

Решение диссертационного совета Д 501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.

Ломоносова», о приеме к защите диссертации Шитова Ярослава Николаевича «Линейная алгебра над полукольцами», представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (физико-математические науки).

Диссертация Шитова Ярослава Николаевича «Линейная алгебра над полукольцами», представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (физико-математические науки), поступила в совет 25 мая 2015 года и опубликована на сайте ИСТИНА (<http://istina.msu.ru/dissertations/9654035/>), и <http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi>.

Рассмотрев заявление Я.Н. Шитова на имя председателя диссертационного совета Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова д.ф.-м.н., профессора Чубарикова Владимира Николаевича о принятии диссертации к защите, диссертационный совет 4 сентября 2015 года (протокол №9) назначил комиссию для подготовки заключения по диссертации в составе: член-корр. РАН Л.Д. Беклемишев, д.ф.-м.н., профессор В.Н. Латышев, д.ф.-м.н., профессор А.В. Михалев, д.ф.-м.н., профессор Ю.В. Нестеренко, д.ф.-м.н., профессор В.А. Артамонов.

Соискателем были представлены следующие документы:

1. Заявление соискателя на имя председателя диссертационного совета Д 501.001.84, созданного на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», д.ф.м.н., профессора Чубарикова Владимира Николаевича — 1 экз.
2. Анкета с фотокарточкой, заверенная в установленном порядке — 2 экз.
3. Заверенная в установленном порядке копия документа государственного образца о высшем образовании — 2 экз.
4. Диссертация — 6 экз. (один экз. не переплетён).
5. Заключение кафедры по месту защиты диссертации — 2 экз.
6. Отзыв научного руководителя — 2 экз.
7. 4 маркированных почтовых карточки с указанием адреса соискателя и адреса диссертационного совета.

Заключение комиссии. Диссертация является работой в области линейной алгебры и структурной теории колец и полуколец и соответствует паспорту специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (физико-математические науки). А именно, в п. 1 паспорта в качестве области исследований указана «Теория алгебраических структур (полугрупп, групп, колец, полей, модулей и т. д.)», что соответствует развитию в диссертации теории полумодулей и структуры матричных полугрупп, а также их применения для решения открытых проблем линейной алгебры и геометрии: проблемы Тан 2014 года о размерности свободного полумодуля, проблемы Джонсон и Камбитеса 2011 года о группах тропических матриц и некоторых других. Далее, в п. 2 указана «Алгебраическая геометрия», что в полной мере отвечает разработанным методам тропической алгебраической

геометрии; в частности, автором решена фундаментальная проблема Чан, Йенсена и Рубеи 2011 года о тропическом базисе. И, наконец, в п. 10 отмечена «Теория алгоритмов и вычислимых функций (в том числе алгоритмическая теория информации и теория сложности)». Данному пункту соответствуют методы вычисления размерности и ранга над полукольцами, разработанные автором диссертации и приведшие к решениям крупных математических проблем: проблем Барвинка 1996 года и Девелина, Сантоса, Штурмфельса 2005 года о сложности факторизации тропической матрицы, а также проблем Бутковича 1994 года и Гобера 1997 года о вычислении ранговых функций булевых матриц.

В диссертации автором получены следующие основные результаты. Все они являются новыми.

Решена проблема Уайлдинга, Джонсон и Камбитеса 2011 года о кольцах, которые допускают продолжение линейных функций с конечно порожденных подмодулей на свободный модуль;

решена проблема Тан 2014 года о мощности базиса свободного полумодуля;

доказано, что всякая подгруппа полугруппы тропических матриц порядка n допускает точное представление мономиальными тропическими матрицами порядка n ; в частности, показано, что всякая такая подгруппа содержит нормальную абелеву подгруппу индекса, не большего $n!$, что доказывает гипотезу Джонсон и Камбитеса 2011 года;

получена характеристика полуколец, над которыми возможна оптимальная факторизация матриц; приведен пример области целостности, над которой такая факторизация невозможна;

получена характеристика матричных полугрупп, ранговые функции на которых монотонны относительно порядков Грина; в частности, доказана монотонность ранговых функций тропических матриц.

