ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Е. А. Завальнюка
ГЕОМЕТРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ СЕТЕЙ
В ПРОСТРАНСТВАХ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ
В СМЫСЛЕ А.Д.АЛЕКСАНДРОВА

представленную к защите на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация Е. А. Завальнюка посвящена решению актуальных задач метрической, дискретной и дифференциальной геометрии, связанных с минимальными сетями (деревьями Штейнера).

Минимальные деревья Штейнера возникают в широком круге теоретических и прикладных задач, в том числе проблемы о поиске кратчайшей системы дорог, соединяющих данные города, построении оптимальных сетей коммуникаций, изучении минимальных поверхностей, например, мыльных плёнок. Простейшие случаи задачи Штейнера — для 3–4 точек, или городов, на плоскости — фигурируют в работах П.Ферма, Б.Кавальери, Э.Торичелли. Имя Якоба Штейнера задача получила благодаря популярной книге Р.Куранта и Г.Робинса. Начиная со второй половины XX века и до наших дней ведутся интенсивные исследования проблемы Штейнера (работы З.Мелзака, Е.Гильберта, Х.Поллака, Ф.Хванга, Р.Грэхама, А.О.Иванова, А.А.Тужилина, В. Смита, Д. Смита, Д.Варма, П.Уинтера, М.Захариэсена, Ж.Х.Рубинштейна и других).

Минимальное дерево Штейнера — это обобщение понятия кратчайшей геодезической на случай более чем двух граничных точек, которые требуется соединить как можно более коротким связным «графом». Причём в этом графе помимо исходных точек допускаются дополнительные вершины. Возможность использования этих дополнительных вершин, называемых часто точками Штейнера, делает задачу о поиске такого минимального дерева геометрически, комбинаторно и вычислительно сложной и интересной.

В последние десятилетия проблема Штейнера активно исследуется в пространствах, отличных от евклидова. Например, рассматривались римановы многообразия и нормированные пространства (А.О.Иванов, А.А.Тужилин, Д.П.Ильютко, К.Ж.Сванепоэл, Д.Цислик, Д.Ду, Т.Ф.Гонзалез, П.А.Бородин).

Диссертация Е.А. Завальнюка посвящена исследованию минимальных сетей в важном классе пространств А.Д. Александрова ограниченной сверху кривизны. Минимальные сети в пространствах А.Д. Александрова исследовались в работах Н.Иннами, С.Найя, Б.Х.Ким.

При исследовании минимальных сетей в новом пространстве естественно возникают, среди прочих, два важных вопроса. Прежде всего, это вопрос о локальной структуре минимальных сетей, т.е. о возможной степени вершин и углах между рёбрами. Во-вторых, это вопрос о вычислении отношения Штейнера этого пространства. Как уже отмечалось выше, задача вычисления длины сети Штейнера для данных n точек является вычислительно трудной, NP-полной, для большинства пространств, поэтому важно изучать приближения к решению задачи Штейнера. Одним из удобных приближений является минимальное остовное дерево, отличающееся от минимального дерева Штейнера отсутствием дополнительных вершин. Отношение Штейнера пространства измеряет величину максимальной относительной погрешности при замене длины минимального дерева Штейнера на длину минимального остовного дерева. Вопрос о точной величине отношения Штейнера является открытым для многих известных пространств, в частности, для евклидовой плоскости (это знаменитая проблема Гильберта-Поллака).

Именно указанные два вопроса рассматриваются в диссертации Е.А. Завальнюка применительно к пространствам А.Д. Александрова с кривизной, ограниченной сверху.

Ответу на первый вопрос, о локальной структуре минимальных сетей, посвящена глава 2. Оказывается, что в рассматриваемом классе пространств условие на угол между рёбрами минимального дерево Штейнера остаётся таким же, как и в евклидовых пространствах — этот угол должен быть не меньше 120 градусов. При этом в отличие от евклидовых пространств в пространствах ограниченной сверху кривизны степень вершины минимального дерева Штейнера может быть абсолютно любой — это доказано автором в предложении 3 диссертации. Доказанный в диссертации результат о локальной структуре минимальных деревьев (теорема 5) является основопологающим для дальнейшего развития теории минимальных сетей в пространствах А.Д.Александрова ограниченной сверху кривизны. Хотя этот результат и нельзя назвать неожиданным, он крайне полезен для решения любых задач в этой области.

