

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Институт механики МГУ

На правах рукописи

УДК 539.376, 539.42



Фомин Леонид Викторович

**Ползучесть и длительная прочность стержней и пластин
при растяжении и изгибе с учетом влияния агрессивной
среды**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н, профессор

Локощенко Александр Михайлович

Москва

2015

Оглавление

Введение.....	5
Глава 1. Моделирование процессов ползучести и длительной прочности при растяжении стержней с учетом поврежденности материала и влияния агрессивной среды.....	19
1.1 Влияние агрессивной среды на ползучесть и длительную прочность растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечени..	19
1.1.1 Приближенный метод решения уравнения диффузии.....	20
1.1.2 Оценка погрешности приближенного решения уравнения диффузии по сравнению с точным решением.....	31
1.1.3 Моделирование влияния агрессивной среды на длительную прочность стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений при растяжении (на основе обработки экспериментальных данных по длительной прочности растягиваемых образцов прямоугольного поперечного сечения (опыты И.А. Одингга и З.Г. Фридмана) и круглого поперечного сечения (опыты В.Ж. Сэна, М.И. Маннинга)).....	33
1.1.4 Влияние формы поперечного сечения растягиваемых стержней на длительную прочность в присутствии агрессивной окружающей среды..	47
1.2 Моделирование длительной прочности растягиваемых стержней в агрессивной среде с учетом переменного коэффициента диффузии.....	58
1.3 Связанная задача определения длительной прочности растягиваемого стержня в агрессивной среде.....	67
Обсуждение результатов и выводы по главе 1.....	74
Глава 2. Чистый изгиб балок при ползучести с учетом разносопротивляемости материала, накопления поврежденности и влияния агрессивной среды.....	77
2.1 Обзор ряда известных задач о чистом изгибе балок при ползучести.....	77

2.2	Задача о чистом изгибе балки с учетом разных свойств материала на растяжение и сжатие при ползучести на установившейся стадии.....	91
2.2.1	Чистый изгиб балки прямоугольного поперечного сечения.....	92
2.2.2	Чистый изгиб балки круглого поперечного сечения.....	95
2.2.3	Сравнение решений задач об изгибе балок круглого и квадратного поперечного сечения.....	98
2.2.4	Обсуждение результатов и выводы по параграфу 2.2.....	101
2.3	Задача о чистом изгибе балки при ползучести с учетом поврежденности и разных свойств материала на растяжение и сжатие.....	102
2.3.1	Постановка задачи и методы решения.....	103
2.3.2	Результаты расчетов.....	107
2.3.3	Обсуждение результатов и выводы по параграфу 2.3.....	112
2.4	Задача об изгибе балки при ползучести с учетом диффузии среды, накопления поврежденности и разносопротивляемости материала.....	113
2.4.1	Результаты расчета с учетом диффузии агрессивной среды и сравнение с результатами аналогичной задачи без учета диффузии.....	119
2.4.3	Сравнение решения задачи об изгибе балки при действии агрессивной среды с учетом приближенного и точного решений уравнения диффузии.....	121
2.4.4	Обсуждение результатов и выводы по параграфу 2.4.....	123
	Обсуждения результатов и выводы по главе 2.....	124
Глава 3	Длительное разрушение пластин при изгибе в условиях сложного напряженного состояния с учетом влияния агрессивной среды.....	126
3.1	Постановка задачи.....	126
3.2	Определение компонент напряженно-деформированного состояния при использовании степенной модели ползучести.....	127
3.2.1	Длительная прочность пластины при кусочно-постоянном изгибающем моменте (одноосный случай).....	130
3.2.2	Длительная прочность пластины при кусочно-постоянных изгибающих моментах (двухосный случай).....	136

3.2.3 Результаты расчетов.....	141
3.3 Определение компонент напряженно-деформированного состояния при использовании дробно-линейной модели ползучести.....	143
3.3.1 Длительная прочность пластины при кусочно-постоянных изгибающих моментах (двухосный случай).....	153
3.3.2 Результаты расчета.....	164
3.4 Обсуждение результатов.....	168
Обсуждения результатов и выводы по главе 3.....	169
Глава 4. Новый метод определения поврежденности при ползучести.....	171
4.1 Прямой экспериментальный метод определения поврежденности на основе обработки экспериментальных данных с учетом определяющего соотношения ползучести.....	171
4.2 Моделирование процесса ползучести с учетом III стадии на основе аппроксимации экспериментальных данных.....	179
Обсуждение результатов и выводы по главе 4.....	187
Заключение.....	188
Список литературы.....	190

Введение

Актуальность темы диссертации.

На современном этапе развития, когда требования безопасности и надежности материалов и конструкций выдвигаются на первые позиции, использование передовых материалов, которые могут и должны работать в условиях высоких температурных и силовых воздействий, а также в присутствии агрессивных сред, становится необходимым условием развития экономики и жизни государства в целом.

Для оптимального решения фундаментальных и прикладных задач в этой области моделирование влияния указанных воздействий на материал и его прочностные и эксплуатационные характеристики становится необходимой и актуальной задачей механики деформируемого твердого тела. В частности, описание и моделирование процессов высокотемпературной ползучести и длительной прочности металлов с учетом накопления поврежденности материала и влияния агрессивной окружающей среды является неотъемлемой фундаментальной и прикладной проблемой. Актуальность исследования подобных процессов в настоящее время очевидна с точки зрения надежности элементов конструкций. Следует отметить, что подобное исследование должно охватывать широкий круг материалов, в том числе и те, свойства которых зависят от вида напряженно-деформированного состояния. Поэтому в данной диссертационной работе, наряду с задачами о растяжении стержней, рассматриваются задачи об изгибе стержней при ползучести, материал которых обладает различными свойствами при растяжении и сжатии. Определение времени до разрушения прямоугольной пластины, являющейся одним из распространенных элементов конструкций, в указанных условиях имеет как фундаментальный, так и прикладной характер при расчете элементов конструкций энергетического и авиационно-космического назначения.

Все вышеизложенное и определяет актуальность тематики диссертационной работы

Степень разработанности проблемы.

Актуальность обозначенных научных задач определяет необходимость их исследования и высокий научный уровень подхода к их решению. Широкий круг известных ученых занимаются решением фундаментальных и прикладных задач в этой области, в области моделирования влияния воздействий на прочностные и эксплуатационные характеристики материала.

В предлагаемой диссертационной работе автор рассматривает новый подход (с использованием дробно-степенных соотношений) с учетом влияния агрессивной среды, которому в настоящее время в научной литературе уделяется недостаточно внимания.

Цели и задачи диссертации.

Общая особенность диссертационной работы – развитие кинетической теории Ю.Н. Работнова и получение решений рассматриваемых задач при использовании определяющего и кинетического уравнений, как правило, в виде дробно-степенных зависимостей скорости ползучести и скорости накопления поврежденности от напряжения. При этом мгновенными упругопластическими деформациями пренебрегается по сравнению с деформациями ползучести. Сингулярность указанных соотношений позволяет учитывать, кроме проявления вязких свойств материала, также характеристики мгновенного разрушения.

В представляемой диссертационной работе ставятся и достигаются следующие цели и задачи:

1. Оценка влияния агрессивной среды на длительную прочность растягиваемых стержней с различными формами поперечных сечений.
2. Описание известных экспериментальных данных по длительной прочности растягиваемых стержней круглого и прямоугольного поперечных сечений с учетом влияния агрессивной среды.

3. Моделирование постепенного ослабления диффузионного процесса во времени с помощью учета переменного коэффициента диффузии.
4. Решение связанной задачи определения длительной прочности растягиваемого стержня, в которой учитывается взаимная зависимость уровня концентрации среды в материале стержня и величины накапливаемой поврежденности.
5. Решение цикла задач об изгибе балок при ползучести в различных постановках: с учетом разносопротивляемости материала, дополнительного учета уровня накопленной при ползучести поврежденности, влияния агрессивной среды.
6. Исследование рассеянного разрушения прямоугольной пластины при изгибе с учетом влияния агрессивной среды в случае нестационарного плоского напряженного состояния. Определение времени до разрушения такой пластины при последовательном ступенчатом изгибе в различных плоскостях.
7. Разработка метода определения накопления поврежденности во времени на основе обработки серии реальных кривых ползучести с учетом определяющего соотношения кинетической теории.

ОСНОВНАЯ НАУЧНАЯ ЦЕЛЬ РАБОТЫ: развитие кинетической теории ползучести и длительной прочности металлов при учете влияния агрессивной среды. Моделирование деформирования и длительного разрушения стержней и пластин при растяжении и изгибе с помощью мелко-степенных определяющих и кинетических соотношений.

Объект и предмет исследования.

Объектами исследования являются определяющие и кинетические соотношения ползучести, которые представлены, как правило, в виде мелко-степенных функций. В зависимости от решаемых задач, в кинетические соотношения вводятся структурные параметры поврежденности и концентрации

элементов агрессивной среды в материале стержней и пластин. Предметами исследований являются стержень в процессе ползучести при одноосном растяжении, балка в процессе ползучести при чистом изгибе из разносопротивляющегося материала, прямоугольная пластина, изгибаемая в различных плоскостях. Эти элементы конструкций подвержены влиянию агрессивной окружающей среды. Критерий разрушения этих элементов основывается на применении в кинетических уравнениях скалярного и векторного параметров поврежденности.

Научная новизна.

Во всей диссертационной работе впервые для построения аналитических зависимостей времен до разрушения стержней и пластин, подверженных влиянию агрессивной среды используются определяющее и кинетическое уравнения с дробно-степенными зависимостями скорости деформации ползучести и скорости накопления поврежденности от напряжения. Эти соотношения более адекватно по сравнению со стандартными степенными соотношениями позволяют описать процесс ползучести, так как они ограничивают уровень рассматриваемых напряжений пределами кратковременной прочности при растяжении и сжатии. Итак, новые научные результаты заключаются в следующем:

1. На основе кинетической теории с двумя структурными параметрами, а именно, концентрации агрессивной окружающей среды и поврежденности, определены особенности диффузионного процесса и длительной прочности при растяжении.

а) На основе решений уравнения диффузии в стержнях различных поперечных сечений произведено сравнение характеристик полученных диффузионных процессов. Показано, что при условии равенства толщины прямоугольных поперечных сечений и диаметра круглого поперечного сечения в цилиндрических стержнях диффузионный процесс развивается быстрее, чем в стержнях прямоугольного сечения.

б) Отмечено, что при постепенном накоплении в материале стержней уровня концентрации окружающей среды скорость повышения концентрации уменьшается, в результате диффузионный процесс замедляется. В связи с этим проведено моделирование длительной прочности растягиваемых стержней с учетом переменного коэффициента диффузии $D(c)$, монотонно убывающего в зависимости от концентрации c . Получена зависимость кривых длительной прочности от вида $D(c)$.

в) Решена связанная задача о диффузии агрессивной среды в растягиваемом стержне и накоплении поврежденности в нем в процессе ползучести. Задача решена в двух постановках: поврежденность зависит от координаты поперечного сечения и времени и в частном случае – только от времени. Показано, что полное время до разрушения в первом случае меньше, чем во втором. Эта особенность объясняется увеличением напряжения в растягиваемом стержне в результате уменьшения площади его поперечного сечения при распространении фронта разрушения.

2. Решен цикл задач об изгибе балки в условиях ползучести при использовании дробно-степенных определяющих и кинетических соотношений. В этих соотношениях учитываются разносопротивляемость материала при растяжении и сжатии, накопление повреждений в процессе ползучести и влияние агрессивной окружающей среды. Времена до разрушения определяются с учетом распространения фронта разрушения. Критерием полного разрушения балки является достижение напряжениями при растяжении и сжатии соответствующих пределов прочности.
3. Предложен метод расчета времен до разрушения изгибаемых пластин при нестационарном сложном напряженном состоянии при учете влияния агрессивной окружающей среды. Проведено моделирование времени до разрушения прямоугольной пластины при приложении кусочно-постоянных изгибающих моментов в различных плоскостях. Использовались степенные

и дробно-линейные определяющие и кинетические соотношения ползучести и длительной прочности. Показано, что время до разрушения пластины при использовании скалярного параметра поврежденности меньше, чем при использовании векторного параметра поврежденности.

4. Предложен новый метод определения зависимости поврежденности в растягиваемом стержне от времени, основанный на обработке серии экспериментальных кривых ползучести, с учетом определяющего уравнения кинетической теории. В этой постановке предполагается наличие поврежденности только на III стадии ползучести. Выводится дифференциальное кинетическое уравнение для поврежденности.

Личный вклад автора.

Во всех проведенных исследованиях постановка задач принадлежит научному руководителю, все преобразования и вычисления выполнены лично автором диссертации, а анализ полученных результатов проведен совместно научным руководителем и автором диссертации.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют фундаментальное значение в области механики деформируемого твердого тела, и особенно в развитии кинетической теории ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова. Применение дробно-степенных определяющих и кинетических соотношений позволяет адекватно моделировать процессы ползучести и длительного разрушения с учетом влияния среды в стержне при растяжении и изгибе, прямоугольной пластины при изгибе, находящейся в условии нестационарного сложного напряженного состояния. Показана возможность использования векторного параметра поврежденности для определения времени до разрушения в случае нестационарного сложного напряженного состояния.

Предложенные методы использованы при моделировании масштабного эффекта длительной прочности, наблюдаемого в известных экспериментах.

Также результаты диссертации могут иметь широко распространенное прикладное значение в областях, связанных с высокотемпературной ползучестью и длительной прочностью. К таким областям, в частности, относится авиационно-космическое и энергетическое машиностроение.

Методология и методы исследования.

Теоретической и методической основой исследования является кинетическая теория ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова. В решении задач, учитывающих влияние агрессивной среды, используется приближенный метод решения уравнения диффузии на основе введения диффузионного фронта среды. Времена до разрушения определяются с использованием критериев разрушения, построенных с учетом скалярного и векторного параметров поврежденности.

Конкретизация и развитие кинетической теории Ю.Н. Работнова осуществляется с учетом введения двух структурных параметров: поврежденности и концентрации элементов окружающей агрессивной среды в материале стержней и пластин.

Предлагается новый метод определения поврежденности, основанный на обработке серии экспериментальных кривых ползучести, с учетом определяющего соотношения кинетической теории.

Информационная база исследования.

В процессе работы над диссертацией использовались классические монографии по механике деформируемого твердого тела, по ползучести и длительной прочности, в которых освещается кинетическая теория Ю.Н. Работнова. Дополнительно использовались отчеты о научно-исследовательской работе лаборатории прочности и ползучести (лаб. 201) и лаборатории прочности и ползучести при высоких температурах (лаб. 205) НИИ механики МГУ имени М.В.

Ломоносова и научные статьи, в которых принимал участие автор диссертационной работы, результаты известных экспериментальных работ, опубликованных в ведущих научных журналах. Также использовались необходимые справочные данные по прочностным характеристикам материалов и данные по коэффициентам диффузии.

Научные положения, выносимые на защиту.

- 1) Проведен анализ влияния формы поперечных сечений стержней на характеристики диффузионного процесса в них и на характеристики длительной прочности.
- 2) Определено влияние вида зависимости коэффициента диффузии от концентрации на характеристики длительной прочности растягиваемых стержней.
- 3) Определено взаимное влияние концентрации агрессивного вещества и поврежденности в материале растягиваемого в процессе ползучести стержня на диффузионный процесс, накопление повреждений и характеристики длительной прочности.
- 4) Определены времена до разрушения прямоугольной пластины под действием кусочно-постоянных изгибающих моментов, приложенных к различным краям пластины, с учетом влияния агрессивной окружающей среды. Времена до разрушения определены с помощью кинетической теории ползучести и длительной прочности с использованием скалярного и векторного параметров поврежденности.
- 5) Разработан новый метод определения поврежденности, основанный на обработке серии экспериментальных кривых ползучести, с учетом определяющего соотношения кинетической теории.

Достоверность научных исследований.

Обоснованность и достоверность теоретических результатов диссертации вытекают из использования классического аппарата механики сплошных сред и

подтверждены строгими математическими выводами, основанными на положениях механики. Достоверность полученных численных результатов подтверждается согласованностью расчетных данных предложенных постановок и результатами других авторов.

Применяемая дробно-степенная модель ползучести и длительной прочности априори ограничивает уровень допускаемых напряжений различными пределами кратковременной прочности при растяжении и сжатии. Сингулярность предлагаемых соотношений вблизи характерных для данного материала предельных напряжений, а именно, пределов кратковременной прочности дает возможность адекватного описания поведения материалов при ползучести под действием напряжений, близких к пределам кратковременной прочности при заданной температуре. Эта особенность позволяет адекватно моделировать соответствующие процессы ползучести и длительного разрушения в стержне при растяжении и изгибе, в прямоугольной пластине при изгибе, находящейся в условии нестационарного плоского напряженного состояния.

Учет влияния агрессивной среды на длительную прочность подтверждает многочисленные экспериментальные данные о снижении времени до разрушения в условиях длительного высокотемпературного действия напряжений. Показана аналогия с результатами испытаний на длительную прочность стержней при кусочно-постоянном растягивающем напряжении.

Предложенный новый метод определения поврежденности основан на результатах серии экспериментов. Гипотеза возникновения поврежденности, имеющая смысл микропор и микротрещин, только на третьей стадии ползучести имеет соответственное физическое обоснование, что подтверждается известными литературными и энциклопедическими источниками в области физического материаловедения.

Апробация результатов.

Результаты исследований и основные положения диссертации обсуждались на заседаниях секции “Ползучесть материалов и высокотемпературная

прочность” НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (2009-2015 гг.); на конференциях “Ломоносовские чтения” (Секция механика, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2009, 2010, 2012, 2013, 2014 гг.); на Международных инновационно-ориентированных конференциях молодых ученых и студентов по современным проблемам машиноведения (Москва, ИМАШ РАН имени А.А. Благонравова, 2009, 2010, 2011 гг.); на X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механике (Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, 24-30 августа 2011 г.); на Международной конференции “Живучесть и конструкционное материаловедение” (Москва, ИМАШ РАН имени А.А. Благонравова, 22-24 октября 2012 г.); на Международной конференции по механике и баллистике “8 Окуневские чтения” (Санкт-Петербург, 25-28 июня 2013 г.); на Международной конференции по механике композитных материалов МСМ-2014 (Рига, 2-6 июня 2014 г.); на научном семинаре механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова “Актуальные проблемы геометрии и механики” под руководством профессоров Д.В. Георгиевского, М.В. Шамолина и С.А. Агафонова (19 декабря 2014 г.); на научно-исследовательском семинаре лаборатории “Упругость и пластичность” НИИ механики МГУ под руководством профессора Р.А. Васина (11 марта 2015 г.); на научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством члена-корреспондента РАН Е.В. Ломакина (23 марта 2015 г.); на научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора И.А. Кийко (1 апреля 2015 г.); на научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора Б.Е. Победри (6 апреля 2015 г.).

Публикации по теме диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 21 печатной работе, в том числе в 9 статьях в научных журналах, из них 8 статей в рецензируемых журналах из перечня ВАК РФ, 2 статьи в сборниках трудов конференций и 10 тезисов докладов. Кроме того, исследования по теме диссертации включены в содержание 5 научных отчетов НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова (2009 –2012 гг., 2015 г.).

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-08-00007 и № 14-08-00528).

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору А.М. Локощенко за постановку задач и общее руководство работой, автор выражает благодарность безвременно ушедшему (2010 г.) первому научному руководителю доктору физико-математических работ, доценту В.Н. Кузнецову, а также кандидату физико-математических наук К.А. Агахи за консультации и внимание к работе.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, 4-х глав, заключения, списка используемых источников, включающего 63 источников. Общее число страниц 198, число таблиц 16, число рисунков 45.

Глава 1 посвящена моделированию процессов ползучести и длительной прочности при растяжении стержней с учетом накопления поврежденности в материале и влияния агрессивной окружающей среды. Глава 1 состоит из 3-х параграфов:

1.1 Влияние агрессивной среды на ползучесть и длительную прочность растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений.

1.2 Моделирование длительной прочности растягиваемых стержней в агрессивной среде с учетом переменного коэффициента диффузии.

1.3 Связанная задача определения длительной прочности растягиваемого стержня в агрессивной среде.

В параграфе 1.1, который включает в себя несколько подразделов, учет влияния агрессивной среды на ползучесть и длительную прочность производится введением в определяющее и кинетическое соотношение ползучести наряду с поврежденностью второго структурного параметра: концентрации химических элементов агрессивной среды в материале образца. При этом используется некоторая функция от интегрально средней концентрации, удовлетворяющая начальным и граничным условиям. В описании длительной прочности образцов показана необходимость учета масштабного эффекта, а именно, поперечного размера образца. Результаты показаны на примере обработки известных экспериментальных данных по длительной прочности. Показано влияние форм поперечных сечений растягиваемых стержней на характеристики длительной прочности.

В параграфах 1.2 и 1.3 показано влияние вида зависимости коэффициента диффузии от концентрации и взаимной зависимости поврежденности и концентрации на характеристики диффузионного процесса, процесса накопления повреждений и характеристики длительной прочности растягиваемых стержней.

Глава 2 посвящена решению задач об изгибе балок при ползучести из разносопротивляющегося материала в различных постановках, а именно, на установившейся стадии, дополнительно с учетом накопления поврежденности и дополнительно с учетом влияния агрессивной среды. Также учтено влияние формы поперечного сечения балки (прямоугольное и круглое поперечное сечение). Глава состоит из 4-х параграфов:

2.1 Обзор ряда известных задач о чистом изгибе балок при ползучести.

2.2 Задача о чистом изгибе балки с учетом разных свойств материала на растяжение и сжатие при ползучести на установившейся стадии.

2.3 Задача о чистом изгибе балки при ползучести с учетом поврежденности и разных свойств материала на растяжение и сжатие.

2.4 Задача об изгибе балки при ползучести с учетом диффузии среды, накопления поврежденности и разнсопротивляемости материала.

Отличительная черта всех решенных задач: использование дробно-степенной модели ползучести, в которой напряжения априори ограничены пределами кратковременной прочности при растяжении и сжатии. Мгновенными упругопластическими деформациями во всех задачах пренебрегается по сравнению с деформациями ползучести.

В задаче параграфа 2.4 используется приближенный метод решения уравнения диффузии на основе введения диффузионного фронта агрессивной среды.

Глава 3 посвящена исследованию длительного разрушения прямоугольной пластины при изгибе в процессе ползучести в условии нестационарного плоского напряженного состояния при действии кусочно-постоянных изгибающих моментов, приложенных к различным краям пластины с учетом влияния агрессивной среды. Времена до разрушения пластины определяются с помощью кинетической теории Ю.Н. Работнова с использованием скалярного и векторного параметров поврежденности. Постановка задачи описывается в параграфе 3.1.

В результате такого исследования проведено сравнение времен до разрушения при использовании скалярного и векторного параметров поврежденности и при использовании степенной (параграф 3.2) и дробно-линейной (параграф 3.3) моделей ползучести и длительной прочности. Исследованы отклонения суммы парциальных времен от единицы в случае кусочно-постоянной зависимости уровня изгибающего момента от времени. Показана аналогия с результатами испытаний на длительную прочность стержней при кусочно-постоянном растягивающем напряжении.

Глава 4 состоит из 2-х параграфов.

4.1. Прямой экспериментальный метод определения поврежденности на основе обработки экспериментальных данных с учетом определяющего соотношения ползучести.

4.2 Моделирование процесса ползучести с учетом III стадии на основе аппроксимации экспериментальных данных.

В параграфе 4.1 показано, что поврежденность может быть определена непосредственно из обработки серии экспериментальных кривых ползучести с учетом определяющего соотношения кинетической теории. Затем, в отличие от классического подхода, в котором кинетическое уравнение для поврежденности постулируется, в данной диссертационной работе кинетическое дифференциальное уравнение для поврежденности выводится на основе предложенного метода, согласованного с экспериментальными данными.

В параграфе 4.2 используется аппроксимационный метод описания кривой ползучести. Причем вид функции выбирается один и тот же для всего семейства кривых ползучести, а коэффициенты аппроксимации зависят от уровня напряжения.

Глава 1. Моделирование процессов ползучести и длительной прочности при растяжении стержней с учетом поврежденности материала и влияния агрессивной среды

1.1 Влияние агрессивной среды на ползучесть и длительную прочность растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений

Обеспечение надежности и работоспособности материалов и конструкций является ключевой основополагающей задачей в современном мире, в котором развитие определяется применением высоких и наукоемких технологий. Отметим здесь особую роль тех материалов, конструкций и процессов, которые работают в условиях ползучести [1] под действием высоких температур и, в том числе, при воздействии агрессивных сред. В связи с этим предъявляются высокие требования к качеству и надежности конструкций, находящихся в условиях длительного высокотемпературного нагружения. Все это приводит к необходимости проводить прогнозирование долговечности их работы с учетом специфических факторов, одним из которых может быть агрессивная рабочая среда. Агрессивная окружающая среда оказывает существенное влияние на характеристики высокотемпературной ползучести и длительной прочности конструкционных материалов. При этом время до разрушения материалов и конструкций при воздействии этих факторов может изменяться в несколько раз.

В диссертационной работе процессы ползучести и длительной прочности материалов в агрессивной среде моделируются на основе кинетической теории Ю.Н. Работнова [1] с двумя структурными параметрами – поврежденности ω и концентрации c элементов агрессивной окружающей среды в материале.

1.1.1 Приближенный метод решения уравнения диффузии

Точные решения уравнения диффузии для тел с постоянными границами представляются обычно в виде тригонометрических рядов или рядов, состоящих из специальных функций, которые не всегда позволяют получить представления искомых характеристик в обозримом анализируемом виде. Эти решения громоздки по виду, и для получения приемлемой точности в расчетах необходимо удерживать большое количество членов ряда.

Для анализа процесса диффузии агрессивной окружающей среды внутрь стержня с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника (H - толщина сечения, b - ширина сечения, $H \ll b$) предлагается приближенный метод решения уравнения диффузии, основанный на введении диффузионного фронта, распространяющегося от поверхности стержня [2, 3]. Такой подход позволяет разделить весь материал поперечного сечения стержня на возмущенную (где среда уже проникла в материал) и невозмущенную области (где еще нет проникновения среды) и затем отслеживать во времени движение границы между этими областями. Зависимости концентраций от времени аппроксимируются в виде полиномов, причем граничные и начальные условия выполняются точно, а уравнение диффузии удовлетворяется интегрально во всем поперечном сечении стержня.

Введем безразмерные переменные $\bar{y} = \frac{2y}{H}$, $\bar{t} = \frac{48D}{H^2}t$, $\bar{c} = \frac{c}{c_0}$, где y - поперечная координата вдоль толщины стержня ($y = 0$ - в середине поперечного сечения стержня), t - время, c - концентрация, c_0 - постоянная концентрация на границе материала стержня и внешней среды, D - коэффициент диффузии. Из условия симметрии рассматриваем половину сечения стержня по толщине. Уравнение одномерной диффузии в этих переменных принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2}, \quad 0 \leq \bar{t} < \infty, \quad 0 < \bar{y} < 1 \quad (1.1)$$

Начальное и граничные условия имеют вид:

$$\bar{c}(\bar{y}, 0) = 0, \quad \bar{c}(1, \bar{t}) = 1, \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}}(0, \bar{t}) = 0 \quad - \text{вследствие симметрии диффузионного}$$

процесса относительно середины стержня.

Зависимость концентрации \bar{c} от координаты \bar{y} принимается в виде квадратного полинома, удовлетворяющего граничным и начальным условиям. При этом рассматриваются две стадии процесса диффузии: стадия проникновения фронта и стадия насыщения, которые разделены моментом времени \bar{t}_0 [2, 3].

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = \left[1 - \frac{1 - \bar{y}}{1 - \bar{l}(\bar{t})} \right]^2, \quad \bar{l}(\bar{t}) < \bar{y} \leq 1 \\ 0, \quad 0 \leq \bar{y} \leq \bar{l}(\bar{t}) \end{array} \right\} \quad \text{при } 0 < \bar{t} \leq \bar{t}_0, \quad (1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = B(\bar{t}) + [1 - B(\bar{t})] \cdot (\bar{y})^2 \end{array} \right\} \quad \text{при } \bar{t} \geq \bar{t}_0,$$

где $\bar{l}(\bar{t})$ - координата диффузионного фронта, \bar{t}_0 - время перехода между стадиями диффузионного процесса, $B(\bar{t})$ - концентрация в центре поперечного сечения стержня при $\bar{t} \geq \bar{t}_0$ (при $\bar{y} = 0$).

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = \left[1 - \frac{1 - \bar{y}}{1 - \bar{l}(\bar{t})} \right]^2, \quad \bar{l}(\bar{t}) < \bar{y} \leq 1,$$

$$\bar{y} = 1 \rightarrow \bar{c}(\bar{y} = 1, \bar{t}) = 1 \quad - \text{на поверхности,}$$

$$\bar{y} = \bar{l}(\bar{t}) \rightarrow \bar{c}(\bar{y} = \bar{l}(\bar{t}), \bar{t}) = 0 \quad - \text{на диффузионном фронте.}$$

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = B(\bar{t}) + [1 - B(\bar{t})] \cdot (\bar{y})^2 \quad \text{при } \bar{t} \geq \bar{t}_0,$$

$$\bar{c}(\bar{y} = 0, \bar{t}) = B(\bar{t}),$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}}(0, \bar{t}) = 0; \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}} = 2[1 - B(\bar{t})] \cdot \bar{y}; \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}}(0, \bar{t}) = 0.$$

Неизвестные зависимости $\bar{l}(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$ определяются из интегрального удовлетворения параболической функции $\bar{c}(\bar{y}, \bar{t})$ по (1.2) уравнению диффузии (1.1):

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2} \right| d\bar{y} = 0 \quad (1.3)$$

В [4] показано, что если в (1.3) исключить знак модуля подинтегрального выражения, то отличие полученного приближенного решения уравнения диффузии от точного решения составляет всего единицы процентов. Итак, подставим выражение для концентрации (1.2) в (1.3) и проведем выкладки:

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2} \right\} d\bar{y} = 0,$$

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = \left[1 - \frac{1 - \bar{y}}{1 - \bar{l}(\bar{t})} \right]^2, \quad \bar{l}(\bar{t}) < \bar{y} \leq 1,$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} = 2 \left[1 + \frac{\bar{y} - 1}{1 - \bar{l}(\bar{t})} \right] (\bar{y} - 1) (-1) (1 - \bar{l}(\bar{t}))^{-2} (-1) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} = 2 \left[1 - \frac{1 - \bar{y}}{1 - \bar{l}(\bar{t})} \right] (\bar{y} - 1) (1 - \bar{l}(\bar{t}))^{-2} \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}},$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}} = 2 \left[1 - \frac{1 - \bar{y}}{1 - \bar{l}(\bar{t})} \right] \left(\frac{1}{1 - \bar{l}(\bar{t})} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2} = 2 \left(\frac{1}{1 - \bar{l}(\bar{t})} \right)^2.$$

$$\int_{\bar{l}}^1 \left\{ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2} \right\} d\bar{y} = \int_{\bar{l}}^1 \left\{ 2 \left[1 - \frac{1 - \bar{y}}{1 - \bar{l}} \right] (\bar{y} - 1) (1 - \bar{l})^{-2} \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} (2(1 - \bar{l})^{-2}) \right\} d\bar{y} = 0,$$

$$2(1 - \bar{l})^{-2} \int_{\bar{l}}^1 \left\{ \left[1 - \frac{1 - \bar{y}}{1 - \bar{l}} \right] (\bar{y} - 1) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right\} d\bar{y} = 0,$$

$$2(1 - \bar{l})^{-2} \int_{\bar{l}}^1 \left\{ \left[(\bar{y} - 1) + \frac{(\bar{y} - 1)^2}{1 - \bar{l}} \right] \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right\} d\bar{y} = 0,$$

$$2(1 - \bar{l})^{-2} \int_{\bar{l}}^1 \left\{ \left[(\bar{y} - 1) + \frac{\bar{y}^2}{1 - \bar{l}} - \frac{2\bar{y}}{1 - \bar{l}} + \frac{1}{1 - \bar{l}} \right] \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right\} d\bar{y} = 0,$$

$$2(1 - \bar{l})^{-2} \left[\left(\frac{\bar{y}^2}{2} - \bar{y} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{y}^3}{1 - \bar{l}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\bar{y}^2}{1 - \bar{l}} + \frac{\bar{y}}{1 - \bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{\bar{y}}{12} \right]_{\bar{l}}^1 = 0,$$

$$2(1 - \bar{l})^{-2} \left\{ \left[\left(\frac{1^2}{2} - 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1 - \bar{l}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1^2}{1 - \bar{l}} + \frac{1}{1 - \bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right] - \left[\left(\frac{\bar{l}^2}{2} - \bar{l} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{l}^3}{1 - \bar{l}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\bar{l}^2}{1 - \bar{l}} + \frac{\bar{l}}{1 - \bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{\bar{l}}{12} \right] \right\} = 0,$$

$$2(1-\bar{l})^{-2} \left\{ \left[\left(\frac{1^2}{2} - 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1^2}{1-\bar{l}} + \frac{1}{1-\bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right] - \left[\left(\frac{\bar{l}^2}{2} - \bar{l} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{l}^3}{1-\bar{l}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\bar{l}^2}{1-\bar{l}} + \frac{\bar{l}}{1-\bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{\bar{l}}{12} \right] \right\} = 0,$$

$$2(1-\bar{l})^{-2} \left\{ \left[\left(-\frac{1^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{l}^3}{1-\bar{l}} + \frac{\bar{l}^2(1-\bar{l}) - 2\bar{l}^2}{2(1-\bar{l})} + \frac{\bar{l} - \bar{l}(1-\bar{l})}{1-\bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{\bar{l}}{12} \right] \right\} = 0,$$

$$2(1-\bar{l})^{-2} \left\{ \left[\left(-\frac{1^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{l}^3}{1-\bar{l}} + \frac{\bar{l}^2 - \bar{l}^3 - 2\bar{l}^2}{2(1-\bar{l})} + \frac{\bar{l} - \bar{l} + \bar{l}^2}{1-\bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{\bar{l}}{12} \right] \right\} = 0,$$

$$2(1-\bar{l})^{-2} \left\{ \left[\left(-\frac{1^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{l}^3}{1-\bar{l}} + \frac{\bar{l}^2 - \bar{l}^3 - 2\bar{l}^2}{2(1-\bar{l})} + \frac{2\bar{l}^2}{2(1-\bar{l})} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{\bar{l}}{12} \right] \right\} = 0,$$

$$2(1-\bar{l})^{-2} \left\{ \left[\left(-\frac{1^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{l}^3}{1-\bar{l}} + \frac{\bar{l}^2 - \bar{l}^3}{2(1-\bar{l})} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{\bar{l}}{12} \right] \right\} = 0,$$

$$2(1-\bar{l})^{-2} \left\{ \left[\left(-\frac{1^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{l}^3}{1-\bar{l}} + \frac{\bar{l}^2 - \bar{l}^3}{2(1-\bar{l})} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{\bar{l}}{12} \right] \right\} = 0,$$

$$2(1-\bar{l})^{-2} \left\{ \left[\left(-\frac{1^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right] - \left[\left(\frac{2\bar{l}^3 + 3\bar{l}^2 - 3\bar{l}^3}{6(1-\bar{l})} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{\bar{l}}{12} \right] \right\} = 0,$$

$$2(1-\bar{l})^{-2} \left\{ \left[\left(-\frac{1^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right] - \left[\left(\frac{3\bar{l}^2 - \bar{l}^3}{6(1-\bar{l})} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{\bar{l}}{12} \right] \right\} = 0,$$

$$2(1-\bar{l})^{-2} \left\{ \left[\left(-\frac{1^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{1}{12} \right] - \left[\bar{l}^2 \left(\frac{3-\bar{l}}{6(1-\bar{l})} \right) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} - \frac{\bar{l}}{12} \right] \right\} = 0,$$

$$2(1-\bar{l})^{-2} \left\{ \left[-\bar{l}^2 \left(\frac{3-\bar{l}}{6(1-\bar{l})} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} - \frac{1}{2} \right] \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} + \frac{\bar{l}}{12} - \frac{1}{12} \right\} = 0,$$

$$2(1-\bar{l})^{-2} \left\{ \left[-\bar{l}^2 \left(\frac{3-\bar{l}}{6(1-\bar{l})} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} - \frac{1}{2} \right] \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} \right\} = 2(1-\bar{l})^{-2} \left(\frac{1}{12} - \frac{\bar{l}}{12} \right),$$

$$\left\{ \left[-\bar{l}^2 \left(\frac{3-\bar{l}}{6(1-\bar{l})} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} - \frac{1}{2} \right] \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} \right\} = \left(\frac{1}{12} - \frac{\bar{l}}{12} \right),$$

$$\frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} = \left(\frac{1}{12} - \frac{\bar{l}}{12} \right) \left[-\bar{l}^2 \left(\frac{3-\bar{l}}{6(1-\bar{l})} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^3}{1-\bar{l}} - \frac{1}{2} \right]^{-1},$$

$$\frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} = \left(\frac{1-\bar{l}}{12} \right) \left[\frac{\bar{l}^3 - 3\bar{l}^2 + 2 - 3 + 3\bar{l}}{6(1-\bar{l})} \right]^{-1},$$

$$\frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} = \left(\frac{1-\bar{l}}{12} \right) \left[\frac{6(1-\bar{l})}{\bar{l}^3 - 3\bar{l}^2 + 3\bar{l} - 1} \right],$$

$$\frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} = \left(\frac{1-\bar{l}}{12} \right) \left[\frac{-6(1-\bar{l})}{(1-\bar{l})^3} \right],$$

$$\frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} = \left(\frac{1}{12} \right) \left[\frac{-6}{(1-\bar{l})} \right] = -\left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{1}{(1-\bar{l})} \right],$$

$$(1-\bar{l}) \frac{d\bar{l}}{d\bar{t}} = -\left(\frac{1}{2} \right),$$

$$(1-\bar{l}) d\bar{l} = -\left(\frac{1}{2} \right) d\bar{t},$$

$$(1-\bar{l}) = x,$$

$$(1-x) = \bar{l},$$

$$-dx = dl,$$

$$-x dx = -\left(\frac{1}{2}\right) d\bar{t},$$

$$\int -x dx = \int -\left(\frac{1}{2}\right) d\bar{t},$$

$$\frac{x^2}{2} = \left(\frac{1}{2}\right) \bar{t} + \frac{\text{constant}}{2},$$

$$x^2 = \bar{t} + \text{constant},$$

$$(1 - \bar{l})^2 = \bar{t} + \text{constant},$$

$$t = 0 \rightarrow \bar{l} = 1,$$

$$(1 - 1)^2 = 0 + \text{constant},$$

$$\text{constant} = 0,$$

$$(1 - \bar{l})^2 = \bar{t}.$$

Таким образом,

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = \left[1 - \frac{1 - \bar{y}}{1 - \bar{l}(\bar{t})} \right]^2, \quad \bar{l}(\bar{t}) < \bar{y} \leq 1,$$

$$(1 - \bar{l})^2 = \bar{t},$$

$$(1 - \bar{l}) = \sqrt{\bar{t}},$$

и координата диффузионного фронта определяется следующим образом:

$$\bar{l} = 1 - \sqrt{\bar{t}}. \quad (1.4)$$

Итак, на первой стадии диффузионного процесса при $0 < \bar{t} \leq \bar{t}_0$ выражение для концентрации примет следующий вид:

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = \left[1 - \frac{1 - \bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}} \right]^2, \quad (1 - \sqrt{\bar{t}}) < \bar{y} \leq 1. \quad (1.5)$$

Диффузионный фронт достигает середины поперечного сечения стержня в момент времени \bar{t}_0 , при этом $\bar{l} = 0$. На основе данного граничного условия определим время \bar{t}_0 :

$$(1-0) = \sqrt{\bar{t}_0},$$

$$\bar{t}_0 = 1.$$

Дополнительно удовлетворяется необходимое условие равенства нулю концентрации $\bar{c}(\bar{l}=0, \bar{t}_0) = 0$ на фронте в момент времени \bar{t}_0 в центре поперечного сечения при $\bar{y} = 0$. После достижения диффузионным фронтом середины поперечного сечения стержня начинается вторая стадия диффузионного процесса при $\bar{t} > \bar{t}_0$.

