ-1 МИЭТ И.Б.Кожухов

Подпись Кожухова И.Б. удостоверяю
Секретарь Учёного Совета НИУ МИЭТ,
к.т.н., профессор Н.М.Ларионов