ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
на диссертацию Завальнюка Евгения Анатольевича
"Геометрия минимальных сетей в пространствах
ограниченной кривизны в смысле А.Д.Александрова",
представленную к защите в диссертационный совет Д 501.001.84
на соискание ученой степени кандидата физико-математических
наук по специальности "01.01.04 - геометрия и топология"

Основные результаты диссертации Е.А.Завальнюка посвящены минимальным сетям в пространствах ограниченной сверху кривизны по Александрову.

Эти результаты связаны с общей *проблемой Штейнера*, сформулированной К. Гауссом в 1836 г. В современной постановке эта проблема состоит в поиске *минимального дерева Штейнера* для конечного подмножества M метрического пространства (X, ρ) , т.е. взвешенного связного графа с множеством вершин M_1, где $M \subset M_1 \subset X$, вес каждого ребра которого равен расстоянию между его концами и сумма весов всех ребер принимает минимальное значение $\mathrm{smt}(M)$. При этом точки множества $M_1 - M$ называются *точками Штейнера*. В случае отсутствия минимального дерева Штейнера через $\mathrm{smt}(M)$ обозначается соответствующая точная нижняя граница этих сумм по всем связным графам с указанными свойствами. Минимальное значение таких сумм для $M_1 = M$ обозначается $\mathrm{mst}(M)$. *Отношением Штейнера* $\mathrm{sr}(X)$ пространства (X, ρ) называется точная нижняя граница отношений $\mathrm{smt}(M)/\,\mathrm{mst}(M)$ по всем конечным подмножествам $M \subset X$. Если минимальное дерево Штейнера для M существует и (X, ρ) — геодезическое пространство, то реализация его ребер кратчайшими, соединяющими соответствующие инцидентные вершины, называется *минимальной сетью* для M.

Минимальные сети в евклидовом пространстве изучали Gilbert и Pollak, на сфере — Heppes, в плоскости Лобачевского — Edmonds, Ewing, Kulkarni, в нормированных пространствах — А.О.Иванов, А.А.Тужилин, K.J.Swanepoel. А.О.Иванов и А.А.Тужилин получили критерий локальной минимальности сети для римановых многообразий. Необходимые и достаточные условия или полное описание экстремальных сетей в нормированных плоскостях с правильными многоугольниками в качестве единичных окружностей были найдены в работах А.О.Иванова, А.А.Тужилина, В.Л.Хонг, Д.П.Ильютко. А.О.Иванов, А.А.Тужилин и Д.Цислик доказали неравенство $\mathrm{sr}(X) \leq \mathrm{sr}(\mathbb{R}^n)$ для n-мерных римановых многообразий. Верхние оценки для $\mathrm{sr}(\mathbb{R}^n)$ для разных n есть в книге Д.Цислика.

До сих пор не доказана гипотеза Джилберта-Поллака: $\mathrm{sr}(\mathbb{R}^2) = \sqrt{3}/2$. Известно, что для произвольного метрического пространства (X, ρ) справедливы неравенства $1/2 \leq \mathrm{sr}(X) \leq 1$, причем все промежуточные значения достигаются. В частности, равенство $\mathrm{sr}(X) = 1/2$ установили N.Innami и B.H.Kim для плоскости Лобачевского $X = L^2$ и З.Н.Овсянников для пространства компактов в евклидовом пространстве с метрикой Хаусдорфа.

Приведенные факты показывают актуальность темы диссертационной работы Е.А.Завальнюка.

Во введении дается общая характеристика работы, обосновывается актуальность темы диссертации, освещаются цели и методы исследования, выносимые на защиту результаты, даются обзор содержания диссертации и сведения о ее апробации.

В первой главе приводятся необходимые сведения из метрической геометрии, теории графов и теории минимальных сетей. Стоит отметить Утверждение 1, в котором доказывается известный факт, что полный плоский конус с полным углом α при вершине имеет неотрицательную кривизну при $\alpha \leq 2\pi$ и неположительную кривизну при $\alpha \geq 2\pi$.

Глава 2 посвящена минимальным сетям в пространствах кривизны, ограниченной сверху или снизу по А.Д.Александрову. В п. 2.1 обосновывается существование минимальной сети Штейнера для любого конечного подмножества M такого пространства. Основной результат главы — теорема 5 Е.А.Завальнюка, в которой доказывается, что для любых двух смежных ребер минимальной сети для M в пространстве кривизны, ограниченной сверху, угол между ними в общей вершине больше или равен $2\pi/3$. Доказательство этой теоремы основано на пяти леммах и следствии 3. На основании теоремы 5 и аналогичной теоремы 6 Н.Иннами и С.Найя о минимальных деревьях в поверхностях Александрова ограниченной снизу кривизны обосновывается теорема 7 о свойствах минимального дерева Штейнера для множества M из n точек в общих пространствах кривизны, ограниченной сверху или снизу по А.Д.Александрову: (1)его ребра — кратчайшие; (2)вершины степени 1 принадлежат M; (3) угол между смежными ребрами в их общей вершине $\geq 2\pi/3$; (4) число точек Штейнера $\leq n-2$.