Глава 3 посвящена вычислению отношения Штейнера для частного случая пространств ограниченной сверху кривизны — неограниченных поверхностей Адамара отрицательной кривизны, ограниченной сверху. Как уже было сказано выше, задача о вычислении отношения Штейнера является одним из существенных вопросов, возникающих в связи с изучением кратчайших сетей в любом пространстве. Для большинства пространств эта задача является очень сложной, и замечательно, что диссертанту удалось решить её для достаточно широкого и важного класса пространств. Частный случай этой задачи (для гиперболических плоскостей) был решён в 2006 году в работе Иннами и Ким. Е.А. Завальнюк сумел найти новое доказательство теоремы об отношении Штейнера гиперболических плоскостей, что позволило обобщить его на случай любых неограниченных поверхностей Адамара отрицательной кривизны. В доказательстве автор диссертации использовал остроумный приём, рассматривая вместо минимального дерева Штейнера гораздо более просто устроенное дерево типа «звёздочка», которое, как оказывается, даёт хорошее приближение к минимальному дереву Штейнера в изучаемом случаем и позволяет доказать требуемую оценку.

В доказательствах обоих основных результатов, а также ряда интересных примеров, приведённых в работе, Е.А. Завальнюк продемонстрировал хорошее владение методами дифференциальной и дискретной геометрии, знание теории пространств А.Д.Александрова и теории минимальных сетей.

Во введении диссертации приведён хороший обзор основных известных результатов о минимальных деревьях Штейнера, а также краткий обзор других направлений теории экстремальных сетей.

Диссертационная работа выполнена на высоком уровне, написана ясным языком, основные результаты доложены на семинарах, конференциях и опубликованы в рецензируемых журналах. Полученные в работе результаты являются нетривиальными, новыми и могут быть использованы для дальнейшего изучения свойств минимальных деревьев Штейнера в пространствах А.Д.Александрова ограниченной сверху кривизны, а также при чтении специальных курсов.

По работе имеются следующие замечания.

1) Лемму 5 (стр. 31) о выборе треугольника сравнения с ограниченным сверху углом можно было бы обобщить, рассматривая вместо угла в 120 градусов произвольный угол. Это обобщение позволило бы несколько сократить доказательство теоремы 5 о локальной структуре минимальных деревьев Штейнера в пространствах А.Д. Александрова ограниченной сверху кривизны.

2) В работе отсутствуют комментарии относительно важности ограничений на пространство в теореме В. Было бы уместно и интересно разобрать контрпримеры, показывающие, что не для всех пространств ограниченной сверху кривизны отношение Штейнера равно 1/2 и обсудить препятствия, которые возникают при попытке обобщить результат на более широкий класс пространств.

3) В отдельных случаях ссылки на используемые результаты даны не там, где они используются, и недостаточно точно. Это касается Теоремы 1 (стр. 3) и нижней оценки на отношение Штейнера (стр. 6). Однако отмечу, что все эти результаты действительно являются доказанными и должным образом опубликованными, замечание относится лишь к некоторой неаккуратности при цитировании.

Эти небольшие замечания никоим образом не снижают ценность работы.

Результаты работы актуальны, новы и должным образом опубликованы. Автореферат правильно отражает содержание работы. Таким образом, диссертационная работа Е.А. Завальнюка полностью соответствует требованиям ВАК (п. 7 «Положения о порядке присуждения учёных степеней») к диссертациям на соискание учёной степени кандидата наук, а Евгений Анатольевич Завальнюк заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.0.04 — геометрия и топология.

Официальный оппонент,
кандидат физико-математических наук Стрелкова Н. П.

Копию заверяю

Руководитель СП №15 „Школа №54" ГБОУ „Школа №171"

16.09.2015 г.

Структурное подразделение №15 «Школа №54»