# Отзыв

официального оппонента о диссертации Дениса Александровича Федосеева «Конфигурационные многообразия обобщённой задачи Бертрана и гамильтоновы системы», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология

Диссертационная работа Д.А. Федосеева посвящена развитию и обобщению классической проблемы, которая была сформулирована Бертраном 1875 году. Суть этой проблемы в следующем. Хорошо известно, что гравитационный потенциал (потенциал Ньютона) в трехмерном евклидовом пространстве порождает центральное гравитационное поле, в котором все ограниченные орбиты материальной точки замкнуты. Согласно теореме Бертрана, этим свойством обладает еще только один (с точностью до умножения на константу) потенциал – так называемый потенциал Гука, порождающий силы упругости.

С тех пор этот результат Бертрана обобщался в разных направлениях. Вместо евклидова пространства рассматривались другие многообразия: полусферы и плоскости Лобачевского (1903), сфера $S^n$ (Хиггс 1979), пространство Лобачевского $H^3$ (Козлов, 1994) и др., вместо одного притягивающего центра рассматривалось несколько (Козлов, Харин, 1992), вместо условия замкнутости траекторий накладывалось условие ее алгебраичности (Кёнингс, 1889). Все эти вопросы имеют непосредственное отношение к построению аналогов классической механики для пространств постоянной кривизны, поставленной Лобачевским. Это направление представлено работами Киллинга, Неймана, Жуковского, Шрёдингера.

Данная диссертационная работа развивает направление обобщения проблемы Бертрана, предложенное Дарбу в 1877 году: классификация пар «многообразие – центральный потенциал». Такие пары называются бертрановскими. Дарбу получил первый результат по классификации таких пар, в которых конфигурационное пространство является римановым многообразием вращения без экваторов. Заметим, однако, что классификация Дарбу оказалась неполной – в неё не попали поверхности постоянной отрицательной кривизны. В диссертации Д.А. Федосеева помимо вариации конфигурационного пространства накладываются различные требования на потенциал.

Поэтому задачи, рассматриваемые в диссертации Д.А. Федосеева, являются **актуальными**.

Коротко опишем **структуру** диссертации и важнейшие **новые результаты**, полученные автором.

Первая глава содержит историю проблемы Бертрана и приводятся необходимые определения, предварительные сведения и некоторые технические вспомогательные результаты, которые используются в следующих главах. В частности, даны определения семи классов замыкающих потенциалов и для них приведена диаграмма включения.

Во второй главе дается полное решение обобщенной задачи Бертрана для классов замыкающих, локально, полулокально, сильно и слабо замыкающих потенциалов в предположении отсутствия экваторов у конфигурационного многообразия системы. Эта классификация – новый результат, который является одним из основных в диссертации.

Классификация некоторых классов многообразий с экваторами приводится в третьей главе. Центральными результатом здесь являются теорема 3.8, классифицирующая вполне бертрановские пары.

В четвертой главе рассматриваются вопросы глобальной и локальной реализуемости многообразий Бертрана как поверхностей вращения, вложенных в пространство $R^3$ (теорема 4.8). Здесь же приводятся условия, при которых риманово многообразие является многообразием Бертрана (теорема 4.10).

В пятой, последней, главе изучаются многообразия Бертрана, снабженные гамильтоновой структурой. В ней приводятся необходимые сведения из симплектической геометрии, и выясняется структура слоений Лиувилля, отображений момента и бифуркационных диаграмма для многообразий Бертрана (теорема 5.4).

В диссертации применяются **методы** римановой и симплектической геометрий, дифференциальных уравнений и классической механики.

Все утверждения диссертации, выносимые на защиту, **четко сформулированы и доказаны**. Формулировки теорем и выводы **достоверны** и обоснованы.

Материалы диссертации были **опубликованы** в пяти печатных работах и докладывались на семинарах и конференциях разного уровня. Содержание автореферата полностью **соответствует** содержанию диссертации.

Результаты работы могут быть использованы при **теоретических** исследованиях в дифференциальной геометрии и классической механике.

Диссертационная работа производит хорошее впечатление. Однако не могу не сделать некоторые замечания.

Имеется несоответствие в нумерации глав в автореферате и в самом тексте диссертации: в диссертации Введение – это глава под номером 1. Всего получается пять глав. В автореферате Введение предшествует первой главе.

На **стр. 35** в условии теоремы 2.3 написано:

«При этом потенциал ровно один … тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: существует гладкая функция $\theta = \theta(r)$ без нулей на $(a, b)$, такая что $\theta'(r) > 0$ и риманова метрика в координатах $(\theta, \varphi \bmod 2\pi)$ имеет вид (2.1.3)».

Однако проблема приводимости римановой метрики с помощью замены координат к какой-либо нормальной форме трудна уже сама по себе. Приведенный на стр. 57 способ проверки существования такой замены, основанный на представлении функции $F(\theta) = 1/f(r(\theta))$ в виде (2.2.10) является довольно громоздким. Кроме того, не совсем понятно как поступать в случае, если функция $f\big(r(\theta)\big)$ не является аналитической. На мой взгляд, проблему приведения римановой метрики к форме (2.1.3) следует решать с помощью теории дифференциальных инвариантов.

На **стр. 36** в формуле (2.1.3) присутствуют константы $\mu, c, d$. Являются ли они инвариантами метрики? То есть, следует ли, что две метрики вида (2.1.3) с различными значениями этих констант не эквивалентны относительно допустимых замен координат?

На **стр. 55** в Лемме 2.16 написано: «Не имеющими нулей решениями уравнения $f''f - (f')2 = -\xi 2$ при $\xi > 0$ являются следующие функции $f = f(r)$ и только они: $\frac{\xi}{\alpha}\sin(\alpha r + \beta)$, …. Но эти функции имеют нули!

На **стр. 57** написано: «Из (2.2.7) и (2.2.9) нетрудно выводится равносильность следующих двух условий: …». Вместо слова «нетрудно» хотелось бы более подробного объяснения.

Однако перечисленные недостатки не умаляют ценности диссертации.

Диссертация является цельным исследованием, содержащим глубокие результаты, допускающие развитие и обобщение.

Диссертационная работа Дениса Александровича Федосеева «Конфигурационные многообразия обобщённой задачи Бертрана и гамильтоновы системы» является законченной научно-квалификационной работой и соответствует «Положению о порядке присуждения ученых степеней». Работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор Денис Александрович Федосеев несомненно, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология.

Официальный оппонент, доктор физико-математических наук,
заведующий лабораторией № 6 – «Проблем качественного исследования нелинейных динамических систем» Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Института проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук»

Алексей Гурьевич Кушнер

Рабочий адрес: 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65, ИПУ РАН
Телефон: +79261542951
E-mail: kushner@physics.msu.ru

Подпись ЗАВЕРЯЮ
Вед. инженер
Жукова Л.П.