Разработан метод шаблонов, основанный на изучении комбинаторной структуры матриц методами булевой линейной алгебры;

как следствие этого метода получен быстрый алгоритм распознавания тропических матриц фиксированного ранга Гондрана–Мину и тем самым дано решение проблемы Бутковича, сформулированной 2010 года;

в качестве приложения метода шаблонов получен ответ на вопрос, заданный в 2005 году Девелином, Сантосом и Штурмфельсом: показано, что факторизационный ранг и ранг Капранова не допускают характеристики в терминах смешанного разбиения симплекса, индуцируемого тропической матрицей;

разработаны методы исследования вычислительной сложности ранговых функций булевых и тропических матриц; доказано, что задачи вычисления следующих функций являются NP-трудными: тропического ранга (это дает решение проблемы Бутковича, сформулированной в 1994 году), детерминантного ранга (это дает решение проблемы, которая была поставлена в 1996 году Де Шуттером и в 1997 году Гобером и также оставалась открытой) и изоляционного числа матрицы (этот результат был содержанием гипотезы Фризен и Тайса 2014 года);

доказана гипотеза о связи граничного и классического рангов вещественных матриц, сформулированная Ли и соавторами в 2013 году;

получены достаточные условия для существования факторизации булевых матриц в терминах числа нулевых элементов; как приложение этого результата получена оценка размера матрицы полного факторизационного ранга в терминах других ранговых функций.

Решена проблема о тропическом базисе идеала, порожденного минорами фиксированного порядка матрицы переменных; эта проблема была сформулирована Чан, Йенсенем и Рубеи в 2011 году;

показано, что симметрический ранг тропической матрицы не допускает характеристики в терминах так называемого графа различий этой матрицы; этот результат позволил решить проблему Картрайта и Чан, сформулированную в 2012 году;

исследовано взаимное поведение ранговых функций тропических матриц; показано, что функции тропического и детерминантного рангов и рангов Гондрана--Мину остаются ограниченными, если ограничена хотя бы одна из них; приведены примеры тропических матриц минимального размера с различными тропическим рангом и рангом Капранова, а также с различными строчным и столбцовым рангами Гондрана--Мину; последний из этих результатов дает ответ на вопрос Акян, Гобера и Гутермана 2008 года.

Решена проблема, поставленная Барвинком в 1996 году: показано, что задача распознавания тропических матриц, допускающих представление в виде произведения матриц размеров $m \times k$ и $k \times n$, является NP-трудной при ограниченном k ;

получено решение проблемы Девелина, Сантоса и Штурмфельса 2005 года: построен

полиномиальный по времени алгоритм распознавания матриц факторизационного ранга три; построен контрпример к гипотезе Бисли и Лаффи 2009 года: приведен пример серии неотрицательных симметрических матриц ранга три, имеющих ровно по одному отрицательному собственному значению, не все из которых допускают представление в виде произведения неотрицательных матриц размеров $n \times k$ и $k \times n$ при фиксированном k ;

разработаны методы исследования факторизации неотрицательных матриц, основанные на результатах тропической математики; в качестве приложения этих методов получены новые нижние оценки сложности расширения выпуклых многогранников;

получена верхняя оценка неотрицательного ранга матрицы в терминах ее классического ранга; в качестве приложения этого результата показано, что всякий выпуклый n -угольник допускает описание с помощью не более, чем $6(n+1)/7$ линейных неравенств с точностью до линейной проекции.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах автора.

1. Ya. Shitov, Mixtures of star trees and deficiency graphs, European J. of Combinatorics, 44 (2015), 140-143.
2. Ya. Shitov, Bases of a free semimodule are small, Linear Algebra and Its Applications, 466 (2015), 38-40.
3. Ya. Shitov, Two concepts of singularity for matrices over semirings, Linear & Multilinear Algebra, 63(1) (2015), 201-220.
4. Ya. Shitov, Nonnegative rank of a matrix with one negative eigenvalue, Linear and Multilinear Algebra, 63(2) (2015), 221.

