ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Федосеев Денис Александрович

Конфигурационные многообразия обобщенной задачи Бертрана и гамильтоновы системы

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре Дифференциальной геометрии и приложений Механико–математического факультета ФГБОУ ВО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители: **Фоменко Анатолий Тимофеевич**,
академик РАН,
профессор

Кудрявцева Елена Александровна,
кандидат физико-математических наук,
доцент

Официальные оппоненты: **Кушнер Алексей Гурьевич**,
доктор физико-математических наук,
заведующий лабораторией №6 "Проблем качественного исследования нелинейных динамических систем" (ФГБУ Интситут проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН)

Москвин Андрей Юрьевич,
кандидат физико-математических наук,
начальник отдела аналитики (ЗАО "Группа компаний С7")

Ведущая организация: **ФБГОУ ВПО Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана**

Защита диссертации состоится 25 сентября 2015 г. в 16^{45} на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при ФГБОУ ВПО Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП–1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВПО Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8й этаж), http://mech.math.msu.ru/~snark/index.cgi, http://istina.msu.ru/dissertations/9617725.

Автореферат разослан 25 августа 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 на базе
ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико–математических наук,
профессор **Иванов Александр Олегович**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению многообразий Бертрана — возникающих как конфигурационные многообразия обобщений задачи Бертрана для различных классов потенциалов, — некоторых их геометрических свойств, а также изучению бифуркационых диаграмм, отображения момента и некоторых аспектов лиувиллева слоения, возникающих при рассмотрении соответствующих гамильтоновых систем.

Задача, сейчас носящая название "задача Бертрана", была впервые поставлена Ж. Бертраном в 1873 году[1]. Задача формулировалась следующим образом: *найти закон силы притяжения, если она зависит только от расстояния и заставляет свою точку приложения описывать замкнутую кривую, каковы бы ни были начальные условия, если только начальная скорость точки меньше некоторого предела.* Иначе можно сказать, что классическая задача Бертрана — это обратная задача динамики на плоскости (поиск закона сил по известным свойствам траекторий) в частном случае центральной потенциальной силы и замкнутости всех ограниченных траекторий. Следует отметить, что задача возникла из небесной механики, а потому ставилась для движения в трехмерном евклидовом пространстве, но в силу центральности искомой силы индуцируется на плоскость.

В той же работе (имеется также английский перевод[2]) Бертран дал решение поставленной задачи: он доказал, что существует только два потенциала с искомыми свойствами, причем это в точности ньютоновский (то есть гравитационный) и гуковский (то есть осцилляторный) потенциалы, которым соответствуют силы (записанные в естественных полярных координатах на плоскости) $-\frac{G}{r^2}$ и $-kr$, а уравнения движения точки имеют вид $\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -\frac{G}{r^3}\vec{r}$ либо $\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -k\vec{r}$, где $\vec{r} = \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ – радиус-вектор точки (планеты); $r = |\vec{r}|, G = \mathrm{const} > 0, k = \mathrm{const} > 0$. Впрочем, как было недавно установлено, доказательство Бертрана требовало существенно более сильных условий на потенциал, нежели "все ограниченные траектории замкнуты"; выяснилось, что задача была решена для так называемых *сильно замыкающих потенциалов*, которые характеризуются требованием, чтобы каждая круговая орбита являлась сильно устойчивой. Однако, как показывает один из результатов настоящей работы, ответ, полученный Бертраном, верен и для задачи в изначальной постановке.

Динамика и геометрия движения на многообразиях вращения (инвариантых относительно действия окружности) в поле центрального потенциала многократно и плодотворно рассматривалась. Так, аналог ньютоновской силы как величины, обратной площади сферы радиуса r, для пространства H^3 предложил ещё Н.И. Лобачевский[3] и Я. Больяи[4]. В 1860 г. П. Серре[5] определил аналог гравитационного потенциала на сфере и решил задачу Кеплера на ней. В 1870 г. Ф. Шеринг написал аналитическое выражение для потенциала Ньютона на H^3[6]. В 1873 г. Р. Липшиц[7] рассмотрел движение тела в центральном поле

[1] J. Bertran, "Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe" *C.R. Acad. Sci. Paris*, **77** (1873), 849–853.

[2] F. C. Santos, V. Soares, A. C. Tort, "An English translation of Bertrand's theorem", *arXiv:0704.2396v1* (2007).

[3] Н. И. Лобачевский, "Новые начала геометрии с новой теорией параллельных" *Полное собрание сочинений. Сочинения по геометрии, Т. II.*, М.–Л., ГИИТЛ (1949).

[4] W. Bolyai, J. Bolyai, "Geometrische Untersuchungen", *Teubner*, Leipzig (1913).

[5] P. Serret, "Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes a double courbure", *Librave de Mallet-Bachelier*, Paris (1860).

[6] F. Schering, "Die Schwerkraft im Gaussischen Räume", *Nachr. der Königl. Gessellschaft der Wissenschaften*, **15** (1870), pp. 311–321.

[7] R. Lipshitz, "Extension of the planet-problem to a space of n dimensions and constant integral curvature", *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **12** (1873), pp. 349–370.

на сфере S^2 со стандартной метрикой, однако вместо потенциала $-\frac{1}{\operatorname{tg} r}$ он рассмотрел потенциал $-\frac{1}{\sin r}$. Он нашел общее решение этой задачи в эллиптических функциях. В 1885 г. В. Киллинг обобщил законы Кеплера на сферу S^3, оснащенную стандартной метрикой[8]. Подобно Лобачевскому и Больяи, он рассматривал силу притяжения как величину, обратную площади двумерной сферы радиуса r в S^3. В следующем году эти результаты были заново получены К. Нейманом[9]. В. Киллинг также доказал, что переменные в задаче Кеплера с двумя притягивающими центрами на сфере S^n со стандартной метрикой разделяются, что влечёт интегрируемость задачи. В 1902 г. Г. Либман[10] перенёс эти результаты на H^3.