Проведем интегральное удовлетворение уравнения диффузии (1.3) с использованием второго соотношения системы (1.2):

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2} \right\} d\bar{y} = 0,$$

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = B(\bar{t}) + [1 - B(\bar{t})] \cdot (\bar{y})^2 \quad \text{при } \bar{t} > \bar{t}_0,$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} = \frac{dB}{dt} - (\bar{y})^2 \frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dt} (1 - (\bar{y})^2),$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}} = 2[1 - B(\bar{t})] \cdot (\bar{y}),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2} = 2[1 - B(\bar{t})].$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} - \frac{1}{12} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2} \right\} d\bar{y} = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} = \frac{dB}{dt} - (\bar{y})^2 \frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dt} (1 - (\bar{y})^2),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2} = 2[1 - B(\bar{t})],$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{dB}{dt} - (\bar{y})^2 \frac{dB}{dt} - \frac{1}{12} 2[1 - B(\bar{t})] \right\} d\bar{y} = 0,$$

$$\left. \frac{dB}{dt} \bar{y} \right|_0^1 - \left. \frac{dB}{dt} \frac{\bar{y}^3}{3} \right|_0^1 - \frac{1}{6} [1 - B(\bar{t})] \bar{y} \Big|_0^1 = \frac{dB}{dt} - \frac{dB}{dt} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} [1 - B(\bar{t})] = 0,$$

$$\frac{2}{3} \frac{dB}{dt} = \frac{1}{6} [1 - B(\bar{t})],$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} [1 - B(\bar{t})] = \frac{1}{4} [1 - B(\bar{t})],$$

$$\frac{dB}{(1-B)} = \frac{1}{4} d\bar{t},$$

$$1 - B = q,$$

$$-dB = dq,$$

$$-\frac{dq}{q} = \frac{1}{4} dt,$$

$$\int -\frac{dq}{q} = \int \frac{1}{4} dt,$$

$$-\ln q = \frac{1}{4} \bar{t} + \text{constant},$$

$$-\ln(1-B) = \frac{1}{4} \bar{t} + \text{constant},$$

$$\text{при } \bar{t} = \bar{t}_0, B = 0,$$

$$0 = \frac{1}{4} \bar{t}_0 + \text{constant},$$

$$\text{constant} = -\frac{1}{4} \bar{t}_0,$$

$$-\ln(1-B) = \frac{1}{4} \bar{t} - \frac{1}{4} \bar{t}_0,$$

$$-\ln(1-B) = \frac{1}{4}(\bar{t} - \bar{t}_0),$$

$$\ln(1-B) = -\frac{1}{4}(\bar{t} - \bar{t}_0)$$

$$1-B = \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - \bar{t}_0)\right],$$

$$1 - \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - \bar{t}_0)\right] = B,$$

$$B = 1 - \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - \bar{t}_0)\right].$$

С учетом безразмерного времени перехода между стадиями диффузионного процесса $\bar{t}_0 = 1$ выражение для $B(\bar{t})$ принимает вид: $B(\bar{t}) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right]$.

Схематично на рисунке 1.1 показаны зависимости $\bar{l}(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$ от времени \bar{t} .

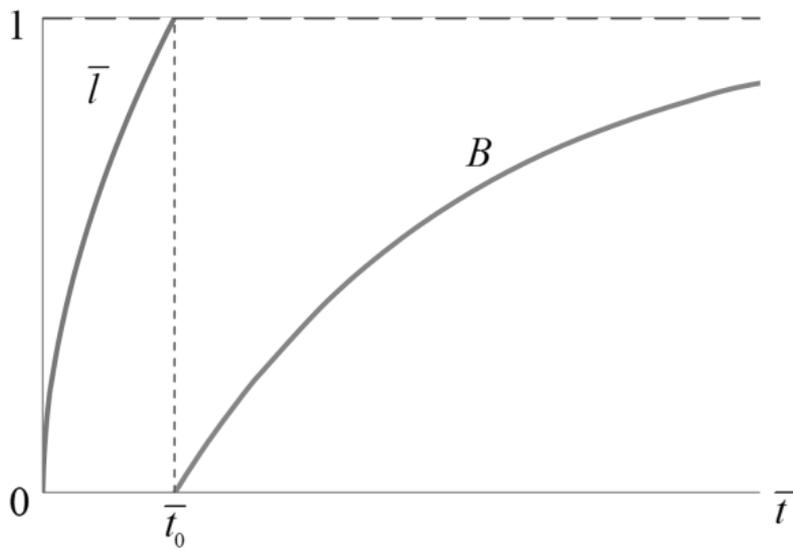


Рис. 1.1. Зависимости $\bar{l}(\bar{t})$ и $B(\bar{t})$ от времени \bar{t} .

Запишем концентрацию на второй стадии согласно второму соотношению системы (1.2) и полученному выражению для $B(\bar{t})$:

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = B(\bar{t}) + [1 - B(\bar{t})] \cdot (\bar{y})^2 \quad \text{при } \bar{t} \geq 1,$$

$$B(\bar{t}) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right],$$

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right] + \left[1 - 1 + \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right]\right] \cdot (\bar{y})^2 \quad \text{при } \bar{t} \geq 1,$$

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = 1 - \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right] + \left[\exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right]\right] \cdot (\bar{y})^2 \quad \text{при } \bar{t} \geq 1,$$

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = 1 - (1 - (\bar{y})^2) \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right] \quad \text{при } \bar{t} \geq 1.$$

$$\bar{y} = 0 \rightarrow \bar{t} = 1 \rightarrow \bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = 0.$$

Таким образом, концентрация $\bar{c}(\bar{y}, \bar{t})$ на второй стадии $\bar{t} > 1$ имеет вид:

$$\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) = 1 - (1 - (\bar{y})^2) \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right] \quad \text{при } \bar{t} > 1. \quad (1.6)$$

В дальнейшем для анализа влияния агрессивной среды на время до разрушения стержня будет использована интегрально средняя концентрация $\bar{c}_m(\bar{t})$, которая определяется в общем виде следующим образом:

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \int_0^1 \bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) d\bar{y}.$$

Используя соотношение (1.5) для концентрации на первой стадии, вычислим:

$$\begin{aligned} \bar{c}_m(\bar{t}) &= \int_0^1 \bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) d\bar{y} = \int_{(1-\sqrt{\bar{t}})}^1 \left[1 - \frac{1-\bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}}\right]^2 d\bar{y} = \int_{(1-\sqrt{\bar{t}})}^1 \left[1 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1-\bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}} + \frac{(1-\bar{y})^2}{\bar{t}}\right] d\bar{y} = \\ &= \int_{(1-\sqrt{\bar{t}})}^1 \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\bar{t}}} + \frac{2\bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}} + \frac{(1-2\bar{y}+\bar{y}^2)}{\bar{t}}\right] d\bar{y} = \int_{(1-\sqrt{\bar{t}})}^1 \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\bar{t}}} + \frac{2\bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}} + \frac{1}{\bar{t}} - \frac{2\bar{y}}{\bar{t}} + \frac{\bar{y}^2}{\bar{t}}\right] d\bar{y} = \\ &= \bar{y} \Big|_{(1-\sqrt{\bar{t}})}^1 - \frac{2}{\sqrt{\bar{t}}} \bar{y} \Big|_{(1-\sqrt{\bar{t}})}^1 + \frac{\bar{y}^2}{\sqrt{\bar{t}}} \Big|_{(1-\sqrt{\bar{t}})}^1 + \frac{\bar{y}}{\bar{t}} \Big|_{(1-\sqrt{\bar{t}})}^1 - \frac{\bar{y}^2}{\bar{t}} \Big|_{(1-\sqrt{\bar{t}})}^1 + \frac{\bar{y}^3}{3\bar{t}} \Big|_{(1-\sqrt{\bar{t}})}^1 = (1-1+\sqrt{\bar{t}}) - \\ &- \left(\frac{2}{\sqrt{\bar{t}}} - \frac{2}{\sqrt{\bar{t}}}(1-\sqrt{\bar{t}})\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{t}}} - \frac{(1-\sqrt{\bar{t}})^2}{\sqrt{\bar{t}}}\right) + \left(\frac{1}{\bar{t}} - \frac{(1-\sqrt{\bar{t}})}{\bar{t}}\right) - \left(\frac{1^2}{\bar{t}} - \frac{(1-\sqrt{\bar{t}})^2}{\bar{t}}\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1^3}{3\bar{t}} - \frac{(1-\sqrt{\bar{t}})^3}{3\bar{t}} \right) = \sqrt{\bar{t}} + \left(-\frac{2}{\sqrt{\bar{t}}} + \frac{2}{\sqrt{\bar{t}}}(1-\sqrt{\bar{t}}) \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{t}}} - \frac{(1-\sqrt{\bar{t}})^2}{\sqrt{\bar{t}}} \right) + \left(\frac{1}{\bar{t}} - \frac{(1-\sqrt{\bar{t}})}{\bar{t}} \right) + \\
& + \left(-\frac{1^2}{\bar{t}} + \frac{(1-\sqrt{\bar{t}})^2}{\bar{t}} \right) + \left(\frac{1^3}{3\bar{t}} - \frac{(1-\sqrt{\bar{t}})^3}{3\bar{t}} \right) = \sqrt{\bar{t}} + \left(-\frac{2}{\sqrt{\bar{t}}} + \frac{2}{\sqrt{\bar{t}}}(1-\sqrt{\bar{t}}) \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{t}}} - \frac{(1-\sqrt{\bar{t}})^2}{\sqrt{\bar{t}}} \right) + \\
& + \left(\frac{(\sqrt{\bar{t}})}{\bar{t}} \right) + \left(-\frac{1^2}{\bar{t}} + \frac{(1-\sqrt{\bar{t}})^2}{\bar{t}} \right) + \left(\frac{1^3}{3\bar{t}} - \frac{(1-\sqrt{\bar{t}})^3}{3\bar{t}} \right) = \\
& = \sqrt{\bar{t}} + \left(\frac{-2+2-2\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{\bar{t}}} \right) + \left(\frac{1-(1-2\sqrt{\bar{t}}+\bar{t})}{\sqrt{\bar{t}}} \right) + \left(\frac{(\sqrt{\bar{t}})}{\bar{t}} \right) + \left(\frac{-1+(1-2\sqrt{\bar{t}}+\bar{t})}{\bar{t}} \right) + \\
& + \left(\frac{1-(1^3-3\cdot 1^2\cdot\sqrt{\bar{t}}+3\cdot 1\cdot(\sqrt{\bar{t}})^2-(\sqrt{\bar{t}})^3)}{3\bar{t}} \right) = \\
& = \sqrt{\bar{t}} - 2 + \left(\frac{2\sqrt{\bar{t}}-\bar{t}}{\sqrt{\bar{t}}} \right) + \left(\frac{\sqrt{\bar{t}}}{\bar{t}} \right) + \left(\frac{-2\sqrt{\bar{t}}+\bar{t}}{\bar{t}} \right) + \left(\frac{1-1+3\sqrt{\bar{t}}-3(\sqrt{\bar{t}})^2+(\sqrt{\bar{t}})^3}{3\bar{t}} \right) = \\
& = \sqrt{\bar{t}} - 2 + 2 - \sqrt{\bar{t}} + \left(\frac{\sqrt{\bar{t}}}{\bar{t}} \right) - \left(\frac{2\sqrt{\bar{t}}}{\bar{t}} \right) + 1 + \left(\frac{3\sqrt{\bar{t}}}{3\bar{t}} \right) - \left(\frac{3(\sqrt{\bar{t}})^2}{3\bar{t}} \right) + \left(\frac{(\sqrt{\bar{t}})^3}{3\bar{t}} \right) = \\
& = \left(\frac{\sqrt{\bar{t}}}{\bar{t}} \right) - \left(\frac{2\sqrt{\bar{t}}}{\bar{t}} \right) + \left(\frac{\sqrt{\bar{t}}}{\bar{t}} \right) + 1 - 1 + \left(\frac{(\sqrt{\bar{t}})^3}{3\bar{t}} \right) = \left(\frac{(\sqrt{\bar{t}})^3}{3(\sqrt{\bar{t}})^2} \right) = \frac{1}{3}\sqrt{\bar{t}}.
\end{aligned}$$

Используя соотношение (1.6) для концентрации на второй стадии, вычислим:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_m(\bar{t}) &= \int_0^1 \bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) d\bar{y} = \int_0^1 \left\{ 1 - (1 - (\bar{y})^2) \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right] \right\} d\bar{y} = \\
&= \int_0^1 \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right] + (\bar{y})^2 \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t} - 1)\right] \right\} d\bar{y} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{y}|_0^1 - \bar{y} \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t}-1)\right] \Big|_0^1 + \frac{(\bar{y})^3}{3} \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t}-1)\right] \Big|_0^1 = \\
&= 1 - \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t}-1)\right] + \frac{1^3}{3} \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t}-1)\right] = 1 - \frac{2}{3} \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t}-1)\right].
\end{aligned}$$

В результате получим, что в случае применения приближенного метода решения уравнения диффузии, интегрально средняя концентрация $\bar{c}_m(\bar{t})$ имеет следующий вид:

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{\bar{t}} & \text{при } \bar{t} \leq 1, \\ 1 - \frac{2}{3} \cdot \exp\left[-\frac{1}{4}(\bar{t}-1)\right] & \text{при } \bar{t} \geq 1, \end{cases} \quad (1.7)$$

где $\bar{t} = \frac{48D}{H^2}t$.

1.1.2 Оценка погрешности приближенного решения уравнения диффузии по сравнению с точным решением

В качестве меры погрешности приближённого решения $\bar{c}(\bar{y}, \bar{t})$ уравнения диффузии по сравнению с точным решением $\bar{c}_0(\bar{y}, \bar{t})$ можно рассмотреть равенство [2]:

$$\Delta(\bar{t}) = \sqrt{\int_0^1 (\bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) - \bar{c}_0(\bar{y}, \bar{t}))^2 d\bar{y}}.$$

При вычислении этой меры погрешности $\Delta(\bar{t})$ учитываются значения концентрации в каждой точке стержня. На рисунке 1.2 кривые 1 и 2 характеризуют зависимости $\Delta(\bar{t})$ для квадратичного и кубического приближений по координате (показатель степени в соотношении (1.2)) соответственно.

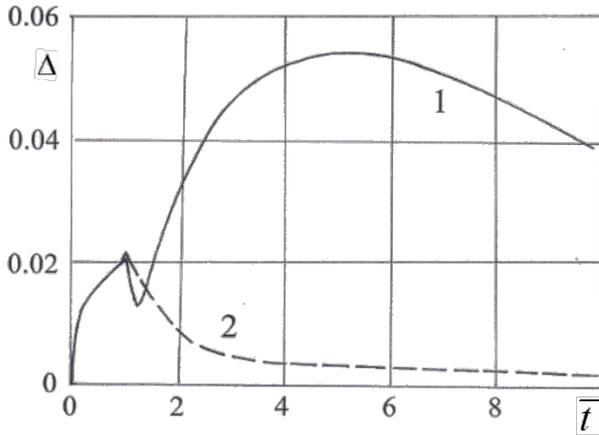


Рис. 1.2. Погрешность $\Delta(\bar{t})$ решения уравнения диффузии.

Из рисунка 1.2 следует значительное преимущество кубического приближения по сравнению с квадратичным. Малая погрешность $\Delta(\bar{t})$ приближённого решения уравнения диффузии (кривая 2) относительно точного решения (менее 2%) подтверждает правомерность использования в уравнениях (1.3) подинтегральных выражений в обычной, а не в абсолютной форме.

На рисунке 1.3 показаны зависимости интегрально средних концентраций \bar{c}_m от времени \bar{t} , соответствующие точному и приближенному решениям уравнения диффузии.

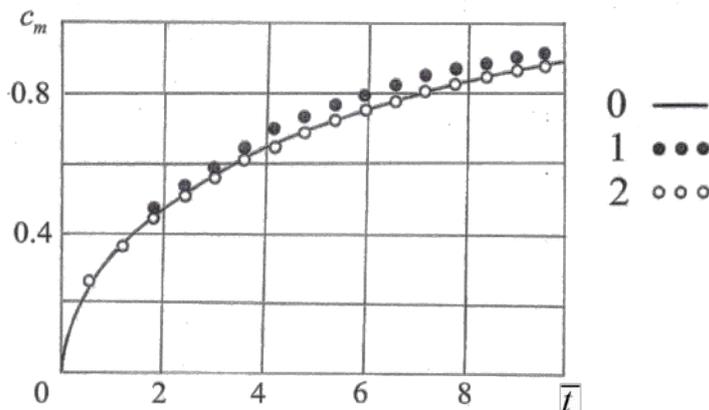


Рис. 1.3. Зависимости интегрально средних концентраций \bar{c}_m от времени \bar{t} , соответствующие точному и приближенному решениям уравнения диффузии.

0 – точное решение, 1 – квадратичная аппроксимация, 2 – кубическая аппроксимация.

Точное решение $\bar{c}_{m0}(\bar{t})$ выражается следующим соотношением [2]:

$$\bar{c}_{m0}(\bar{t}) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \exp\left[-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 \bar{t}}{48}\right]. \quad (1.8)$$

Для сравнения полученных приближённых решений уравнения диффузии с точным решением можно также ввести относительную погрешность $\varepsilon(\bar{t})$, связанную со средними по объёму стержня значениями концентрации $\bar{c}_m(\bar{t})$:

$$\varepsilon(\bar{t}) = \left| \bar{c}_m(\bar{t}) - \bar{c}_{m0}(\bar{t}) \right| / \bar{c}_{m0}(\bar{t}),$$

где $\bar{c}_m(\bar{t})$ - сравниваемое приближённое решение, а $\bar{c}_{m0}(\bar{t})$ - точное решение (1.8).

Представление приближённого решения уравнения диффузии в виде многочлена третьей степени с зависящими от времени коэффициентами приводит к решению задачи с достаточно высокой степенью точности ($\varepsilon < 2.6\%$ при $\bar{t} > 1$, $\varepsilon < 0.4\%$ при $\bar{t} > 5$) [2].

1.1.3 Моделирование влияния агрессивной среды на длительную прочность стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений при растяжении (на основе обработки экспериментальных данных по длительной прочности растягиваемых образцов прямоугольного поперечного сечения (опыты И.А. Одингга и З.Г. Фридмана) и круглого поперечного сечения (опыты В.Д. Сэна, М.И. Маннинга))

В этом параграфе рассматривается описание известных экспериментальных данных по длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений, находящихся в воздушной среде при высокой температуре. Моделирование их длительной прочности основывается на

кинетической теории Ю.Н. Работнова [1] с двумя структурными параметрами - поврежденности и концентрации элементов окружающей среды в материале стержня. Оценивается влияние поверхностного слоя, подверженного диффузии окислительной агрессивной среды, на длительную прочность стержней. Показывается необходимость учета масштабного эффекта, а именно, поперечных размеров стержней при определении их времен до разрушения.

Рассматриваются известные экспериментальные данные по ползучести и длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного поперечного сечения (опыты, проведенные И.А. Одингом и З.Г. Фридманом в воздушной среде [5]) и круглого поперечного сечения (опыты В.Д. Сэна, М.И. Маннинга), о которых сообщается в работе [6]. Указанные эксперименты проводились в высокотемпературной воздушной среде, которая в этих условиях является агрессивной.

Моделирование влияния агрессивной среды на длительную прочность стержней при одноосном растяжении.

Рассматриваются длинный стержень, окруженный агрессивной средой [7]. В случае стержня прямоугольного поперечного сечения его толщина значительно меньше двух других его размеров, поэтому влияние агрессивной среды с торцевых сторон пренебрежимо мало. В связи с этим, как для стержней прямоугольного поперечного сечения, так и для круглого сечения рассматривается одномерный процесс диффузии. В работах [2, 3] приведено решение уравнения диффузии для случая постоянного уровня агрессивной среды на поверхности стержня, основанное на введении движущегося диффузионного фронта. Следуя работам [2, 3], введем в кинетическое уравнение ползучести материальную функцию $f(\bar{c}_m(t))$ от интегрально средней концентрации, учитывающую влияние агрессивной среды в материале стержней.

Принимая дробно-степенную модель длительной прочности [8], запишем кинетическое уравнение в виде:

$$\frac{d\omega}{dt} = L \left(\frac{\sigma}{\sigma_b - \sigma} \right)^n \cdot \frac{1}{(1-\omega)^n} \cdot f(\bar{c}_m(t)), \quad (1.9)$$

где σ - номинальное растягивающее напряжение, ω - поврежденность, t - время, σ_b - предел кратковременной прочности при соответствующей температуре, L , n - материальные константы.

Проинтегрируем соотношение (1.9)

$$\frac{1 - (1-\omega)^{n+1}}{n+1} = L \left(\frac{\sigma}{\sigma_b - \sigma} \right)^n \cdot \int_0^t f(\bar{c}_m(t)) dt. \quad (1.10)$$

Согласно концепции Ю.Н. Работнова разрушение при ползучести наступает при достижении предельного значения поврежденности $\omega = 1$.

Используем данный критерий длительной прочности в соотношении (1.10) и получим:

$$1 = L(n+1) \left(\frac{\sigma}{\sigma_b - \sigma} \right)^n \cdot \int_0^{t^*} f(\bar{c}_m(t)) dt, \quad (1.11)$$

где t^* - время до разрушения стержня при ползучести с учетом воздействия агрессивной среды.

Пусть $\bar{c}_m(t) \equiv 0$ (окружающая среда отсутствует). При этом $f(\bar{c}_m(t))$ должна быть задана таким образом, чтобы соответствовать условию $f(\bar{c}_m(t)) \equiv 1$.

Используем перечисленные условия, подставляя их в соотношение (1.10), получим:

$$t_{\text{без среды}}^* = \left[L(n+1) \left(\frac{\sigma}{\sigma_b - \sigma} \right)^n \right]^{-1}, \quad (1.12)$$

где $t_{\text{без среды}}^*$ - время разрушения образца при ползучести без учета воздействия агрессивной среды.

Возвращаясь к соотношению (1.11), получим искомую взаимосвязь времен до разрушения образца при ползучести с учетом влияния агрессивной среды t^* и без его учета $t_{\text{без среды}}^*$:

$$t_{\text{без среды}}^* = \int_0^{t^*} f(\bar{c}_m(t)) dt. \quad (1.13)$$

Описание известных экспериментальных данных по длительной прочности стержней прямоугольного поперечного сечения (опыты И.А. Одингга и З.Г. Фридмана)

В качестве примера моделирования влияния агрессивной окружающей среды на характеристики длительной прочности металлов рассмотрим результаты опытов, проведенных И.А. Одинггом и З.Г. Фридманом в воздушной среде [5]. В указанных экспериментах были использованы плоские образцы в виде стержней с прямоугольным поперечным сечением из отожженной мягкой углеродистой стали Ст. 3. Рабочая длина каждого образца составляла 28 мм, ширина 6 мм. Толщина образцов H принимала различные значения от 0,15 мм до 2 мм, т.е. изменялась более чем в 13 раз. Испытания на ползучесть вплоть до разрушения проводились при температуре $T = 450^\circ\text{C}$ и номинальных напряжениях $\sigma = 220 \div 270$ МПа, колебания температуры не превышали $\pm 5^\circ\text{C}$. Анализ результатов испытаний показывает, что изменение H от 2,0 до 1,0 мм практически не влияет на характеристики ползучести и длительной прочности образцов, так что можно считать, что при толщине образцов $H = 1$ мм и более влияние окружающей среды на длительную прочность несущественно. Экспериментальные времена до разрушения t_9^* для различных толщин представлены в таблице 1.1. Уменьшение толщины H от 1,0 до 0,15 мм при любых напряжениях приводит к уменьшению t_9^* в 6-8 раз.

Таблица 1.1 - Результаты опытов И.А. Одингга и З.Г. Фридмана.

$\sigma = 220$ МПа		$\sigma = 235$ МПа		$\sigma = 250$ МПа		$\sigma = 270$ МПа	
H , мм	t_9^* , час						
$H_1 = 0.15$	98	0.15	60	0.15	26	0.15	12

$H_2 = 0.2$	-	0.2	54	0.2	32	0.2	16
$H_3 = 0.3$	140	0.3	63	0.3	42	0.3	23
$H_4 = 0.5$	679	0.5	234	0.5	115	0.5	40
$H_5 = 1.0$	800	1.0	350	1.0	170	1.0	77
$t_{\text{без среды}}^* = 800$ час		$t_{\text{без среды}}^* = 350$ час		$t_{\text{без среды}}^* = 170$ час		$t_{\text{без среды}}^* = 77$ час	

Авторы [5] обращают внимание на различную роль поверхностных и внутренних слоев при ползучести. Они отмечают, что первые трещины при длительном разрушении металла в условиях ползучести появляются, как правило, на поверхности образца. Это свидетельствует о том, что процессы разрушения поверхностных слоев образца протекают по своей интенсивности с опережением по сравнению с внутренними слоями. Масштабный эффект заметно усиливается при уменьшении толщины образцов, при этом возрастает относительная объемная доля их поверхностного слоя.

По мнению автора настоящей диссертационной работы, причиной разрушения поверхностных слоев является тот факт, что при указанной температуре поверхностные слои ослаблены агрессивным воздействием кислорода, содержащимся в воздушной среде, который диффундирует в металл образцов.

Для анализа экспериментальных данных зададим три различных варианта функции $f(\bar{c}_m(t))$ в виде линейной, экспоненциальной и степенной (квадратный корень) функции:

$$1) \quad f(\bar{c}_m(t)) = \exp(a_1 \cdot \bar{c}_m(t)), \quad (1.14)$$

$$2) \quad f(\bar{c}_m(t)) = 1 + a_2 \cdot \bar{c}_m(t), \quad (1.15)$$

$$3) \quad f(\bar{c}_m(t)) = 1 + a_3 \cdot \sqrt{\bar{c}_m(t)}. \quad (1.16)$$

Используем интегрально среднее значение безразмерной концентрации $\bar{c}_m(t)$ в стержне прямоугольного поперечного сечения в виде тонкой полосы толщиной H согласно формуле (1.7).

Определим материальные константы L и n , входящие в соотношение (1.9). Эти константы определяются из соотношения (1.12) на основе обработки значений экспериментальных времен до разрушения t_9^* при $H=1$ мм, для которых характеристики длительной прочности не зависят от окружающей среды. С помощью метода наименьших квадратов (МНК) получены следующие значения материальных констант: $L=1.04 \cdot 10^{-4}$, $n=4.39$.

Для поиска оптимального варианта функции $f(\bar{c}_m(t))$ и определения соответствующих констант a_1, a_2, a_3 , входящих в соотношения (1.14) – (1.16), были рассчитаны теоретические значения времен до разрушения t^* для каждого вида предложенных аппроксимаций $f(\bar{c}_m(t))$ с учетом минимального суммарного отклонения S полученных теоретических времен разрушения t^* от экспериментальных t_9^* по следующей формуле:

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{t^* - t_9^*}{t^* + t_9^*} \right)_i^2, \quad (1.17)$$

где $N=11$ - суммарное количество экспериментальных точек для опытов с толщинами образцов $H=0.15 \div 0.3$ мм, t^* - теоретическое время до разрушения.

Необходимо отметить, что при анализе экспериментальных данных были исключены значения t_9^* при $H=0.5$ мм с незначительным масштабным эффектом.

Теоретическое время до разрушения t^* определялось в соответствии с формулой (1.13), в которой время до разрушения образцов без агрессивной среды определялось на основе соотношения (1.12) с использованием найденных констант $L=1,04 \cdot 10^{-4}$ и $n=4,39$ для образца толщиной $H=1$ мм.

Результаты расчета с использованием трех видов аппроксимаций (1.14) – (1.16) приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 - Значения материальных констант и суммарное отклонение теоретических времен до разрушения от экспериментальных.

Вид функция $f(\bar{c}_m(t))$		
$\exp(a_1 \cdot \bar{c}_m(t))$	$1 + a_2 \cdot \bar{c}_m(t)$	$1 + a_3 \cdot \sqrt{\bar{c}_m(t)}$
Значение материальных констант		
a_1	a_2	a_3
3.10	9.50	6.72
Суммарное отклонение S		
0.018	0.0042	0.0036

В соответствии с таблицей 1.2 минимальное значение суммарного отклонения S определяется для степенного вида (8) аппроксимации $f(\bar{c}_m(t))$. На рисунке 1.4 приведены графики длительной прочности, построенные в соответствии с данными таблицы 1.2 для степенной зависимости $f(\bar{c}_m(t))$.

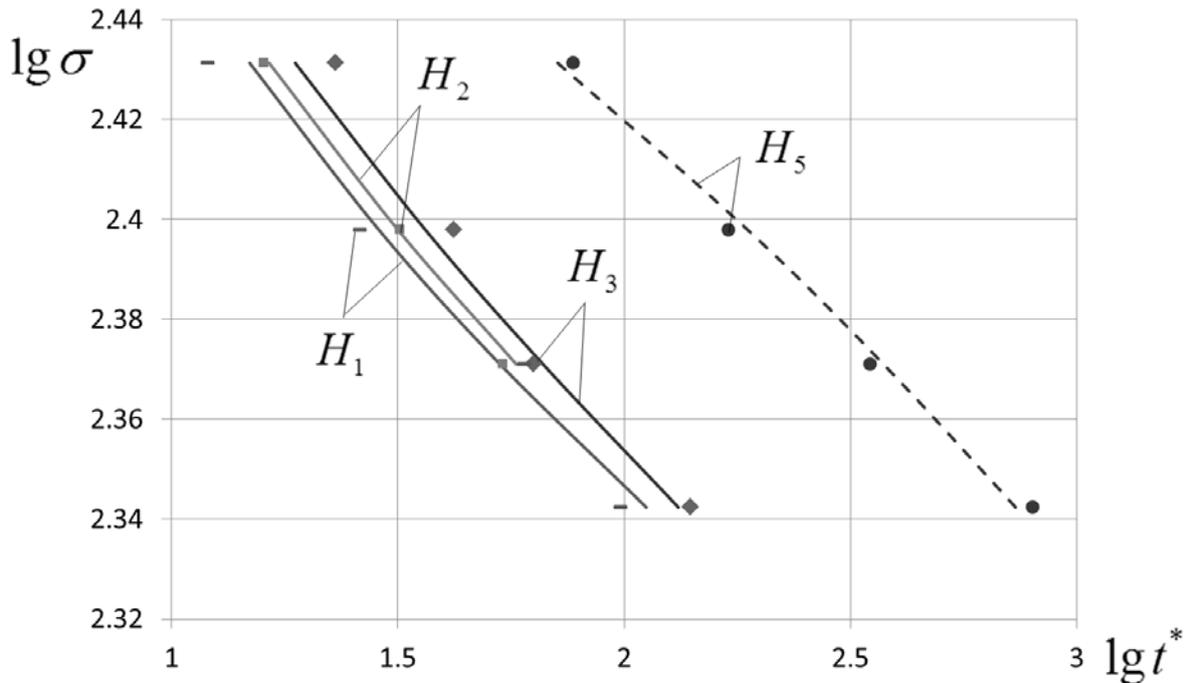


Рис. 1.4. Диаграммы длительной прочности. (точки – эксперимент, сплошные линии – расчетные кривые с учетом степенной зависимости, штриховая линия –

аппроксимация с помощью МНК для толщины $H_5 = 1$ мм без учета агрессивной среды).

В случае точного решения уравнения диффузии [2, 3] интегрально среднее значение безразмерной концентрации $\bar{c}_m(t)$ для стержня в виде тонкой полосы прямоугольного поперечного сечения толщиной H имеет следующий вид:

$$\bar{c}_m(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \exp\left[-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{48} \cdot \frac{48D}{H^2} \cdot t\right]. \quad (1.18)$$

В соответствии с точным решением (1.18) был произведен аналогичный расчет материальных констант и суммарного отклонение теоретических времен до разрушения от экспериментальных. Результаты расчета представлены в таблице 1.3.

Таблица 1.3 - Значение материальных констант и суммарное отклонение теоретических времен до разрушения от экспериментальных на основе точного решения уравнения диффузии.

Вид функция $f(\bar{c}_m(t))$		
$\exp(a_1 \cdot \bar{c}_m(t))$	$1 + a_2 \cdot \bar{c}_m(t)$	$1 + a_3 \cdot \sqrt{\bar{c}_m(t)}$
Значение материальных констант		
a_1	a_2	a_3
3.215	9.93	6.915
Суммарное отклонение S		
0.018	0.004098	0.00373

В соответствии с расчетными данными, представленными в таблицах 1.2 и 1.3, сравнение результатов по приближенному (1.7) и точному (1.18) решению уравнения диффузии показало близкие результаты.

Покажем, что учет масштабного эффекта существенно влияет на величину суммарного отклонения S теоретических времен до разрушения t^* от экспериментальных t_s^* и, как следствие, приводит к более корректному описанию

длительной прочности стержней. Для того чтобы это показать, рассмотрим полученные И.А. Одингом и З.Г Фридманом экспериментальные значения времен до разрушения t_9^* , вне зависимости от толщин образцов, а зависящие только от напряжения σ .

Применим аппроксимацию вида (1.12) к описанию всей совокупности экспериментальных точек. Для этого определим значения материальных констант, входящих в соотношение (1.12), и далее, на основе полученных значений теоретических времен до разрушения t^* подсчитаем величину суммарного отклонения S по формуле (1.17).

Для реализации предложенного подхода используем следующую методику. Согласно справочнику [9] примем предел прочности Ст. 3 при температуре $T = 450^\circ\text{C}$ равным $\sigma_b = 400$ МПа. Предварительно с помощью метода наименьших квадратов найдем материальные константы L_i и n_i ($i = 1 \div 3$) аппроксимации (1.13) для разных значений толщин образцов ($H_i = 0.15 \div 0.3$). Затем на основе среднего значения констант n_i определим константу L при помощи минимизации значения суммарного отклонения S , подсчитанного для всей совокупности экспериментальных точек t_9^* без учета их зависимости от толщины образцов.

