

Отзыв  
научного руководителя на диссертационную работу

Евгения Анатольевича Завальнюка

«Геометрия минимальных сетей в пространствах ограниченной кривизны  
в смысле А.Д.Александрова»

на соискание учёной степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация Евгения Анатольевича Завальнюка посвящена изучению минимальных сетей в пространствах ограниченной кривизны в смысле А.Д.Александрова. Такие сети можно рассматривать как обобщение геодезических, возникающее, если допустить ветвления. В этом случае также естественно рассматривать граничную задачу, но граничные условия – это уже не пара, а конечное множество точек объемлющего пространства.

Задачи о минимальных сетях сложны уже для случая сетей на плоскости. Это связано, прежде всего, с тем, что эти сети могут иметь дополнительные (не входящие в граничное множество) точки ветвления. Это приводит к экспоненциально большому перебору возможных комбинаторных структур сетей-кандидатов (какие вершины с какими соединяются). Поэтому на передний план выходят геометрические методы изучения минимальных сетей (попытки сократить перебор с помощью необходимых геометрических свойств минимальных сетей) и приближенные алгоритмы построения минимальных сетей, наиболее популярным из которых является замена кратчайшего дерева с данной границей на минимальное остовное дерево, и оценка погрешности этих алгоритмов. В рассматриваемой диссертации получены результаты, имеющие отношение к этим двум актуальным вопросам теории минимальных сетей, причем в качестве объемлющего пространства рассматривается пространство ограниченной кривизны в смысле А.Д.Александрова. Отметим, что сети в пространствах такого типа стали изучаться совсем недавно, основные результаты касаются, прежде всего, евклидовых пространств, нормированных пространств, и римановых многообразий.

Перечислим основные результаты диссертации.

В работе **получено описание локального устройства минимальных сетей в пространствах А.Д.Александрова ограниченной кривизны**. Так называемый «принцип 120 градусов», гласящий, что ребра-отрезки минимальной сети встречаются под углами больше или равными 120 градусам, для случая плоскости был хорошо известен Гауссу. Справедливость его для минимальных сетей на римановых многообразиях была доказана А.Ивановым и А.Тужилиным. Из этого принципа непосредственно следует, что степень вершины минимальной сети не превосходит трех

и другие, более тонкие, ограничения на структуры минимальных сетей. В диссертации Е.А.Завальнюка показано, что принцип 120 градусов имеет место в пространствах Александра кривизны, ограниченной сверху. Этот результат, вместе с недавней работой Н.Иннами и С.Найя, изучавших пространства Александра кривизны, ограниченной снизу, завершает описание локальной структуры минимальных сетей в пространствах Александра ограниченной кривизны.

**В работе показано, что отношение Штейнера неограниченной поверхности Адамара отделенной от нуля отрицательной кривизны равно  $1/2$ .** Отношение Штейнера метрического пространства характеризует величину относительной ошибки приближения кратчайшего дерева минимальным остовным в наихудшей возможной ситуации. Эта важная характеристика метрического пространства трудно поддается вычислениям. В настоящий момент она известна лишь для немногих метрических пространств. Например, гипотеза Джилберта-Поллака о том, что отношение Штейнера евклидовой плоскости достигается на множестве вершин правильного треугольника, остается недоказанной более 40 лет. Недавно Н.Иннами и Б.Ким доказали, что отношение плоскости Лобачевского равно  $1/2$ . В диссертации Е.А.Завальнюка **найден новый, более простой, метод вычисления отношения Штейнера плоскости Лобачевского**, который удалось обобщить на случай неограниченных поверхностей Адамара отрицательной кривизны.

При решении этих задач Е.А.Завальнюк использовал различные комбинаторные и геометрические методы, теорию поверхностей А.Д.Александра ограниченной кривизны, а также соображения экстремальности.

По теме диссертации опубликованы три научные статьи, две из них в журналах из списка ВАК, а также несколько тезисов. Результаты докладывались на научных семинарах, на российских и международных конференциях.

Считаю, что работа Е. А. Завальнюка удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.04 (геометрия и топология), и может быть рекомендована к защите в диссертационном совете Д 501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В.Ломоносова.

Доктор физико-математических наук,  
профессор

А.О. Иванов

10.04.2015г.

удостоверяю

декан механико-математического факультета  
МГУ имени М.В.Ломоносова  
доктор физико-математических наук,  
профессор

В.Н. Чубариков