В 1940-х годах этот вопрос рассматривался в рамках теории относительности, а именно решалась квантово-механическая одночастичная спектральная задача для ньютоновского потенциала на сфере S^3 Э. Шрёдингером и Стивенсоном, на H^3 Инфельдом и Шильдом. В 1980-х годах центральные потенциалы в рамках теории относительности на S^3, H^3, S^n исследовались Ю.А. Курочкиным, В.С. Отчиком, А.А. Богушем, Г. Лимоном. В 1994 году В.В. Козлов переоткрыл законы Кеплера для пространств постоянной секционной кривизны. В этом же году он вместе с Ю.Н. Фёдоровым установил интегрируемость классического движения одной частицы по сфере S^n в поле, создаваемом гуковскими потенциалами, расположенными в $2(n+1)$ точках пересечения сферы с координатными осями.

Что касается обратной задачи динамики, то в силу естественности поставленной Бертраном задачи, за его работой последовали её различные обобщения. В первую очередь были рассмотрены обобщения в смысле изучения других конфигурационных многообразий задачи — замена плоскости на другие многообразия вращения. Упомянутым выше Г. Либманом задача Бертрана была решена в 1903 году на полусферах и плоскостях Лобачевского[11], причем ответ оказался прежним: искомыми потенциалами оказались гравитационный и осцилляторный. М. Икеда и Н. Катяма в 1982 году изучили многомерный аналог этого вопроса, решив задачу Бертрана на S^n и H^n, получив аналогичный результат, причем случай многомерной сферы был рассмотрен ранее (S^n — П. Хиггсом[12] в 1979 году, а частный случай S^3 — Я.Е. Славяновским в 1980). Перечисленные результаты многократно переоткрывались. Так, к примеру, в 1992 году результат Либмана для задачи на полусфере был заново получен В.В. Козловым и А.О. Хариным (опубликован, например, в[13]).

Первый результат, связанный не с изучением потенциалов на данной поверхности, но с поиском пар “многообразие – центральный потенциал с заданными свойствами замыкания траекторий”, принадлежит Дарбу (1877)[14]. Анализ его работы (необходимый, поскольку, как и в случае с первоначальной работой Бертрана, в действительности доказанное не вполне совпадает с формулировкой теоремы) показывает, что из его (промежуточных) вычислений следует классификация бертрановых пар, в которых конфигурационным мно-

[8]W. Killing, “Die Mechanik in den nicht-Euclidishen Raumformer”, *J. Reine Angew. Math.*, **Bd. 98** (1885), pp. 1–48.

[9]C. Neumann, “Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze auf der Fall, dass die Bewegung auf einer Kugelfläche stattfindet”, *Gessellschaft der Wissenschaften, Math. Phys. Klasse* **38** (1886), pp. 1–2.

[10]H. Liebmann, “Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum”, *Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft, Math. Phys. Klasse*, **Bd. 54** (1902), pp. 393–423.

[11]H. Liebmann, “Über die Zentralbewegung in der nichteuklidische Geometrie”, *Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft, Math. Phys. Klasse*, **Bd. 55** (1903), pp. 146–153.

[12]P. W. Higgs, “Dynamical symmetries in a spherical geometry, I”, *J. Phys. A. Math. Gen.*, **12** (1979), pp. 309–323.

[13]В. В. Козлов, А. О. Харин, “Задача Кеплера в пространствах постоянной кривизны”, *Классическая динамика в неевклидовых пространствах*, Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований (2004), стр. 159–166.

[14]G. Darboux, “Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution”, *Bulletin de la S. M. F.*, **5** (1877), pp. 100–113.

гообразием является риманово многообразие вращения (не обязательно вложенной в $\mathbb{R}^3$) без экваторов, а центральный потенциал — сильно замыкающий. В качестве (ошибочного) окончательного результата Дарбу сформулировал (ошибочную) классификацию поверхностей вращения (реализуемых вложение в $\mathbb{R}^3$) без экваторов, допускающих такие потенциалы, однако она оказалась неполной, так как содержала лишь многообразия вращения с $\mu = 1$; и потому в его (ошибочную) классификацию не попали поверхности постоянной отрицательной кривизны. Следующим продвижением в этой области стала работа В. Перлика[15], который в 1992 году получил классификацию пар Бертрана для многообразий без экваторов и *слабо замыкающих* центральных потенциалов. По сравнению с Дарбу, Перлик отказался от условия вложенности в $\mathbb{R}^3$ и заменил условие сильной устойчивости всех круговых орбит на их орбитальную устойчивость. Наконец, в 2008 году М. Сантопрете[16] доказал, что на аналитических многообразиях вращения с постоянной гауссовой кривизной без экваторов, вложенных в $\mathbb{R}^3$, существует в точности два сильно замыкающих потенциалов — гравитационный и осцилляторный, а на всех прочих поверхностях вращения без экваторов существует не более одного сильно замыкающего центрального потенциала и указал вид этого потенциала (осцилляторный). Он также нашел необходимое условие (в действительности являющееся и достаточным) на метрику существования такого потенциала и сформулировал его в виде биквадратного уравнения на так называемую *постоянную Бертрана*.

В диссертации рассмотрено более широкое обобщение задачи Бертрана. А именно, варьируется не только конфигурационное многообразие задачи, как было у Дарбу и Перлика, но и рассматриваются различные наборы требований на потенциал (т.е. вводится несколько классов замыкающих потенциалов): изучена задача Бертрана не только для сильно замыкающих (как у Дарбу), слабо замыкающих (Перлик) и замыкающих (оригинальная формулировка Бертрана), но и для локально, полулокально, вполне и устойчиво замыкающих потенциалов, которые ранее не рассматривались. На рис. 1 наглядно показано, как связаны между собой эти классы потенциалов, причем диаграмма точна в том смысле, что все изображенные на диаграмме "области" непусты кроме, быть может, области "$1 \setminus 3$". Как видно, класс локально замыкающих потенциалов является самым общим из рассматриваемых — все прочие потенциалы также являются локально замыкающими. Самыми узкими классами являются сильно замыкающий (для которого результаты были получены Бертраном и Дарбу) и вполне замыкающий. Отметим, что диаграмма включений классов потенциалов на рис. 1 не является тривиальным следствием определений этих классов. Из определения классов нетрудно следует лишь "грубая" диаграмма (диаграмма нестрогих включений классов). Включение "$3 \subseteq 1$", скорее всего, является строгим, но для решения этого вопроса не достаточно результатов настоящей работы.