В результате приведенных вычислений были получены следующие значения: $n = 3.53$, $L = 7.5 \cdot 10^{-4}$, $S = 0.14$.

Сравнение суммарного отклонения S теоретических времен до разрушения t^* от экспериментальных t_9^* , полученного в результате учета масштабного эффекта, с аналогичным отклонением без учета показало преимущество учета масштабного эффекта при описании длительной прочности. Отклонение S при учете масштабного эффекта на 1-2 порядка меньше, чем без учета.

Описание известных экспериментальных данных по длительной прочности образцов круглого поперечного сечения (опыты В.Ж. Сэне, М.И. Маннинг)

В данной части работы рассматривается ползучесть и длительная прочность при растяжении цилиндрических образцов под действием высокой температуры в воздушной среде. Как было отмечено ранее, воздушная среда при высокой температуре является агрессивной.

Аналогично предыдущему исследованию (опыты И.А. Одингга и З.Г. Фридмана) рассмотрим процесс диффузии агрессивной среды при растяжении цилиндрического образца на основе введения диффузионного фронта агрессивной среды. Проведем краткий обзор предлагаемого метода, примененного в [2, 3] для описания диффузионного процесса в цилиндрических образцах.

Вводятся безразмерные переменные

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0}, \quad \tilde{t} = \frac{D}{R^2}t, \quad (1.19)$$

где r - расстояние от оси симметрии образца до произвольной точки, R - радиус поперечного сечения образца, D - коэффициент диффузии, t - время.

В этих безразмерных переменных (1.19) уравнение диффузии и краевые условия диффузии принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{c}(\bar{r}, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{r}} \right), \quad \bar{c}(\bar{r}, 0) = 0, \quad \bar{c}(1, \tilde{t}) = 1, \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \tilde{t}}(0, \tilde{t}) = 0 \quad (1.20)$$

Проводится поиск приближенного решения уравнения (1.19) с помощью введения диффузионного фронта агрессивной среды. Вводится координата фронта $\bar{l}(\tilde{t})$ так, что $\bar{l}(0) = 1$ (при $r = R$ - поверхность образца) и $\bar{l}(\tilde{t}_0) = 0$ (при $r = 0$ центр симметрии образца). Здесь \tilde{t}_0 - безразмерное время достижения диффузионным фронтом центра симметрии образца, т.е. заполнения диффузионной средой всего поперечного сечения.

Рассматриваются две последовательные стадии решения.

Первая стадия: при $0 < \tilde{t} \leq \tilde{t}_0$ - до момента заполнения фронтом всей области поперечного сечения образца.

Вторая стадия: при $\tilde{t} > \tilde{t}_0$ - стадия насыщения, когда концентрация отлична от нуля во всех точках образца.

Зависимости безразмерной концентрации \bar{c} от безразмерных координаты \bar{r} при любом времени \tilde{t} задаются в виде парабол второй степени, которые удовлетворяют граничным условиям, указанным в (1.20).

На первой стадии выражение для концентрации имеет следующий вид:

$$\bar{c}(\bar{r}, \tilde{t}) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \bar{r} \leq \bar{l}(\tilde{t}), 0 < \tilde{t} \leq \tilde{t}_0, \\ \left[\frac{\bar{r} - \bar{l}(\tilde{t})}{1 - \bar{l}(\tilde{t})} \right]^2 & \text{при } \bar{l}(\tilde{t}) \leq \bar{r} \leq 1, 0 < \tilde{t} \leq \tilde{t}_0. \end{cases} \quad (1.21)$$

На второй стадии выражение для концентрации имеет следующий вид:

$$\bar{c}(\bar{r}, \tilde{t}) = B(\tilde{t}) + [1 - B(\tilde{t})](\bar{r})^2 \quad \text{при } 0 \leq \bar{r} \leq 1, \tilde{t} > \tilde{t}_0. \quad (1.22)$$

Функции $\bar{l}(\tilde{t})$ и $B(\tilde{t}) = \bar{c}(0, \tilde{t})$ определяются из интегрального уравнения диффузии:

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial \bar{c}}{\partial \tilde{t}} - \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{r}} \right) \right] \cdot \bar{r} d\bar{r} = 0. \quad (1.23)$$

Подставляя (1.21) и (1.22) в (1.23), определяются функции $\bar{l}(\tilde{t})$ и $B(\tilde{t})$, а затем – концентрация $\bar{c}(\bar{r}, \tilde{t})$. Система уравнений (1.21)-(1.23) приводит к следующим зависимостям координаты диффузионного фронта $\bar{l}(\tilde{t})$ и концентрации $B(\tilde{t})$ от времени \tilde{t} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{l}}{d\tilde{t}} = \left. -\frac{k(k+1)(k+2)}{(1-\bar{l})(k+2\bar{l})} \right|_{k=2} = -\frac{2(2+1)(2+2)}{(1-\bar{l})(2+2\bar{l})} = -\frac{12}{(1-\bar{l})(1+\bar{l})} \quad \text{при } 0 < \tilde{t} \leq \tilde{t}_0, \\ \tilde{t} = \left. \frac{(1-\bar{l})^2 \cdot (2+3k+4\bar{l})}{6k(k+1)(k+2)} \right|_{k=2} = \frac{(1-\bar{l})^2 \cdot (2+3 \cdot 2+4\bar{l})}{6 \cdot 2 \cdot (2+1)(2+2)} = \frac{(1-\bar{l})^2 \cdot (2+\bar{l})}{36} \quad \text{при } 0 < \tilde{t} \leq \tilde{t}_0, \\ B(\tilde{t}) = 1 - \exp[-2(k+2)(\tilde{t} - \tilde{t}_0)] \Big|_{k=2} = 1 - \exp[-8(\tilde{t} - \tilde{t}_0)] \quad \text{при } \tilde{t} > \tilde{t}_0, \\ \tilde{t}_0 = \tilde{t}(\bar{l} = 0) = \left. \frac{(2+3k)}{6k(k+1)(k+2)} \right|_{k=2} = \frac{(2+3 \cdot 2)}{6 \cdot 2 \cdot (2+1)(2+2)} = \frac{1}{18}. \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Рассматривается выражение для интегрально средней концентрации в поперечном сечении образца $\bar{c}_m(\tilde{t})$:

$$\bar{c}_m(\tilde{t}) = 2 \cdot \int_0^1 \bar{c}(\bar{r}, \tilde{t}) \bar{r} d\bar{r}. \quad (1.25)$$

С помощью (1.21), (1.22), (1.24) и (1.25) вычисляется зависимость $\bar{c}_m(\tilde{t})$:

$$\bar{c}_m(\tilde{t}) = \begin{cases} \left. \frac{2(1-\bar{l})(k+1+\bar{l})}{(k+1)(k+2)} \right|_{k=2} = \frac{(1-\bar{l})(3+\bar{l})}{6} & \text{при } 0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{t}_0, \\ \left. 1 - \frac{k}{(k+2)} \cdot \exp(2(k+2)(\tilde{t}_0 - \tilde{t})) \right|_{k=2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \exp(8(\tilde{t}_0 - \tilde{t})) & \text{при } \tilde{t} > \tilde{t}_0. \end{cases}$$

Теперь с учетом введенного соотношения для безразмерного времени (1.19) соотношение для безразмерной концентрации запишутся в следующем виде:

$$\bar{c}_m(t) = \begin{cases} \frac{(1-\bar{l})(3+\bar{l})}{6} & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{R^2}{D} \frac{1}{18}, \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot \exp(8(\tilde{t}_0 - \tilde{t})) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \exp\left(8\left(\frac{1}{18} - \frac{D}{R^2}t\right)\right) & \text{при } t > \frac{R^2}{D} \frac{1}{18}. \end{cases} \quad (1.26)$$

Так как коэффициент D очень мал, то достаточно рассмотреть только первую стадию $\bar{c}_m(t)$ (первое уравнение системы (1.26)). Если D мал, то $\tilde{t} = \frac{D}{R^2}t \ll 1$.

Тогда второе соотношение системы (1.24) будет иметь вид:

$$\tilde{t} = \frac{(1-\bar{l})^2 \cdot (2+\bar{l})}{36} \ll 1. \quad (1.27)$$

Пусть $\bar{l} = 1 - \delta$, тогда соотношение (1.27) будет иметь вид:

$$\frac{\delta^2 \cdot (3 - \delta)}{36} = \tilde{t} \quad (1.28)$$

Преобразуем (1.28) и выразим из него δ .

$$\frac{\delta^2 \cdot (3 - \delta)}{36} = \tilde{t}; \quad \delta^2 \cdot (3 - \delta) = 36\tilde{t}; \quad -\delta^3 + 3\delta^2 = 36\tilde{t}; \quad \text{приближенно } \delta = \sqrt{12\tilde{t}}.$$

$$\text{Тогда } \bar{l} = 1 - \delta = 1 - \sqrt{12\frac{D}{R^2}t}.$$

Выразим через δ интегрально средний уровень безразмерной концентрации $\bar{c}_m(t)$ (в первом уравнении (1.26)).

$$\begin{aligned} \bar{c}_m(t) &= \frac{(1-\bar{l})(3+\bar{l})}{6} = \frac{\delta(4-\delta)}{6} \approx \frac{2}{3}\delta = \frac{2}{3}\sqrt{12\frac{D}{R^2}t} = \frac{2\sqrt{12}}{3}\sqrt{\frac{D}{R^2}t} = \\ &= \frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}\sqrt{\frac{D}{R^2}t} = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{D}{R^2}t} \end{aligned}$$

Итак,

$$\bar{c}_m(t) = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{D}{R^2} t} \quad (1.29)$$

В качестве примера моделирования рассмотрим опыты В.Л. Сэна, М.Л. Маннинга на ползучесть и длительную прочность при растяжении цилиндрических образцов при одинаковом напряжении, о которых сообщается в работе [6]. В таблице 1.4 приведены экспериментальные времена до разрушения для цилиндрических образцов различных радиусов поперечного сечения.

Таблица 1.4 - Экспериментальные времена до разрушения.

Радиус R, мм	Время до разрушения t_3^* , час
1.25	160
2.5	241
5	289
25	446
вакуум	496

Для определения теоретических времен до разрушения под действием агрессивной высокотемпературной воздушной среды используем соотношение (1.13). В соответствии с таблицей 1.4 примем для расчета время до разрушения без влияния среды $t_{\text{без среды}}^* = 496$ час. Коэффициент диффузии примем равным $D = 10^{-4} \text{ мм}^2 / \text{ час}$

Аналогично описанию экспериментальных данных по длительной прочности образцов прямоугольного поперечного сечения для анализа экспериментальных данных [6] зададим три различных варианта функций $f(\bar{c}_m(t))$ в виде линейной, экспоненциальной и степенной (квадратный корень) функций:

$$1) f(\bar{c}_m(t)) = \exp(b_1 \cdot \bar{c}_m(t)), \quad (1.30)$$

$$2) f(\bar{c}_m(t)) = 1 + b_2 \cdot \bar{c}_m(t), \quad (1.31)$$

$$3) f(\bar{c}_m(t)) = 1 + b_3 \cdot \sqrt{\bar{c}_m(t)}. \quad (1.32)$$

Для поиска оптимального варианта функции $f(\bar{c}_m(t))$ и определения соответствующих констант b_1, b_2, b_3 , входящих в соотношения (1.30) – (1.32), были рассчитаны теоретические значения времен до разрушения t^* для каждого вида предложенных аппроксимаций $f(\bar{c}_m(t))$ с учетом минимального суммарного отклонения S полученных теоретических времен до разрушения t^* от экспериментальных t_s^* по формуле (1.17), в которой суммарное количество экспериментальных точек $N = 4$.

Результаты расчета с использованием трех видов аппроксимаций (1.30) – (1.32) приведены в таблице 1.5.

Таблица 1.5 - Значения материальных констант и суммарное отклонение теоретических времен до разрушения от экспериментальных.

Вид функция $f(\bar{c}_m(t))$		
$\exp(b_1 \cdot \bar{c}_m(t))$	$1 + b_2 \cdot \bar{c}_m(t)$	$1 + b_3 \cdot \sqrt{\bar{c}_m(t)}$
Значение материальных констант		
b_1	b_2	b_3
7,33	12,55	3,78
Суммарное отклонение S		
$1,11 \cdot 10^{-3}$	$4,16 \cdot 10^{-4}$	$6,11 \cdot 10^{-3}$

В соответствии с таблицей 1.5 минимальное значение суммарного отклонения S определяется для линейного вида (1.31) аппроксимации $f(c_m(t))$. В таблице 1.6 представлены экспериментальные и расчетные теоретические значения времен до разрушения в соответствии с линейной аппроксимацией вида (1.31).

Таблица 1.6 - Экспериментальные и теоретические времена до разрушения цилиндрических образцов.

Радиус R, мм	Экспериментальное время до разрушения t_3^* , час	Теоретическое время до разрушения t^* , час
1.25	160	165.8
2.5	241	228.7
5	289	297.6
25	446	427.6

Таким образом, как показано в таблице 1.6, экспериментальные и теоретические времена до разрушения увеличиваются с ростом радиусов цилиндрических образцов. По мнению автора настоящей диссертационной работы этот масштабный эффект связан с различной относительной долей проникновения высокотемпературной агрессивной воздушной среды в материал цилиндрических образцов.

1.1.4 Влияние формы поперечного сечения растягиваемых стержней на длительную прочность в присутствии агрессивной окружающей среды

Проведем сравнение диффузионных процессов в стержнях прямоугольного (квадратного – частный случай), круглого поперечных сечений и сечения в виде бесконечной полосы. Под сечением в виде бесконечной полосы будем понимать прямоугольное поперечное сечение, ширина которого значительно превышает его толщину и поэтому влияние диффузии с торцевых сторон пренебрежимо мало, и рассматриваем одномерный процесс диффузии. Будем сравнивать интегрально средние концентрации \bar{c}_m . Используем выражения для \bar{c}_m в образцах с

поперечным сечением в виде бесконечной полосы (1.7) и круглого поперечного сечения (1.26).

Рассмотрим диффузионный процесс в образце с прямоугольным поперечным сечением. Концентрация элементов среды $c(x, y, t)$ в этом случае удовлетворяет параболическому уравнению диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right). \quad (1.33)$$

В начальный момент времени концентрация элементов в стержне принимается равной нулю:

$$c(x, y, 0) = 0.$$

Выражения для концентраций $c_x(x, t)$ и $c_y(y, t)$, полученные на основе введения диффузионных фронтов l_x и l_y , которые распространяются в направлении соответствующих осей системы координат x и y (оси x и y расположены вдоль сторон прямоугольного поперечного сечения), были получены в статье [10]. Проведем краткий анализ этой работы и получим выражение для \bar{c}_m . В статье [10] рассматривается прямоугольное сечение с размерами $2a_x \times 2a_y$. Основные характерные параметры и соотношения этой статьи приведены далее.

С учётом симметрии рассматривается только четверть области $(0 \leq x \leq a_x, 0 \leq y \leq a_y)$, в этом случае граничные условия имеют следующий вид:

$$c(0, y, t) \equiv c(x, 0, t) = c_0, \quad \frac{\partial c}{\partial x}(a_x, y, t) = \frac{\partial c}{\partial y}(x, a_y, t) = 0.$$

Отношение сторон прямоугольника характеризуется коэффициентом $k_s = \frac{2a_y}{2a_x} = \frac{a_y}{a_x}$.

Принимается подобие невозмущённой и исходной областей, вследствие этого диффузионные фронты достигают середины сечения одновременно.

Отношение диффузионных фронтов l_x и l_y равно отношению сторон $k_s = \frac{a_y}{a_x} = \frac{l_y}{l_x}$.

Рассматривается первая стадия – стадии проникновения фронта при $0 < t < t_1$. Время перехода между стадиями равно $t_1 = \frac{a_x^2}{6\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)D}$.

1) При $x < \frac{1}{k_s} y$:

$$\begin{cases} c_x(x, t) = c_0 \left[1 - \frac{x}{l_x}\right]^2 & \text{при } x < l_x, \\ 0 & \text{при } x \geq l_x. \end{cases} \quad l_x = \sqrt{6\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)Dt}, \quad (1.34)$$

2) При $y \leq k_s x$:

$$\begin{cases} c_y(y, t) = c_0 \left[1 - \frac{y}{l_y}\right]^2 & \text{при } y < l_y, \\ 0 & \text{при } y \geq l_y. \end{cases} \quad l_y = \sqrt{6(1 + k_s^2)Dt}, \quad (1.35)$$

Рассматривается вторая стадия – стадии насыщения при $t \geq t_1$.

3) При $x < \frac{1}{k_s} y$:

$$c_x(x, t) = c_0 \left(1 - \left[\frac{x}{a_x} - \left(\frac{x}{a_x}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{2}{a_x^2}\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)D \cdot (t - t_1)\right]\right). \quad (1.36)$$

4) При $y \leq k_s x$:

$$c_y(y, t) = c_0 \left(1 - \left[\frac{y}{k_s a_x} - \left(\frac{y}{k_s a_x}\right)^2\right] \cdot \exp\left[-\frac{2}{a_x^2}\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)D \cdot (t - t_1)\right]\right). \quad (1.37)$$

Вводятся безразмерные переменные:

$$\bar{x} = \frac{x}{a_x}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a_y} = \frac{y}{k_s a_x}, \quad \bar{l}_x = \frac{l_x}{a_x}, \quad \bar{l}_y = \frac{l_y}{a_y}, \quad c = \frac{c}{c_0}, \quad \bar{t} = \frac{6\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)D}{a_x^2} t.$$

Выражаются в безразмерных переменных соотношения для времени перехода между стадиями и соотношения (1.34) – (1.37).

$$\bar{t}_1 = \frac{6\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)D}{a_x^2} t_1 = \frac{6\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)D}{a_x^2} \cdot \frac{a_x^2}{6\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)D} = 1.$$

На первой стадии – стадии проникновения фронта $0 < \bar{t} < 1$.

1) При $\bar{x} < \bar{y}$:

$$\begin{cases} \bar{c}_x(\bar{x}, \bar{t}) = \left[1 - \frac{\bar{x}}{\bar{l}_x}\right]^2 & \text{при } \bar{x} < \bar{l}_x, \quad \bar{l}_x = \sqrt{\bar{t}}, \\ 0 & \text{при } \bar{x} \geq \bar{l}_x. \end{cases} \quad (1.38)$$

Выражение (1.38) получено с учетом преобразований:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{6\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)D}{a_x^2} t, \\ t &= \frac{a_x^2}{6\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)D} \bar{t}, \\ \bar{l}_x a_x &= \sqrt{6\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)D \cdot \frac{a_x^2}{6\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)D} \bar{t}}, \\ \bar{l}_x &= \sqrt{\bar{t}}, \\ x &< \frac{1}{k_s} y, \\ \bar{x} &= \frac{x}{a_x} \rightarrow x = \bar{x} a_x, \\ \bar{y} &= \frac{y}{a_y} = \frac{y}{a_x k_s} \rightarrow y = \bar{y} a_x k_s, \\ a_y &= a_x k_s, \\ \bar{x} a_x &< \frac{1}{k_s} \bar{y} a_x k_s, \\ \bar{x} &< \bar{y}. \end{aligned}$$

2) При $\bar{y} \leq \bar{x}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{c}_y(\bar{y}, \bar{t}) = \left[1 - \frac{\bar{y}}{\bar{l}_y} \right]^2 \quad \text{при } \bar{y} < \bar{l}_y, \quad \bar{l}_y = \sqrt{\bar{t}}, \\ 0 \quad \text{при } \bar{y} \geq \bar{l}_y. \end{array} \right. \quad (1.39)$$

Выражение (1.39) получено с учетом преобразований:

$$\bar{l}_y a_y = \sqrt{6(1+k_s^2)D \frac{a_x^2}{6\left(\frac{k_s^2+1}{k_s^2}\right)D} \bar{t}},$$

$$\bar{l}_y a_y = a_x \sqrt{k_s^2 \bar{t}},$$

$$\bar{l}_y a_y = a_x k_s \sqrt{\bar{t}},$$

$$\bar{l}_y = \frac{a_x}{a_y} k_s \sqrt{\bar{t}},$$

$$\bar{l}_y = \frac{1}{k_s} k_s \sqrt{\bar{t}},$$

$$\bar{l}_y = \sqrt{\bar{t}}.$$

$$y \leq k_s x,$$

$$\bar{y} a_y \leq k_s \bar{x} a_x,$$

$$\bar{y} \leq k_s \frac{a_x}{a_y} \bar{x},$$

$$\bar{y} \leq \bar{x}.$$

На второй стадии – стадии насыщения $\bar{t} \geq 1$.

3) При $\bar{x} < \bar{y}$:

$$\bar{c}_x(\bar{x}, \bar{t}) = \left(1 - \left[\bar{x} - (\bar{x})^2 \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \bar{t} \right] \right). \quad (1.40)$$

Выражение (1.40) получено с учетом преобразований:

$$c_0 \bar{c}_x(\bar{x}, \bar{t}) = c_0 \left(1 - \left[\frac{\bar{x} a_x}{a_x} - \left(\frac{\bar{x} a_x}{a_x} \right)^2 \right] \cdot \exp \left[-\frac{2}{a_x^2} \left(1 + \frac{1}{k_s^2} \right) D t + \frac{2}{a_x^2} \left(1 + \frac{1}{k_s^2} \right) D t_1 \right] \right),$$

$$c_0 \bar{c}_x(\bar{x}, \bar{t}) = c_0 \left(1 - \left[\frac{\bar{x} a_x}{a_x} - \left(\frac{\bar{x} a_x}{a_x} \right)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{2}{a_x^2} \left(1 + \frac{1}{k_s^2} \right) D \cdot \frac{a_x^2}{6 \left(1 + \frac{1}{k_s^2} \right) D} \bar{t} + \frac{2}{a_x^2} \left(1 + \frac{1}{k_s^2} \right) D \cdot \frac{a_x^2}{6 \left(1 + \frac{1}{k_s^2} \right) D} \bar{t}_1 \right] \right),$$

$$\bar{c}_x(\bar{x}, \bar{t}) = \left(1 - \left[\bar{x} - (\bar{x})^2 \right] \cdot \exp \left[-\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{6} \bar{t} + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{6} \bar{t}_1 \right] \right),$$

$$\bar{c}_x(\bar{x}, \bar{t}) = \left(1 - \left[\bar{x} - (\bar{x})^2 \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{3} \bar{t}_1 - \frac{1}{3} \bar{t} \right] \right),$$

$$\bar{t} = 1,$$

$$\bar{t} = \frac{6 \left(1 + \frac{1}{k_s^2} \right) D}{a_x^2} t,$$

$$t = \frac{a_x^2}{6 \left(1 + \frac{1}{k_s^2} \right) D} \bar{t}.$$

4) При $\bar{y} \leq \bar{x}$:

$$\bar{c}_y(\bar{y}, \bar{t}) = \left(1 - \left[\bar{y} - (\bar{y})^2 \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \bar{t} \right] \right) \quad (1.41)$$

Выражение (1.41) получено с учетом преобразований:

$$c_y(y, t) = c_0 \left(1 - \left[\frac{y}{k_s a_x} - \left(\frac{y}{k_s a_x} \right)^2 \right] \cdot \exp \left[-\frac{2}{a_x^2} \left(1 + \frac{1}{k_s^2} \right) D \cdot (t - t_1) \right] \right),$$

$$\bar{c}_y(\bar{y}, \bar{t}) = \left(1 - \left[\frac{\bar{y} a_y}{k_s a_x} - \left(\frac{\bar{y} a_y}{k_s a_x} \right)^2 \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{3} \bar{t}_1 - \frac{1}{3} \bar{t} \right] \right),$$

$$\bar{c}_y(\bar{y}, \bar{t}) = \left(1 - \left[\bar{y} - (\bar{y})^2 \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{3} \bar{t}_1 - \frac{1}{3} \bar{t} \right] \right),$$

$$\bar{t} = 1.$$

В полученных соотношениях безразмерное время $\bar{t} = \frac{6\left(1 + \frac{1}{k_s^2}\right)D}{a_x^2}t$ зависит от

соотношения сторон $k_s = \frac{a_y}{a_x}$.

Таким образом, автором статьи [10] получены выражения для концентраций $c_x(x, t)$ и $c_y(y, t)$ на обеих стадиях диффузионного процесса.

Теперь получим интегрально средний уровень безразмерной концентрации $\bar{c}_m(\bar{t})$, зависящий от безразмерного времени \bar{t} . Определим интегрально средний уровень безразмерной концентрации на первом этапе (при $0 < \bar{t} \leq 1$).

$$\begin{aligned} \bar{c}_m(\bar{t}) &= 2 \left\{ \int_0^{\bar{t}} d\bar{y} \int_{\bar{y}}^1 d\bar{x} \cdot c(x, y, t) \right\} = 2 \int_0^{\bar{t}} d\bar{y} \cdot \bar{c}(\bar{y}, \bar{t}) \cdot (1 - \bar{y}) = 2 \int_0^{\sqrt{\bar{t}}} (1 - \bar{y}) \left(1 - \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}}\right)^2 d\bar{y} = \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\bar{t}}} (1 - \bar{y}) \left(1 - 2\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}} + \frac{\bar{y}^2}{\bar{t}}\right) d\bar{y} = 2 \int_0^{\sqrt{\bar{t}}} \left(1 - 2\frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{t}}} + \frac{\bar{y}^2}{\bar{t}} - \bar{y} + 2\frac{\bar{y}^2}{\sqrt{\bar{t}}} - \frac{\bar{y}^3}{\bar{t}}\right) d\bar{y} = \\ &= 2 \left(\bar{y} - 2\frac{\bar{y}^2}{2\sqrt{\bar{t}}} + \frac{\bar{y}^3}{3\bar{t}} - \frac{\bar{y}^2}{2} + 2\frac{\bar{y}^3}{3\sqrt{\bar{t}}} - \frac{\bar{y}^4}{4\bar{t}} \right) \Big|_0^{\sqrt{\bar{t}}} = \\ &= 2 \left(\sqrt{\bar{t}} - 2\frac{(\sqrt{\bar{t}})^2}{2\sqrt{\bar{t}}} + \frac{(\sqrt{\bar{t}})^3}{3\bar{t}} - \frac{(\sqrt{\bar{t}})^2}{2} + 2\frac{(\sqrt{\bar{t}})^3}{3\sqrt{\bar{t}}} - \frac{(\sqrt{\bar{t}})^4}{4\bar{t}} \right) = \\ &= 2 \left(-\frac{\bar{t}}{2} + \frac{2\bar{t}}{3} + \frac{\sqrt{\bar{t}}}{3} - \frac{\bar{t}}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{\bar{t}}}{3} - \frac{6\bar{t}}{12} + \frac{8\bar{t}}{12} - \frac{3\bar{t}}{12} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{\bar{t}}}{3} - \frac{\bar{t}}{12} \right) = \frac{1}{6} [4\sqrt{\bar{t}} - \bar{t}]. \end{aligned}$$

Итак, на первом этапе:

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \frac{1}{6} [4\sqrt{\bar{t}} - \bar{t}] \quad \text{при } 0 < \bar{t} \leq 1 \quad . \quad (1.42)$$

Определим интегрально средний уровень безразмерной концентрации на втором этапе (при $\bar{t} > 1$).

$$\bar{c}_y(\bar{y}, \bar{t}) = 1 + [(\bar{y})^2 - 2\bar{y}] \cdot \exp\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\bar{t}\right] \quad \text{при } \bar{y} \leq \bar{x}.$$

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = 2 \int_0^1 d\bar{x} \cdot \int_0^{\bar{x}} d\bar{y} \cdot \bar{c}_y(\bar{y}, \bar{t}) = 2 \int_0^1 d\bar{x} \cdot \int_0^{\bar{x}} \left\{ 1 + [(\bar{y})^2 - 2\bar{y}] \cdot \exp\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\bar{t}\right] \right\} d\bar{y} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 d\bar{x} \cdot \left\{ \bar{y} + \left[\frac{\bar{y}^3}{3} - 2 \frac{\bar{y}^2}{2} \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \bar{t} \right] \right\} \Big|_0^{\bar{x}} = 2 \int_0^1 d\bar{x} \left\{ \bar{x} + \left[\frac{\bar{x}^3}{3} - \bar{x}^2 \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \bar{t} \right] \right\} = \\
&= 2 \left\{ \frac{\bar{x}^2}{2} + \left[\frac{\bar{x}^4}{12} - \frac{\bar{x}^3}{3} \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \bar{t} \right] \right\} \Big|_0^1 = 2 \left\{ \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{3} \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \bar{t} \right] \right\} = \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot \exp \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \bar{t} \right].
\end{aligned}$$

Итак, на втором этапе:

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \exp \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \bar{t} \right] \quad \text{при } \bar{t} > 1. \quad (1.43)$$

Рассмотри диффузию в прямоугольном сечении с размерами по толщине

$$2a_y = H \text{ и по длине } 2a_x = k \cdot H. \text{ Отсюда } a_x = k \cdot \frac{H}{2}.$$

Выразим k_s :

$$k_s = \frac{2a_y}{2a_x} = \frac{H}{k \cdot H} = \frac{1}{k}.$$

Выразим безразмерное время через k и H :

$$\bar{t} = \frac{6 \left(1 + \frac{1}{k_s^2} \right) D}{a_x^2} t = \frac{6(1+k^2)D}{\left(k \cdot \frac{H}{2} \right)^2} t = \frac{4 \cdot 6 \cdot (1+k^2)D}{(k \cdot H)^2} t = \frac{24 \cdot (1+k^2)D}{(k \cdot H)^2} t.$$

Выразим размерное время через k , H и безразмерное время \bar{t} :

$$t = \frac{(k \cdot H)^2}{24 \cdot (1+k^2)D} \bar{t}$$

Принимая различные значения параметра k (например, для квадратного поперечного сечения $k=1$ и для прямоугольного поперечного сечения $k=1.2$), построим графики зависимостей безразмерной концентрации \bar{c}_m от размерного времени t . Смотри рисунок 1.5

Примечание. Зависимости $\bar{c}_m(\bar{t})$ от безразмерного времени \bar{t} не зависят от параметра k (графики для прямоугольного и квадратного сечений сливаются в

одну линию). Поэтому были построены графики зависимости от размерного времени.

Итак, проведем сравнение процессов диффузии в образцах различных поперечных сечений при условии:

$$2R = H = 2a_y, \quad (1.44)$$

где R - радиус круглого поперечного сечения,

H - толщина поперечного сечения в виде бесконечной полосы,

$2a_y$ - сторона прямоугольного поперечного сечения по высоте,

$2a_x$ - сторона прямоугольного поперечного сечения по ширине.

Выпишем полученные соотношения $\bar{c}_m(\bar{t})$ для поперечных сечений:

Сечение в виде бесконечной полосы:

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\bar{t}}}{3} & \text{при } 0 < \bar{t} < 1, \\ 1 - \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{\bar{t}-1}{4}\right) & \text{при } \bar{t} > 1, \end{cases}, \quad \bar{t} = \frac{48D}{H^2}t. \quad (1.45)$$

Прямоугольное (квадратное $k=1$) поперечное сечение:

$$\begin{cases} \bar{c}_m(\bar{t}) = \frac{1}{6} [4\sqrt{\bar{t}} - \bar{t}] & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 1 \\ \bar{c}_m(\bar{t}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \exp\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\bar{t}\right] & \text{при } \bar{t} > 1 \end{cases}, \quad \bar{t} = \frac{24 \cdot (1+k^2)D}{(k \cdot H)^2}t. \quad (1.46)$$

Круглое поперечное сечение:

$$\bar{c}_m(\tilde{t}) = \begin{cases} \frac{(1-\tilde{t})(3+\tilde{t})}{6} & \text{при } 0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{t}_0, \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot \exp(8(\tilde{t}_0 - \tilde{t})) & \text{при } \tilde{t} > \tilde{t}_0, \end{cases}, \quad \tilde{t} = \frac{D}{R^2}t. \quad (1.47)$$

$$\tilde{t}_0 = \frac{1}{18}$$

В качестве примера рассмотрим стержни из α -Fe, находящийся в среде водорода при температуре 500 °С, в этом случае коэффициент диффузии в материале стержня равен $D = 1.02$ мм²/мин [11], характерный размер поперечного

сечения (1.44) примем равным 10 мм. На рисунке 1.5 приведены зависимости интегрально средней концентрации среды \bar{c}_m от времени t в случае четырёх различных форм поперечного сечения ($i=1$ – бесконечная полоса толщины 10 мм, $i=2$ – прямоугольник со сторонами 12×10 мм, $i=3$ – квадрат со сторонами 10×10 мм, $i=4$ – круг радиуса $R=5$ мм). В качестве функций $\bar{c}_m(\bar{t})$ используются зависимости (1.45) для $i=1$, (1.46) для $i=2$ и $i=3$, (1.47) для $i=4$.

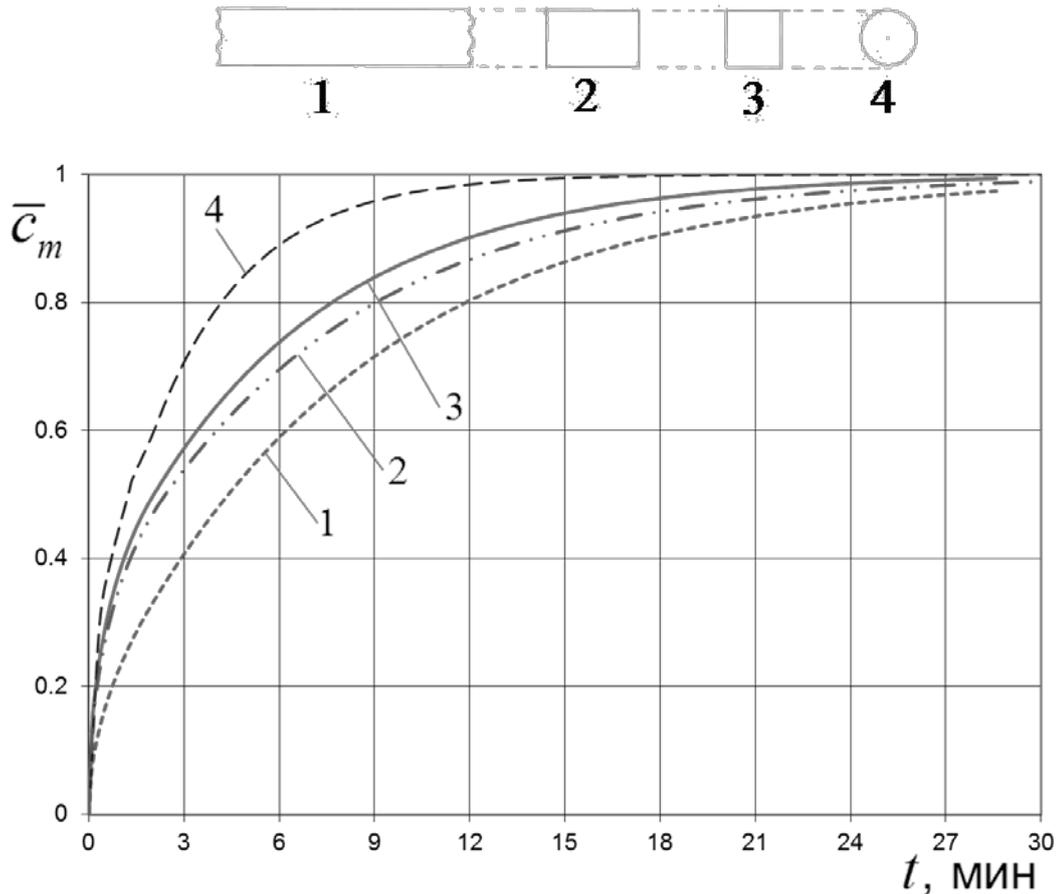


Рис. 1.5. Зависимости безразмерных интегрально средних концентраций от времени для различных форм поперечных сечений стержней.

Из рисунка 1.5 следует, что среди стержней с рассмотренными формами поперечных сечений при соблюдении равенства (1.44) диффузионный процесс развивается быстрее всего в стержнях круглого поперечного сечения. Представляет интерес оценить времена, при которых интегрально средняя концентрация среды в стержнях с различными рассмотренными формами поперечных сечений \bar{c}_m составляет 50% от уровня внешней агрессивной среды. Из рисунка 1.5 следует, что эти времена находятся в диапазоне 1.5 – 4.5 мин.

Длительная прочность растягиваемых стержней в агрессивной среде.

Для определения влияния агрессивной среды на длительную прочность применим соотношение (1.13). В качестве зависимости $f(\bar{c}_m)$ рассмотрим линейную функцию следующего вида:

$$f(\bar{c}_m) = 1 + a\bar{c}_m. \quad (1.48)$$

Подставляя полученные ранее зависимости $\bar{c}_m(t)$ в (1.48), а затем в соответствии с таблицей 1.2 при $a = 9.5$ [5, 7] в (1.13), получаем времена до разрушения стержней различной формы в агрессивной среде. На рисунке 1.6 представлено сравнение времен до разрушения для различных форм поперечных сечений.