5. Ya. Shitov, Studying nonnegative factorizations with tools from linear algebra over a semiring, *Communications in Algebra*, 43 (2015), 4359--4366.
6. Ya. Shitov, On the max-min and tropical CP-rank conjectures, *Linear & Multilinear Algebra*, 2015.
7. Ya. Shitov, Tropical lower bounds for extended formulations, *Mathematical Programming*, 2014.
8. Ya. Shitov, How many Boolean polynomials are irreducible?, *International Journal of Algebra and Computataion*, 24 (2014), 1183--1190.
9. Ya. Shitov, Sign patterns of rational matrices with large rank, *European J. of Combinatorics*, 42 (2014), 107--111.
10. Ya. Shitov, Group rings that are exact, *Journal of Algebra*, 403 (2014), 179--184.
11. Ya. Shitov, Tropical semimodules of dimension two, *Алгебра и Анализ*, 26(2) (2014), 224--236.
12. Ya. Shitov, The complexity of tropical matrix factorization, *Advances in Mathematics*, 254 (2014), 138--156.
13. Ya. Shitov, An upper bound for nonnegative rank, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 122 (2014), 126--132.
14. Ya. Shitov, Mixed subdivisions and ranks of tropical matrices, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 142 (2014), 15--19.
15. Ya. Shitov, Detecting matrices of combinatorial rank three, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2014.
16. Я. Шитов, О булевых матрицах полного факторизационного ранга, *Математический сборник*, 204(11) (2013), 151--160.
17. Ya. Shitov, On the complexity of Boolean matrix ranks, *Linear Algebra and Its Applications*, 439 (2013), 2500--2502.
18. Ya. Shitov, When do the r -by- r minors of a matrix form a tropical basis?, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 120 (2013), 1166--1201.
19. Ya. Shitov, Tropical matrices and group representations, *Journal of Algebra*, 370 (2012), 1--4.
20. Ya. Shitov, On tropical matrices of small factor rank, *Linear Algebra and its Applications*, 437 (2012), 2727--2732.
21. A. E. Guterman, Ya. N. Shitov, Tropical patterns of matrices and the Gondran-Minoux rank function, *Linear Algebra and its Applications*, 437 (2012), 1793--1811. (Главы 2 и 3 принадлежат Шитову Я.Н.)
22. Я. Шитов, О матрицах с различными тропическим рангом и рангом Капранова, *Математические заметки*, 92 (2012), 316--320.
23. Ya. Shitov, On the Kapranov ranks of tropical matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 436 (2012), 3247--3253.
24. Я. Шитов, О совпадении факторизационного ранга и ранга Гондрана--Мину матриц над полукольцом, *Фунд.и прикладная математика*, 17(6) (2011/2012), 223--232.
25. Я. Шитов, Пример матрицы размера 6×6 с различными тропическим рангом и рангом Капранова, *Вестник Московского Университета, Серия~1*, 66(5) (2011), 58--61.
26. Ya. Shitov, Inequalities for Gondran-Minoux rank and idempotent semirings, *Linear Algebra and its Applications*, 435 (2011), 1769--1777.

27. Я. Шитов, Минимальный пример матрицы, различающей GM- и d-ранги в макс-алгебрах, *Фундаментальная и прикладная математика*, 14(4) (2008), 231—268.

Диссертация к защите представляется впервые.

Изложенное выше даёт основание утверждать: диссертация удовлетворяет п.9 «Положения о присуждении учёных степеней», а её автор заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (физико-математические науки).

Рекомендуемые комиссией ведущая организация и официальные оппоненты.

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский Педагогический Государственный Университет».

Адрес: 119991, Центральный федеральный округ, г. Москва, ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1.

Официальные оппоненты:

Вечтомов Евгений Михайлович

Вятский государственный гуманитарный университет, Киров

доктор физико-математических наук, профессор

специальность: 01.01.06

Кожухов Игорь Борисович

Национальный исследовательский университет "МИЭТ", Москва

доктор физико-математических наук, профессор

специальность: 01.01.06

Кривулин Николай Кимович

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

доктор физико-математических наук, профессор

специальность: 01.01.06

Выбор ведущей организации обосновывается: ФГБОУ ВО «Московский Педагогический Государственный Университет» – ведущий научно-исследовательский центр страны, в котором работают известные ученые по специальности рассматриваемой диссертации. Официальные оппоненты являются известными специалистами в теории полугрупп, колец и полуколец, а также тропической математики, и имеют работы, близкие к теме диссертации.