[15] V. Perlick, "Bertrand spacetimes", *Class. Quantum Grav.*, **9** (1992), pp. 1009–1021.

[16] M. Santoprete, "Gravitational and harmonic oscillator potentials on surfaces of revolution", *Journal of Math. Phys.*, **49**:4 (2008), 042903.

Рис. 1: Диаграмма включений классов замыкающих потенциалов

Важно отметить, что в случае поиска многообразий, на которых существуют вполне и устойчиво замыкающие потенциалы, удалось отказаться от условия отсутствия экваторов, которое существенно использовалось в ранее доказанных теоремах в этой области. В обоих случаях — поиск пар "многообразие вращения без экваторов – замыкающий (сильно, слабо, локально или полулокально замыкающий) гладкий центральный потенциал" и "многообразие вращения – вполне/устойчиво замыкающий гладкий центральный потенциал" получена полная классификация как многообразий, так и потенциалов, которые вновь оказываются гравитационным и осцилляторным, причем на части многообразий оба они являются бертрановыми, а на прочих бертрановым является лишь осцилляторный потенциал.

Как было сказано выше, далеко не все многообразия Бертрана могут быть вложены в $\mathbb{R}^3$ с сохранением инвариантности относительно действия группы вращений. Однако ранее никто не задавался вопросом, какие же из бертрановских многообразий (то есть многообразий вращения, на которых существует бертрановский потенциал в одном из рассматриваемых смыслов) могут быть реализованы в $\mathbb{R}^3$ — целиком (глобально) или в окрестности какой-то параллели (локально). В диссертации этот вопрос рассмотрен и доказано, какие из многообразий Бертрана могут быть реализованы — как глобально, так и локально. В частности, этот результат наглядно демонстрирует, каких многообразий не хватало в классификации Дарбу в решении задачи Бертрана для сильно замыкающих потенциалов.

Движение в поле гладкого центрального потенциала по многообразию вращения является, очевидно, натуральной гамильтоновой системой, обладающей дополнительными интегралами. В силу этих соображений естественной задачей является изучение интегрируемости этих систем, а в случае положительного результата — построение инвариантов классификационной теории Фоменко–Цишанга. Рассмотрением интегрируемых "бертрановских динамических систем" — движения по многообразию Бертрана в поле замыкающего (в одном из смыслов) центрального потенциала — занимался, например, М. Сантопрете. Исследование показывает, однако, что бертрановская система не всегда является интегрируемой, поскольку её гамильтоновы потоки не всегда полны. Тем не менее, понятия бифуркационной диаграммы, отображения момента и слоения Лиувилля все равно оказываются осмысленными. В диссертации построены бифуркационные диаграммы для всех бертрановских систем с конфигурационным многообразием без экваторов и исследованы свойства отображения момента и слоения Лиувилля, в частности, исследовано количество и компактность прообразов точек в каждой камере образа отображения момента. Оказывается, что такие системы предоставляют простой и естественный пример интегрируемых систем с некомпактными слоями слоения Лиувилля. Следует отметить, что в отличие от компактного случая, для которого существует исчерпывающая классификационная теория Фоменко–Цишанга (подробно изложенная, например, в[17]), перестройки некомпактных слоев на сегодняшний день остаются малоизученными. Перестройки, возникающие в случае многообразий Бертрана, поддаются описанию и классификации (что сделано в диссертации), а потому данные системы можно рассматривать как простой и наглядный пример, полезный при построении общей теории классификации систем с некомпактными слоями слоения Лиувилля.

Цель диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Классификация многообразий Бертрана без экваторов для классов замыкающих, локально, полулокально, сильно и слабо замыкающих центральных потенциалов.

2. Классификация многообразий Бертрана без условия на наличие или отсутствие экваторов для классов вполне замыкающих и устойчиво замыкающих центральных потенциалов

3. Изучение задачи о глобальной и локальной реализуемости многообразий из пункта 1 в виде поверхностей вращения, вложенных в пространство $\mathbb{R}^3$ с сохранением инвариантности относительно действия окружности.

4. Построение и анализ бифуркационных диаграмм гамильтоновых систем движения в поле центрального осцилляторного или гравитационного потенциала по многообразиям из пункта 1.

Методы исследования

В диссертации используются методы дифференциальной геометрии, лагранжевой и гамильтоновой механики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

1. Решена задача классификации пар Бертрана для случая римановых двумерных многообразий вращения без экваторов (заметно отличающихся от псевдориманова случая) и классов замыкающих, локально замыкающих, полулокально замыкающих, сильно замыкающих и слабо замыкающих потенциалов. А именно, доказано, что на многообразиях вращения с метриками из трехпараметрического семейства $ds^2_{\mu,c,d}$, где $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{Q}_+$ потенциалы пяти перечисленных классов совпадают, при этом на многообразиях с метриками $ds^2_{c,0,\mu}$, построенными в настоящей работе, таких потенциалов в точности два, а на прочих многообразиях семейства (для ненулевого параметра d) потенциал единствен.

[17] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация”, Ижевск, УдГУ (1999).

Более того, в первом случае потенциалами является обобщенный гравитационный и обобщенный осцилляторный, а во втором — только обобщенный осцилляторный. На иных многообразиях вращения без экваторов не существует потенциалов рассмотренных пяти классов.