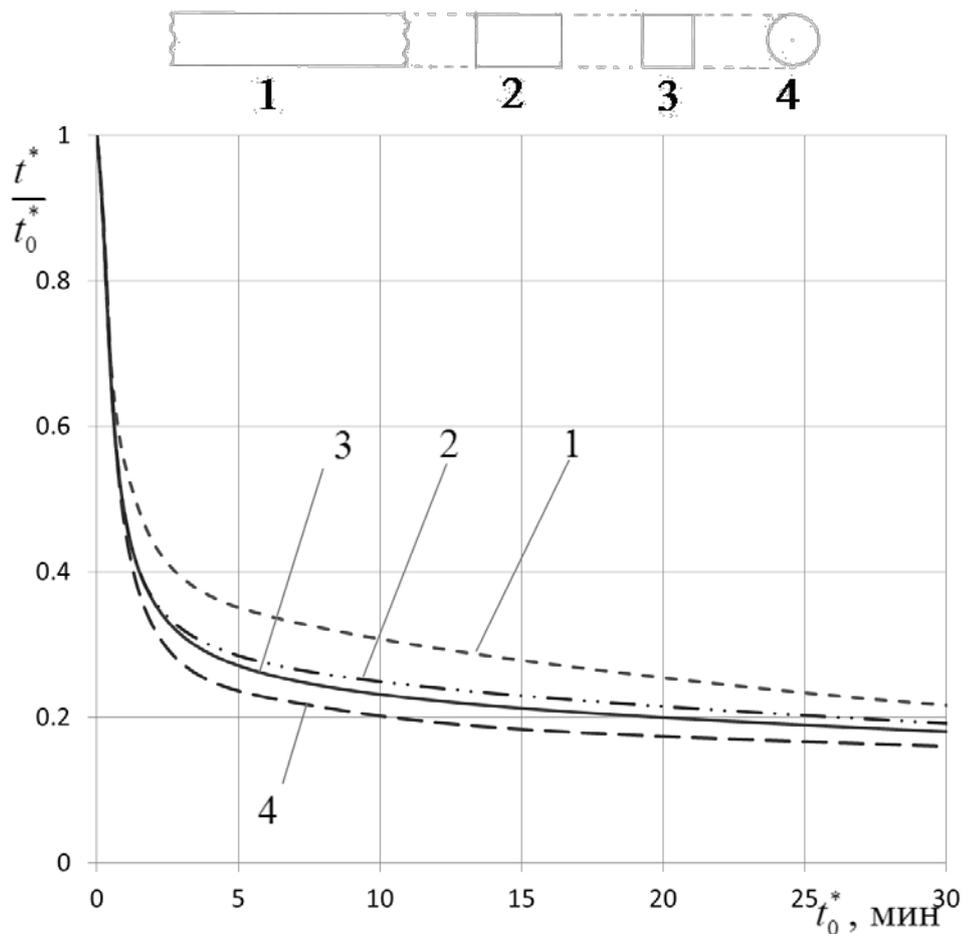


Рис. 1.6. Сравнение времен до разрушения для различных форм поперечных сечений.

Из рисунка 1.6 следует, что среди рассматриваемых форм поперечного сечения стержней при условии (1.44) минимальное время до разрушения соответствует стержню круглого поперечного сечения.

1.2 Моделирование длительной прочности растягиваемых стержней в агрессивной среде с учетом переменного коэффициента диффузии

Воздействие агрессивной среды определяется диффузионным проникновением ее элементов в материал стержня. При накоплении элементов внешней среды в материале стержня процесс диффузии постепенно замедляется. Подобный эффект можно объяснить тем, что вблизи поверхности материала формируется слой, который обладает отличными от первоначального материала диффузионными свойствами. Диффузионный процесс в таких условиях моделируется с помощью уравнения диффузии, в котором коэффициент диффузии D является монотонно убывающей функцией от концентрации c [12, 13].

Постановка задачи, основные уравнения и зависимости, начальные и граничные условия.

Исследуется длительная прочность растягиваемого длинного стержня с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника в агрессивной среде. При этом ширина поперечного сечения b значительно превосходит его толщину H , так что влиянием диффузии со стороны узких сторон прямоугольника можно пренебречь. Длина стержня во много раз превосходит характерные размеры его поперечного сечения, поэтому влиянием продольной координаты стержня на диффузионный процесс можно также пренебречь. Введем в поперечном сечении стержня координату y вдоль направления толщины таким образом, что значения $y = 0$ и $y = H$ соответствуют широким сторонам стержня, $y = 0.5H$ - середина поперечного сечения стержня. Условия симметрии по геометрии и с учетом

принятых одинаковых процессов массообмена на поверхностях стержня позволяют рассматривать одну его половину ($0 \leq y \leq 0.5H$).

Рассмотрим уравнение одномерной диффузии в виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[D(c) \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right], \quad 0 \leq y \leq 0.5H, \quad 0 \leq t < \infty.$$

В качестве примера рассмотрим три вида зависимости $D(c)$:

$$D_0(c) = D_0 = \text{const}, \quad D_1(c) = D_0(1 + k_1c)^{-1}, \quad D_2(c) = D_0(1 + k_2c^2)^{-1}, \quad (1.49)$$

D_0 - коэффициент диффузии в начальный момент времени, k_1 и k_2 - постоянные коэффициенты.

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{y} = \frac{2y}{H}, \quad \bar{t} = \frac{48D_0}{H^2}t, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0}, \quad \bar{k}_1 = k_1c_0, \quad \bar{k}_2 = k_2c_0^2, \quad \bar{D} = \frac{D}{D_0}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma H}{2} \quad (1.50)$$

где c_0 - концентрация элементов агрессивной среды на поверхности вне материала стержня, γ - коэффициент массообмена.

Далее в обозначениях черточки опустим.

На границе материала стержня и внешней среды принимается условие массообмена: пропорциональность градиента концентрации (вдоль нормали к границе) разности концентраций на границе металла и внешней среды.

Система уравнений относительно концентрации среды $c(y, t)$ для описания диффузионного процесса в стержне в безразмерных переменных (1.50) принимает следующий вид (1.51) – (1.53):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial y} \left[D(c) \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right], \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (1.51)$$

с начальными и граничными условиями:

$$c(y, 0) = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial y}(0, t) = \gamma [c(0, t) - 1], \quad \frac{\partial c}{\partial y}(1, t) = 0, \quad (1.52)$$

где γ - коэффициент массообмена.

Зависимости $D(c)$ (см. (1.49)) в безразмерном виде принимают следующий вид:

$$D_0(c) = 1, \quad D_1(c) = (1 + k_1 c)^{-1}, \quad D_2(c) = (1 + k_2 c^2)^{-1}. \quad (1.53)$$

На рисунке 1.7 представлены графики всех трех рассматриваемых безразмерных зависимостей (1.53) коэффициента диффузии от концентрации агрессивной среды (для $k_1 = k_2 = 4$) в материале стержня.

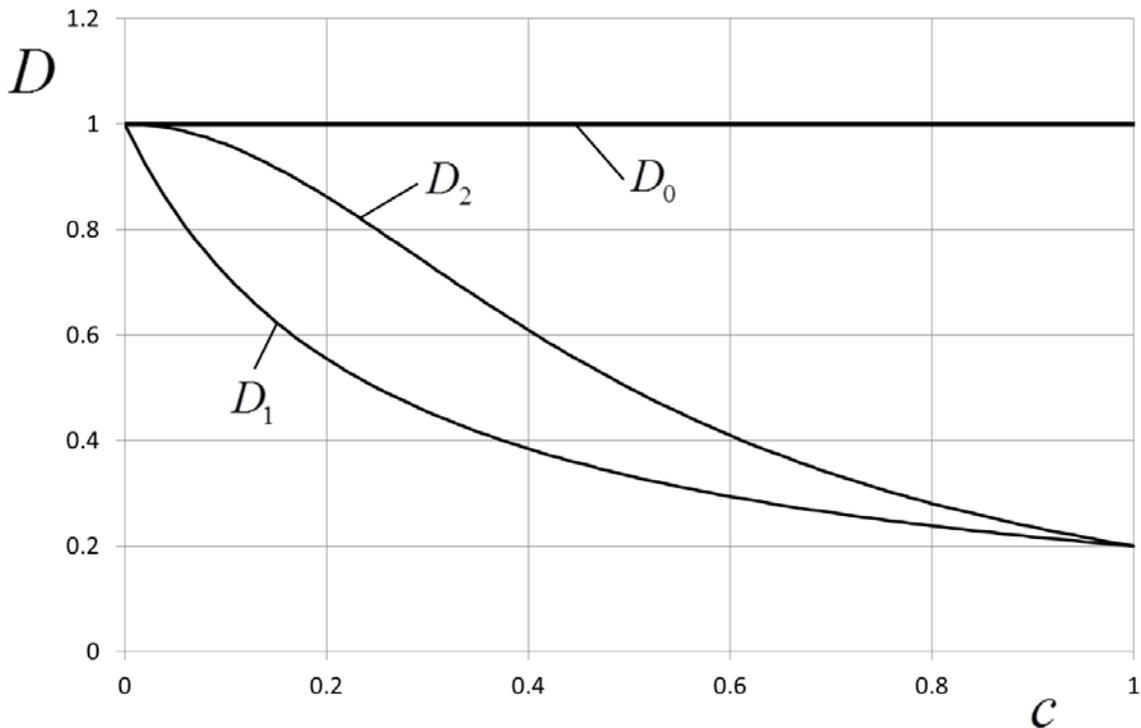


Рис. 1.7. Графики зависимостей коэффициента диффузии от концентрации.

Приближенный метод решения уравнения диффузии, основанный на введении диффузионного фронта.

Согласно приближенному методу решения уравнения диффузии рассматриваются две последовательные стадии процесса диффузии: стадия проникновения фронта и стадия насыщения: на первой стадии невозмущенная и возмущенная области стержня разделены движущейся границей $y = l(t)$, на второй стадии концентрация среды во всем стержне положительна.

На первой стадии диффузионного процесса (до заполнения всего объема стержня) зависимость безразмерной концентрации от безразмерных координаты y и времени t примем в следующем виде:

$$c(y, t) = \begin{cases} \frac{\gamma(l-x)^2}{l(2+\gamma l)} & \text{при } 0 \leq y \leq l, t \leq t_0, \\ 0 & \text{при } y > l, t \leq t_0, \end{cases} \quad (1.54)$$

где l - координата фронта среды, t_0 - время, при котором диффузионный фронт достигает середины сечения стержня: $l(t_0) = 1$.

Интегральное удовлетворение уравнения диффузии (1.51) в безразмерных переменных (1.52) и с учетом соотношений (1.53) принимает следующий вид:

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{(1+k_\alpha c^\alpha)} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right] \right\} dy = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, k_0 = 0. \quad (1.55)$$

В случае $\alpha = 0$ приближенное решение системы уравнений (1.51) – (1.53) было получено ранее [2, 3], в результате зависимость интегрально среднего уровня концентрации среды

$$c_m(t) = \int_0^1 c(y, t) dy \quad (1.56)$$

в стержне от времени t имеет следующий вид:

$$c_m(t) = \begin{cases} \frac{\gamma l^2}{3(2+\gamma l)}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 1 - \frac{2(3+\gamma)}{3(2+\gamma)} \cdot \exp\left(\frac{\gamma(t_0-t)}{4(3+\gamma)}\right), & t > t_0. \end{cases} \quad (1.57)$$

Рассмотрим получение решения интегрального уравнения (1.55) с учетом зависимости $D_1(c)$.

На первой стадии диффузионного процесса подставим выражение (1.54) в уравнение (1.55) и, проведя соответствующие выкладки, получим:

$$\gamma \int_0^l \left\{ \frac{l(2+\gamma l)2(l-y) - (l-y)^2 [2+\gamma l + \gamma l]}{l^2(2+\gamma l)^2} \frac{dl}{dt} - \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{(1+k_1 c)} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right] \right\} dy = 0,$$

$$\frac{dl}{dt} \left[\frac{l(4+\gamma l)}{3(2+\gamma l)^2} \right] - \frac{1}{6} \left[1 + k_1 \frac{\gamma l}{(2+\gamma l)} \right]^{-1} \frac{1}{(2+\gamma l)} = 0.$$

Таким образом, на первой стадии координата диффузионного фронта $l(t)$ определяется дифференциальным уравнением:

$$\dot{l} = \frac{dl}{dt} = \frac{(2 + \gamma l)}{2l(4 + \gamma l)} \left[1 + k_1 \frac{\gamma l}{(2 + \gamma l)} \right]^{-1}, \quad l(t=0) = 0 \text{ и } l(t=t_0) = 1. \quad (1.58)$$

В случае зависимости $D_2(c)$ аналогичные выкладки приводят к следующему дифференциальному уравнению для координаты фронта l :

$$\dot{l} = \frac{dl}{dt} = \frac{(2 + \gamma l)}{2l(4 + \gamma l)} \left(1 + k_2 \frac{\gamma^2 l^2}{(2 + \gamma l)^2} \right)^{-1}, \quad l(t=0) = 0 \text{ и } l(t=t_0) = 1. \quad (1.59)$$

При малых временах t ($l \ll 1$) уравнения (1.58) и (1.59) принимают вид:

$$\dot{l} = \frac{2}{2l \cdot 4} = \frac{1}{4l}, \quad l dl = \frac{1}{4} dt, \quad \frac{l^2}{2} = \frac{1}{4} t, \quad l = \sqrt{0.5t}.$$

Таким образом, в случае зависимостей $D_1(c)$ и $D_2(c)$, также как и при постоянном значении D_0 , при малых временах координата диффузионного фронта среды распространяется в материале пропорционально квадратному корню из значения времени.

Рассмотрим вторую стадию насыщения среды для двух коэффициентов диффузии D_1 и D_2 .

Зависимость безразмерной концентрации от безразмерных координаты y и времени t примем в следующем виде:

$$c(y, t) = B(t) + \frac{\gamma}{(2 + \gamma)} \cdot [1 - B(t)] \cdot (1 - y)^2 \quad \text{при } 0 \leq y \leq 1, t > t_0, \quad (1.60)$$

где $B(t) = c(1, t)$ - концентрация в центре поперечного сечения стержня ($y = 1$).

Можно показать, что граничные условия (при $y = 0$ и $y = 1$) и начальное условие (при $t = t_0$) на второй стадии удовлетворяют условиям задачи.

Рассмотрим интегральное удовлетворение уравнения диффузии (1.55). Подставляя (1.60) в (1.55) и проведя необходимое интегрирование, получим:

$$\dot{B}(t) \left[\frac{2(3+\gamma)}{3(2+\gamma)} \right] = \frac{1}{6} \frac{\gamma [1-B(t)]}{(2+\gamma)} \left[1 + k_\alpha \left(\frac{2B(t)+\gamma}{(2+\gamma)} \right)^\alpha \right]^{-1}.$$

Итак, дифференциальное уравнение для $B(t)$ имеет такой вид:

$$\dot{B}(t) = \frac{\gamma [1-B(t)]}{4(3+\gamma)} \cdot \left[1 + k_\alpha \left(\frac{2B(t)+\gamma}{(2+\gamma)} \right)^\alpha \right]^{-1}, \quad B(t_0) = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.61)$$

Вычислим зависимость $c_m(t)$ в соответствии с (1.56) с учетом соотношений (1.54) и (1.60) на первой и второй стадии соответственно [2, 3]:

$$c_m(t) = \begin{cases} \frac{\gamma l^2}{3(2+\gamma)} & \text{при } 0 \leq t \leq t_0 \\ B(t) + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2+\gamma)} [1-B(t)] & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (1.62)$$

Длительная прочность стержней с учетом переменного коэффициента диффузии

С помощью кинетической теории ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова [1] исследуется влияние зависимостей $D(c)$ на длительную прочность растягиваемого стержня. В расчетах используем взаимосвязь времен до разрушения с учетом t^* и без учета t_0^* влияния среды в соответствии с формулой (1.13). Далее в настоящей диссертационной работе приводится пример расчета влияния среды по предлагаемому методу.

Расчетные данные и графики зависимостей.

В работе проведен расчет диффузии агрессивной среды в материал растягиваемого стержня с учетом коэффициентов D_0 , D_1 и D_2 . В расчетах приняты следующие константы: $\gamma = 1$, $k_1 = k_2 = 4$. На рисунке 1.8 показаны графики движения фронта агрессивной среды в материале стержня на первой стадии диффузионного процесса.

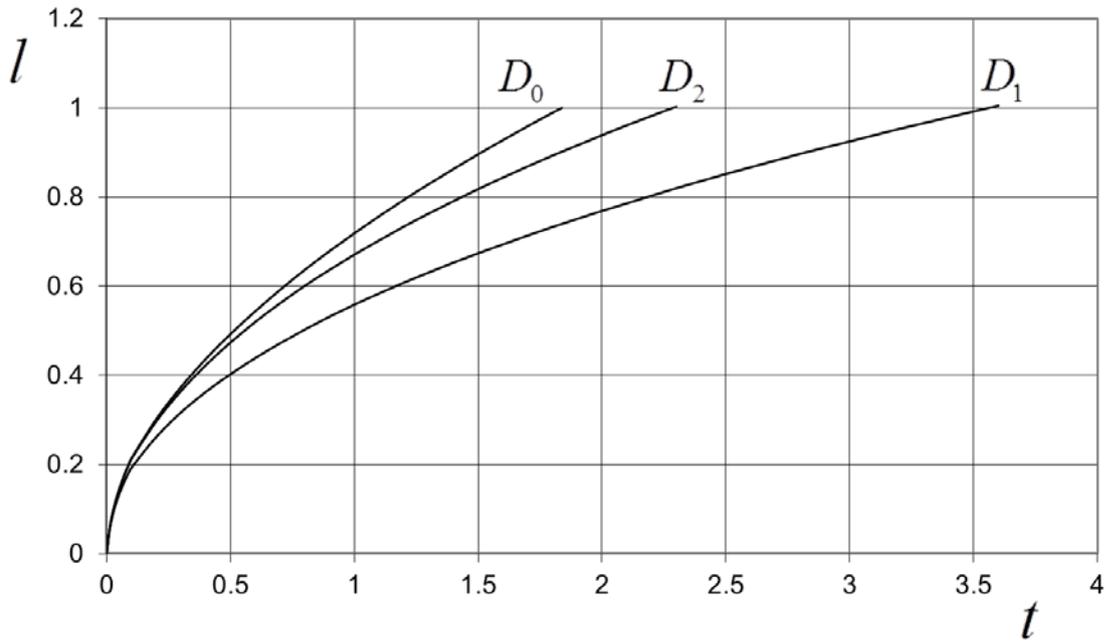


Рис. 1.8. Графики движения фронта агрессивной среды в материале стержня на первой стадии проникновения фронта для различных зависимостей $D(c)$.

На рисунке 1.9 показаны графики изменения $B(t) = c(1, t)$ - концентрации агрессивной среды в центре поперечного сечения стержня ($y=1$) на второй стадии диффузионного процесса.

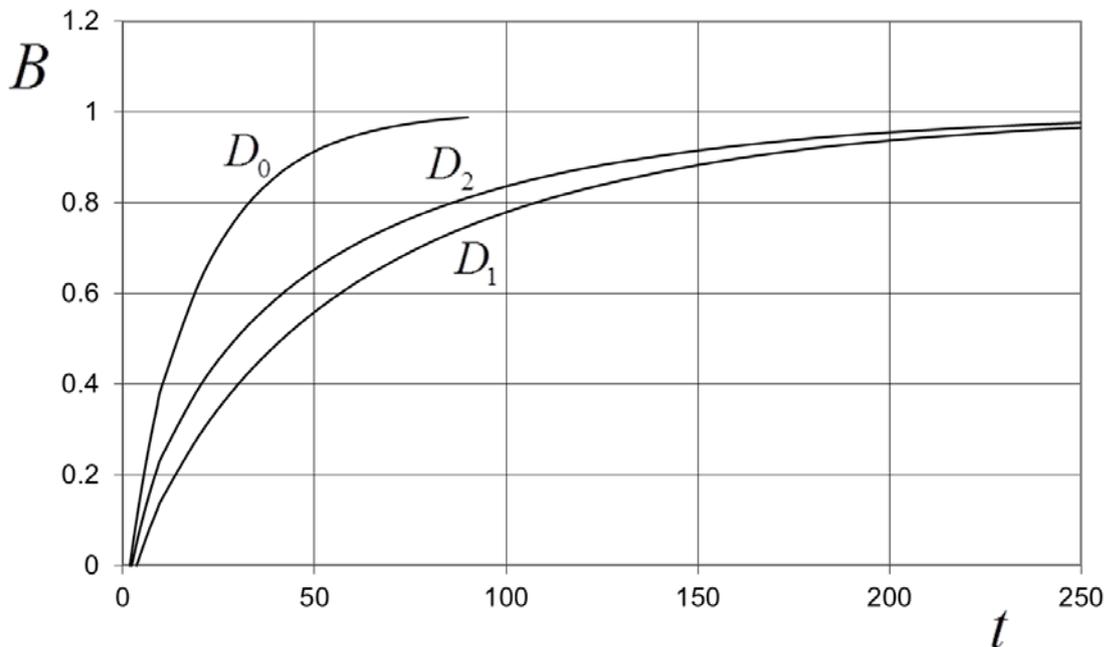


Рис. 1.9. Графики изменения $B(t) = c(1, t)$ - концентрации агрессивной среды в центре поперечного сечения стержня.

На рисунке 1.10 изображены графики безразмерной интегрально средней концентрации $c_m(t)$.

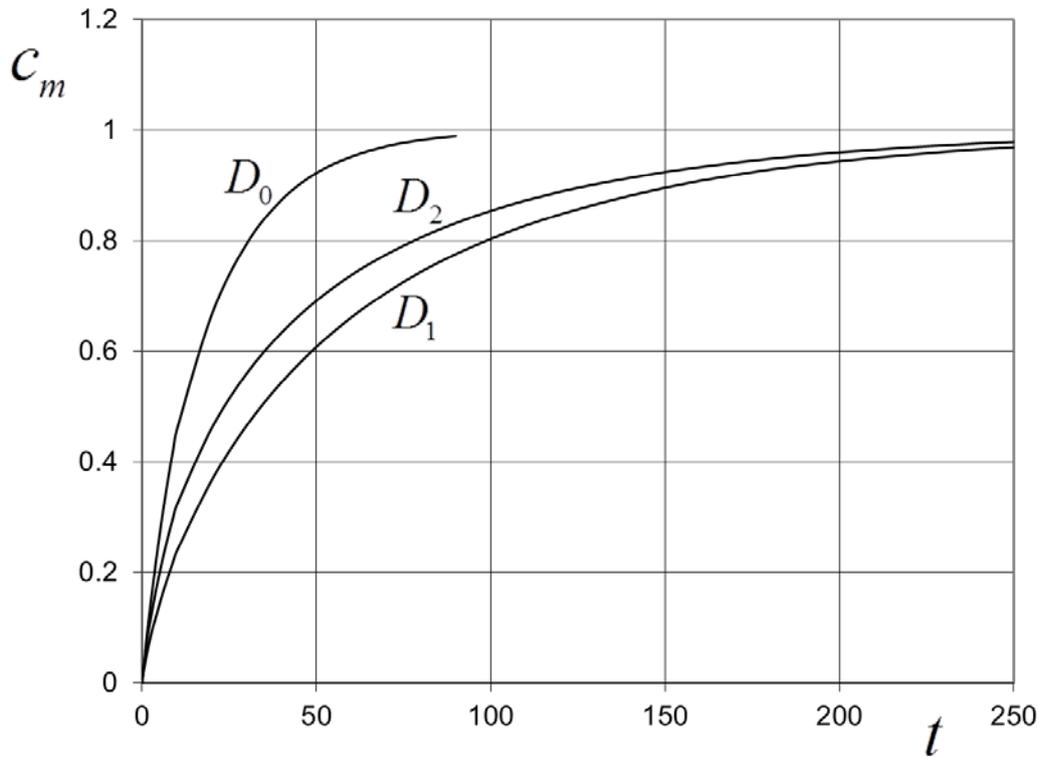


Рис. 1.10. Графики безразмерной интегрально средней концентрации $c_m(t)$ для различных зависимостей $D(c)$.

При определении времени до разрушения t^* стержней, растягиваемых в присутствии агрессивной среды, примем функцию $f(c_m(t))$ в виде $f(c_m(t)) = 1 + a \cdot c_m(t)$, где $a = 9.5$ - в соответствии с таблице 1.2 оптимально найденная из экспериментов [7] константа. С помощью (1.13) получены времена до разрушения растягиваемого стержня t^* , находящегося в условиях воздействия агрессивной среды, с использованием времен t_0^* , соответствующим такому же растяжению стержня в нейтральной среде (при одном и том же напряжении). На рисунке 1.11 приведены графики этих соотношений для коэффициентов диффузии D_0 , D_1 и D_2 .

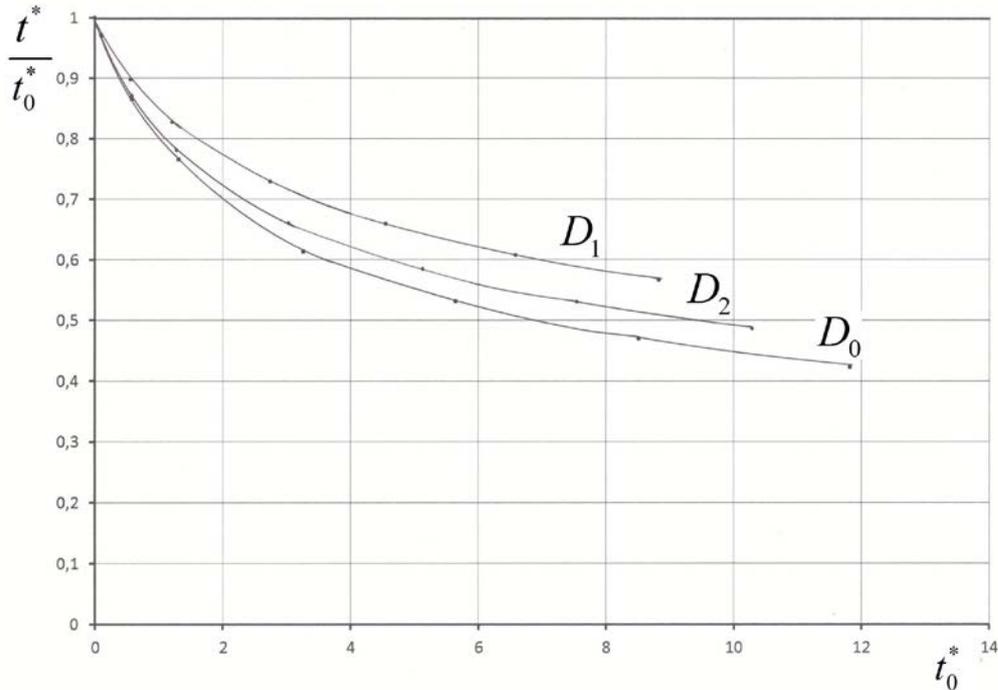


Рис. 1.11. Графики соотношений времен до разрушения для различных зависимостей $D(c)$.

Выводы параграфа 1.2

В результате анализа влияния зависимости коэффициента диффузии от концентрации агрессивной среды в материале стержня на длительную прочность и проведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

1. Предложенный приближенный метод решения уравнения диффузии с переменным коэффициентом диффузии и применяемая кинетическая теория ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова показали возможность расчета времен до разрушения стержней в условиях длительного действия растягивающего напряжения под действием высоких температур и диффузионного проникновения элементов среды в материал стержней.
2. Зависимость коэффициента диффузии от концентрации элементов

агрессивной среды в материале стержней влияет на времена до их разрушения в условиях высокотемпературных испытаний на длительную прочность.

3. Среди рассматриваемых видов зависимостей $D(c)$ наибольшее влияние на время до разрушения оказывает максимальная среди рассмотренных $D_0(c) = D_0 = \text{const}$.

1.3 Связанная задача определения длительной прочности растягиваемого стержня в агрессивной среде

В данном параграфе диссертации рассматривается связанная задача определения длительной прочности растягиваемого стержня при условии массообмена на его поверхности, в этой постановке учитывается взаимная зависимость уровня концентрации среды в материале стержня и величины накапливаемой поврежденности: диффузионный процесс связан с накоплением поврежденности, а накопление поврежденности определяется значением концентрации. С этой целью будем учитывать зависимость коэффициента диффузии D от уровня поврежденности ω .

Для простоты примем, что зависимость $D(\omega)$ - линейная:

$$D(\omega) = D_0(1 + k\omega), \quad D_0 = \text{const}, \quad k = \text{const}.$$

В первой постановке задача решается с учетом распространения фронта разрушения. Система уравнений в безразмерных переменных

$$\bar{t} = \frac{48D_0}{H_0^2} t, \quad \bar{y} = 2y / H_0, \quad \bar{\xi} = 2\xi / H_0, \quad \bar{c} = c / c_0, \quad k_1 = \frac{A\sigma_0^n H_0^2}{48D_0}, \quad \bar{\gamma} = \gamma \frac{H_0}{2}$$

на первой стадии имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[(1 + k\omega) \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}} \right], \\ \frac{\partial \omega(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = k_1 (1 - \omega(\bar{y}, \bar{t}))^{-n} f(\bar{c}(\bar{y}, \bar{t})), \\ f(\bar{c}(\bar{y}, \bar{t})) = 1 + a \cdot \bar{c}(\bar{y}, \bar{t}), \\ 0 \leq \bar{y} \leq 1, \quad 0 \leq \omega \leq 1, \quad 0 \leq \bar{t} < \bar{t}_1 \end{array} \right. \quad (1.63)$$

с начальными и граничными условиями:

$$\omega(\bar{y}, 0) = 0, \quad \bar{c}(\bar{y}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}}(1, \bar{t}) = \bar{\gamma} [\bar{c}(1, \bar{t}) - 1], \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}}(0, \bar{t}) = 0,$$

где $\bar{y} = 0$ - центр поперечного сечения, $\bar{y} = 1$ - координата исходной поверхности.

Расчет на первой стадии проводится до тех пор ($\bar{t} = \bar{t}_1$), пока на поверхности стержня поврежденность не достигнет значения $\omega(\bar{y} = 1, \bar{t}_1) = 1$, после этого возникает фронт разрушения с координатой $\bar{\xi}(\bar{t})|_{\omega=1}$, движущийся от поверхности вглубь материала стержня. Далее площадь поперечного сечения уменьшается и напряжение увеличивается $\sigma = \sigma(\bar{t}) = \sigma_0 \cdot (\bar{\xi}(\bar{t}))^{-1}$.

Система уравнений на второй стадии будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{c}(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left[(1 + k\omega(\bar{y}, \bar{t})) \frac{\partial \bar{c}(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{y}} \right], \\ \frac{\partial \omega(\bar{y}, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = k_1 (\bar{\xi}(\bar{t}) (1 - \omega(\bar{y}, \bar{t})))^{-n} f(\bar{c}(\bar{y}, \bar{t})), \\ f(\bar{c}(\bar{y}, \bar{t})) = 1 + a \cdot \bar{c}(\bar{y}, \bar{t}), \\ 0 \leq \bar{y} \leq \bar{\xi}(\bar{t}), \quad \bar{\xi} = 2\xi / H_0, \quad \bar{\xi}(\bar{t}_1) = 1, \quad 0 \leq \omega \leq 1, \quad \bar{t}_1 \leq \bar{t} \leq \bar{t}^* \end{array} \right. \quad (1.64)$$

с начальными и граничными условиями:

$$\omega(\bar{y}, \bar{t}_1) = \omega_1(\bar{y}), \quad \bar{c}(\bar{y}, \bar{t}_1) = \bar{c}_1(\bar{y}), \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}}(\bar{\xi}, \bar{t}) = \bar{\gamma} [\bar{c}(\bar{\xi}, \bar{t}) - 1], \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}}(0, \bar{t}) = 0,$$

причем $\omega_1(\bar{y})$ и $\bar{c}_1(\bar{y})$ - значения ω и \bar{c} в конце первой стадии процесса.

В качестве примера было проведено вычисление времени до разрушения \bar{t}^* при условии $\bar{\xi}(\bar{t}^*) = 0.5$ и при следующих значениях констант:

$$n = 3, \bar{\gamma} = 1, k = 4, k_1 = 0.01, a = 9.5 \quad (1.65)$$

На рисунке 1.12 приведена зависимость $\omega(1, \bar{t})$ вплоть до возникновения фронта разрушения: $\omega(1, \bar{t}_1) = 1$ при $\bar{t}_1 = 5.56$. При $\bar{t} > \bar{t}_1$ в стержне развивается фронт разрушения (рисунок 1.13), общее время до разрушения равно $\bar{t} = 5.56 + 1.44 = 7.00$.

На рисунках 1.12-1.15 показаны графики зависимостей характерных параметров.

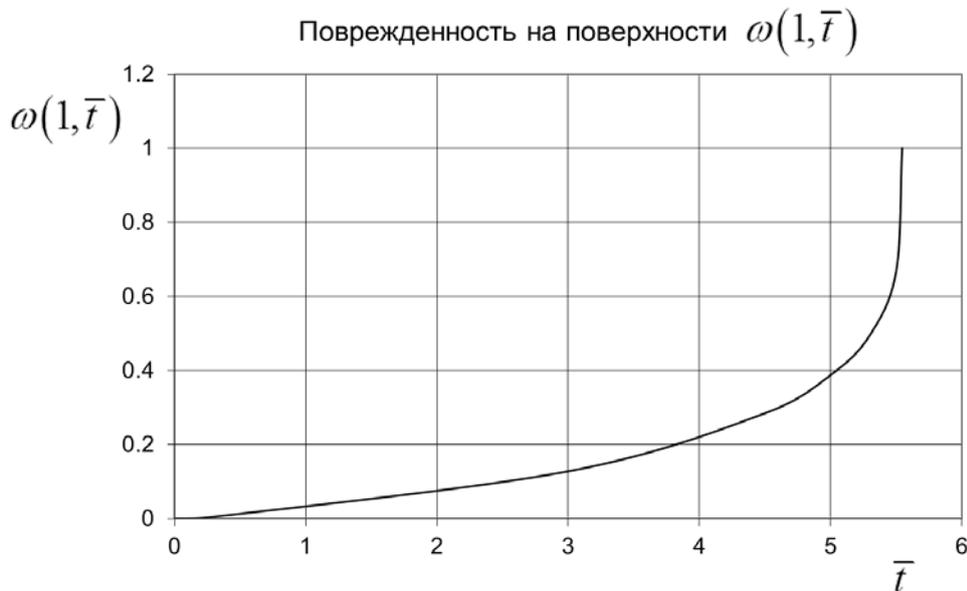


Рис. 1.12. Зависимость поврежденности от времени на поверхности.

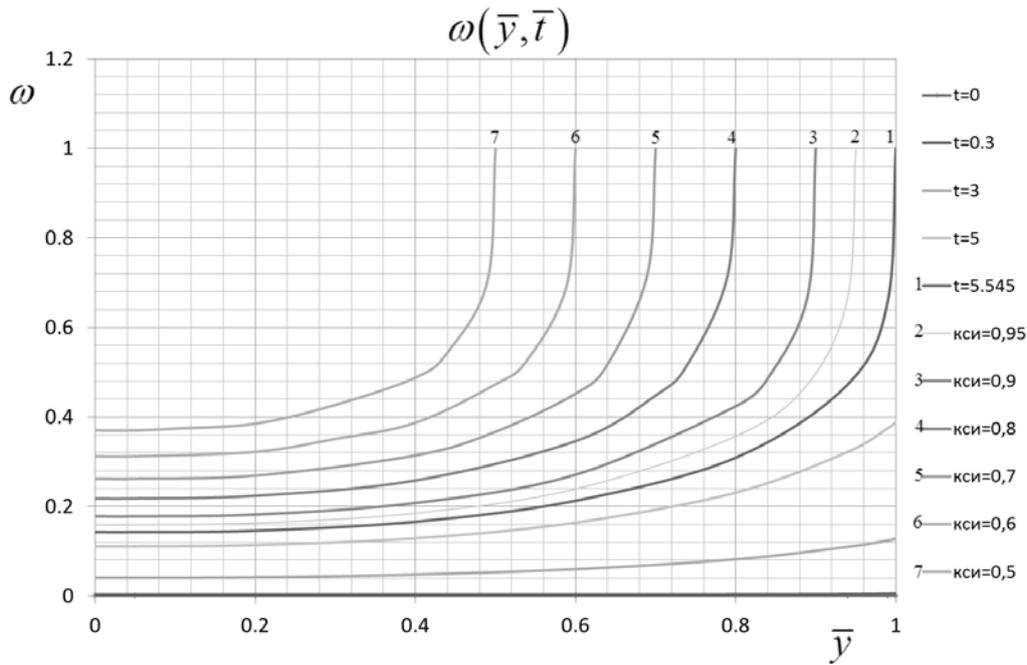


Рис. 1.13. Распределение поврежденности по координате в различные моменты времени (до распространения фронта разрушения) и в различные моменты движения фронта разрушения.