Работы рекомендуемых оппонентов, близкие к теме диссертации

1. Krivulin N. K. A max-algebra approach to modeling and simulation of tandem queueing systems, *Mathematical and Computer Modelling* 22(3) (1995), 25-37.
2. Krivulin, Nikolai, Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems." *Linear Algebra and its Applications*, 468 (2015), 211-232.
3. Кожухов И. Б., Цепные полугрупповые кольца, *Успехи математических наук*, 29(1) (1974), 169-170.

4. Кожухов, И. Б., Ярошевич В. А., О потенциальной делимости матриц над дистрибутивными решетками, *Дискретная математика* 22(2) (2010), 148-159.
5. Вечтомов, Е. М., Михалев А. В., Черных В. В., Абелево регулярные положительные полукольца, *Труды семинара им. И.Г. Петровского* 20 (1997), 282-309.
6. Вечтомов, Е. М., Черанева, А. В., Полутела и их свойства, *Фундаментальная и прикладная математика*, 14(4) (2008), 3-54.

Специалисты по теме диссертации, работающие в рекомендуемой ведущей организации

д.ф.-м.н., профессор Андрей Валерьевич ЦАРЕВ;
д.ф.-м.н., профессор Александр Александрович ФОМИН;
д.ф.-м.н., профессор Александр Владимирович ГРИШИН;
д.ф.-м.н., профессор Владимир Григорьевич ЧИРСКИЙ.

Диссертационный совет Д 501.001.84, созданный на базе ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова», **вынес решение принять диссертацию Шитова Ярослава Николаевича «Линейная алгебра над полукольцами» к защите (протокол № 10 от 25 сентября 2015 года)**. А так же разместить текст диссертации и автореферата, отзыв научного руководителя, данное **Решение совета на сайте ИСТИНА** (<http://istina.msu.ru/dissertations/9654035/>) и объявление о защите диссертации **на сайте ВАК Минобрнауки РФ**.

Постановили.

1. Новизна и актуальность темы диссертации не вызывают сомнений. Она подтверждается экспертизой. Основные результаты диссертации опубликованы в полной мере. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

2. Назначить **ведущую организацию** — ФГБОУ ВО «Московский Педагогический Государственный Университет»; **официальными оппонентами:** д.ф.-м.н. Вечтомова Евгения Михайловича, профессора, заведующего кафедрой высшей математики ФГБОУ ВПО "Вятский государственный гуманитарный университет", д.ф.-м.н. Кожухова Игоря Борисовича, профессора кафедры высшей математики N1 ФГБОУ ВО "Московский институт электронной техники", д.ф.-м.н. Кривулина Николая Кимовича, профессора кафедры статистического моделирования математико-механического факультета ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский государственный университет". Согласие оппонентов получено.

3. Назначить дату защиты — **25 декабря 2015 года**.

4. Разрешить печатание автореферата диссертации на правах рукописи. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

5. Разместить текст диссертации и автореферата, отзыв научного руководителя, данное **Решение совета на сайте ИСТИНА** <http://istina.msu.ru/dissertations/9654035/>, <http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi> и объявление о защите диссертации **на сайте ВАК Минобрнауки РФ**.

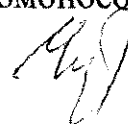
6. Рассылку авторефератов произвести по «списку рассылки авторефератов диссертации» без изменений.

7. Поручить комиссии в составе: д.ф.-м.н., профессор В.Н. Латышев, д.ф.-м.н., профессор А.В. Михалев, д.ф.-м.н., профессор Ю.В.

Нестеренко, д.ф.-м.н., профессор В.А. Артамонов подготовку заключения по диссертации к защите.

Результаты голосования по вопросу принятия диссертации **Шитова Ярослава Николаевича «Линейная алгебра над полукольцами»** на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности **01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел (физико-математические науки)**: за — 18, против — нет, воздержавшихся — нет.

Председатель диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова
Доктор физико-математических наук, профессор
В.Н. Чубариков



Учёный секретарь диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова
Доктор физико-математических наук, профессор
А.О. Иванов