2. Решена обобщенная задача Бертрана в случае вполне замыкающих и устойчиво замыкающих потенциалов на произвольных римановых двумерных многообразиях вращения (с экваторами или без них). Доказано, что в обоих случаях не возникает новых многообразий, помимо полученных в пункте 1. При этом "грушевидные" многообразия, которые при изучении задачи Бертрана на многообразиях без экваторов рассматривались как пары многообразий, в данном случае целиком являются многообразиями Бертрана. Более точно, доказано, что все устойчиво бертрановы многообразия являются многообразиями без экваторов (и их семейство совпадает с семейством всех бертрановых многообразий без экваторов), а для вполне бертрановых пар приведено полное описание пар "метрика — центральный потенциал". Кроме того, доказано, что на цилиндрах не существует замыкающих потенциалов, причем в любом "поясе" между максимумом и минимумом любой замкнутой некруговой орбиты существуют как незамкнутые неособые ограниченные орбиты, так и бесконечное число замкнутых и попарно негомотопных орбит.

3. Исследованы геометрические свойства многообразий Бертрана, а именно, доказано, какие из многообразий с метриками $ds^2_{c,d,\mu}$ являются *поверхностями вращения*, т.е. могут быть вложены в $\mathbb{R}^3$ с сохранением инвариантности относительно действия группы вращений.

4. Для натуральных механических систем на многообразиях Бертрана (движение в поле осцилляторного бертрановского потенциала и движение в поле гравитационного бертрановского потенциала) доказано, что они являются интегрируемыми гамильтоновыми системами, доказана функциональная независимость интегралов, изучено отображение момента, в частности вычислены границы его образа, исследованы бифуркационные диаграммы и установлено количество и компактность слоев слоения Лиувилля в прообразе каждой точки образа отображения момента.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер.

Полученные результаты о метриках многообразий Бертрана дают наиболее полный на сегодняшний день ответ на обобщение классической геометрической и механической задачи о нахождении потенциалов, обеспечивающих замкнутость определенного множества траекторий движения точки. В частности, никаких результатов о существовании бертрановских потенциалов на многообразиях вращения с экваторами ранее не существовало. Задачи такого рода возникают в современной космологии и теории относительности.

Полученные результаты о бифуркационных диграммах и образе отображения момента для натуральных гамильтоновых систем на многообразиях бертрана могут быть использованы при построение теории лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем с некомпактными слоями слоения Лиувилля.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

XVIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (Москва, 11–15 апреля 2011);

XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (Москва, 8–13 апреля 2013);

XXI международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (Москва, 7–11 апреля 2014);

международная конференция "Воронежская зимняя математическая школа им. Крейна – 2010" (Воронеж, 25–30 января 2010);

международная конференция "Воронежская зимняя математическая школа им. Крейна – 2012" (Воронеж, 25–30 января 2012);

международная конференция "Воронежская зимняя математическая школа им. Крейна – 2014" (Воронеж, 26–31 января 2014);

ежегодная научная конференция "Ломоносовские чтения" 2011 года (МГУ), посвященная 300-летию со дня рождения М.В.Ломоносова (Москва, 14–23 ноября 2011);

International Topological Conference "Alexandroff Readings" Lomonosov Moscow State University (Moscow, May 21–25, 2012).

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

на семинаре "Современные геометрические методы" под руководством акад. А.Т. Фоменко, проф. А.С. Мищенко, проф. А.В. Болсинова, проф. А.А. Ошемкова, доц. Е.А. Кудрявцевой, доц. И.М. Никонова, асс. А.Ю. Коняева, асс. А.М. Изосимова; 2010 – 2014 гг., неоднократно;

на семинаре "Узлы и теория представлений" под руководством проф. В.О. Мантурова, доц. Д.П. Ильютко и доц. И.М. Никонова; 2011 – 2014 гг., неоднократно;

на семинаре "Геометрия в целом" под руководством проф. И.Х. Сабитова; 2012 г.

Публикации

Основные результаты диссертации представлены в 5 работах [1–5], 5 из которых из списка ВАК, список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Текст диссертации изложен на 116 страницах и содержит 1 таблицу и 15 рисунков. Список литературы содержит 41 наименование.

Содержание работы

Во **введении** описывается структура диссертации и история рассматриваемых вопросов, обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов, описываются основные результаты диссертации. Кроме того, приводятся необходимые определения и классические результаты об обобщенной задаче Бертрана, используемые в диссертации.

В **первой главе** изучается обобщенная задача Бертрана на многообразиях вращения без экваторов. А именно, в дополнение к возникающим в классических работах Бертрана, Дарбу и Перлика понятиям замыкающего, сильно замыкающего и слабо замыкающего центральных потенциалов вводятся понятия локально и полулокально замыкающих потенциалов, а затем исчерпывающе решается задача классификации пар Бертрана для случая многообразий вращения без экваторов и этих пяти классов центральных потенциалов (тем самым решается пять различных обобщений задачи Бертрана). Доказано, что на многообразиях вращения с метриками из трехпараметрического семейства $ds^2_{\mu,c,d} = \frac{d\theta^2}{(\theta^2+c-d\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2+c-d\theta^{-2})}$, где $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{Q}_+$ потенциалы пяти перечисленных классов совпадают, при этом на многообразиях с метриками $ds^2_{c,0,\mu}$, построенными в настоящей работе, таких потенциалов в точности два, а на прочих многообразиях семейства (для ненулевого параметра d) потенциал единствен. Более того, в первом случае потенциалами является обобщенный гравитационный и обобщенный осцилляторный, а во втором — только обобщенный осцилляторный. На иных многообразиях вращения без экваторов не существует потенциалов рассмотренных пяти классов. Более точно, доказаны следующие теоремы.

Первая соответствует случаю $d = 0$:

Теорема 1. *Пусть дана гладкая двумерная поверхность S, диффеоморфная $(a,b) \times S^1$, снабженная римановой метрикой*

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$$

(т.е. абстрактная поверхность вращения). Пусть функция f удовлетворяет тождеству $f''f - (f')^2 = -\xi^2$, где $\xi > 0$ рационально, т.е. f имеет один из следующих видов:

$$f(r) = \xi f_c(r-\alpha) := \begin{cases} \pm\xi(r-r_0), & c=0, \\ \dfrac{\xi}{\sqrt{c}}\sin(\sqrt{c}(r-r_0)), & c>0, \\ \pm\dfrac{\xi}{\sqrt{-c}}\operatorname{sh}(\sqrt{-c}(r-r_0)), & c<0, \end{cases} \tag{0.1}$$

где c — половина скалярной кривизны Римана этой поверхности; в данном случае кривизна постоянна; $2\pi\xi$ — полный угол в конической точке поверхности (центре поля). Пусть, далее, функция $f'(r)$ не имеет нулей на интервале (a,b). Тогда в классе центральных потенциалов на S существуют два и только два (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант) полулокально замыкающих (соответственно локально замыкающих, замыкающих, сильно или слабо замыкающих) потенциала $V_1(r)$, $V_2(r)$.