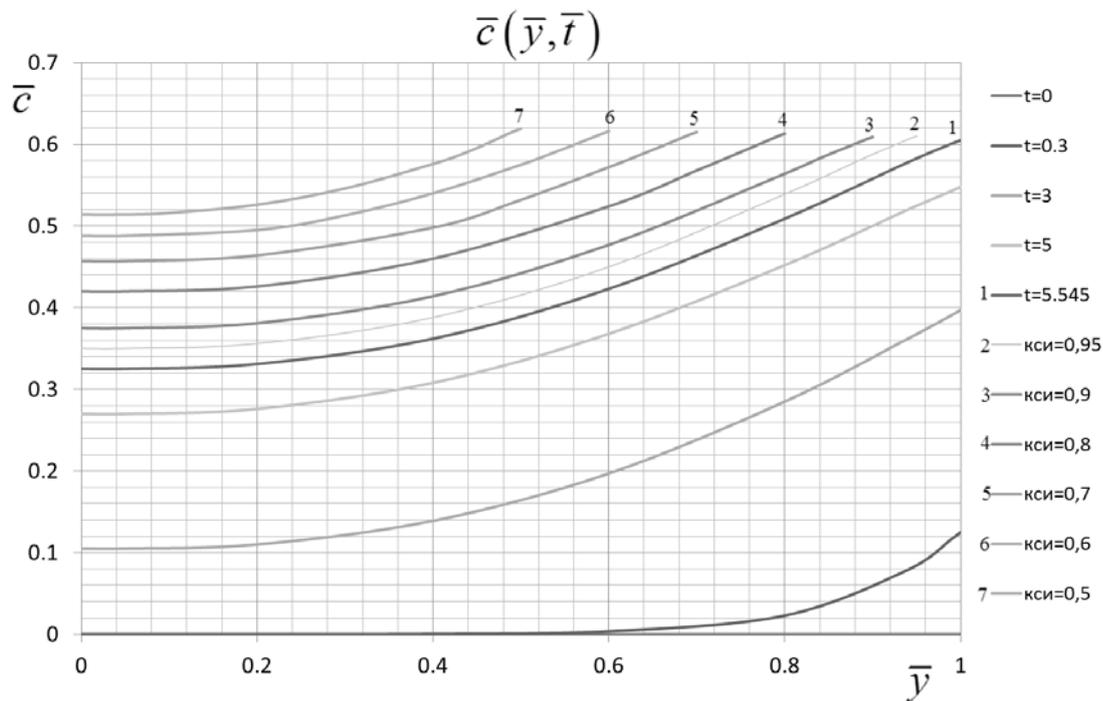


Рис. 1.14. Распределение концентрации по координате в различные моменты времени (до распространения фронта разрушения) и в различные моменты движения фронта разрушения.

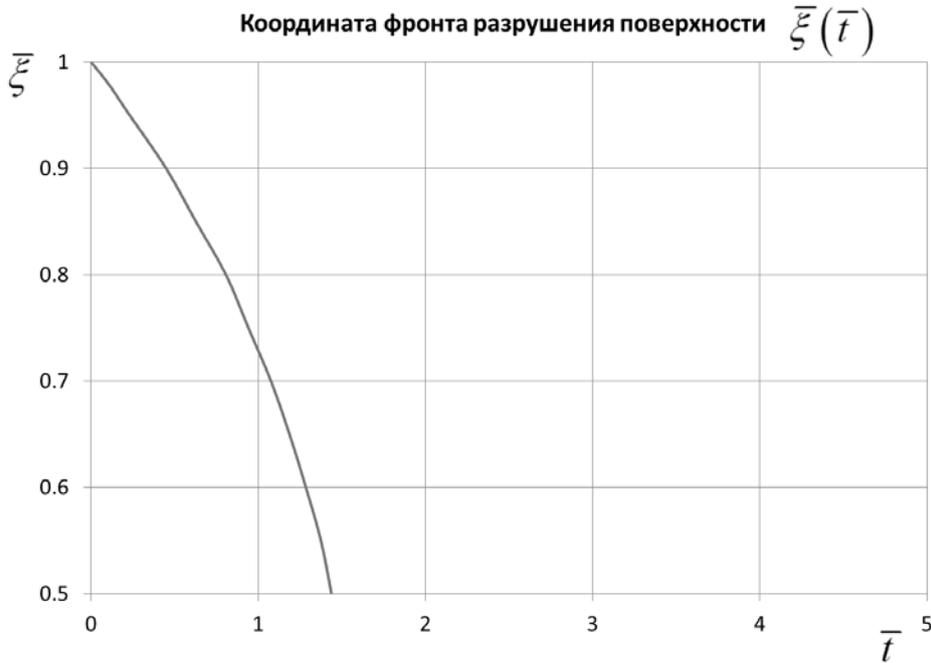


Рис. 1.15. График движения фронта разрушения.

Рассмотрим упрощённую постановку задачи (вторая постановка), в которой под $\omega(\bar{t})$ понимается интегрально средняя повреждённость в сечении стержня. В момент разрушения повреждённость $\omega(\bar{t}^*) = 1$. В этом случае система уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{12}(1 + k\omega) \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2}, \\ \frac{d\omega}{d\bar{t}} = k_1(1 - \omega)^{-n} \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})). \end{cases} \quad (1.66)$$

Зависимость $\omega(\bar{t})$ при константах (1.65) изображена на рисунке 1.16 (кривая 2) сплошной линией, при этом $\bar{t}^* = 7.16$. На рисунке 1.16 (кривая 3) штриховой линией дополнительно приведена зависимость $\omega(\bar{t})$, соответствующая решению системы уравнений (1.66) при $k = 0$.

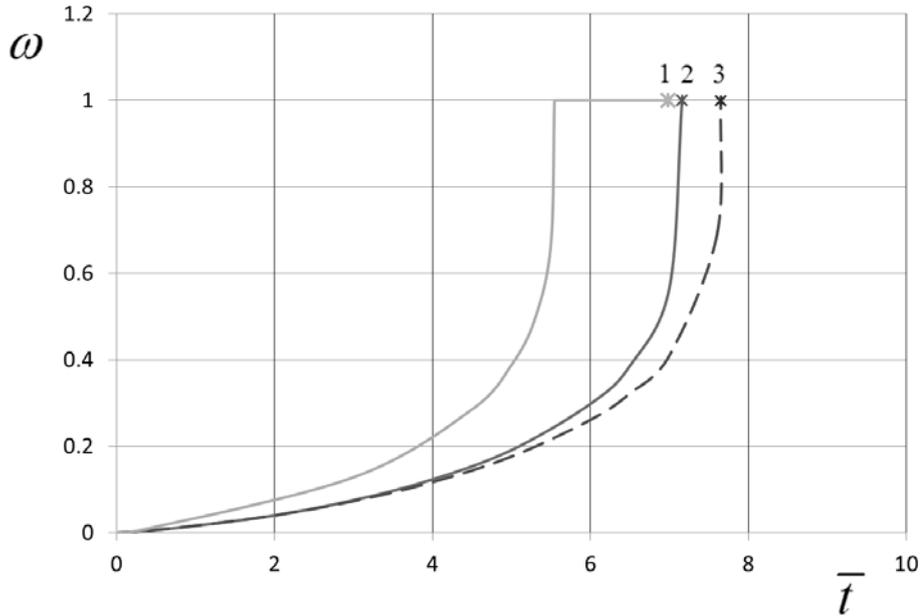


Рис. 1.16. Зависимости поврежденности от времени для задачи в первой постановке (кривая 1), во второй постановке при значении $k = 4$ (кривая 2), во второй постановке при значении $k = 0$ (кривая 3).

На рисунке 1.17 показаны зависимости концентрации на поверхности для задачи во второй упрощенной постановке при $k = 4$ - кривая 2 и при $k = 0$ - кривая 3.

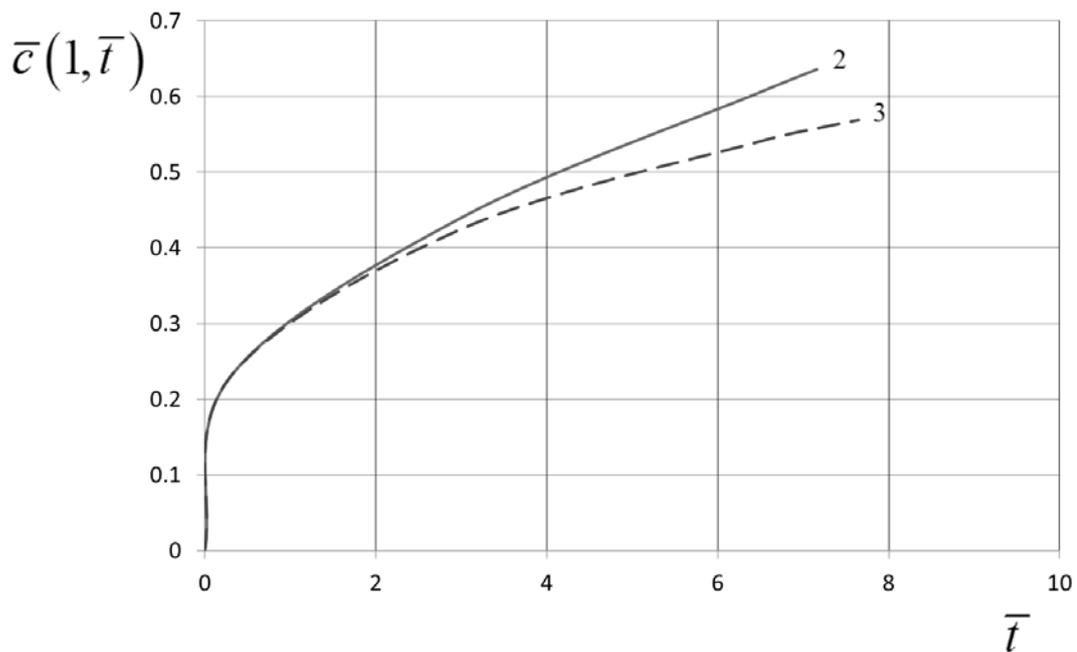


Рис. 1.17. Зависимости концентрации на поверхности для задачи во второй упрощенной постановке при $k = 4$ - кривая 2 и при $k = 0$ - кривая 3.

На рисунке 1.18 показаны зависимости интегрально средней концентрации для задачи во второй упрощенной постановке при $k = 4$ - кривая 2 и при $k = 0$ - кривая 3.

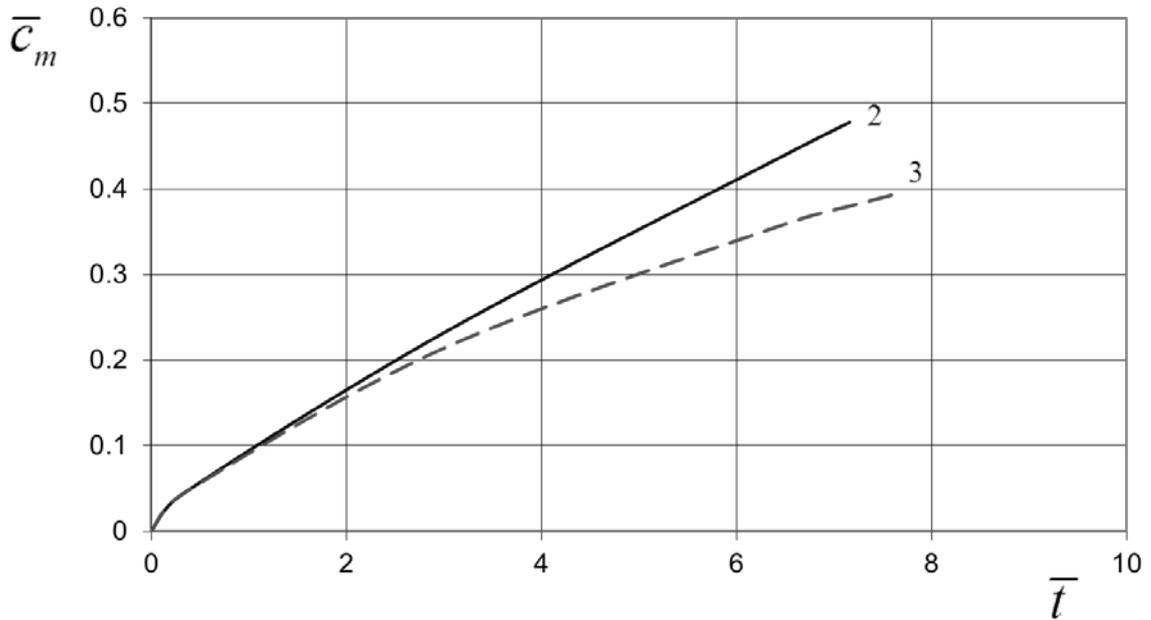


Рис. 1.18. Зависимости интегрально средней концентрации для задачи во второй упрощенной постановке при $k = 4$ - кривая 2 и при $k = 0$ - кривая 3.

Сравнение двух кривых $\omega(\bar{t})$ (кривая 2 и кривая 3) при упрощенной постановке при $k=0$ и $k=4$ подтверждает, что в связанной задаче ($k > 0$) коэффициент диффузии $\bar{D} = 1 + k\omega$ увеличивается с ростом поврежденности, поэтому уровень концентрации возрастает с большей скоростью, и время до разрушения уменьшается.

Время до разрушения в упрощенной постановке (1.66) больше времени \bar{t}^* , соответствующего системам уравнений (1.63) и (1.64), так как в последнем случае появление фронта разрушения приводит к уменьшению площади поперечного сечения и соответственно к ускорению процесса разрушения.

Обсуждение результатов и выводы по главе 1

На основе кинетической теории с двумя структурными параметрами, а именно, концентрации и поврежденности, определены характеристики диффузионного процесса и длительной прочности при растяжении.

1. Определены характеристики длительной прочности стержней в условиях растяжения, находящихся в агрессивной высокотемпературной воздушной окружающей среде. Влияние агрессивной среды определяется диффузионным проникновением её элементов вглубь материала стержней. Учет влияния агрессивной среды проводится путем введения в кинетическое уравнение интегрально средней концентрации элементов среды в материале стержней. Интегрально средняя концентрация определяется на основе решения уравнения диффузии с учетом введения диффузионного фронта среды.

2. Определена взаимосвязь времен до разрушения стержней с учетом влияния среды и в нейтральных условиях. Проведено описание известных экспериментальных данных по длительной прочности растягиваемых стержней круглого и прямоугольного поперечных сечений с учетом влияния агрессивной среды. Определен оптимальный вид материальной функции, входящий в соотношение, которое связывает времена до разрушения, и ее параметров на основе минимизации суммарного отклонения теоретических времен до разрушения от экспериментальных. В случае образцов прямоугольного поперечного сечения – степенной вид функции, в случае образцов круглого поперечного сечения – линейный вид функции. Проведено сравнение материальных параметров в случае точного и

приближенного решения уравнения диффузии. Получены близкие результаты.

В результате проведенный анализ показал, что учет влияния агрессивной среды на элементы конструкций при ползучести приводит к наблюдаемому в эксперименте уменьшению времени до разрушения в условиях действия растягивающих нагрузок.

3. Определено влияние агрессивной среды на длительную прочность растягиваемых стержней с различными формами поперечных сечений. Получена зависимость характеристик диффузионного процесса от формы поперечных сечений растягиваемых стержней. Показано, что при равных толщинах прямоугольных поперечных сечений и диаметра круглого сечения, наиболее интенсивно процесс нарастания концентрации элементов агрессивного вещества идет в стержне круглого поперечного сечения.

4. Проведено моделирование постепенного ослабления диффузионного процесса во времени с помощью учета переменного коэффициента диффузии, зависящего от концентрации. Рассматриваются монотонно убывающие зависимости коэффициента диффузии от концентрации. Определено влияние переменного коэффициента диффузии на длительную прочность растягиваемых стержней. Исследование показало, что среди рассматриваемых видов зависимостей $D(c)$ наибольшее влияние на времена до разрушения оказывает максимальная среди рассматриваемых: $D_0(c) = \text{const}$.

5. Решена полностью связанная задача о диффузии и накоплении поврежденности во время ползучести. Диффузионный процесс связан с накоплением поврежденности, а накопление поврежденности определяется

значением концентрации. Задача решена в двух постановках: коэффициент диффузии зависит от координаты и времени и частный случай – только от времени.

В первой постановке полное время до разрушения определяется с учетом распространения фронта разрушения вглубь от поверхности стержня, во второй разрушение происходит сразу при достижении поврежденности $\omega = 1$ без распространения фронта. Показано, что полное время до разрушения в первом случае меньше, чем во втором. Это объясняется увеличением напряжения в растягиваемом стержне в результате уменьшения площади поперечного сечения при распространении фронта разрушения.

Во второй постановке расчеты показали, что в условии связанной задачи, когда коэффициент диффузии увеличивается с ростом поврежденности, время до разрушения уменьшается (разрушение наступает раньше) при больших значениях концентрации в материале стержня, чем в случае не связанного процесса диффузии и накопления поврежденности.

Глава 2. Чистый изгиб балок при ползучести с учетом разнсопротивляемости материала, накопления поврежденности и влияния агрессивной среды

2.1 Обзор ряда известных задач о чистом изгибе балок при ползучести

Проведенный обзор некоторых из работ, в которых рассмотрен чистый изгиб балки в процессе ползучести, послужил поводом для дальнейшего исследования этой задачи. Задачи чистого изгиба балок при ползучести для материалов, имеющих одинаковые свойства на растяжение и сжатие, рассмотрены, например, в работах [1, 14 - 20]. В этих работах в качестве определяющих соотношений в основном используются степенные и экспоненциальные функции. В работах [21 - 25] рассматривается чистый изгиб балок в процессе установившейся и неуставившейся ползучести, в которых учитывается разнсопротивляемость материала растяжению и сжатию. При этом для описания ползучести при изгибе авторы используют как степенные [22, 23], так и экспоненциальные [25] определяющие соотношения. Во всех перечисленных работах, за исключением работ [18, 20], используется феноменологический подход к описанию процесса ползучести. В работах [18, 20] предложена методика решения одномерных краевых задач изгиба балки на основе структурной модели среды.

Вместе с тем, существуют работы, в которых наряду с описанием установившейся ползучести исследуется процесс ползучести с учетом поврежденности материала [26 - 31]. Под повреждённостью понимается нарушение сплошности материала, а именно, рост микропор и микротрещин под действием растягивающего напряжения. Процесс накопления поврежденности

учитывается с помощью параметров поврежденности $\omega = 1 - \psi$ или сплошности ψ , впервые введенных соответственно и Работновым Ю.Н. и Качановым Л.М. и описанных в их монографиях [1, 14].

Задачи определения характерных параметров чистого изгиба балок при ползучести с учетом поврежденности материала, имеющих одинаковые свойства при растяжении и сжатии, рассмотрены, в частности, в работах [26, 28, 29]. В работах [27, 30, 31] рассматривается та же задача с дополнительным учетом разносопротивляемости материала растяжению и сжатию. При этом в определяющих и кинетических уравнениях используются степенные или экспоненциальные зависимости скорости ползучести и скорости накопления поврежденности от напряжения. Это обстоятельство позволяет исследовать решения задач при произвольных, в том числе достаточно больших напряжениях, которые в принципе могут превосходить естественные пределы кратковременной прочности материала.

В отличие от всех известных решений в данной диссертационной работе исследуется изгиб балок на основе модели ползучести, в которой осевые напряжения автоматически ограничены пределами кратковременной прочности при растяжении и сжатии.

Общая особенность и новизна этой главы диссертации – получение решений рассматриваемых задач при использовании определяющего и кинетического соотношений в виде дробно-степенных зависимостей скорости ползучести и скорости накопления поврежденности от напряжения соответственно. При этом мгновенными деформациями пренебрегается по сравнению с деформациями ползучести. Сингулярность указанных соотношений позволяет наряду с вязкими свойствами учитывать характеристики мгновенного разрушения.

Рассмотрим некоторые из уже существующих работ более подробно.

В статье [21] приводится решение задачи о чистом изгибе балки, изготовленной из материала, обладающего различными характеристиками ползучести на растяжение и сжатие. Задача решена в предположении

установившейся ползучести по теории типа течения и неустановившейся ползучести по теории старения. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными (материал: сплав АМГ-3 в виде прутка диаметром 28 мм в состоянии поставки).

Из проведенной серии экспериментов на ползучесть при температуре 200 °С установлено, что исследуемый материал при одном и том же действующем напряжении работает на растяжение более интенсивно: накопленная деформация ползучести к одному и тому же моменту времени больше при растяжении, чем при сжатии (примерно на 10 %).

Получены материальные параметры в соответствии с законом установившейся ползучести на растяжение и сжатие. Построены изохронные кривые $\sigma \sim e$ и предложена аппроксимация этих кривых. Параметры аппроксимации определены.

Задача о чистом изгибе призматической балки из материала, обладающего описанными свойствами, решена в предположении установившейся ползучести. Принято, что полная деформация складывается из упругопластической (в соответствии с изохронными кривыми), определенной в первой части статьи, и деформации ползучести (по закону установившейся ползучести).

Применяется гипотеза плоских сечений с учетом смещения нейтральной оси. Для определения положения нейтральной оси и скорости изменения кривизны балки используются уравнения равновесия, в которых учитывались отдельно сжатые ($-\frac{H}{2} < y < 0$) и растянутые ($0 < y < \frac{H}{2}$) области балки. Составлена система указанных выше уравнений равновесия относительно смещения нейтральной оси и скорости изменения кривизны, которая решалась численным методом.

Для проверки полученных соотношений были проведены эксперименты по изгибу балок из указанного выше материала. Следует отметить, что расчетные значения скорости изменения кривизны оси балки, полученные из решения

предложенной системы, для всех изгибающих моментов оказались несколько ниже экспериментальных.

Также показано, что скорость изменения кривизны балки с учетом разного сопротивления материала на растяжение и сжатие лежит между значениями скоростей изменения кривизны, рассчитанными только с использованием характеристик на сжатие и характеристик на растяжение.

Рассматривается задача об изгибе балки при неустановившейся ползучести по теории старения Ю.Н. Работнова. Для решения рассматриваются преобразованные уравнения равновесия, а именно, с использованием независимой переменной деформации ϵ в отличие от предложенных ранее с независимой переменной координатой y . В результате итерационного способа решения на ЭВМ получены значения кривизны балки во времени с учетом смещения нейтральной оси во времени.

Проанализированы расчетные и экспериментальные данные, показано вполне удовлетворительное соответствие эксперименту.

В работе [26] отмечается, что общепринятая схема расчетов элементов конструкций в условиях ползучести, в которой учитывается процесс накопления повреждений, и дополнительный учет упругопластических деформаций требует численных расчетов, которые, как правило, вызывают большие трудности. В связи с этим при расчёте элементов конструкций целесообразно применять приближенные методы.

Для решения задач такого рода принято использовать вариационный принцип (в этом случае варьируются как скорости изменения напряжений, так и скорости полных деформаций). Применение смешанного вариационного принципа иллюстрируется на простейшем примере расчёта балки в условиях чистого изгиба.

Мгновенная скорость упругопластической деформации следует закону: $\dot{\epsilon} = \varphi(\sigma)\dot{\sigma}$. Система уравнений, описывающая одноосную ползучесть материала с одновременным учетом его повреждаемости, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = B_1 \sigma^n \psi^{-m}, \\ \psi = \left[1 - (m+1) B_2 \int_0^t \sigma^{g+1} d\tau \right]^{1/(m+1)}, \\ \omega = 1 - \psi, \\ \dot{\omega} = B_2 \sigma^{g+1} (1 - \omega)^{-m}, \quad \omega(y, 0) = 0, \quad \omega(y_*, t_*) = 1, \\ (m+1) B_2 \int_0^{t_*} \sigma^{g+1} d\tau = 1, \end{array} \right.$$

где t_* - время начала распространения фронта разрушения, \dot{p} - скорость деформации ползучести, ω - поврежденность, ψ - сплошность, B_1, B_2, g, n, m - материальные константы.

Для дальнейшего решения использовались гипотеза плоских сечений и уравнения равновесия. Скорость изменения кривизны находилась при помощи вариации функционала.

Далее в статье показано, что в любой момент времени $0 < t \leq t_*$ эпюра распределения нормальных напряжений пересекается с аналогичной эпюрой установившейся ползучести в точке с координатой средней точки $y = \bar{y}$. Это означает, что в продольном волокне, отстоящем от нейтральной линии на расстоянии \bar{y} , напряжения в процессе ползучести не перераспределяются, а остаются равными своему начальному значению: $\sigma(\bar{y}, t) = \sigma^0(\bar{y})$; $\sigma(y, 0) = \sigma^0(y)$.

Полученный результат даёт возможность по данным испытаний на чистый изгиб построить "... обычную кривую ползучести при растяжении, соответствующую выбранному постоянному напряжению $\sigma^0(\bar{y})$ ", по отношению к которой: "...могут быть применены все обычные приёмы обработки для получения характеристик ползучести".

Таким образом, нижняя граница времени разрушения определяется через напряженное состояние в средней точке \bar{y} , т.е. $t_* \approx \bar{t}_*^0$. Следовательно, зная геометрию поперечного сечения балки, вычисляя координату средней точки \bar{y} и проводя одноосный эксперимент на длительную прочность при напряжении

$\sigma^0(\bar{y})$, можно получить достаточную информацию для определения времени начала распространения фронта разрушения в балке. Поскольку фронт разрушения распространяется быстро, можно считать, что время разрушения балки приближенно равно \bar{t}_*^0 .

Дано сравнение экспериментальных данных по испытаниям балки прямоугольного сечения (10×20 мм), сплав Д16Т, температура 250 °С с расчетными по предложенной методике. Построены графики кривизны от времени и эпюры распределения напряжений.

Сопоставление экспериментальных и расчетных данных позволяет заключить, что изложенный приближенный метод определения напряженно-деформированного состояния балки и времени начала распространения фронта разрушения дает вполне удовлетворительное приближение к экспериментальным данным.

Показано, что предложенный приближенный метод можно обобщить на ряд других элементов конструкций (сферические и цилиндрические сосуды, нагруженные внутренним давлением, вращающиеся диски, скручиваемые валы постоянного сечения).

В статье [27] для описания процесса деформирования металлических материалов используется концепция Ю.Н. Работнова, когда рассматриваемое состояние в материале характеризуется параметром поврежденности. Записываются определяющие уравнения для одноосного напряженного состояния в виде системы двух уравнений: механическое уравнение состояния для $\dot{\varepsilon}$ и кинетическое уравнение для параметра поврежденности \dot{q} .

За меру интенсивности процесса ползучести принимается величина мощности рассеяния $W = \dot{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij}$. Затем конкретизируются определяющие

соотношения с учетом введения работы рассеяния A , где $A = \int_0^t W dt = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$.

Далее решается полученная система (механическое уравнение состояния и кинетическое уравнение) с учетом введения нормированного времени $\bar{t} = t/t_*$, и

показывается, что параметр поврежденности ω , связанный с исходным параметром поврежденности q , есть приведенная работа рассеяния $\omega = A/A_*$. Здесь обозначено t_* - время разрушения, A_* - работа рассеяния на момент разрушения.

Таким образом, показано, что система уравнений в нормированных переменных $\omega = A/A_* \Big|_{\sigma=\text{const}} = \varepsilon/\varepsilon_*$, $\bar{t} = t/t_*$, является непротиворечивой.

Рассматривается изгиб балки в условии ползучести (три стадии) (материал АК-1Т) при 200 °С в соответствии с определяющими уравнениями для \dot{A} и $\dot{\omega}$, предложенными ранее. В качестве исходных данных используются характеристики данного материала (а именно, материальные параметры, входящие в предложенные уравнения) для этих уравнений ползучести и поврежденности при растяжении и сжатии.

Правые части предложенных уравнений системы разбиваются на две составляющие, учитывающие разнсопротивляемость материала при растяжении и сжатии. В решении используется гипотеза плоских сечений с учётом смещения нейтральной оси вследствие указанной разнсопротивляемости материала. Составляются уравнения равновесия, и полученная система решается численно методом Рунге-Кутты с нулевыми начальными условиями при $t=0$: $\varepsilon_k \equiv A_k \equiv \omega_k \equiv 0$ ($k=1, \dots, L$).

Приведены экспериментальные значения кривизны балки $\chi = \chi(t)$ для трех величин изгибающих моментов (соответствующих максимальных напряжений в начальный момент времени). Эксперимент и расчет проводились для балок прямоугольного сечения, изготовленных из сплава АК-1Т (плита толщиной 64 мм, $b=10$ мм, $h=20$ мм) с использованием приведённых характеристик. Температура испытаний 200 °С, количество точек разбиения по высоте принималось равным $L=64$. Все эксперименты на изгиб под действием постоянно действующего момента, а также при знакопеременном моменте доводились до разрушения. На рисунке в указанной статье показаны эпюры

распределения напряжений в поперечном сечении балки в различные моменты времени. Исходное упругое состояние $t=0$ - прямая линия. Видно, что происходит существенное смещение нейтральной плоскости в область сжатия, непосредственно перед разрушением растягивающие волокна балки перестают сопротивляться деформированию. Работа рассеяния в волокнах, работающих на растяжение и сжатие (симметрично расположенных относительно срединной поверхности), практически одинакова при существенном различном накоплении повреждений в них. Экспериментально установлено и подтверждено расчётами, что у материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие при изгибе постоянным моментом, разрушение начинается в крайнем волокне, испытывающем растяжение.

В работе также представлены экспериментальные значения изменения кривизны при знакопеременном изгибе.

Достаточно удовлетворительное совпадение расчётных и экспериментальных значений изменения кривизны балки во времени и при знакопеременном изгибе также подтверждают физическую непротиворечивость уравнений с одним скалярным параметром поврежденности для описания процессов ползучести и накопления повреждений в элементах конструкций вплоть до разрушения.

Увеличение длительности до разрушения для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие при циклическом деформировании по сравнению со стационарным нагружением говорит о том, что процессы накопления повреждений при растяжении и сжатии разные.

В работе [28] рассматривается ползучесть цилиндрических брусьев произвольного поперечного сечения, имеющего одну ось симметрии при чистом изгибе. Определяющие соотношения предполагают вязкое течение при сжатии $\dot{\rho} = A\sigma^n$ и ползучесть с накоплением поврежденности при растяжении в виде, предложенном Ю.Н. Работновым [32]:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= A\sigma^n / (1 - \omega)^m, \quad \sigma > 0, \\ \dot{\omega} &= B\sigma^k / (1 - \omega)^r, \quad \sigma > 0.\end{aligned}$$

Из указанных выше соотношений с учетом гипотезы плоских сечений получается закон распределения напряжений в поперечных сечениях бруса. Причем гипотеза плоских сечений записывается с учетом смещения нейтральной оси во времени в область сжатия. Это происходит за счет накопления поврежденности в верхних слоях и их разрушения. А именно, сопротивление материала ползучести в растянутой зоне с течением времени уменьшается, и растягивающие напряжения распространяются на первоначально сжатую зону.

Система уравнений равновесия записывается с учетом равновесия отдельно растянутой и сжатой областей балки (в каждом уравнении по 2 слагаемых). Причем в уравнениях заменяется параметр поврежденности Ю.Н. Работнова ω на параметр сплошности Качанова $\psi(y, t) = 1 - \omega(y, t)$. В таком же виде записывается кинетическое уравнение для сплошности, и далее полученная система уравнений решается численным методом, используя замену интегралов конечными суммами, а производных – конечными разностями.

Расчеты ведутся до тех пор, пока в верхнем, самом напряжённом слое параметр поврежденности ω не достигнет единицы. С этого момента времени $t = t_*$ фронт разрушения начинает продвигаться внутрь балки. Дальнейшее численное решение проводится по оставшейся неразрушенной части балки.

В работе построены теоретические кривые кривизны бруса в зависимости от времени, поврежденности от времени, эпюры перераспределения напряжений в различные моменты времени при различных значениях констант m, n, k, r .

В монографии [19] на основании введенного авторами критерия разрушения рассматривается обобщённая модель ползучести и разрушения балки в условиях чистого изгиба. Учитывается формальная аналогия в поведении образца при растяжении в условиях ползучести в координатах “деформация – время” при $\sigma = \text{const}$ с обобщённой моделью в рассматриваемом случае. При этом обобщенная модель при формальной замене $\varepsilon \rightarrow \chi$, $\sigma \rightarrow M$, принимается в виде:

$$\chi = \chi_e + \chi_{e^p} + \chi_p, \quad \chi_e = \frac{M(t)}{W_p};$$

$$\dot{\chi}_{e^p} = \begin{cases} 0, M(t) \leq M_{np}, \\ \lambda \left[a(M(t) - M_{np})^{n_1} - \chi_{e^p}(t) \right], a(M(t) - M_{np})^{n_1} > \chi_{e^p}(t), \\ 0, a(M(t) - M_{np})^{n_1} \leq \chi_{e^p}(t), M(t) > M_{np}; \end{cases}$$

$$\chi_p = \chi_u + \chi_v + \chi_w;$$

$$\chi_u(t) = \sum_{k=1}^s \chi_{u_k}(t), \quad \dot{\chi}_{u_k}(t) = \lambda_k(t) \left[a_k(M(t) / M_*)^{n_2} - \chi_{u_k}(t) \right];$$

$$\chi_v(t) = \sum_{k=1}^s \chi_{v_k}(t);$$

$$\dot{\chi}_{v_k} = \begin{cases} \lambda_k \left[b_k \left(\frac{M(t)}{M_*} \right)^{n_2} - \chi_{v_k}(t) \right], [\dots] > 0, \\ 0, b_k \left(\frac{M(t)}{M_*} \right)^{n_2} \leq \chi_{v_k}(t); \end{cases}$$

$$\dot{\chi}_w(t) = c \left(\frac{M(t)}{M_*} \right)^m;$$

$$M = M_0 (1 + \omega_p);$$

$$\dot{\omega}_p = \gamma M \dot{\chi}_{e^p} + \alpha_p M \dot{\chi}_p.$$

Здесь χ - полное обобщённое перемещение (кривизна балки при изгибе), χ_e и χ_{e^p} - упругая и пластическая компоненты χ соответственно; χ_p - компонента обобщённого перемещения, вызванная ползучестью; χ_u, χ_v, χ_w - вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие χ_p соответственно; M и M_0 - соответственно номинальное и “фиктивное” (истинное) значение обобщённой

нагрузки (изгибающего момента); W_p - интегральная упругая податливость балки; $\lambda_k, a_k, b_k, c, n_2, m, M_*$ - константы модели, при помощи которых описываются первая и вторая стадии ползучести и её обратимая после разгрузки часть; γ и α - параметры процесса, контролирующего процессы разупрочнения от пластического обобщённого перемещения и от обобщённого перемещения ползучести соответственно; a, n_1, λ - константы модели, описывающие диаграмму мгновенного упругопластического деформирования для обобщённого перемещения; M_{np} - предел пропорциональности на диаграмме упругопластического деформирования в координатах $\varepsilon - q$.

В качестве критерия разрушения рассматриваемого конструктивного элемента используется соотношение:

$$\int_0^{t_*} \frac{Md \chi_{e,p}(t)}{A_*^p} + \int_0^{t_*} \frac{Md \chi_p(t)}{A_*^c(M_0)} = 1$$

Для аппроксимации величины $A_*^c(M_0)$ использовалось соотношение вида

$$A_*^c(M_0) = \alpha_A (M_0)^{m_A}.$$

По аналогии с одноосным напряженным состоянием исходной информацией для построения обобщённой реологической модели служат кривые стационарной ползучести балки в координатах “кривизна-время” вплоть до разрушения, полученные при постоянных моментах, а также диаграмма упругопластического деформирования в координатах “изгибающий момент-кривизна”

Далее излагается методика численного решения краевой задачи для чистого изгиба. Составляется уравнение равновесия балки:

$$\int_{y_1}^{y_2} \sigma_0(y, t) y dS = M_0(t)$$

Уравнение совместности деформаций составляется на основе гипотезы плоских сечений:

$$\varepsilon(y,t) = y \cdot \chi(t),$$

где

$\varepsilon(y,t) = e(y,t) + e^p(y,t) + p(y,t)$ - полная деформация, $e(y,t) = \sigma_0(y,t)/E$ - упругая деформация; $p(y,t)$, $e^p(y,t)$ - деформация ползучести и пластическая деформация соответственно на расстоянии y от нейтральной оси; $\chi(t)$ - кривизна балки по нейтральной оси.

Далее приводится детальная схема численного расчета (на основе деления всего процесса деформирования на отрезки $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ в пределах каждого из которых все характеристики напряжённого состояния считаются постоянными). Расчёт ползучести балки осуществляется до тех пор, пока выполняется условие при любом y :

$$\Omega(t) = \int_0^t \frac{\sigma de^p}{A_*^p} + \int_0^t \frac{\sigma dp}{A_*^c(\sigma_0)} < 1$$

Выполнение при каком-либо значении y условие $\Omega(t_*) = 1$ предполагает, что происходит разрушение материала при $t = t_*$ и расчет прекращается.

В качестве модельного примера был рассмотрен случай неупругого реологического деформирования и разрушения балки с размерами 5*30*160 мм из сплава ЭИ698 при $T = 700^\circ\text{C}$. Далее приведены значения параметров предложенной модели для описания пластичности и ползучести балки. Построены диаграммы упругопластического деформирования балки в координатах “кривизна балки – изгибающий момент M_0 ” и кривые ползучести в координатах “кривизна балки – время” при стационарном нагружении при

$M_0 = \text{const}$. Получено хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных.