Третья глава посвящена отношению Штейнера для поверхностей Адамара X — частному случаю поверхностей Александрова кривизны $\leq k < 0$. После известной информации о поверхностях Адамара в теореме 12 доказывается, что полный угол вокруг внутренней точки поверхности Адамара больше или равен 2π, а в предложении 3 — что в плоском полном конусе с полным углом $\alpha = 2n\pi/3$ при вершине 0, где $n \geq 3$, минимальная сеть для множества M из n точек, отличных от 0 и равноудаленных друг от друга, а также от точки 0, состоит из n кратчайших, соединяющих эти точки с O; как следствие, O — точка Штейнера для M степени n. После этого Е.А.Завальнюк дает иное, простое доказательство цитированного выше результата N.Innami-B.Kim о том, что $\mathrm{sr}(L^2) = 1/2$ и распространяет это доказательство на случай произвольной поверхности Адамара. Доказательство опирается на леммы 6-11.

Диссертация вызывает некоторые замечания, в том числе терминологические. Автор называет *пространством Александрова* пространство ограниченной сверху или снизу кривизны, в то время как понятие *двумерного многообразия ограниченной кривизны* из одноименной книги А.Д.Александрова и В.А.Залгаллера включает и другие пространства. Кроме того, в последнее время многие геометры называют пространствами Александрова только пространства ограниченной снизу кривизны. На с. 21 говорится о классе $C^{3,\alpha}$ атласа гармонических систем координат на многообразии двусторонне ограниченной кривизны при любом $0 < \alpha < 1$. Это верно, но класс риманова многообразия определяется гладкостью компонент метрического тензора в соответствующих локальных картах. В рассматриваемом случае получается риманово многообразие класса $C^{1,\alpha}$, но в общем случае не класса $C^{1,1}$ вопреки утверждению в диссертации. Пример евклидовой плоскости с выколотой точкой, являющейся локально компактным пространством Александрова нулевой кривизны, показывает, что утверждения в конце с. 26 и начале с. 27 о достаточности условия локальной компактности для выполнения условий теоремы 4 не верны без условия метрической полноты. Доказательство известного Утверждения 1 неполно: Если $\alpha \geq 3\pi$, то треугольник abc может быть так называемым *триподом*, гомеоморфным букве T и включающим вершину O конуса; поэтому он не ограничивает никакой открытой области. Если же $\alpha < 2\pi$, то внутренняя метрика $\tilde{d}$ тетраэдра $Oabc$ без (открытого) основания abc есть ограничение метрики d конуса C_α лишь в том случае, когда суммы углов треугольников Oab, Obc, Oac при каждой вершине a, b, c не больше π, что не всегда выполняется. "Поясняющее" Замечание 3 на с. 15 к Определению 6 не верно для пространств кривизны $\leq k \leq 0$. Достаточно длинное доказательство леммы 5 можно существенно сократить, не используя лемму 2, если воспользоваться известным и легко доказываемым фактом, что в Определении 5 угла между кривыми можно заменить $\angle_0$ на $\angle_k$; лемма 2 применяется только в доказательстве леммы 5. Следовало бы пояснить справедливость свойства (4) в теореме 7. В предпоследней строке на с. 39 следует вставить слово "неограниченных"перед словом "поверхностях". Есть опечатка во второй строке перед леммой 2 на с. 28; пропущено слово "такие"в четвертой строке доказательства теоремы 5 на с. 32; видимо, слова "настоящей работы"в последней строке с. 37 следует заменить словами "настоящей главы".

Указанные выше недостатки не влияют на высокую оценку диссертации в целом. Все основные результаты диссертации являются новыми, снабжены достоверными доказательствами и своевременно опубликованы. В диссертации применяются методы метрической, дискретной и дифференциальной геометрии, методы теории графов и теории минимальных сетей. Кроме того используются классические модели поверхностей поятоянной гауссовой кривизны и теоремы сравнения для рассматриваемых пространств. Результаты диссертации прошли необходимую апробацию, имеют теоретическое значение и определенно найдут применения в теории минимальных сетей.

Диссертация содержит 53 страницы, состоит из введения, трех глав и списка литературы из 45 источников, в том числе 4 публикаций автора, три из которых опубликованы в журналах из перечня ВАК. Автореферат диссертации полностью соответствует ее содержанию.

Диссертация Е.А.Завальнюка является завершенной научно-квалификационной работой.

Считаю, что диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор Евгений Анатольевич Завальнюк заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология.

Доктор физико-математических наук по специальности 01.01.04 геометрия и топология, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории геометрического анализа ФГБУН Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН, рабочий адрес: 630090, Новосибирск, проспект Коптюга, 4; тел.: 8-(383)-3297530, email: vberestov@inbox.ru.

Валерий Николаевич Берестовский

14 сентября 2015 г.

Подпись В. Н. Берестовского
удостоверяю
Зав. оргтделом Н.З. Киндалева
ИМ СО РАН
«14» 09 2015 г.