Случаю $d \neq 0$ соответствует следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть дана гладкая двумерная поверхность S, диффеоморфная $(a,b) \times S^1$, снабженная римановой метрикой*

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2.$$

Пусть функция f не удовлетворяет тождеству $f''f - (f')^2 = -\xi^2$ ни для какого рационального $\xi > 0$, и пусть функция $f(r)$ не имеет критических точек на (a,b). Тогда существует не более одного полулокально замыкающего (соответственно локально замыкающего, замыкающего, сильно или слабо замыкающего) центрального потенциала (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант). При этом потенциал ровно один (с точностью до аддитивной и мультипликативной констант) тогда и только *тогда, когда выполнено следующее условие: существует гладкая функция $\theta = \theta(r)$ без нулей на (a, b), такая что $\theta'(r) > 0$ и риманова метрика в координатах $(\theta, \varphi \mod 2\pi)$ имеет вид*

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2 + c - d\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2 + c - d\theta^{-2})}, \tag{0.2}$$

где μ — положительная рациональная константа, d — ненулевая константа, а c — произвольная вещественная константа.

При этом функция $\theta(r)$ и тройка чисел (μ, c, d) единственны (если существуют), и замыкающий потенциал будет являться обобщенным осцилляторным, т.е. иметь вид $V_2(r) = \frac{A}{2\theta^2(r)} + B$, где $A, B \in \mathbb{R}$, $A(\theta^4(r) + d) > 0$. Соответствующие неособые некруговые ограниченные орбиты задаются периодическими функциями $r = r(\varphi)$ с минимальным положительным периодом $\Phi = \pi\mu$. На фазовой траектории, отвечающей круговой орбите $\{r\} \times S^1 \subset (a, b) \times S^1$, значение кинетического момента K равно $K = \pm\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{A}{\theta^4(r)+d}}$; граничная окружность $\{r_0\} \times S^1$, на которой достигается $\inf f(r)$ (т.е. $\sup A|\theta(r)|$), является притягивающим центром поля с замыкающим потенциалом V_2 (т.е. на ней достигается $\inf V_2(r)$).

В качестве следствия непосредственно исследован частный случай задачи Бертрана на конусах. Показано, что конус является многообразием Бертрана (то есть на нем существует бертрановский потенциал одного из пяти рассмотренных классов) если и только если угол при вершине конуса соизмерим с 2π (но не обязательно меньше 2π; в последнем случае конус не может быть вложен в $\mathbb{R}^3$ сохранением инвариантности относительно действия группы вращений, но все равно является бертрановским многообразием).

Кроме того, подробно изучены геометрические свойства полученных многообразий и их бифуркации при изменении параметров (c, d). Показано, что все многообразия Бертрана (т.е. двумерные римановы многообразия вращения, на которых существуют "бертрановы" потенциалы) без экваторов образуют трехпараметрическое семейство $ds^2_{\mu,c,d}$ и могут быть описаны следующим образом (при $\mu = 1$). На прямой $\{d = 0\}$ расположены многообразия постоянной кривизны: проколотые полусферы при $c > 0$, евклидова плоскость при $c = 0$ и плоскости Лобачевского при $c < 0$. Полуплоскости $\{d > 0\}$ отвечают "полубесконечные" многообразия вращения. Полуплоскость $\{d < 0\}$ делится на две части левой ветвью параболы $c^2 + 4d = 0$. В области справа от параболы находятся "грушевидные" многообразия с экватором, которые следует рассматривать как пары многообразий вращения без экваторов, каждое из которых является многообразием Бертрана и попарно эти многообразия являются аналитическим продолжением одно другого. Наконец, слева от параболы находится семейство пар полубесконечных многообразий, получаемых из грушевидных устремлением радиуса экватора к бесконечности и "разведением" половин.

Изменение параметра μ ведет к переходу от "базисного" многообразия к некоторому определенному и описанному в диссертации разветвленному накрытию над ним.

Вторая глава посвящена задаче Бертрана на многообразиях вращения без наложения условия на наличие или отсутствие экваторов, ранее не рассматривавшейся. Решена обобщенная задача Бертрана в случае вполне замыкающих и устойчиво замыкающих потенциалов на произвольных многообразиях вращения (с экваторами или без них). Доказано, что в обоих случаях не возникает новых многообразий, помимо полученных в теоремах 1 и 2, а также многообразий Таннери (многообразий вращения, все геодезические на которых замкнуты). При этом "грушевидные" многообразия, которые при изучении задачи Бертрана на многообразиях без экваторов рассматривались как пары многообразий, в данном случае целиком являются многообразиями Бертрана. Более точно, доказано, что все устойчиво бертрановы многообразия являются многообразиями без экваторов (и их семейство совпадает с семейством всех бертрановых многообразий без экваторов), а для вполне бертрановых пар справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Вполне бертрановы многообразия вращения* (S, ds^2), *где* $S = (a, b) \times S^1$, *вместе с вполне замыкающими центральными потенциалами* V *на* S, *с точностью до сопряженности пар* (ds^2, V) *образуют пять семейств:*

(i) сферичные "сферообразные" (т.е. постоянной положительной кривизны) 2-мерные римановы многообразия вращения (образующие 2-параметрическое семейство, содержащее 1-параметрическое семейство круглых сфер с выколотыми полюсами) с гравитационным потенциалом на них,

(ii) "рациональные" конусы с плоской метрикой (образующие 1-параметрическое семейство, содержащее проколотую евклидову плоскость) с осцилляторным потенциалом на них,

(iii) "северные полусферы" многообразий из п.(i) с осцилляторным потенциалом на них,