Итак, проведенный обзор задач изгиба балок при ползучести показал, что в построении решения использовались в основном степенные и экспоненциальные зависимости скоростей деформации ползучести и накопления поврежденности от времени, в которых уровни напряжений не ограничены. Качественно вид степенной зависимости скорости деформации ползучести от напряжения представлен на рисунке 2.1.

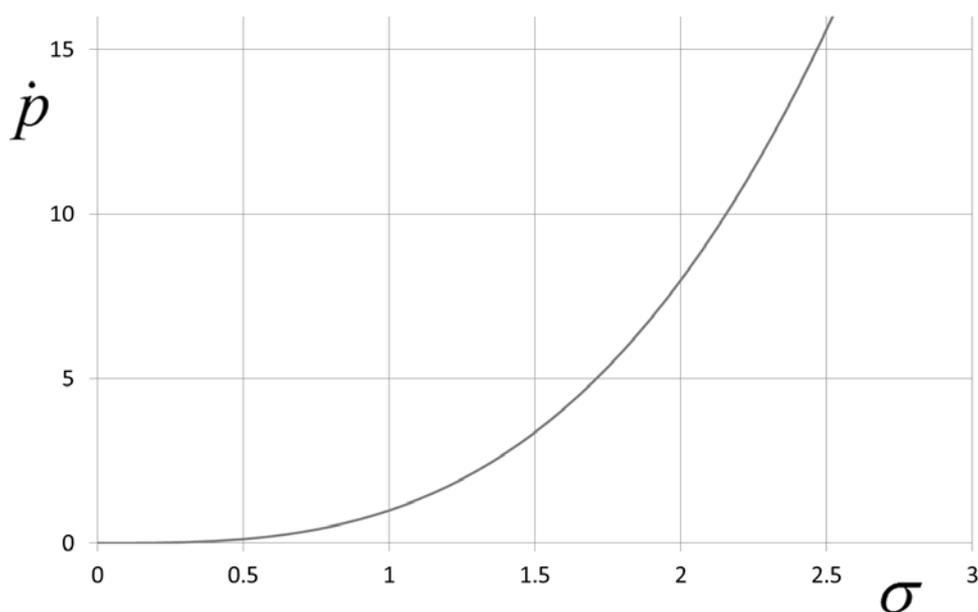


Рис. 2.1. Степенной вид зависимости скорости деформации ползучести от напряжения.

В отличие от всех известных решений в данной диссертационной работе исследуется изгиб балок при ползучести на основе дробно-степенной модели ползучести, в которой учитывается разносопротивляемость материала растяжению и сжатию. При этом определяющее соотношение ползучести имеет следующий вид:

$$\dot{\rho} = A \left(\frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma_{b1} - \sigma)(\sigma - \sigma_{b2})}} \right)^n, \quad (2.1)$$

где σ - напряжение, $\dot{\rho}$ - скорость деформации ползучести, A , n - материальные константы.

Учет разносопротивляемости производится за счет введения в определяющее соотношение ползучести различных пределов кратковременной прочности материала при растяжении σ_{b1} и сжатии σ_{b2} при соответствующей температуре испытания.

На рисунке 2.2 представлен качественно вид дробно-степенной зависимости скорости деформации ползучести от напряжения, учитывающий разносопротивляемость материала балки растяжению и сжатию.

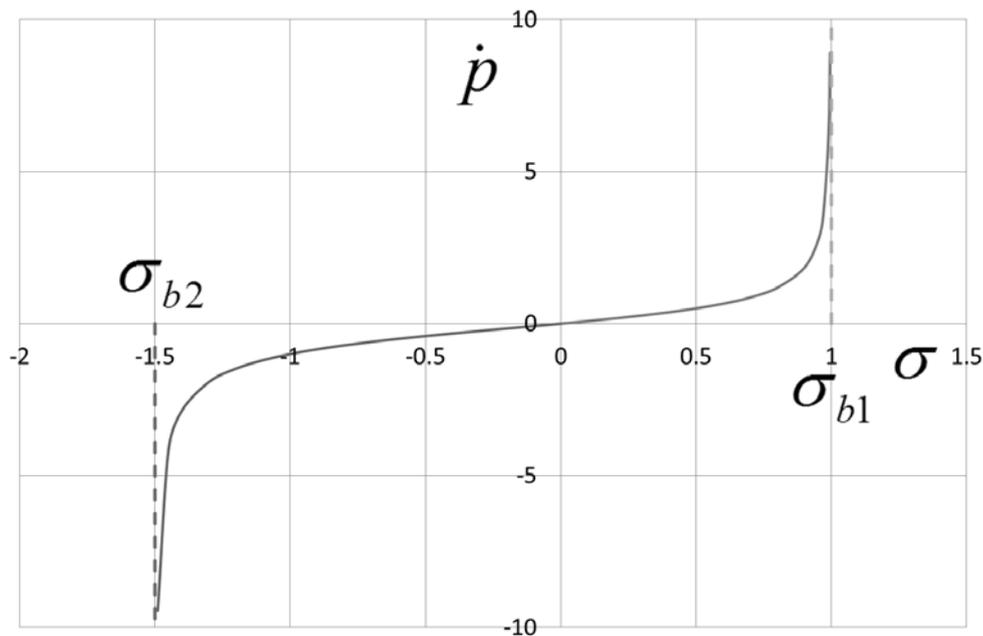


Рис. 2.2. Дробно-степенной вид зависимости скорости деформации ползучести от напряжения

Кроме того, многие авторы в работах по изгибу балок при ползучести используют один структурный параметр – поврежденность, который феноменологически характеризует и учитывает накопление внутренних микропор и микротрещин. В отличие от этого, в данной диссертационной работе новизной

исследования является учет в подобных задачах внешнего влияния агрессивной среды, которая в соответствии с известными экспериментами оказывает деструктивное влияние на материал балок и других элементов конструкций, и сокращает время до разрушения в разы. Учет влияния среды производится на основе введения в модель второго, наряду с поврежденностью, структурного параметра: концентрации диффундирующих элементов окружающей среды в материале балок. Также рассматривается влияние различных форм поперечного сечения балок на процесс ползучести.

Рассмотрим последовательно различные постановки этих задач.

2.2 Задача о чистом изгибе балки с учетом разных свойств материала на растяжение и сжатие при ползучести на установившейся стадии

В этом параграфе решены задачи о чистом изгибе балок прямоугольного и круглого поперечных сечений при установившейся ползучести с учетом разносопротивляемости материала при растяжении и сжатии [33]. Под разносопротивляемостью понимается различие кратковременных пределов прочности при растяжении $\sigma_{b1} > 0$ и сжатии $\sigma_{b2} < 0$. При этом, в отличие от рассмотренных в обзоре работ (п. 2.1 диссертации), принимается дробно-степенная модель ползучести с различными значениями пределов кратковременной прочности при растяжении и сжатии [8, 34], в которой осевые напряжения автоматически ограничены этими пределами прочности.

Приводится сравнение решений задач для балок квадратного и круглого сечений с одинаковыми значениями осевых моментов инерции.

2.2.1 Чистый изгиб балки прямоугольного поперечного сечения

Рассмотрим чистый изгиб балки в условиях высокотемпературной ползучести. Материал балки при соответствующей температуре имеет разные значения пределов кратковременной прочности при растяжении $\sigma_{b1} > 0$ и сжатии $\sigma_{b2} < 0$ (отношение пределов прочности $\alpha = \frac{-\sigma_{b2}}{\sigma_{b1}}$). Примем, что сечение балки имеет две оси симметрии (Ox и Oy), изгибающий момент M действует в плоскости yOz . Толщина сечения балки по оси y равна H , ширина b , длина l удовлетворяет неравенствам $l \gg H$, $l \gg b$.

В этом случае гипотеза плоских сечений имеет вид:

$$\dot{p} = \dot{\chi}(y - y_0), \quad (2.2)$$

где $\dot{p} = \dot{p}_z = \text{const}$ - скорость деформации ползучести; $\dot{\chi}$ - скорость изменения кривизны балки, y - координата, отсчитываемая от срединной линии балки ($-0.5H \leq y \leq 0.5H$), y_0 - координата нейтральной поверхности, на которой отсутствуют напряжения ($\sigma(y_0) = \sigma_z(y_0) \equiv 0$). Смещение нейтральной поверхности от оси симметрии ($y = 0$) балки при ползучести в рассматриваемой задаче происходит вследствие разносопротивляемости материала растяжению и сжатию.

Определяющие соотношения ползучести в одноосном случае примем в виде (2.1), предложенном С.А. Шестериковым и М.А. Юмашевой [8, 34].

Таким образом, напряженно-деформированное состояние изогнутой балки в любой момент времени определяется осевыми напряжениями и осевыми деформациями ползучести. Мгновенными упругопластическими деформациями пренебрегаем. Уравнения равновесия балки имеют следующий вид:

$$b \left[\int_{\frac{H}{2}}^{y_0} (\sigma_-) dy + \int_{y_0}^{\frac{H}{2}} (\sigma_+) dy \right] = 0; \quad \left[\int_{\frac{H}{2}}^{y_0} (\sigma_-) y dy + \int_{y_0}^{\frac{H}{2}} (\sigma_+) y dy \right] = \frac{M}{b}, \quad (2.3)$$

где σ_- , σ_+ - напряжения в сжатой и растянутой зонах балки соответственно.

Введем безразмерные переменные:

$$\alpha = -\frac{\sigma_{b2}}{\sigma_{b1}}; \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{b1}}; \quad \bar{t} = t \cdot A; \quad \bar{M} = \frac{4}{bH^2\sigma_{b1}}M; \quad \bar{N} = \frac{2}{bH\sigma_{b1}}N; \quad \bar{\chi} = \frac{H}{2}\chi, \\ \dot{\bar{\chi}} = \frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} = \frac{H}{2A} \frac{d\chi}{dt}; \quad \bar{y} = \frac{2y}{H}, \quad (2.4)$$

где N - осевая сила.

С учетом введенных безразмерных переменных (2.4) определяющее соотношение (2.1) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{dp}{d\bar{t}} = \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})}} \right]^n. \quad (2.5)$$

Согласно гипотезе плоских сечений (2.1) и определяющему соотношению (2.5) в безразмерных переменных (2.4) имеем:

$$\frac{dp}{d\bar{t}} = \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})} \right]^{n/2} = \frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0). \quad (2.6)$$

Преобразуем выражение (2.6):

$$\left[\frac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\bar{\sigma} + \alpha)} \right] = \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0) \right]^{2/n} = B(\bar{y}). \quad (2.7)$$

Преобразуем последнее выражение, представим выражение (2.7) в виде квадратного уравнения относительно безразмерного напряжения $\bar{\sigma}$:

$$[1 + B] \cdot \bar{\sigma}^2 + B(\alpha - 1) \cdot \bar{\sigma} - \alpha B = 0 \quad (2.8)$$

В результате выражение для безразмерных напряжений принимает следующий вид:

$$\bar{\sigma}_{+,-} = \frac{-B(\alpha - 1) \pm \sqrt{B^2(\alpha - 1)^2 + 4(1 + B)\alpha B}}{2 \cdot (1 + B)}. \quad (2.9)$$

Система уравнений равновесия (2.3) в безразмерных переменных (2.4) приводится к следующему виду:

$$\bar{N} = \int_{-1}^{\bar{y}_0} (\bar{\sigma}_-) \cdot d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^1 (\bar{\sigma}_+) \cdot d\bar{y} = 0; \quad \bar{M} = \int_{-1}^{\bar{y}_0} (\bar{\sigma}_-) \cdot \bar{y} d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^1 (\bar{\sigma}_+) \cdot \bar{y} d\bar{y}. \quad (2.10)$$

Подставив выражения $\bar{\sigma}_+$ и $\bar{\sigma}_-$ из (2.9) в уравнения равновесия (2.10) и, учитывая формулу (2.7) для $B(\bar{y})$, получим систему двух уравнений относительно \bar{y}_0 и $\dot{\bar{\chi}} = \frac{d\bar{\chi}}{dt}$.

Итак, выпишем полную систему уравнений (2.10).

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N} = \int_{-1}^{\bar{y}_0} \frac{-\left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}} (\alpha - 1) - \sqrt{\left[\left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right]^2 (\alpha - 1)^2 + 4 \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right] \alpha \left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}}}{2 \cdot \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right]} \cdot d\bar{y} + \\ + \int_{\bar{y}_0}^1 \frac{-\left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}} (\alpha - 1) + \sqrt{\left[\left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right]^2 (\alpha - 1)^2 + 4 \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right] \alpha \left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}}}{2 \cdot \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right]} \cdot d\bar{y} = 0 \\ \bar{M} = \int_{-1}^{\bar{y}_0} \frac{-\left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}} (\alpha - 1) - \sqrt{\left[\left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right]^2 (\alpha - 1)^2 + 4 \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right] \alpha \left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}}}{2 \cdot \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right]} \cdot \bar{y} d\bar{y} + \\ + \int_{\bar{y}_0}^1 \frac{-\left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}} (\alpha - 1) + \sqrt{\left[\left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right]^2 (\alpha - 1)^2 + 4 \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right] \alpha \left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}}}{2 \cdot \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{dt} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right]} \cdot \bar{y} d\bar{y} \end{array} \right.$$

В п. 2.2.3 диссертации будет произведено сравнение решения задач об изгибе балок квадратного (как частный случай прямоугольного) и круглого поперечных сечений при одинаковых осевых моментах инерции. Схема поперечных сечений таких балок представлена на рисунке 2.3.

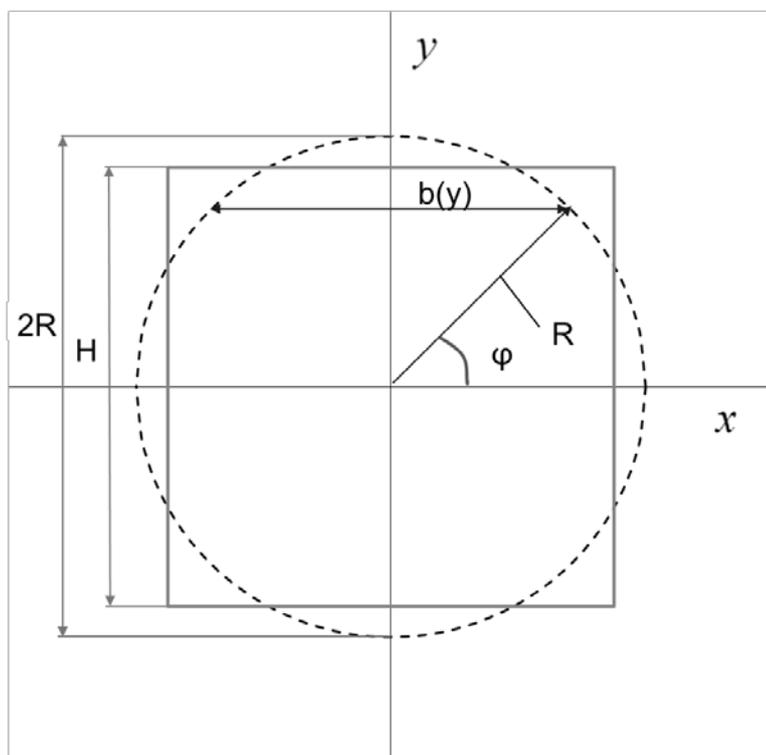


Рис. 2.3. Круглое и квадратное поперечное сечение балок с одинаковыми осевыми моментами инерции.

2.2.2 Чистый изгиб балки круглого поперечного сечения

В настоящем параграфе рассматривается чистый изгиб при ползучести балки круглого поперечного сечения радиуса R , изготовленной из материала с разными значениями пределов прочности при растяжении $\sigma_{b1} > 0$ и сжатии $\sigma_{b2} < 0$ (отношение пределов прочности по-прежнему равно $\alpha = -\sigma_{b2} / \sigma_{b1}$). Задача решается с учетом гипотезы плоских сечений. Примем, что сечение балки имеет две оси симметрии (Ox и Oy), изгибающий момент действует в плоскости yOz . Длина l удовлетворяет неравенству $l \gg R$.

Как и в п. 2.2.1 диссертации, напряженно-деформированное состояние изогнутой балки в любой момент времени определяется осевыми напряжениями и осевыми деформациями ползучести. Мгновенными упругопластическими деформациями по-прежнему пренебрегаем.

В этом случае, как и в п. 2.2.1, гипотеза плоских сечений имеет вид (2.2).

Введем безразмерные переменные:

$$\alpha = -\frac{\sigma_{b2}}{\sigma_{b1}}; \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{b1}}; \quad \bar{t} = t \cdot A; \quad \hat{M} = \frac{1}{2R^3 \sigma_{b1}} \cdot M; \quad \hat{N} = \frac{1}{2R^2 \sigma_{b1}} \cdot N; \quad \hat{\chi} = \frac{d\hat{\chi}}{d\bar{t}} = \frac{R}{A} \frac{d\chi}{dt};$$

$$\hat{y} = \frac{y}{R} = \sin \varphi.$$

Запишем уравнения равновесия:

$$\int_{-R}^{y_0} b \sigma_- dy + \int_{y_0}^R b \sigma_+ dy = 0, \quad \int_{-R}^{y_0} b \sigma_- y dy + \int_{y_0}^R b \sigma_+ y dy = M.$$

Приведём уравнения равновесия к безразмерному виду:

$$N = \int_{-R}^{y_0} b \sigma_- \cdot dy + \int_{y_0}^R b \sigma_+ \cdot dy = \int_{-1}^{\bar{y}_0} b \bar{\sigma}_- \cdot \sigma_{b1} R \cdot d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^1 b \bar{\sigma}_+ \cdot \sigma_{b1} R \cdot d\bar{y} =$$

$$= \sigma_{b1} R \cdot \left[\int_{-1}^{\bar{y}_0} b(\bar{y}) \bar{\sigma}_- d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^1 b(\bar{y}) \bar{\sigma}_+ d\bar{y} \right] = 0, \quad (2.11)$$

$$M = \int_{-R}^{y_0} b \sigma_- \cdot y dy + \int_{y_0}^R b \sigma_+ \cdot y dy = \int_{-1}^{\bar{y}_0} b \bar{\sigma}_- \cdot \sigma_{b1} R \cdot \bar{y} R \cdot d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^1 b \bar{\sigma}_+ \cdot \sigma_{b1} R \cdot \bar{y} R \cdot d\bar{y} =$$

$$= \sigma_{b1} R^2 \cdot \left[\int_{-1}^{\bar{y}_0} b(\bar{y}) \bar{\sigma}_- \cdot \bar{y} d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^1 b(\bar{y}) \bar{\sigma}_+ \cdot \bar{y} d\bar{y} \right] \quad (2.12)$$

Таким образом, система уравнений равновесия в безразмерных переменных приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \bar{N} = \int_{-1}^{\bar{y}_0} b(\bar{y}) \cdot (\bar{\sigma}_-) \cdot d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^1 b(\bar{y}) \cdot (\bar{\sigma}_+) \cdot d\bar{y} = 0, \\ \bar{M} = \int_{-1}^{\bar{y}_0} b(\bar{y}) \cdot (\bar{\sigma}_-) \cdot \bar{y} d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^1 b(\bar{y}) \cdot (\bar{\sigma}_+) \cdot \bar{y} d\bar{y}. \end{cases}$$

Аналогично преобразованиям, представленным в п. 2.2.1, на основе гипотезы плоских сечений (2.2) и определяющего соотношения (2.5) получим выражение для безразмерных напряжений, которое будет иметь вид (2.9) с учетом (2.7).

Выразим координату y через радиус поперечного сечения круга и угол φ относительно горизонтальной оси. Расчетная схема принята согласно рисунку 2.3.

$$y = R \sin \varphi .$$

Тогда выражение для $B(\bar{y})$ из (2.7) примет следующий вид:

$$B = \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \right]^{2/n} .$$

Уравнения равновесия (2.11) и (2.12) преобразуются к следующему виду

$$\begin{aligned} & \sigma_{b_1} R \cdot \left[\int_{-\pi/2}^{\varphi_0} \bar{\sigma}_- \cdot 2R \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \bar{\sigma}_+ \cdot 2R \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \right] = \\ & = \sigma_{b_1} \cdot 2R^2 \cdot \left[\int_{-\pi/2}^{\varphi_0} \bar{\sigma}_- \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \bar{\sigma}_+ \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \right] = \sigma_{b_1} \cdot 2R^2 \cdot \hat{N} = 0, \\ & M = \sigma_{b_1} R^2 \cdot \left[\int_{-\pi/2}^{\varphi_0} \bar{\sigma}_- \cdot 2R \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \bar{\sigma}_+ \cdot 2R \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \right] = \\ & = \sigma_{b_1} 2R^3 \cdot \left[\int_{-\pi/2}^{\varphi_0} \bar{\sigma}_- \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \bar{\sigma}_+ \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \right] = \sigma_{b_1} 2R^3 \cdot \hat{M}, \\ & \hat{y} = \sin \varphi, \\ & \hat{y} = 1 \Rightarrow 1 = \sin \varphi \Rightarrow \varphi = \arcsin 1 = \pi / 2, \\ & \hat{y} = \hat{y}_0 \Rightarrow \hat{y}_0 = \sin \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \arcsin \hat{y}_0. \end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений равновесия в безразмерных переменных, выраженных через угол φ , приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \left[\int_{-\pi/2}^{\varphi_0} \bar{\sigma}_- \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \bar{\sigma}_+ \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \right] = \hat{N} = 0, \\ \left[\int_{-\pi/2}^{\varphi_0} \bar{\sigma}_- \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \bar{\sigma}_+ \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \right] = \hat{M}. \end{cases}$$

где $\bar{\sigma}_{+,-}$ выражаются через B .

Итак, выпишем полную систему уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N} = \int_{-\pi/2}^{\varphi_0} \frac{-\left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}} (\alpha - 1) - \sqrt{\left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}} (\alpha - 1)^2 + 4 \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right] \alpha \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}}}}{2 \cdot \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right]} \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi + \\ + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{-\left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}} (\alpha - 1) + \sqrt{\left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}} (\alpha - 1)^2 + 4 \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right] \alpha \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}}}}{2 \cdot \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right]} \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = 0, \\ \bar{M} = \int_{-\pi/2}^{\varphi_0} \frac{-\left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}} (\alpha - 1) - \sqrt{\left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}} (\alpha - 1)^2 + 4 \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right] \alpha \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}}}}{2 \cdot \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right]} \cdot \sin \varphi \cos^2 \varphi \cdot d\varphi + \\ + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{-\left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}} (\alpha - 1) + \sqrt{\left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}} (\alpha - 1)^2 + 4 \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right] \alpha \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}}}}{2 \cdot \left[1 + \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\right]^{\frac{2}{n}}\right]} \cdot \sin \varphi \cos^2 \varphi \cdot d\varphi. \end{array} \right.$$

В последней системе неизвестными величинами являются: $\hat{\chi} = \frac{d\hat{\chi}}{dt}$ и \hat{y}_0 .

2.2.3 Сравнение решений задач об изгибе балок круглого и квадратного поперечного сечения

Проведем сравнение решений задач об изгибе балок круглого и квадратного поперечного сечения (как частный случай прямоугольного поперечного сечения при $b = H$) при одном и том же изгибающем моменте с учетом равенства осевых моментов инерции.

Из равенства осевых моментов инерции следует

$$I_x^{\text{квадрат}} = I_x^{\text{круг}}$$

$$I_x^{\text{квадрат}} = \frac{bH^3}{12} = \frac{H^4}{12} = I_x^{\text{круг}} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (2R)^4}{64} = \frac{\pi 16R^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4},$$

$$\frac{H^4}{12} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Отсюда получим соотношение между радиусом R круглого поперечного сечения и стороной H квадратного поперечного сечения:

$$H = (3\pi)^{1/4} \cdot R = 1.752 \cdot R.$$

Соотношение размеров круглого и квадратного поперечных сечений балок показано на рисунке 2.3.

Согласно принятому условию равенства размерных моментов (и с учетом $b = H$ для квадратного сечения):

$$M = \sigma_{b_1} \frac{H^3}{4} \cdot \bar{M} = \sigma_{b_1} \cdot 2R^3 \cdot \hat{M},$$

$$\frac{H^3}{4} \cdot \bar{M} = 2R^3 \cdot \hat{M},$$

$$H = (3\pi)^{1/4} \cdot R,$$

$$\frac{\left((3\pi)^{1/4} \cdot R\right)^3}{4} \cdot \bar{M} = 2R^3 \cdot \hat{M},$$

$$\frac{(3\pi)^{3/4}}{4} \cdot \bar{M} = 2 \cdot \hat{M},$$

$$(3\pi)^{3/4} \cdot \bar{M} = 8 \cdot \hat{M},$$

$$0.672 \cdot \bar{M} = \hat{M}.$$

Таким образом, соотношение для безразмерных моментов:

$$\hat{M} = 0.672 \cdot \bar{M},$$

где \bar{M} - безразмерный момент в задаче изгиба балки квадратного поперечного сечения; \hat{M} - безразмерный момент в задаче изгиба балки круглого поперечного сечения.

Произведем расчет для задачи изгиба при ползучести балки квадратного поперечного сечения при значении безразмерного момента $\bar{M} = 0.5$. Соответственно выполним расчет для балки круглого сечения, нагруженной безразмерным моментом $\hat{M} = 0.336$. В качестве примера примем значения констант $\alpha = 1.5$ и $n = 1, 3, 15$. В таблице 2.1 приведены результаты численного

решения систем уравнений для балок прямоугольного ($j=1, 3$) и круглого ($j=2, 4$) сечений.

Таблица 2.1. - Результаты численного решения систем уравнений для балок прямоугольного ($j=1, 3$) и круглого ($j=2, 4$) сечений.

n	\bar{y}_0	\hat{y}_0	$\dot{\chi}$	$\hat{\chi}$
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
1	-0.045	-0.038	0.696	0.803
3	-0.061	-0.049	0.148	0.172
15	-0.077	-0.061	0.00001	0.0000131

На рисунке 2.4 сплошными линиями эпюры напряжений в балке квадратного поперечного сечения и штриховыми линиями – в балке круглого поперечного сечения.

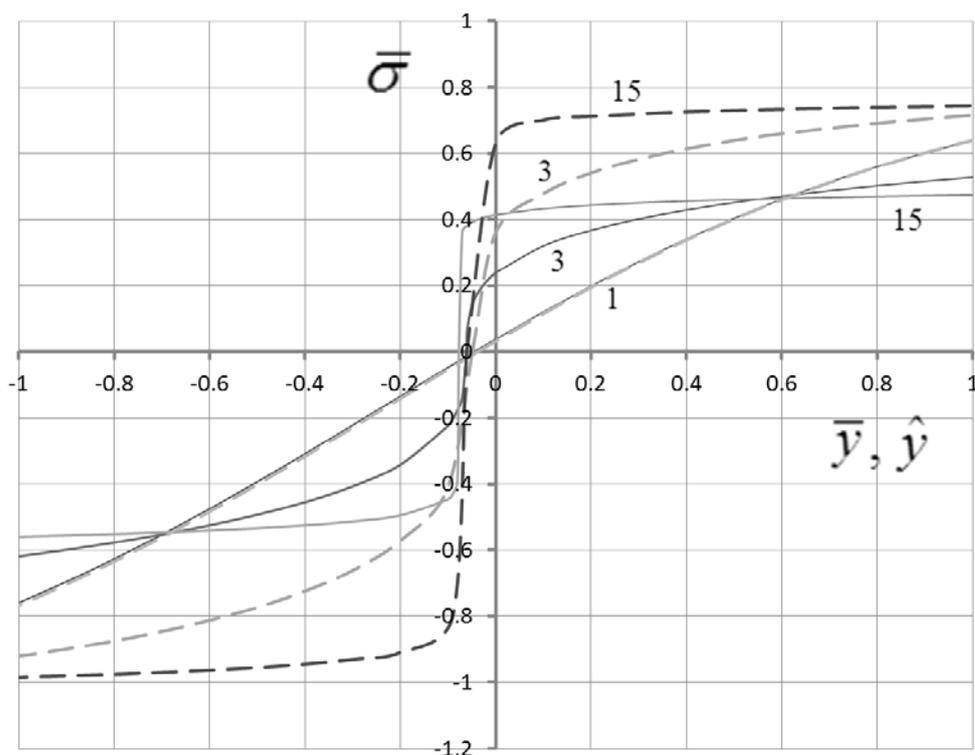


Рис. 2.4 Эпюры безразмерного напряжения $\bar{\sigma}$ для балок квадратного и круглого поперечных сечений при $n=1, 3, 15$.

На рисунке 2.5 приведены зависимости смещения нейтральных осей \bar{y}_0 и \hat{y}_0 от показателя степени n .

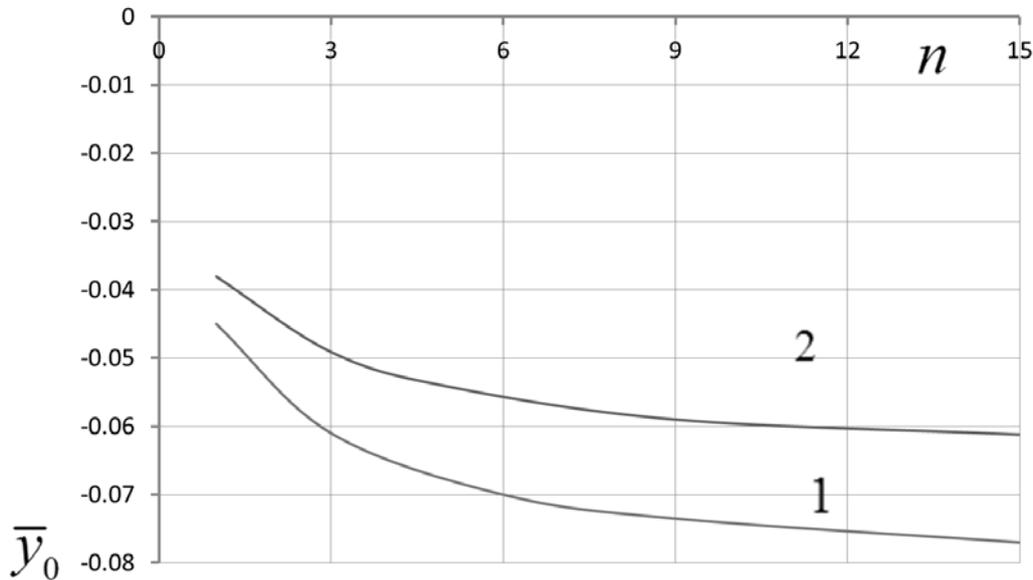


Рис. 2.5. Графики зависимости смещения нейтральных осей \bar{y}_0 и \hat{y}_0 от показателя степени n для балок квадратного (1) и круглого (2) поперечных сечений.

2.2.4 Обсуждение результатов и выводы по параграфу 2.2

Из рисунка 2.4 видно, что при $n=1$ распределение напряжений близко к линейному. С ростом показателя n наблюдается перераспределение напряжений к характерному распределению напряжений для идеально-пластического материала. Наряду с изменением эпюр напряжений в зависимости от показателя степени n , наблюдается смещение нейтральной оси ($\sigma(y_0) \equiv 0$) от оси симметрии балки за счет разносопротивляемости материала.

Сравнение эпюр распределения безразмерных напряжений $\bar{\sigma}$ при различных значениях n для балок круглого и квадратного поперечных сечений (при одинаковых осевых моментах инерции) под действием одного и того же изгибающего момента показало, что величина этих напряжений по абсолютной

величине больше для балки круглого поперечного сечения. Это можно объяснить тем, что вследствие гипотезы плоских сечений выдерживать основную часть нагрузки должны волокна, наиболее удаленные от плоскости симметрии, а у балки круглого сечения в этой области ширина поперечного сечения меньше.

Из рисунка 2.5 видно, что для любого показателя n смещение нейтральной оси для балки круглого поперечного сечения меньше.

Также необходимо отметить, что используемое дробно-степенное определяющее соотношение позволяет адекватно описывать процесс ползучести, так как оно ограничивает уровень допустимых напряжений пределами кратковременной прочности при растяжении и сжатии.

2.3 Задача о чистом изгибе балки при ползучести с учетом поврежденности и разных свойств материала на растяжение и сжатие

В данном параграфе диссертации решена задача определения характерных параметров чистого изгиба балки прямоугольного поперечного сечения в процессе ползучести с учетом различных пределов прочности материала при растяжении и сжатии, а также с учетом накопления поврежденности [35, 36]. В качестве определяющего соотношения ползучести и кинетического уравнения для поврежденности принята дробно-степенная модель. Проведены расчеты всех характеристик вплоть до времени разрушения балки, характеризуемого достижением осевыми напряжениями предельных значений, включая движение фронта разрушения.

2.3.1 Постановка задачи и методы решения

Используется система координат, оси которой Ox и Oy являются осями симметрии прямоугольного сечения. Изгибающий момент M действует в плоскости yOz . Толщина сечения балки H_0 по оси y , ширина b и длина l удовлетворяют неравенствам $l \gg H_0$, $l \gg b$.

Исследуя процесс ползучести изгибаемой балки, упругопластическими деформациями пренебрегаем по сравнению с деформациями ползучести. В соответствии с гипотезой плоских сечений имеем:

$$\dot{p}_z = \dot{p} = \dot{\chi}(y - y_0), \quad (2.13)$$

где $\dot{p} = \dot{p}(y, t)$ – скорость деформации ползучести, $\dot{\chi} = \dot{\chi}(t)$ – скорость изменения кривизны балки, $y_0 = y_0(t)$ – координата нейтральной линии напряжения, на которой $\sigma_z = \sigma(y_0, t) \equiv 0$.

Смещение нейтральной линии изогнутой балки при ползучести происходит вследствие разносопротивляемости материала растяжению и сжатию, а также изменения сплошности $\psi = 1 - \omega$ только в растягиваемой области.

Зависимости скорости ползучести и скорости изменения сплошности от напряжения принимаются в виде дробно-степенных функций [8, 34]:

$$\dot{p} = \begin{cases} A \left[\frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma_{b1} - \sigma) \cdot (\sigma - \sigma_{b2})} \psi} \right]^n & \text{при } \sigma > 0, \\ A \left[\frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma_{b1} - \sigma) \cdot (\sigma - \sigma_{b2})} \psi} \right]^n & \text{при } \sigma \leq 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\dot{\psi} = \begin{cases} -B \left[\frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma_{b1} - \sigma) \cdot (\sigma - \sigma_{b2})} \psi} \right]^m & \text{при } \sigma > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma \leq 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

где A , B , n , m – материальные константы, σ_{b1} – предел прочности при растяжении, σ_{b2} – сжимающее напряжение, равное по абсолютной величине пределу прочности при сжатии.

Напряженно-деформированное состояние изгибаемой балки в любой момент времени определяется осевыми напряжениями $\sigma = \sigma(y, t)$ и осевыми деформациями ползучести $p = p(y, t)$. Связь между скоростями деформаций $\dot{p} = \dot{p}(y, t)$ и напряжениями $\sigma = \sigma(y, t)$ подчиняется уравнениям (3.2), а сплошность $\psi = \psi(y, t)$ – уравнениям (3.3).