(iv) грушевидные 2-мерные римановы многообразия вращения из теоремы 2 (образующие 3-параметрическое семейство) с осцилляторным потенциалом на них, где знак потенциала таков, что "основной" полюс является притягивающим, а "дополнительный" — отталкивающим,

(v) все многообразия Таннери, классифицированные в[18]*, включающие многообразия из пп.(i,iv) и образующие "функционально-двупараметрическое" семейство (параметры которого суть два вещественных числа и нечетная гладкая функция* $h : (-1, 1) \to (-1, 1)$ *с точностью до замены* $h \to -h$*), являющиеся либо сферичными и сферообразными* ($h \equiv 0$)*, либо грушевидными* ($h \not\equiv 0$)*, с постоянным потенциалом на них.*

Любые две вполне бертрановы пары (ds^2, V)*, принадлежащие либо разным семействам, либо одному семейству с разными наборами параметров, не сопряжены. Римановы многообразия семейств (i) и (iv) составляют часть римановых многообразий семейства (v). Любые два римановы многообразия, принадлежащие либо разным семействам (ii,iii,v), либо одному семейству (i—v) с разными наборами параметров, не изометричны.*

Кроме того, доказано, что на цилиндрах не существует замыкающих потенциалов, причем в любом "поясе" между максимумом и минимумом любой замкнутой некруговой орбиты существуют как незамкнутые неособые ограниченные орбиты, так и бесконечное число замкнутых и попарно негомотопных орбит.

В **третьей главе** исследованы геометрические свойства многообразий Бертрана, а именно, показано, какие из многообразий с метриками $ds^2_{c,d,\mu}$ являются *поверхностями вращения*, т.е. могут быть вложены в $\mathbb{R}^3$ с сохранением инвариантности относительно действия группы вращений. Ранее (например, из результатов Перлика) было известно, что не все многообразия Бертрана могут быть реализованы поверхностями вращения. В частности, поэтому классификация Дарбу не включала в себя ряд многообразий, например, плоскость Лобачевского. Однако в классических работах вопрос о реализуемости не поднимался. В диссертации доказано, для каких троек параметров (μ, c, d) соответствующее многообразие реализуется целиком (глобальная реализуемость), а для каких существуют параллели на многообразии, некоторая окрестность которых может быть реализуема (локальная реализуемость); в последнем случае получены значения граничных параллелей максимальных по включению реализуемых подмногообразий. Более точно, доказаны следующие теоремы:

Теорема 4 (Глобальная реализуемость)**.** *Верны следующие утверждения о реализуемости римановых многообразий Бертрана* $(I_{k,c,d} \times S^1, \mathrm{ds}^2_{\mu,\mathrm{c},\mathrm{d}})$ *целиком:*

[18] A. Besse, "Manifolds all of whose geodesics are closed", Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag (1978).

1) *Дополнительное многообразие не реализуемо никогда;*
2) *Основное многообразие реализуемо тогда и только тогда, когда соответствующая тройка параметров* (μ, c, d) *принадлежит следующим областям:* $\{\mu \geq 2, c \geq -2\sqrt{-d}, d \leq 0\} \cup \{1 \leq \mu < 2, c \geq -2\sqrt{-d}\sqrt{h(\mu)}, d \leq 0\}$, *где* $h \in \mathrm{Homeo}^+((0,+\infty),\mathbb{R})$ *— сохраняющий ориентацию гомеоморфизм интервалов, определенный формулой* $h(\mu) := \frac{(\mu^2-1)(8+\mu^2)^2}{27\mu^4}$.

Теорема 5. *Риманово многообразие Бертрана* $(I_{k,c,d}, \mathrm{d}s^2_{\mu,c,d})$ *реализуемо целиком в виде поверхности вращения в* $\mathbb{R}^3$ *тогда и только тогда, когда оно является основным* $(k = 1)$ *и тройка параметров* (μ, c, d) *принадлежит области, указанной в предыдущей теореме. Для остальных значений* k, $(\mu, c, d) \in \mathbb{R}^3, \mu > 0$, *верны следующие утверждения о локальной реализуемости многообразий Бертрана:*

0) Пусть $d = c = 0, 0 < \mu < 1$. *Риманово многообразие нереализуемо даже локально (т.е. любая окрестность любой параллели нереализуема).*

1) Пусть $d = 0, c > 0, \mu < 1$. *Реализуема часть многообразия, примыкающая к экватору* $\{0\} \times S^1$.

2) Пусть $d = 0, c < 0$. *При* $\mu \leq 1$ *многообразие нереализуемо даже локально. При* $\mu > 1$ *реализуема часть многообразия, примыкающая к полюсу* $\{+\infty\} \times S^1$.

3) Пусть $d > 0, c \leq 0$. *При* $\mu > 1$ *реализуема часть многообразия, примыкающая к полюсу* $\{+\infty\} \times S^1$; *при* $\mu \leq 1$ *поверхность нереализуема даже локально.*

4) Пусть $d > 0, c > 0$. *При* $\mu \geq 1$ *реализуема часть многообразия, примыкающая к полюсу* $\{+\infty\} \times S^1$; *целиком риманово многообразие никогда не реализуемо. При* $0 < \mu < 1, -\frac{c^2}{4t} < h(\mu)$ *реализуем “поясок” в окрестности параллели* $\{-\sqrt{x_0}\} \times S^1$, *отвечающей локальному минимуму* $x_0 > 0$ *функции* $z(x)$, *края которого никогда не достигают граничных параллелей (т.е. полюса и абсолюта) многообразия Бертрана. Наконец, при* $0 < \mu < 1, -\frac{c^2}{4t} \geq h(\mu)$ *многообразие Бертрана нереализуемо даже локально.*

5) Пусть $d < 0, c < -2\sqrt{-d}$. *При* $0 < \mu \leq 1$ *ни основное, ни дополнительное многообразие нереализуемо даже локально. При* $1 < \mu, -\frac{c^2}{4t} \geq h(\mu)$ *реализуема часть основного многообразия Бертрана, прилегающая к полюсу* $\{+\infty\} \times S^1$. *При* $\mu > 1, -\frac{c^2}{4t} < h(\mu)$ *у основного многообразия реализуема часть, прилегающая к полюсу* $\{+\infty\} \times S^1$, *а у дополнительного реализуем “пояс” вокруг параллели* $\{-\sqrt{x_0}\} \times S^1$, *отвечающей локальному минимуму* $x_0 > 0$ *функции* $z(x)$.

6) Пусть $d < 0, c = -2\sqrt{-d}$. *При* $\mu \leq 1$ *ни основное, ни дополнительное многообразия нереализуемы даже локально. При* $\mu \in (1, 2)$ *реализуема часть основного многообразия Бертрана, прилегающая к абсолюту* $\{+\infty\} \times S^1$. *При* $\mu = 2$ *реализуемо все основное многообразие. При* $\mu > 2$ *реализуемо все основное многообразие и окрестность абсолюта* $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$ *дополнительного.*

7) Пусть $d < 0, c > -2\sqrt{-d}$. *При* $0 < \mu < 1$ *и у основного, и у дополнительнго многообразия реализуемы части, прилегающая к экватору* $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$. *При* $c \geq 0$, $\mu \geq 1$ *основное многообразие Бертрана реализуемо целиком, а у дополнительного реализуема часть, прилегающая к экватору* $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$. *При* $c < 0$, $\mu = 1$ *и у основнго, и у дополнительного многообразия реализуема часть, прилегающая к экватору* $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$; *при* $\mu > 1, -\frac{c^2}{4t} > h(\mu)$ *реализуемы часть основного многообразия, прилегающая к полюсу*

$\{+\infty\}\times S^1$, часть дополнительного многообразия, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\}\times S^1$, и часть основного многообразия, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\}\times S^1$; при $\mu > 1-\frac{c^2}{4t} \leq h(\mu)$ основное многообразие реализуемо целиком, а у дополнительного — часть, прилегающая к экватору $\{\sqrt[4]{-d}\} \times S^1$.

В каждом из случаев указанная реализуемая часть многообразия Бертарана максимальна в следующем смысле: любая окрестность любой параллели, не содержащейся в указанной части, не реализуема в виде поверхности вращения в $\mathbb{R}^3$.

Более того, в каждом из случаев границей реализуемой части многообразия Бертрана, прилегающей к полюсу либо абсолюту, является параллель, отвечающая ближайшему к полюсу (абсолюту) корню по θ уравнения $(\theta^4+d)^2-\mu^2\theta^4(\theta^4+c\theta^2-d)=0$; границами реализуемого "пояса" вокруг определенной параллели $\{\theta_0\}\times S^1$ являются параллели, отвечающие корням этого уравнения, ближайшим к θ_0.

В **четвертой главе** рассматриваются натуральные динамические системы на бертрановских многообразиях без экваторов, полученных в предыдущих главах. Рассматривается два типа систем: движение в поле осцилляторного и движение в поле гравитационного потенциала (гравитационный потенциал изучается только для многообразий, для которых он является бертрановским). Для этих систем показано, что они являются гамильтоновыми системами с набором дополнительных интегралов (хотя и не всегда интегрируемыми по Лиувиллю), показана функциональная независимость интегралов, изучено отображение момента, в частности вычислены границы его образа, исследованы бифуркационные диаграммы и установлено количество и компактность слоев слоения Лиувилля в прообразе каждой точки образа отображения момента. Более точно, доказаны следующие теоремы:

Теорема 6 (Движение в поле осцилляторного потенциала). *Для натуральных механических систем, описывающих движения в поле осцилляторного потенциала $V(r)=\frac{A}{\theta^2}$ по многообразиям Бертрана $S_{k,c,d}=I_{k,c,d}\times S^1$ с метрикой $ds^2_{\mu,c,d}$ справедливы следующие утверждения об отображении момента, пополненной бифуркационной диаграмме и слоях слоения Лиувилля:*

(i) в случае сфер и конусов ($\{d=0, c\geq 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных относительно прямой $\{K=0\}$ дуг бифуркационной диаграммы, каждая из которых запараметризована параметром $\theta\in(-\infty,0)$, примыкающих к точке $(0,0)$ на плоскости (K,E); прообраз любой точки которых является окружностью, образованной критическими точками ранга 1; и луча $\{K=0, E\geq 0\}$, прообраз каждой точки которого пуст; образ отображения момента — область, ограниченная снизу объединением дуг бифуркационной диаграммы и $\{(0,0)\}$, прообразом каждой ее внутренней точки является один компактный слой слоения Лиувилля;

(ii) в случае полубесконечных поверхностей и плоскости Лобачевского ($\{d>0\}\cup\{d=0, c<0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма состоит из пары симметричных относительно прямой $\{K=0\}$ "сплошных" дуг, каждая из которых запараметризована параметром $\theta\in(-\infty,-\sqrt{\frac{-c+\sqrt{c^2+4d}}{2}})$, прообраз любой точки которых является окружностью, образованной критическими точками ранга 1, пары горизонтальных "пунктирных" лучей (включающих концы), прообраз которых пуст, горизонтального "пунктирного" интервала, соединяющего верхние концы сплошных кривых, в прообразе каждой точки которого лежит один некомпактный слой слоения Лиувилля, а также луча $\{K=0, E\geq 0\}$, прообраз каждой точки которого пуст; образ отображения момента — область, ограниченная снизу объединением $\{(0,0)\}$, сплошных дуг и пунктирных лучей;

прообразом каждой его внутренней точки, лежащей выше прямой, содержащей пунктирные лучи, или на пунктирном интервале, является один некомпактный слой слоения Лиувилля, а прообразом любой точки ниже этой прямой — один компактный слой;