Используем безразмерные переменные (2.4) с учетом $H \equiv H_0$ и $\bar{B} = \frac{B}{A}$. (2.16)

Используем уравнения равновесия в виде (2.10), в которых под $\bar{\sigma}_-$ и $\bar{\sigma}_+$ понимаются безразмерные сжимающие и растягивающие напряжения. С учетом введенных безразмерных переменных (2.16) соотношения (2.14) и (2.15) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{t}} = \begin{cases} \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})} \psi} \right]^n & \text{при } \bar{\sigma} > 0, \\ \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})}} \right]^n & \text{при } \bar{\sigma} \leq 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} = \begin{cases} -\bar{B} \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\bar{\sigma} + \alpha)} \psi} \right]^m & \text{при } \bar{\sigma} > 0, \\ 0 & \text{при } \bar{\sigma} \leq 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Из первого соотношения (2.18) при $\bar{\sigma} > 0$ с учетом гипотезы плоских сечений в безразмерных переменных получим:

$$\left[\frac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma}) \psi^2} \right]^{n/2} = C(\bar{y}, \bar{t}) \quad \text{при } \bar{\sigma} > 0, \quad (2.19)$$

где

$$C(\bar{y}, \bar{t}) = \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} (\bar{y} - \bar{y}_0) \right]^{2/n}. \quad (2.20)$$

Тогда из уравнения (2.19) получим квадратное уравнение относительно $\bar{\sigma}$ вида:

$$(1 + C\psi^2)\bar{\sigma}^2 + C\psi^2(\alpha - 1)\bar{\sigma} - \alpha C\psi^2 = 0. \quad (2.21)$$

Отсюда безразмерные напряжения $\bar{\sigma}$ определяются по формуле

$$\bar{\sigma}_{+,-} = \frac{-C\psi^2(\alpha - 1) \pm \sqrt{C^2\psi^4(\alpha - 1)^2 + 4(1 + C\psi^2)\alpha C\psi^2}}{2(1 + C\psi^2)}, \quad (2.22)$$

$$\psi = 1 \text{ для } \bar{\sigma}_- < 0.$$

Преобразуем формулу (2.15) к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\psi^{m+1})}{\partial \bar{t}} = -\bar{B}(m+1) \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma})(\bar{\sigma}+\alpha)} \right]^{m/2} & \text{при } \bar{\sigma} > 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} = 0 & \text{при } \bar{\sigma} \leq 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Выпишем полную систему уравнений в безразмерных переменных:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{N} &= \int_{-1}^{\bar{y}_0} \frac{-C(\alpha - 1) - \sqrt{C^2(\alpha - 1)^2 + 4(1 + C)\alpha C}}{2(1 + C)} d\bar{y} + \\ &+ \int_{\bar{y}_0}^1 \frac{-C\psi^2(\alpha - 1) + \sqrt{C^2\psi^4(\alpha - 1)^2 + 4(1 + C\psi^2)\alpha C\psi^2}}{2(1 + C\psi^2)} d\bar{y} = 0 \\ \bar{M} &= \int_{-1}^{\bar{y}_0} \frac{-C(\alpha - 1) - \sqrt{C^2(\alpha - 1)^2 + 4(1 + C)\alpha C}}{2(1 + C)} \bar{y} d\bar{y} + \\ &+ \int_{\bar{y}_0}^1 \frac{-C\psi^2(\alpha - 1) + \sqrt{C^2\psi^4(\alpha - 1)^2 + 4(1 + C\psi^2)\alpha C\psi^2}}{2(1 + C\psi^2)} \bar{y} d\bar{y} \\ \frac{\partial \psi^{m+1}}{\partial \bar{t}} &= -(m+1)\bar{B} \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma})(\bar{\sigma}+\alpha)} \right]^{m/2} \end{aligned} \right. \quad (2.24)$$

Таким образом, решение задачи об изгибе балки сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений (2.24) относительно неизвестных

функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\psi(\bar{y}, \bar{t})$ с начальными условиями $\bar{\chi}(0) = 0$ и $\psi(\bar{y}, 0) = 1$. Начальное значение $\bar{y}_0(0)$ совпадает со значением, полученным в аналогичной задаче при установившейся ползучести без учета поврежденности (см. параграф. 2.2).

При численном решении задачи используем тот факт, что в систему уравнений (2.24) входят производные по одной переменной, а интегралы берутся по другой, и будем решать ее численно. Разбивая сечение балки по толщине на отрезки с шагом $\Delta\bar{y}$, будем искать значения неизвестных функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\psi(\bar{y}, \bar{t})$ в точках разбиения интервала по времени t с шагом $\Delta\bar{t}$: $\bar{t}_1 = \Delta\bar{t}$, $\bar{t}_2 = \bar{t}_1 + \Delta\bar{t}$ и т.д.

Зададим шаг по времени $\Delta\bar{t}$, и методом конечных разностей будем искать значения $\bar{\chi}$, ψ , \bar{y}_0 на каждом шаге, используя значения, полученные на предыдущем шаге.

Расчеты по уравнениям системы (2.24) проводятся до тех пор, пока на поверхностном растянутом, самом ослабленном слое сплошность достигнет нулевого значения: $\psi(\bar{y} = 1, \bar{t}^*) = 0$ (поврежденность $\omega(\bar{y} = 1, \bar{t}^*) = 1$). В этот момент времени $\bar{t} = \bar{t}^*$ появляется фронт разрушения, который с течением времени начинает продвигаться вглубь балки. Движение фронта разрушения описывается безразмерной координатой $\bar{\xi}(\bar{t}) = \frac{2\xi(\bar{t})}{H_0}$, где $\xi(\bar{t})$ - координата фронта разрушения. Интегрирование уравнений равновесия в растянутой зоне балки проводится до этой координаты. Напряжения в балке начинают перераспределяться таким образом, что в неразрушенной части балки сохраняется равновесие по внутренним усилиям (напряжениям). Расчет проводится до тех пор, пока напряжения на внешних сторонах растянутой и сжатой зон достигнут соответствующих значений пределов прочности. Этот момент времени $\bar{t} = \bar{t}^{**}$, соответствующий предельному напряженному состоянию, является моментом разделения балки на две части, т.е. разрушением балки.

2.3.2 Результаты расчетов

В расчетах, упомянутых выше, примем следующие значения параметров, входящих в систему уравнений (2.24): $\alpha = 1.5$ (например, для магниевых сплавов МЛ4, МЛ8 [37]), $m = n = 3$, $\bar{B} = 20$. Безразмерный изгибающий момент был принят $\bar{M} = 0.5$.

В соответствии с принятыми прочностными характеристиками материала и изгибающим моментом в аналогичной задаче изгиба балки без учета поврежденности было получено следующее значение безразмерного смещения нейтральной оси $\bar{y}_0 = 0.061$ (см. параграф 2.2 диссертации).

Найденные значения неизвестных функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\omega(\bar{y} = 1, \bar{t})$ при нарастании поврежденности и при движении фронта разрушения приведены в таблице 2.2 и 2.3.

Таблица 2.2 - Значения функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\omega(\bar{y} = 1, \bar{t})$ при нарастании поврежденности.

\bar{t}	$\bar{y}_0(\bar{t})$	$\bar{\chi}(\bar{t})$	$\omega(\bar{y} = 1, \bar{t})$
$\bar{t}_0 = 0$	-0.061	0	0
$\bar{t}_1 = 0.1$	-0.1295	0.021	0.275
$\bar{t}_2 = 0.2$	-0.264	0.074	0.636
$\bar{t}_3 = 0.21$	-0.297	0.082	0.748
$\bar{t}_4 = 0.215$	-0.329	0.088	0.831
$\bar{t}_5 = 0.22$	-0.391	0.105	0.925
$\bar{t}_6 = 0.222$	-0.491	0.149	0.982
$\bar{t}_7 = \bar{t}^* =$ 0.2221	-0.491012	0.161	1.000

Таблица 2.3 - Значения функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\omega(\bar{y} = \bar{\xi}, \bar{t})$ при движении фронта разрушения.

$\bar{\xi}$	\bar{t}	$\bar{y}_0(\bar{t})$	$\bar{\chi}(\bar{t})$	$\omega(\bar{y} = \bar{\xi}, \bar{t})$
1	$\bar{t}_7 = \bar{t}^* = 0.2221$	-0.491012	0.161	1.000
0.95	$\bar{t}_8 = 0.222111$	-0.491015	0.171	1.000
0.9	$\bar{t}_9 = \bar{t}^{**} =$ 0.2221118	-0.4910153	0.1734	1.000

На рисунках 2.6 и 2.7 представлены графики зависимостей $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\omega(\bar{y} = 1, \bar{t})$ соответственно.

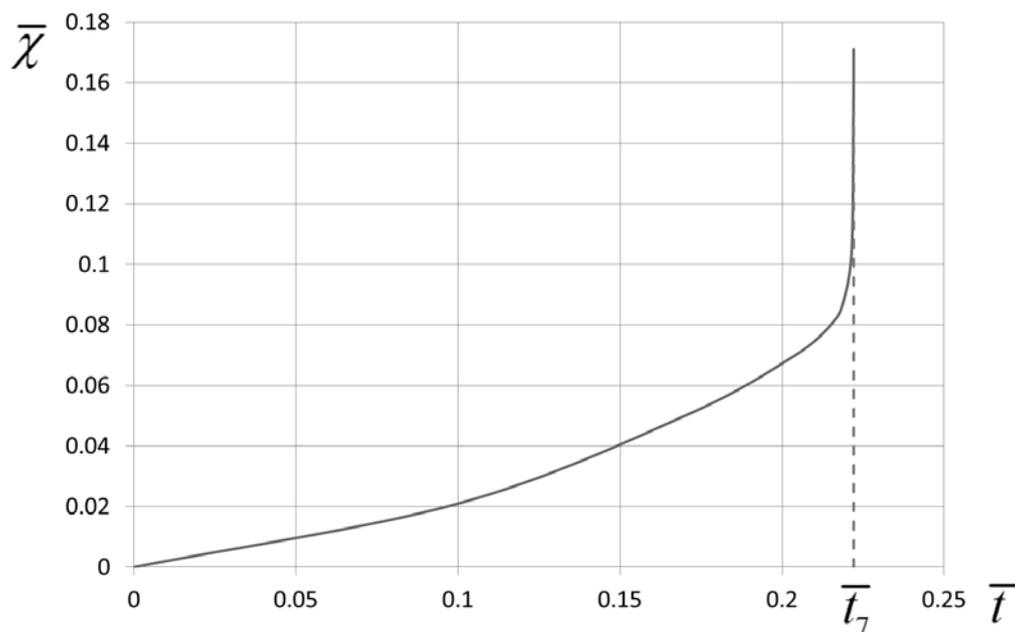


Рис. 2.6. График зависимости $\bar{\chi}(\bar{t})$ от времени \bar{t} .

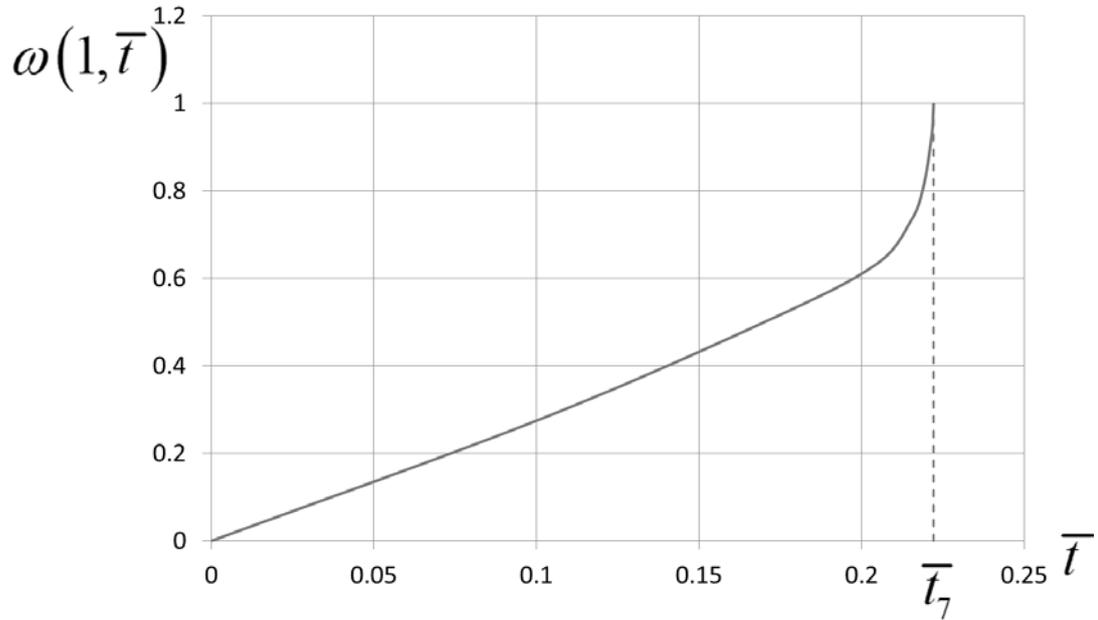


Рис. 2.7. График зависимости $\omega(\bar{y}=1, \bar{t})$ от времени \bar{t} .

На основе полученного решения системы уравнений (2.24) и формул (2.22) построены графики зависимости поврежденности и эпюры распределения напряжений по поперечному сечению балки в точках разбиения интервала по времени \bar{t} . Эти графики и эпюры представлены на рисунках 2.8 и 2.9 соответственно.

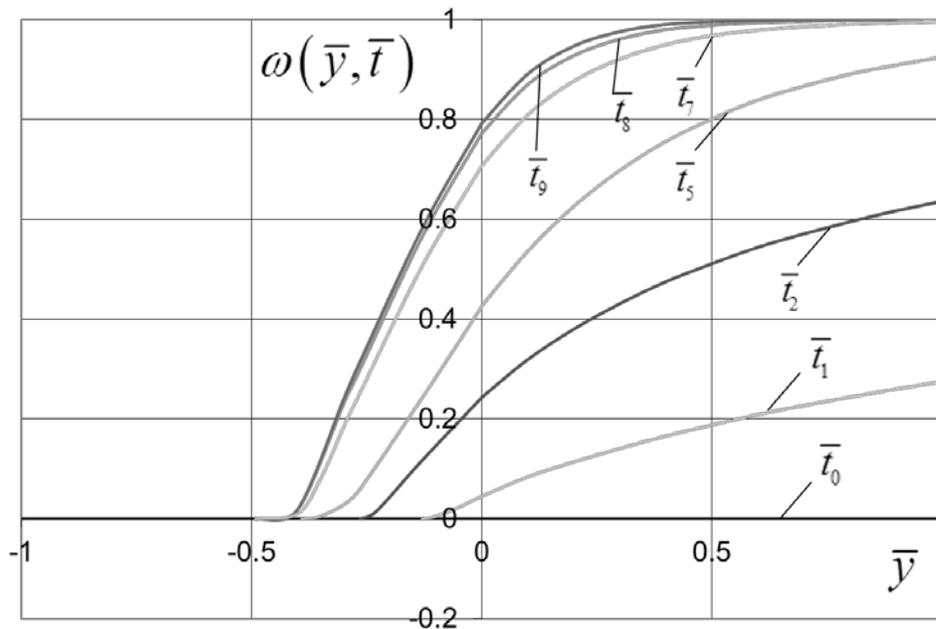


Рис. 2.8. Графики зависимости поврежденности ω от координаты \bar{y} для различных значений времени \bar{t} . ($0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}^*$, $\bar{t}^* \leq \bar{t}^{**}$, $\bar{t}^* = \bar{t}_7 = 0.2221$, $\bar{t}^{**} = \bar{t}_9 = 0.2221118$).

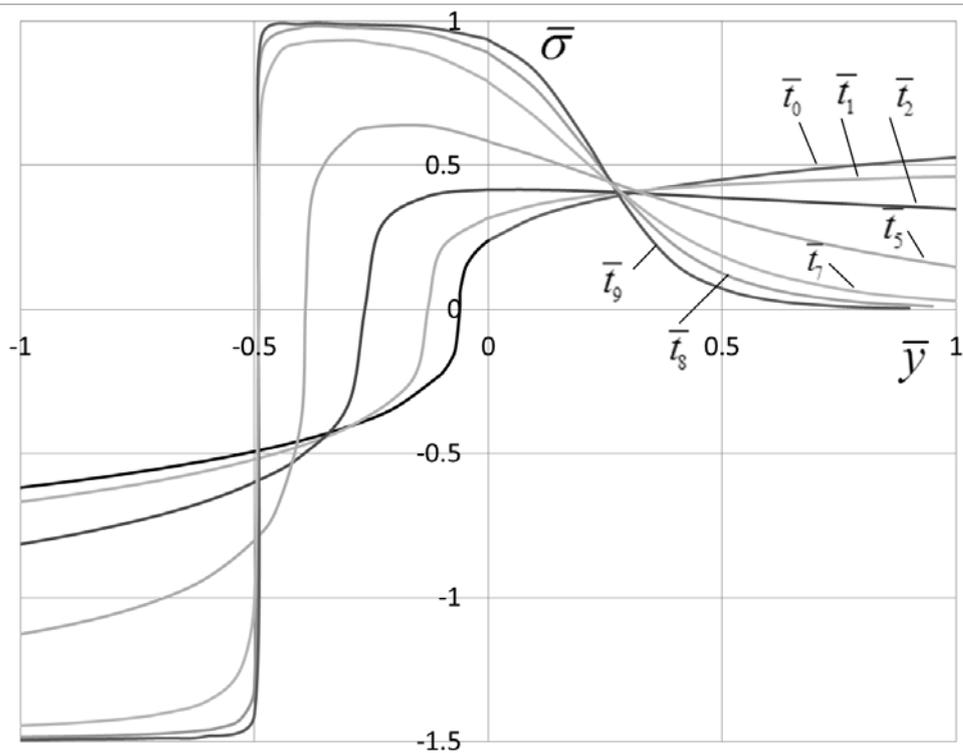


Рис. 2.9. Эпюры распределения напряжений $\bar{\sigma}$ в различные моменты времени ($0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}^*$, $\bar{t}^* \leq \bar{t}^{**}$, $\bar{t}^* = \bar{t}_7 = 0.2221$, $\bar{t}^{**} = \bar{t}_9 = 0.2221118$).

На основе полученных данных, приведенных в таблице 2.3, построен график движения фронта разрушения во времени (рисунок 2.10).

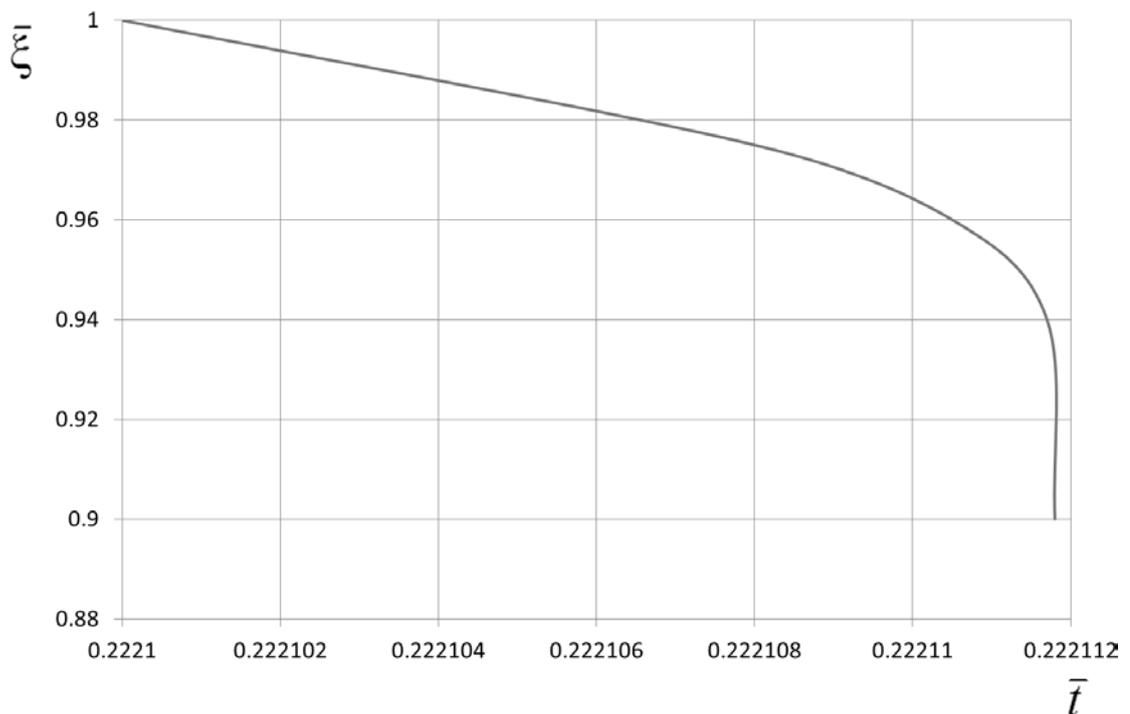


Рис. 2.10. График движения фронта разрушения во времени.

Условие продвижения фронта разрушения с поверхности вглубь балки: $\omega(\bar{y} = \bar{\xi}, \bar{t}) = 1$. Расчет показал, что интервал времени продвижения фронта вплоть до разрушения (момента достижения напряжений внутри балки σ_{b1}, σ_{b2}): $\bar{t}^* \leq \bar{t} \leq \bar{t}^{**}$, $\bar{t}^* = 0.2221$, $\bar{t}^{**} = 0.2221118$. Глубина проникновения фронта: $0.9 \leq \bar{\xi}(\bar{t}) \leq 1$, что составляет 5 % от толщины балки.

Рассмотрим смещение нейтральной линии деформации $\bar{y} = \bar{\zeta}$, вдоль которой $p(\bar{\zeta}, \bar{t}) = 0$. Пренебрегая мгновенными упругопластическими деформациями, согласно гипотезе плоских сечений имеем:

$$p = \bar{\chi}(t) \cdot (\bar{y} - \bar{\zeta}(\bar{t})). \quad (2.25)$$

Вычислим деформацию ползучести p , интегрируя соотношение (2.13) по времени \bar{t} :

$$p = \bar{\chi}(\bar{y} - \bar{y}_0) + \int_0^{\bar{t}} \bar{\chi} \dot{\bar{y}}_0 d\bar{t} \quad (2.26)$$

Сравнивая выражения (15) и (16), получим:

$$\bar{\zeta}(\bar{t}) = \bar{y}_0(\bar{t}) - \frac{1}{\bar{\chi}(\bar{t})} \int_0^{\bar{y}_0} \bar{\chi} d\bar{y}_0. \quad (2.27)$$

На основе данных, приведенных в таблице 2.2, и соотношения (2.27) построены графики нейтральных линий напряжения и деформации (рисунок 2.11).

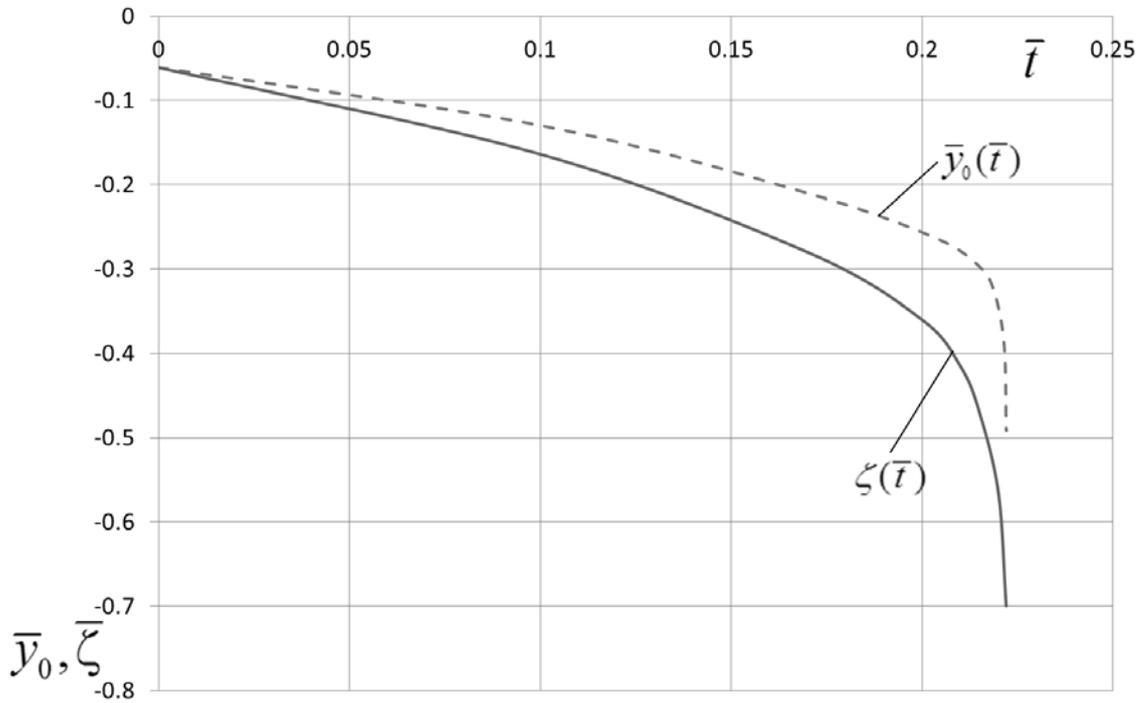


Рис. 2.11. Графики зависимостей $\zeta(\bar{t})$, $\bar{y}_0(\bar{t})$.

2.3.3 Обсуждение результатов и выводы по параграфу 2.3

Проведен анализ процесса накопления поврежденности в изгибаемой балке в процессе ползучести при дополнительном учёте разнсопротивляемости материала. Показано, что внутри балки происходит перераспределение напряжений во времени, и, как следствие, смещение нейтральных линий, которые характеризуются нулевыми напряжениями и деформациями соответственно.

Нарастание поврежденности на растянутой поверхности балки продолжается до момента достижения на ней предельного значения $\omega(\bar{y} = 1, \bar{t}^*) = 1$. Далее происходит продвижение фронта разрушения вглубь балки с одновременным увеличением напряжений внутри до предельных значений σ_{b1} , σ_{b2} , что является условием разрушения балки.

Из построенных графиков видно, что рост кривизны балки и поврежденности во времени происходит с возрастающей скоростью, которая асимптотически стремится к бесконечности на стадии предразрушения балки. Нейтральные линии, характеризуемые нулевыми напряжениями и деформациями, в начальный момент времени совпадают, а затем с течением времени расходятся, при этом скорость изменения во времени каждой из них растет и стремится к бесконечности на стадии предразрушения.

Необходимо отметить, что используемые впервые в данной задаче дробно-степенные определяющие и кинетические соотношения позволяют более корректно по сравнению со стандартными степенными соотношениями описывать процесс ползучести, так как они ограничивают уровень допустимых напряжений пределами кратковременной прочности при растяжении и сжатии.

2.4 Задача об изгибе балки при ползучести с учетом диффузии среды, накопления поврежденности и разносопротивляемости материала

В этой параграфе диссертационной работы рассматривается чистый изгиб при ползучести балки, имеющей форму поперечного сечения в виде тонкой полосы $b * H_0$ ($H_0 \ll b$), с учетом влияния диффузии окружающей среды [38-40]. Изгибающий момент, действующий на балку равен M . В качестве начального условия примем равенство концентрации агрессивной среды в материале балки c нулю, а в качестве граничного условия на поверхности балки примем $c(t) = c_0$. Балка изготовлена из материала с разными значениями пределов прочности при растяжении и сжатии ($\sigma_{b1} > 0$ и $\sigma_{b2} < 0$ соответственно).

Для решения уравнения диффузии используем приближенный метод решения, предложенный в работе [2, 3]. В этом случае выражение для

интегрально среднего уровня концентрации по поперечному сечению $\bar{c}_m(t)$ имеет вид в соответствии с формулой (1.7)

Рассмотрим процесс чистого изгиба тонкой полосы в случае воздействия на нее агрессивной среды.

Используем гипотезу плоских сечений в соответствии с (2.13). Смещение нейтральной поверхности изгибаемой балки при ползучести происходит вследствие разнсопротивляемости материала растяжению и сжатию, а также за счет ослабления материала вследствие накопления поврежденности в процессе ползучести. Для учета влияния агрессивной окружающей среды введем в определяющее и кинетическое соотношения функцию от интегрально средней концентрации среды.

Используем безразмерные переменные вида (2.16) и $\bar{c}_m = \frac{c_m}{c_0}$.

Систему определяющих и кинетических соотношений ползучести в безразмерном виде с учетом дробно-степенной функции [8, 34] примем в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{t}} = \begin{cases} \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})} \cdot \psi} \right]^n \cdot (1 + \gamma_1 \bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \bar{\sigma} > 0, \\ \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})}} \right]^n \cdot (1 + \gamma_1 \bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \bar{\sigma} \leq 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} = \begin{cases} -\bar{B} \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})} \cdot \psi} \right]^m \cdot (1 + \gamma_2 \bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \bar{\sigma} > 0, \\ 0 & \text{при } \bar{\sigma} \leq 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

В соотношениях (2.28) и (2.29) γ_1 и γ_2 - константы, характеризующие диффузионный процесс, n и m - материальные константы.

С учетом безразмерных переменных безразмерная концентрация $\bar{c}_m(\bar{t})$ принимает следующий вид:

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = \begin{cases} \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\bar{t}}{\bar{t}_0}} & \text{при } \bar{t} \leq \bar{t}_0, \quad \bar{t}_0 = \frac{A \cdot H_0^2}{48D}, \\ 1 - \frac{2}{3} \cdot \exp\left(\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\bar{t}}{\bar{t}_0}\right)\right) & \text{при } \bar{t} > \bar{t}_0. \end{cases}$$

Напряженно-деформированное состояние изогнутой балки в любой момент времени определяется осевыми напряжениями $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{y}, \bar{t})$ и осевыми деформациями ползучести $p = p(\bar{y}, \bar{t})$. Мгновенными упругопластическими деформациями пренебрегаем.

Получим выражения для σ_- и σ_+ . В соответствии с гипотезой плоских сечений, записанной в безразмерном виде, и соотношения (2.28) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \bar{t}} = \dot{\chi}(\bar{y} - \bar{y}_0) &= \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma}) \cdot \psi}} \right]^n \cdot (1 + \gamma_1 \bar{c}_m(\bar{t})), \\ \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma}) \cdot \psi}} \right]^n &= \frac{\dot{\chi}(\bar{y} - \bar{y}_0)}{(1 + \gamma_1 \bar{c}_m(\bar{t}))}, \\ \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma}) \cdot \psi^2} \right]^{n/2} &= C(\bar{y}, \bar{t}) \quad \text{при } \bar{\sigma} > 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\text{где } C(\bar{y}, \bar{t}) = \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot \frac{(\bar{y} - \bar{y}_0)}{(1 + \gamma_1 \bar{c}_m(\bar{t}))} \right]^{2/n}.$$

Таким образом, получим выражения для $\bar{\sigma}_-$ и $\bar{\sigma}_+$.

$$\bar{\sigma}_{+,-} = \frac{-C\psi^2(\alpha - 1) \pm \sqrt{C^2\psi^4(\alpha - 1)^2 + 4(1 + C\psi^2)\alpha C\psi^2}}{2(1 + C\psi^2)}, \quad \psi = 1 \text{ для } \bar{\sigma}_- < 0 \quad (2.31)$$

Преобразуем первое соотношение из (2.29):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} = -\bar{B} \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma}) \cdot \psi}} \right]^m \cdot (1 + \gamma_2 \bar{c}_m(\bar{t})),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} &= -\bar{B} \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})}} \right]^m \cdot \left(\frac{1}{\psi} \right)^m \cdot (1 + \gamma_2 \bar{c}_m(\bar{t})), \\ \frac{m+1}{m+1} \psi^m \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} &= -\bar{B} \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})}} \right]^m \cdot (1 + \gamma_2 \bar{c}_m(\bar{t})), \\ \frac{1}{m+1} \frac{\partial \psi^{m+1}}{\partial \bar{t}} &= -\bar{B} \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})}} \right]^m \cdot (1 + \gamma_2 \bar{c}_m(\bar{t})), \\ \frac{\partial \psi^{m+1}}{\partial \bar{t}} &= -\bar{B}(m+1) \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})}} \right]^m \cdot (1 + \gamma_2 \bar{c}_m(\bar{t})).\end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (2.29) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\psi^{m+1})}{\bar{t}} = -\bar{B}(m+1) \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\bar{\sigma} + \alpha)} \right]^{m/2} \cdot (1 + \gamma_2 \bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \bar{\sigma} > 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} = 0 & \text{при } \bar{\sigma} \leq 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Используем уравнения равновесия (2.10). Выпишем полную систему уравнений в безразмерных переменных:

$$\begin{cases} \bar{N} = -\int_{-1}^{\bar{y}_0} \frac{(C_1 + C(\alpha - 1))}{2 \cdot (1 + C)} \cdot d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^1 \frac{(C_2 - C\psi^2(\alpha - 1))}{2 \cdot (1 + C\psi^2)} \cdot d\bar{y} = 0, \\ \bar{M} = -\int_{-1}^{\bar{y}_0} \frac{(C_1 + C(\alpha - 1))}{2 \cdot (1 + C)} \cdot \bar{y} d\bar{y} + \int_{\bar{y}_0}^1 \frac{(C_2 - C\psi^2(\alpha - 1))}{2 \cdot (1 + C\psi^2)} \cdot \bar{y} d\bar{y}, \\ \frac{d\psi^{m+1}}{d\bar{t}} = -(m+1)\bar{B} \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\bar{\sigma} + \alpha)} \right]^{m/2} \cdot (1 + \gamma_2 \bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \bar{\sigma} > 0, \\ \frac{d\psi}{d\bar{t}} = 0 & \text{при } \bar{\sigma} < 0, \\ C_1 = \sqrt{C^2(\alpha - 1)^2 + 4(1 + C)\alpha C}, \quad C_2 = \sqrt{C^2\psi^4(\alpha - 1)^2 + 4(1 + C\psi^2)\alpha C\psi^2}, \\ C(\bar{y}, \bar{t}) = \left[\frac{d\bar{\chi}}{d\bar{t}} \cdot \frac{(\bar{y} - \bar{y}_0)}{(1 + \gamma_1 \bar{c}_m(\bar{t}))} \right]^{2/n}. \end{cases} \quad (2.33)$$

Таким образом, решение задачи об изгибе балки сводится к решению системы интегро-дифференциальных уравнений (2.33) относительно неизвестных функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\psi(\bar{y}, \bar{t})$ с начальными условиями $\bar{\chi}(0) = 0$ и $\psi(\bar{y}, 0) = 1$, начальное значение $\bar{y}_0(0)$ совпадает со значением, полученным в аналогичной задаче при установившейся ползучести без учета поврежденности (см., например, [33]).

Система уравнений (2.33) решается до тех пор, пока на растянутом поверхностном, слое сплошность достигнет нулевого значения: $\psi(\bar{y} = 1, \bar{t}^*) = 0$ (т.е. поврежденность $\omega(\bar{y} = 1, \bar{t}^*) = 1$) аналогично параграфу 2.3 диссертации. В этот момент времени $\bar{t} = \bar{t}^*$ появляется фронт разрушения, который с течением времени продвигается вглубь балки. Движение фронта разрушения характеризуется координатой $\bar{\xi}(\bar{t})$. Интегрирование уравнений равновесия в растянутой зоне балки проводится до этой координаты ($\bar{y} \leq \bar{\xi}(\bar{t})$). Расчеты проводятся до тех пор, пока напряжения на внешних сторонах растянутой и сжатой зон достигнут соответствующих значений пределов прочности. Это значение времени $\bar{t} = \bar{t}^{**}$ определяет время разделения балки на две части, т.е. разрушение балки.

Для дальнейшего расчета выберем необходимые константы.

Определим константу A , входящую в выражение для безразмерной концентрации. Согласно соотношению ползучести в безразмерной виде имеем:

$$\frac{dp}{d\bar{t}} = \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})}} \right]^n.$$

С учетом принятого соотношения для безразмерного времени $\bar{t} = A \cdot t$ скорость изменения деформации ползучести будет иметь вид:

$$\frac{dp}{dt} = A \cdot \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{(1-\bar{\sigma}) \cdot (\alpha + \bar{\sigma})}} \right]^n.$$

Используем данные опытов Одингга и Фридмана [5] с диффузией кислорода при высокой температуре в полосы из отожженной мягкой углеродистой стали Ст3. Для толщин полос, когда глубина проникновения диффузионного фронта не влияет на время разрушения полосы, выберем из этих данных толщину полосы 1 мм, напряжения испытания 220 МПа (что составляет $0.5 \cdot \sigma_b$ для малоуглеродистой стали) и скорость деформации ползучести $\dot{p} = 0.018 \text{ \%}/\text{час} = 0.00018 \text{ 1}/\text{час}$.

Подставляя $\bar{\sigma} = 0.5$ в последнее соотношение, получим:

$$0.018 \cdot 10^{-2} = A \cdot \left[\frac{0.5}{\sqrt{(1-0.5) \cdot (\alpha + 0.5)}} \right]^n.$$

Примем $\alpha = 1.5$ и $n = 3$ (аналогично предыдущей задаче изгиба балки при ползучести с учетом поврежденности и разносопротивляемости материала).

Тогда:

$$0.018 \cdot 10^{-2} = A \cdot \left[\frac{0.5}{\sqrt{(1-0.5) \cdot (1.5 + 0.5)}} \right]^3 = A \cdot 0.5^3 = A \cdot 0.125,$$

$$A = \frac{0.018 \cdot 10^{-2}}{0.125} = 0.00144 \text{ час}^{-1}.$$

Коэффициент диффузии примем $D = 10^{-4} \text{ мм}^2 / \text{час}$.

Таким образом:

$$D = 10^{-4} \text{ мм}^2 / \text{час},$$

$$H_0 = 1 \text{ мм},$$

$$A = 0.00144 \text{ час}^{-1}.$$

Предельное значение безразмерного времени, когда стадия проникновения элементов внешней среды в материал переходит в стадию насыщения, будет равно:

$$\bar{t}_0 = \frac{A \cdot H_0^2}{48D} = \frac{0.00144 \cdot 1^2}{48 \cdot 10^{-4}} = 0.3.$$

2.4.1 Результаты расчета с учетом диффузии агрессивной среды и сравнение с результатами аналогичной задачи без учета диффузии

В качестве примера был произведен расчет балки с учетом следующих значений параметров: $\bar{M} = 0.5$, $\bar{B} = 20$, $n = m = 3$, $\alpha = 1.5$, $\gamma_1 = 0.2$, $\gamma_2 = 0.8$.

Результаты расчетов приведены в таблицах 2.4 и 2.5.

Таблица 2.4 - Значения функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\omega(\bar{y} = 1, \bar{t})$ при нарастании поврежденности.