(iii) в случае пар полубесконечных поверхностей ($\{d < 0, c \leq -2\sqrt{-d}\}$) пополненная бифуркационная диаграмма, образ отображения момента и слои слоения Лиувилля для основного многообразия устроены так же, как и в случае полубесконечных поверхностей, а для дополнительного многообразия пополненная бифуркационная диаграмма состоит из трех пар симметричных дуг: пары "сплошных" и двух пар "пунктирных" (включающих концы) и прямой $\{K = 0\}$, прообраз точек которой пуст; "сплошные" дуги запараметризованы параметром $\theta \in (-\sqrt{\frac{-c-\sqrt{c^2+4d}}{2}}, 0)$, прообраз любой их точки является окружностью, образованной критическими точками ранга 1; образ отображения момента — область, ограниченная снизу сплошными дугами и пунктирными лучами, с вершинами в концах сплошных дуг; прообразом каждой точки внутри криволинейных треугольников, образованных сплошными и пунктирными дугами, является один компактный слой слоения Лиувилля, прообразом прочих внутренних точек образа является один некомпактный слой, а прообраз граничных точек, находящихся на пунктирных дугах, пуст;

(iv) в случае грушевидных поверхностей ($\{d < 0, c > -2\sqrt{-d}\}$) пополненная бифуркационная диаграмма, образ отображения момента и слои слоения Лиувилля устроены аналогично предыдущему случаю, однако сплошные дуги пополненной бифуркационной диаграммы параметризованы параметром $\theta \in (-\infty, -\sqrt[4]{-d})$ для основной поверхности и $\theta \in (-\sqrt[4]{-d}, 0)$ для дополнительной поверхности и устроены следующим образом: их верхние концы, соответствующие значению параметра $\theta \to -\sqrt[4]{-d}$, устремляются к бесконечности по обеим координатам, и горизонтальные пунктирные дуги отсутствуют.

Теорема 7 (Движение в поле гравитационного потенциала). *Для натуральных динамических систем движения в поле гравитационного потенциала $V(r) = -A|\theta(r)|$ по многообразиям Бертрана $S_{k,c,0} = I_{k,c,0} \times S^1$ с метрикой $ds^2_{\mu,c,0}$ справедливы следующие утверждения об отображении момента и пополненной бифуркационной диаграмме:*

(i) в случае конусов ($\{c = 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных относительно прямой $\{K = 0\}$ дуг, каждая из которых запараметризована параметром $r \in (0, +\infty)$, причем каждая из них имеет в качестве асимптот прямые $\{K = 0\}$ и $\{E = 0\}$ на плоскости (K, E), прообраз любой ее точки является окружностью, состоящей из критических точек ранга 1, "пунктирной прямой" $\{E = 0\}$ и прямой $\{K = 0\}$, прообраз точек которой пуст; образ отображения момента — область, ограниченная снизу дугами бифуркационной диаграммы, прообраз любой внутренней точки, лежащей ниже прямой $\{E = 0\}$, является компактный слой слоения Лиувилля, а прообраз точек выше и на этой прямой — некомпактным слоем;

(ii) в случае проколотых полусфер и их "рациональных накрытий" ($\{c > 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма состоит из двух симметричных относительно прямой $\{K = 0\}$ дуг, каждая из которых запараметризована параметром $r \in (0, \pi/2)$, причем прямая $\{K = 0\}$ является их асимптотой, прообраз любой их точки является окружностью, состоящей из критических точкек ранга 1, и прямой $\{K = 0\}$, прообраз точек которой пуст; образ отображения момента — область, ограниченная снизу дугами бифуркационной диаграммы, прообразом любой внутренней точки является компактным

слоем слоения Лиувилля;

(iii) в случае проколотых плоскостей Лобачевского и их "рациональных накрытий" ($\{c < 0\}$) пополненная бифуркационная диаграмма, образ отображения момента и слои слоения Лиувилля устроены аналогично случаю конусов.

В частности, обнаружено, что бертрановские системы предоставляют простой и наглядный пример гамильтоновых систем с некомпактными слоями слоения Лиувилля. Это обстоятельство особенно интересно в свете того, что общая теория классификации таких систем пока не существует, а потому бертрановские системы могут послужить хорошим модельным примером при её построении.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко за постановку задачи и неоценимую помощь на всех этапах написания работы. Автор благодарен своему научному руководителю доценту Е.А. Кудрявцевой за обсуждения работы и ценные замечания. Автор благодарен профессору А.В. Болсинову, профессору А.А. Ошемкову, профессору А.С. Мищенко, профессору И.Х. Сабитову, профессору В.О. Мантурову и О.А. Загрядскому за полезные обсуждения. Автор благодарен всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за поддержку и царящую на кафедре творческую атмосферу.

Основные публикации автора по теме диссертации

Из официального Перечня ВАК:

1. О. А. Загрядский, Е. А. Кудрявцева, Д. А. Федосеев, "Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения", *Матем. сб.*, **203**:8 (2012), 39–78. (Федосееву Д.А. принадлежат формулировки и доказательства теорем 5, 6, формулировка следствия 2 (пункты A, B))

2. О. А. Загрядский, Д. А. Федосеев, "О глобальной и локальной реализуемости римановых многообразий Бертрана в виде поверхностей вращения", *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика*, **3** (2015). (Федосееву Д.А. принадлежит введение, случай 2 леммы 1)

3. О. А. Загрядский, Д. А. Федосеев, "О явном виде метрик Бертрана", *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика*, **5** (2013), 46–50. (Федосееву Д.А. принадлежит теорема 1, случаи 1-4, 6-7 теоремы 2)

4. Е. А. Кудрявцева, Д. А. Федосеев, "Механические системы с замкнутыми траекториями на многообразиях вращения", *Матем. сб.*, **206**:5 (2015), 107–126.

5. Д. А. Федосеев, "Бифуркационные диаграммы натуральных гамильтоновых систем на многообразиях Бертрана", *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика*, **1** (2015), 62–65. (Федосееву Д.А. принадлежат пример 1, формулировки и доказательства предложения 1, лемм 1 (a, c) и 2 (a, d), леммы 4 (B) в части незамкнутых орбит, теоремы 1 в части общего хода доказательства, случая семейств (ii, iii) и классификаций бертрановых многообразий и пар с точностью до изометрии и сопряженности, теоремы 2 в части случая осцилляторного потенциала)