\bar{t}	$\bar{y}_0(\bar{t})$	$\bar{\chi}(\bar{t})$	$\omega(\bar{y} = 1, \bar{t})$
$\bar{t}_0 = 0$	-0.061	0	0
$\bar{t}_1 = 0.1$	-0.144	0.023	0.312
$\bar{t}_2 = 0.15$	-0.215	0.044	0.564
$\bar{t}_3 = 0.17$	-0.290	0.060	0.744
$\bar{t}_4 = 0.18$	-0.378	0.084	0.889
$\bar{t}_5 = 0.182$	-0.425	0.099	0.958
$\bar{t}_6 = \bar{t}^* = 0.1825$	-0.486	0.121	1

Таблица 2.5 - Значения функций $\bar{y}_0(\bar{t})$, $\bar{\chi}(\bar{t})$, $\omega(\bar{y} = \bar{\xi}, \bar{t})$ при движении фронта разрушения.

$\bar{\xi}$	\bar{t}	$\bar{y}_0(\bar{t})$	$\bar{\chi}(\bar{t})$	$\omega(\bar{y} = \bar{\xi}, \bar{t})$
1	$\bar{t}_6 = \bar{t}^* = 0.1825$	-0.486	0.121	1
0.95	$\bar{t}_7 = 0.182547$	-0.486507	0.152	1
0.93	$\bar{t}_8 = \bar{t}^{**} = 0.182548$	-0.486508	0.159	1

На рисунке 2.12 показаны эпюры распределения напряжений по сечению балки.

На рисунке 2.13 приведены зависимости от времени кривизны балки $\bar{\chi}(\bar{t})$ с учетом и без учета действия агрессивной среды (см. п. 2.3). На рисунке 2.14

показаны эпюры распределения поврежденности по сечению балки во времени $\omega(\bar{y}, \bar{t})$. На рисунке 2.15 показаны зависимости поврежденности на поверхностном растянутом слое $\omega(\bar{y}=1, \bar{t})$ от времени при нарастании поврежденности для $0 < t < t^*$ с учетом и без учета действия агрессивной среды. На рисунке 2.16 показан график $\bar{c}_m(\bar{t})$ изменения средней интегральной концентрации. На рисунке 2.17 графики зависимости $\bar{y}_0(\bar{t})$ с учетом и без учета действия агрессивной среды.

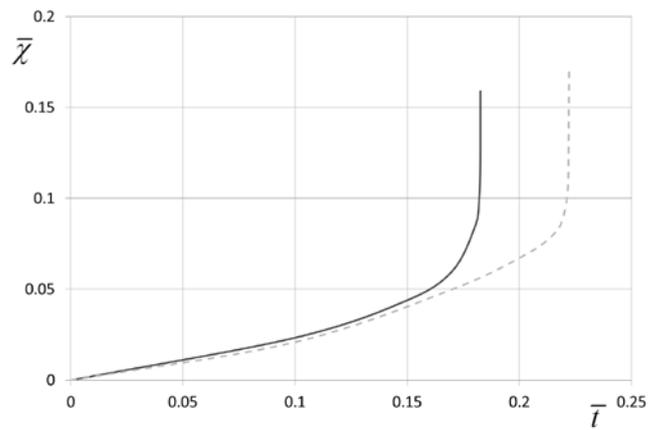
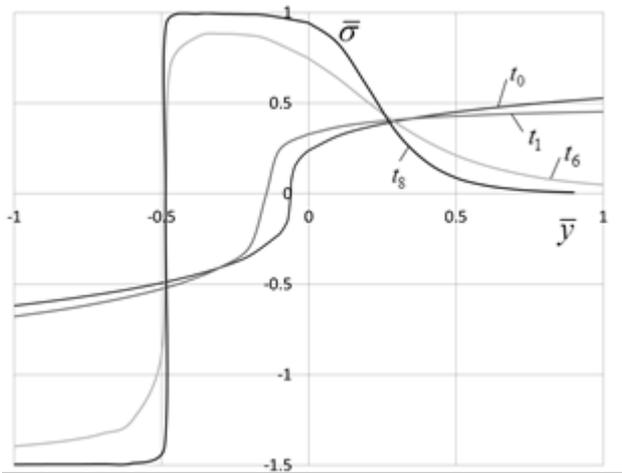


Рис. 2.12. Эпюры распределения напряжений $\bar{\sigma}$ для различных значений времени \bar{t}

Рис. 2.13. Графики зависимости $\bar{\chi}(\bar{t})$

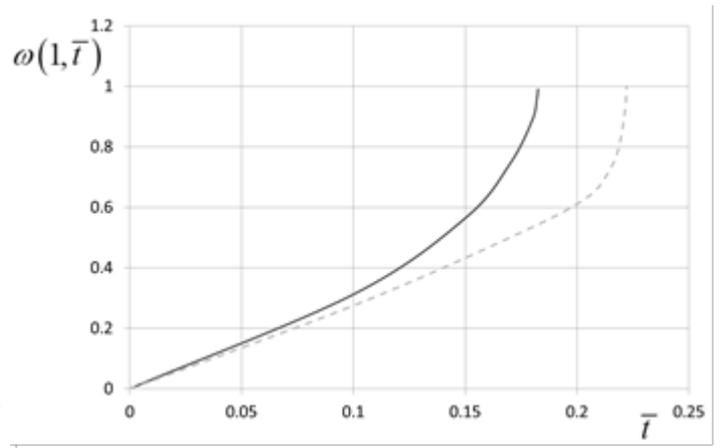
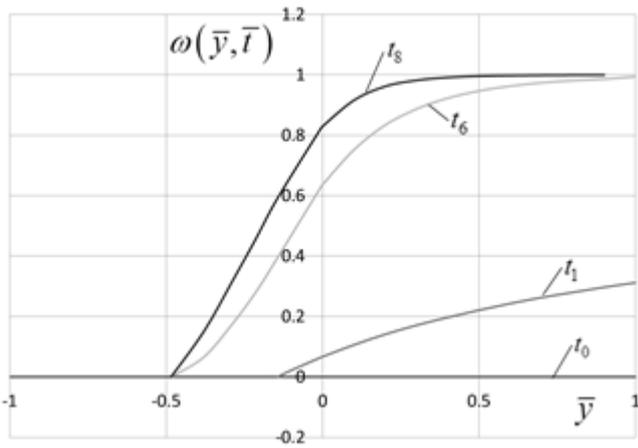
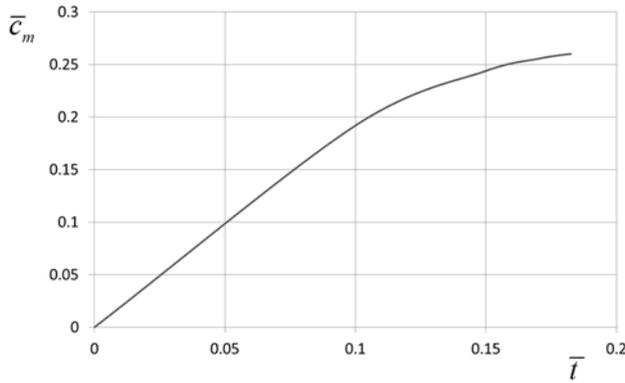
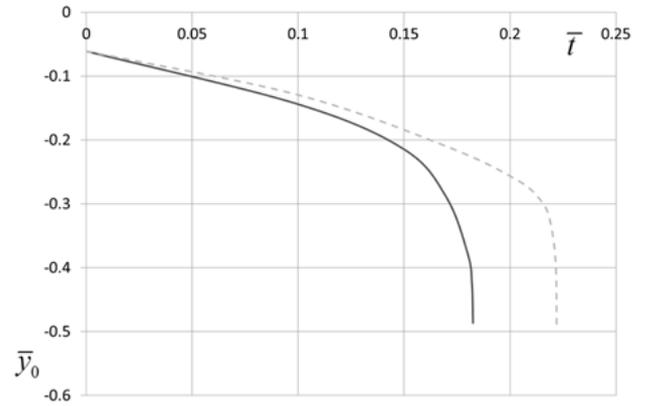


Рис. 2.14. График зависимости $\omega(\bar{y}, \bar{t})$

Рис. 2.15. Графики зависимости $\omega(\bar{y}=1, \bar{t})$ при нарастании поврежденности для $0 < t < t^*$

Рис. 2.16. График зависимости $\bar{c}_m(\bar{t})$ Рис. 2.17. Графики зависимости $\bar{y}_0(\bar{t})$

Примечание: сплошная линия – с учетом диффузии, штриховая линия – без учета диффузии

Сравнивая полученное безразмерное значение времени \bar{t}^{**} с безразмерным значением соответствующего времени без учета действия агрессивной среды (см.

п. 2.3), можно наблюдать его снижение на $\delta = \frac{0.222 - 0.182}{0.222} \cdot 100\% = 18\%$.

2.4.3 Сравнение решения задачи об изгибе балки при действии агрессивной среды с учетом приближенного и точного решений уравнения диффузии

Рассмотрим выражение для интегрально среднего уровня концентрации $\bar{c}_m(\tilde{t})$ в случае точного решения уравнения диффузии [3].

$$\bar{c}_m(\tilde{t}) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \exp\left[-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 \tilde{t}}{48}\right], \quad (2.34)$$

где $\tilde{t} = \frac{48D}{H_0^2} \cdot t$.

С учетом соотношения для безразмерного времени \bar{t} в (2.16) и соотношения для \tilde{t} в формуле (2.34) выражение для $\bar{c}_m(\bar{t})$ будет иметь вид:

$$\bar{c}_m(\bar{t}) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot \exp\left[-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{48} \cdot \left(\frac{\bar{t}}{A} \cdot \frac{48 \cdot D}{H_0^2}\right)\right] \quad (2.35)$$

Сравним решения задачи изгиба балки при ползучести с учетом диффузии и разнсопротивляемости материала, полученных на основе приближенного и точного выражений для интегрально средних концентраций \bar{c}_m . Результаты с учетом принятых $M = 0.5$, $\bar{B} = 20$, $n = m = 3$, $\alpha = 1.5$, $\gamma_1 = 0.2$, $\gamma_2 = 0.8$ приведены в таблице 2.6.

Таблица 2.6 – Сравнение решения задачи изгиба балки при ползучести при действии агрессивной среды с учетом приближенного и точного решений уравнения диффузии.

Приближенное решение	Точное решение
$\bar{t} = 0.1$, $\bar{\chi} = 0.0234$, $\bar{y}_0 = -0.144$, $\bar{c}_m = 0.192$, $\Delta_N = 3.679 \cdot 10^{-4}$, $\bar{M} = 0.499$.	$\bar{t} = 0.1$, $\bar{\chi} = 0.0234$, $\bar{y}_0 = -0.144$, $\bar{c}_m = 0.188$ $\Delta_N = 4.897 \cdot 10^{-4}$, $\bar{M} = 0.499$.
$\bar{t} = 0.15$, $\bar{\chi} = 0.044$, $\bar{y}_0 = -0.215$, $\bar{c}_m = 0.236$, $\Delta_N = 1.246 \cdot 10^{-4}$, $\bar{M} = 0.499$.	$\bar{t} = 0.15$, $\bar{\chi} = 0.044$, $\bar{y}_0 = -0.215$, $\bar{c}_m = 0.230$, $\Delta_N = 1.299 \cdot 10^{-4}$, $\bar{M} = 0.499$.
$\bar{t} = 0.17$, $\bar{\chi} = 0.060$, $\bar{y}_0 = -0.290$, $\bar{c}_m = 0.251$, $\Delta_N = 3.323 \cdot 10^{-4}$, $\bar{M} = 0.5$.	$\bar{t} = 0.17$, $\bar{\chi} = 0.060$, $\bar{y}_0 = -0.290$, $\bar{c}_m = 0.245$, $\Delta_N = 5.289 \cdot 10^{-4}$, $\bar{M} = 0.5$.
$\bar{t} = 0.18$, $\bar{\chi} = 0.084$, $\bar{y}_0 = -0.378$, $\bar{c}_m = 0.258$, $\Delta_N = 4.685 \cdot 10^{-4}$, $\bar{M} = 0.502$.	$\bar{t} = 0.18$, $\bar{\chi} = 0.084$, $\bar{y}_0 = -0.378$, $\bar{c}_m = 0.252$, $\Delta_N = 7.359 \cdot 10^{-4}$, $\bar{M} = 0.503$.
$\bar{t} = 0.182$, $\bar{\chi} = 0.099$, $\bar{y}_0 = -0.425$, $\bar{c}_m = 0.260$, $\Delta_N = 1.193 \cdot 10^{-4}$, $\bar{M} = 0.5$.	$\bar{t} = 0.182$, $\bar{\chi} = 0.099$, $\bar{y}_0 = -0.425$, $\bar{c}_m = 0.254$, $\Delta_N = 3.772 \cdot 10^{-4}$, $\bar{M} = 0.5$.
$\bar{t} = 0.1825$, $\bar{\chi} = 0.121$, $\bar{y}_0 = -0.4865$, $\bar{c}_m = 0.260$, $\Delta_N = 2.116 \cdot 10^{-4}$,	$\bar{t} = 0.1825$, $\bar{\chi} = 0.121$, $\bar{y}_0 = -0.4865$, $\bar{c}_m = 0.254$, $\Delta_N = 4.797 \cdot 10^{-4}$,

$\bar{M} = 0.498.$	$\bar{M} = 0.499.$
$\bar{t} = 0.182547, \bar{\chi} = 0.152,$ $\bar{y}_0 = -0.486507, \bar{c}_m = 0.260,$ $\Delta_N = 3.153 \cdot 10^{-4}, \bar{M} = 0.498, \xi = 0.95.$	$\bar{t} = 0.182547, \bar{\chi} = 0.152,$ $\bar{y}_0 = -0.486507, \bar{c}_m = 0.254,$ $\Delta_N = 7.552 \cdot 10^{-5}, \bar{M} = 0.498, \xi = 0.95.$
$\bar{t} = 0.182548, \bar{\chi} = 0.159,$ $\bar{y}_0 = -0.486508, \bar{c}_m = 0.260,$ $\Delta_N = 5.796 \cdot 10^{-4}, \bar{M} = 0.498, \xi = 0.93.$	$\bar{t} = 0.182548, \bar{\chi} = 0.159,$ $\bar{y}_0 = -0.486508, \bar{c}_m = 0.254,$ $\Delta_N = 7.469 \cdot 10^{-4}, \bar{M} = 0.499, \xi = 0.93.$

Примечание. В таблице 2.6 невязка Δ_N для продольной силы \bar{N} на каждом шаге по времени \bar{t} вычисляется по формуле: $\Delta_N = |\bar{N} - \bar{N}_{\text{числ}}| = |\bar{N}_{\text{числ}}|$, где $\bar{N}_{\text{числ}}$ - результат вычисления осевой силы.

Вывод. Результаты при учете точного и приближенного метода решения уравнений диффузии близки.

2.4.4 Обсуждение результатов и выводы по параграфу 2.4

В параграфе 2.4. определены характеристики ползучести и длительной прочности балок в условиях чистого изгиба и влияния агрессивной среды. Исследования проведены на основе кинетической теории Ю.Н. Работнова с двумя структурными параметрами: поврежденности и концентрации диффундирующих элементов окружающей среды в материале балок. Определены зависимости времени до разрушения балок от средней концентрации агрессивной среды.

Проведенный анализ показал, что влияние агрессивной среды на элементы конструкций при ползучести выражается в значительном уменьшении времени до разрушения в условиях действия изгибающих нагрузок.

Обсуждения результатов и выводы по главе 2

Определены характеристики ползучести и длительной прочности балок в условиях чистого изгиба, в том числе находящихся в агрессивной окружающей среде. Исследования проводятся на основе кинетической теории Ю.Н. Работнова с двумя структурными параметрами: поврежденности и концентрации диффундирующих элементов окружающей среды в материале балок.

Используемые дробно-степенные определяющие и кинетические соотношения более адекватно по сравнению со стандартными степенными соотношениями позволяют описывать процесс ползучести, так как они ограничивает уровень допустимых напряжений пределами кратковременной прочности при растяжении и сжатии.

В задаче установившейся ползучести сравнение величин напряжений по абсолютной величине для балок круглого и квадратного поперечных сечений при одинаковых моментах инерции показало, что уровень напряжений в балке круглого поперечного сечения выше. Вычисления показали, что для любого значения n смещение нейтральной оси для балки круглого поперечного сечения меньше, чем для балки квадратного сечения.

В задаче об изгибе балки при ползучести с учетом накопления поврежденности внутри балки происходит перераспределение напряжений во времени, и как следствие происходит смещение нейтральных линий, которые характеризуются нулевыми напряжениями и деформациями соответственно. Нарастание поврежденности на растянутой поверхности балки происходит до момента достижения на ней предельного значения $\omega(\bar{y} = 1, \bar{t}^*) = 1$. Далее происходит продвижение фронта разрушения вглубь балки с одновременным увеличением напряжений внутри балки до предельных значений σ_{b1} , σ_{b2} , что является условием разрушения балки в момент времени \bar{t}^{**} .

Проведенный анализ показал, что влияние агрессивной среды на элементы конструкций при ползучести выражается в значительном уменьшении времени до разрушения в условиях действия изгибающих нагрузок.

Глава 3 Длительное разрушение пластин при изгибе в условиях сложного напряженного состояния с учетом влияния агрессивной среды

3.1 Постановка задачи

В этой главе диссертации рассматривается длительное разрушение прямоугольной пластины толщиной H , находящейся под действием распределенных по её краям погонных изгибающих моментов M_1 и M_2 [41]. Схема нагруженной пластины представлена на рисунке 3.1.

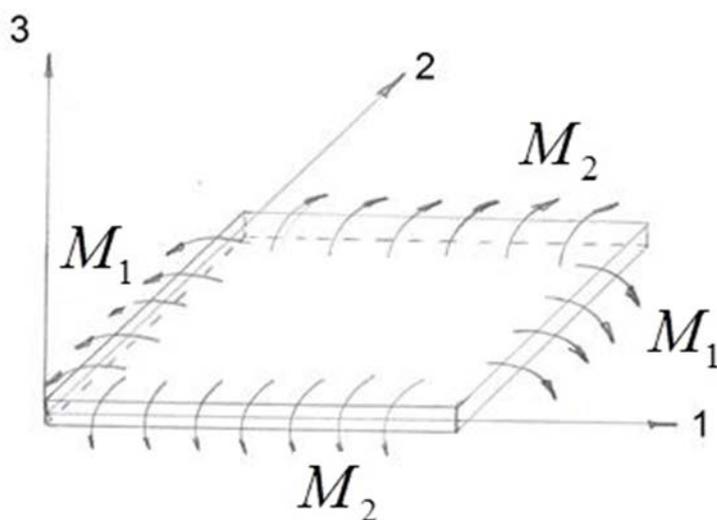


Рис. 3.1. Нагруженная пластина.

Пластина находится в агрессивной окружающей среде. Влияние агрессивной среды определяется диффузионным проникновением её элементов в материал пластины, приводящим к уменьшению длительности работоспособности пластины. На основе кинетической теории ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова [1] с учетом скалярного ω и векторного Ω параметров поврежденности ставится задача определения времени до разрушения пластины в условиях различных комбинаций распределенных изгибающих моментов по её краям (при малых деформациях).

3.2 Определение компонент напряженно-деформированного состояния при использовании степенной модели ползучести

Учет влияния агрессивной среды произведен путем введения в степенное определяющее соотношение функции от интегрально средней концентрации агрессивной среды в материале пластины:

$$\dot{p}_u = A \cdot (\sigma_u)^n \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad (3.1)$$

где \dot{p}_u - интенсивность скоростей деформаций ползучести, точка над p_u означает производную по времени t , σ_u - интенсивность напряжений, $\bar{c}_m(\bar{t})$ - интегрально средний уровень концентрации элементов окружающей среды в пластине, A , n - материальные константы.

Дополнительно примем следующие допущения:

- 1) распределение напряжений по толщине пластины в направлении оси 3 равно нулю $\sigma_3 = 0$ (толщина пластины H мала по сравнению с двумя другими размерами пластины), это означает, что в пластине осуществляется плоское напряженное состояние;
- 2) несжимаемость материала пластины при малых деформациях имеет вид $\dot{p}_3 = -(\dot{p}_1 + \dot{p}_2)$.
- 3) Принимается нерастяжимость срединной поверхности пластины, вследствие этого изменением длины средней линии пренебрегается.

Кривизны нейтральной поверхности в сечениях, параллельных плоскостям 13 и 23, обозначим χ_1 и χ_1 соответственно. Относительное кручение поверхности пластины χ_{12} при данной геометрии нагружения будет осуществляться только в плоскостях, не ортогональных осям 1 и 2 [42]. Вследствие чего, кривизны χ_1 и χ_1

являются главными кривизнами пластины. Оси 1, 2, 3 будут являться главными осями напряженно – деформированного состояния.

В дальнейшем решении задачи о длительной прочности такой пластины будут использоваться скалярный и векторный параметры поврежденности. Причем в случае применения векторного параметра будут использоваться проекции вектора поврежденности на 1-ую и 2-ю оси системы координат. В связи с этим рассматривается решение задачи в главных осях.

В этих предположениях интенсивности напряжений и скоростей деформаций ползучести принимают следующий вид:

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}, \quad \dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_1\dot{p}_2 + \dot{p}_2^2}.$$

Упругопластическими деформациями пренебрегаем по сравнению с деформациями ползучести.

По аналогии с σ_u и \dot{p}_u введем интенсивность изгибающих моментов M_u и интенсивность скоростей изменения кривизны пластины $\dot{\chi}_u$ соответственно:

$$M_u = \sqrt{M_1^2 - M_1M_2 + M_2^2}, \quad \dot{\chi}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_1\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2} \quad (3.2)$$

Пренебрегаем изменением длины средней линии:

$$\dot{p}_i = \dot{\chi}_i z. \quad (3.3)$$

(здесь и всюду далее индекс i принимает значения $i=1, 2$, координата z отсчитывается от срединной поверхности вдоль оси 3), в этом случае

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} |z| \sqrt{(\dot{\chi}_1)^2 + (\dot{\chi}_1\dot{\chi}_2) + (\dot{\chi}_2)^2} = |z| \dot{\chi}_u.$$

Из определяющего соотношения (3.1) выразим интенсивность напряжений:

$$\sigma_u = \left(\frac{\dot{p}_u}{A \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right)^\gamma = \left(\frac{|z| \dot{\chi}_u}{A \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right)^\gamma, \quad \text{где } \gamma = \frac{1}{n}.$$

Используем гипотезу пропорциональности девиаторов напряжений s_{ij} и скоростей деформаций ползучести \dot{p}_{ij} :

$$\dot{p}_i = \frac{3 \dot{p}_u(\sigma_u, \bar{t})}{2 \sigma_u} (\sigma_i - \sigma_{cp}), \quad \sigma_{cp} = (\sigma_1 + \sigma_2)/3 \quad (3.4)$$

На основе гипотезы плоских сечений (3.3) и соотношения (3.4) запишем:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \left(\sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_2 \right) \cdot \left[A \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \right]^\gamma \cdot (|z| \dot{\chi}_u)^{(1-\gamma)} = z \dot{\chi}_1, \\ \dot{p}_2 = \left(\sigma_2 - \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \cdot \left[A \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \right]^\gamma \cdot (|z| \dot{\chi}_u)^{(1-\gamma)} = z \dot{\chi}_2. \end{cases} \quad (3.5)$$

Из (3.5) получим выражения для напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{2}{3} (2 \dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) z \cdot \left[A \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \right]^{-\gamma} (|z| \dot{\chi}_u)^{(\gamma-1)}, \\ \sigma_2 = \frac{2}{3} (\dot{\chi}_1 + 2 \dot{\chi}_2) z \cdot \left[A \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \right]^{-\gamma} (|z| \dot{\chi}_u)^{(\gamma-1)}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$M_1 = 2 \int_0^{H/2} \sigma_1 z dz; \quad M_2 = 2 \int_0^{H/2} \sigma_2 z dz; \quad N_1 = 0; \quad N_2 = 0 \quad (3.7)$$

где N_1, N_2 - осевые силы.

Равенство нулю осевых сил выполняется автоматически.

Подставляя выражение (3.6) в уравнение равновесия (3.7), получим

$$\begin{cases} M_1 = C \cdot (2 \dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) \\ M_2 = C \cdot (\dot{\chi}_1 + 2 \dot{\chi}_2) \end{cases}, \quad \text{где} \quad C = \frac{4}{3} \left[A \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \right]^{-\gamma} \frac{(0.5H)^{(2+\gamma)}}{(2+\gamma)} (\dot{\chi}_u)^{(\gamma-1)} \quad (3.8)$$

Подставляя выражения (3.8) в (3.2), получим интенсивность M_u в следующем

виде:

$$M_u = \sqrt{M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2} = \frac{3}{2} C \dot{\chi}_u, \quad \dot{\chi}_u = \beta \cdot \left[A \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \right] \cdot M_u^n,$$

$$\beta = \frac{2}{H} \left(\frac{2(2n+1)}{H^2 n} \right)^n.$$

Скорости изменения кривизн и изгибающие моменты свяжем следующими уравнениями (по аналогии связи девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести):

Пусть

где σ_0 - постоянная величина размерности МПа, ω - скалярный параметр поврежденности.

В соответствии с кинетической теорией критерием разрушения пластины принимается: $\omega(\bar{t}_\omega^*) = 1$, где \bar{t}_ω^* - время до разрушения пластины.

Из (3.11) и (3.12) следует, что равенство параметра поврежденности единице наступает впервые на внешней стороне поверхности $z = 0.5H$, при увеличении времени на поверхности $z = 0.5H$ возникает фронт разрушения, при реальных значениях показателя степени $3 < n < 9$ фронт разрушения движется достаточно быстро. В связи с этим в качестве времени до разрушения пластины примем время, при котором $\omega|_{z=0.5H} = 1$, при этом согласно (3.11)

$$\sigma(z = 0.5H) = \frac{2(2n+1)}{H^2 n} \cdot M. \quad (3.13)$$

Введем постоянную безразмерную величину $G = \left[\frac{2(2n+1)}{H^2 n} \cdot \frac{M_0}{\sigma_0} \right]^k$, где M_0 - произвольная величина размерности Н (Ньютон).

Тогда уравнения (3.12) принимают вид:

$$\frac{d\omega}{d\bar{t}} = \begin{cases} G(\zeta_i)^k \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \zeta_i = M_i/M_0 > 0 \\ 0 & \text{при } \zeta_i = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

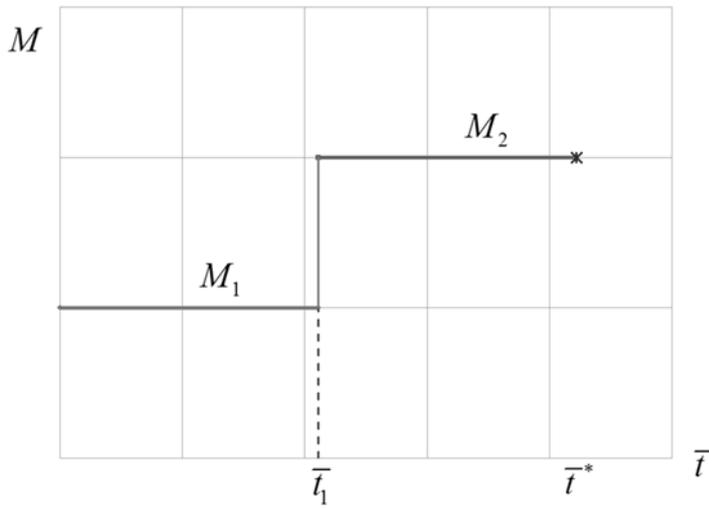
где M_i - величина изгибающего момента на i -й стадии нагружения.

Поскольку в соотношении для G входит M_0 как произвольная величина размерности Н, то можно всегда подобрать её такой, чтобы $G = 1$. Таким образом, соотношение (3.14) принимает следующий вид:

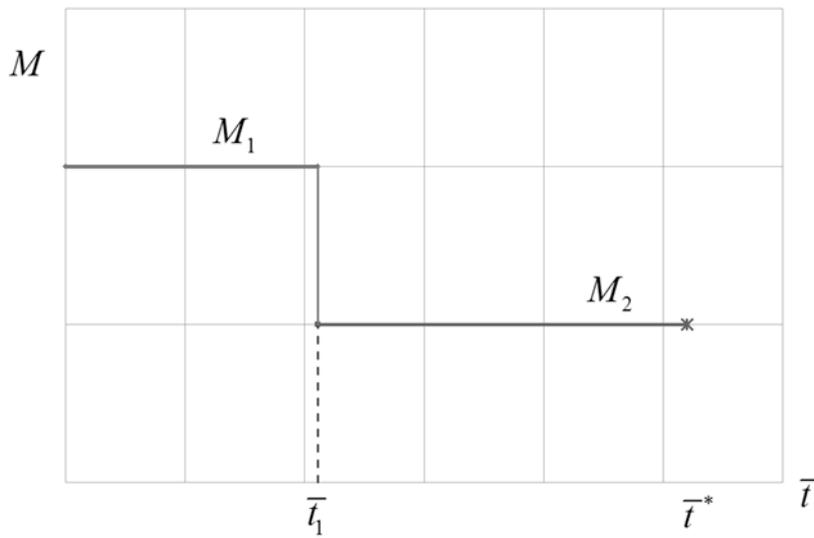
$$\frac{d\omega}{d\bar{t}} = \begin{cases} (\zeta_i)^k \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \zeta_i = M_i/M_0 > 0 \\ 0 & \text{при } \zeta_i = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Рассмотрим 2 стадии нагружения пластины, разделённые моментом времени \bar{t}_1 .

При этом возможны два варианта схемы нагружения (смотри рисунок 3.2).



1) первый вариант



2) второй вариант

Рис. 3.2. Два варианта схемы нагружения пластины (одноосный случай).

Сначала в соответствии со схемой нагружения к пластине прикладывается момент $M_1 > 0$, который действует в течение времени $0 < \bar{t} \leq 0.5\bar{t}_1^*$ (где \bar{t}_1^* - время до разрушения пластины при действии только одного момента M_1), затем при $0.5\bar{t}_1^* < \bar{t} < \bar{t}_\omega^*$ в этой же плоскости прикладывается момент $M_2 > 0$.

В соответствии со схемой нагружения и соотношениями для ζ_i ($i=1, 2$ - две стадии нагружения) в (3.15) $\zeta_1 = M_1/M_0$ и $\zeta_2 = M_2/M_0$.

Зададим $M_0 = M_1$. Тогда $\zeta_1 = 1$, а $\zeta_2 = \zeta = M_2/M_1$. Тогда соотношения (3.15) примут следующий вид:

$$\frac{d\omega}{d\bar{t}} = \left\{ \begin{array}{ll} f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 0.5\bar{t}_1^* \\ \zeta^k \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } 0.5\bar{t}_1^* < \bar{t} < \bar{t}_\omega^* \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

Используем соотношения (3.16) для определения времен до разрушения пластины при различных значениях константы $\zeta = M_2/M_1$.

1) Пусть $\zeta = 1$.

Используя критерий разрушения $\omega = 1$, из первого уравнения соотношений (3.16) с учетом линейного вида функции $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$ (константу примем $a = 9.5$, это значение a получено при описании известных экспериментальных данных [5, 7] с помощью рассматриваемого в 1 главе диссертации подхода) и первого уравнения системы (1.7) (п. 1.1.1) определим время \bar{t}_1^* . Используем только первую стадию диффузионного процесса.

$$\omega_1^* = \int_0^{\bar{t}_1^*} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = \int_0^{\bar{t}_1^*} \left[1 + 9.5 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} \right] d\bar{t} = 1; \quad \bar{t}_1^* = 0.422; \quad \bar{t}_1 = \frac{1}{2} \bar{t}_1^* = 0.211.$$

Т.к. $\bar{t}_1^* < 1$, то использование только первой стадии диффузионного процесса (первого уравнения системы (1.7)) верно.

I стадия нагружения (действует момент M_1 в течение $0 < \bar{t} \leq 0.5\bar{t}_1^*$).

Из первого уравнения соотношения (3.16) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\bar{t}} &= f(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1 + a \cdot \bar{c}_m(\bar{t}), \\ \omega(\bar{t}) &= \int_0^{\bar{t}} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = \int_0^{\bar{t}} [1 + a \cdot \bar{c}_m(\bar{t})] d\bar{t} = \int_0^{\bar{t}} \left[1 + 9.5 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} \right] d\bar{t} = \bar{t} + \frac{19}{9} \cdot (\bar{t})^{1.5}. \end{aligned}$$

При $\bar{t}_1 = \frac{1}{2} \bar{t}_1^* = 0.211$ поврежденность $\omega(\bar{t}_1) = 0.416$.

II стадия нагружения (действует момент M_2 в течение $0.5\bar{t}_1^* < \bar{t} < \bar{t}_\omega^*$)

$$\begin{aligned} \omega(\bar{t}) &= \omega(\bar{t}_1) + \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}} \zeta^k \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = 0.416 + 1^3 \cdot \int_{0.211}^{\bar{t}} \left[1 + 9.5 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} \right] d\bar{t} = \\ &= 0.416 + \left(\bar{t} + \frac{19}{9} \cdot (\bar{t})^{1.5} \right) - \left(0.211 + \frac{19}{9} \cdot (0.211)^{1.5} \right). \end{aligned}$$

Используем критерий разрушения:

$$\omega(\bar{t}_\omega^*) = 0.416 + \left(\bar{t}_\omega^* + \frac{19}{9} \cdot (\bar{t}_\omega^*)^{1.5} \right) - \left(0.211 + \frac{19}{9} \cdot (0.211)^{1.5} \right) = 1.$$

Отсюда $\bar{t}_\omega^* = 0.422$.

2) Пусть $\zeta = 2$.

I стадия нагружения (действует момент M_1 в течение $0 < \bar{t} \leq 0.5\bar{t}_1^*$).

Из первого уравнения соотношения (3.16) получим:

$$\frac{d\omega}{d\bar{t}} = f(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1 + a \cdot \bar{c}_m(\bar{t}),$$

$$\omega(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = \int_0^{\bar{t}} \left[1 + a \cdot \bar{c}_m(\bar{t}) \right] d\bar{t} = \int_0^{\bar{t}} \left[1 + 9.5 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} \right] d\bar{t} = \bar{t} + \frac{19}{9} \cdot (\bar{t})^{1.5}.$$

При $\bar{t}_1 = \frac{1}{2} \bar{t}_1^* = 0.211$ поврежденность $\omega(\bar{t}_1) = 0.416$.

II стадия нагружения (действует момент M_2 в течение $0.5\bar{t}_1^* < \bar{t} < \bar{t}_\omega^*$)

$$\begin{aligned} \omega(\bar{t}) &= \omega(\bar{t}_1) + \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}} \zeta^k \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = 0.416 + 2^3 \cdot \int_{0.211}^{\bar{t}} \left[1 + 9.5 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} \right] d\bar{t} = \\ &= 0.416 + 8 \cdot \left(\bar{t} + \frac{19}{9} \cdot (\bar{t})^{1.5} \right) - 8 \cdot \left(0.211 + \frac{19}{9} \cdot (0.211)^{1.5} \right). \end{aligned}$$

Используем критерий разрушения:

$$\omega(\bar{t}_\omega^*) = 0.416 + 8 \cdot \left(\bar{t}_\omega^* + \frac{19}{9} \cdot (\bar{t}_\omega^*)^{1.5} \right) - 8 \cdot \left(0.211 + \frac{19}{9} \cdot (0.211)^{1.5} \right) = 1.$$

Отсюда $\bar{t}_\omega^* = 0.240$.

3) Пусть $\zeta = 0.5$ (в этом случае $M_2 = 0.5M_1$).

Проверим необходимость учета второго уравнения $\bar{c}_m(\bar{t})$ из соотношения

(1.7). Для этого проверим величину поврежденности $\omega(1) = \omega(\bar{t} = 1)$.

$$\begin{aligned} \omega(1) &= \omega(\bar{t}_1) + \int_{\bar{t}_1}^1 \zeta^k \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = 0.416 + 0.5^3 \cdot \int_{0.211}^1 \left[1 + 9.5 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} \right] d\bar{t} = \\ &= 0.416 + 0.125 \cdot \left(1 + \frac{19}{9} \cdot (1)^{1.5} \right) - 0.125 \cdot \left(0.211 + \frac{19}{9} \cdot (0.211)^{1.5} \right) = 0.753. \end{aligned}$$

Итак, при $\bar{t} = 1$ разрушение еще не наступает ($\omega(1) = 0.752 < 1$) и нужно использовать дополнительно 2-ю строку соотношения (1.7) $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$ при $\bar{t} > 1$ (п. 1.1.1). Тогда поврежденность в момент разрушения будет определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega(\bar{t}_\omega^*) &= 0.753 + 0.5^3 \int_1^{\bar{t}_\omega^*} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = 0.753 + 0.5^3 \int_1^{\bar{t}_\omega^*} \left\{ 1 + 9.5 \cdot \left[1 - \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{\bar{t}-1}{4}\right) \right] \right\} d\bar{t} = \\ &= 0.753 + 0.5^3 \left\{ 10.5\bar{t} + 9.5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{t}-1}{4}\right) \right\} \Big|_1^{\bar{t}_\omega^*} = \\ &= 0.753 + 0.5^3 \left\{ \left[10.5\bar{t}_\omega^* + 9.5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{t}_\omega^*-1}{4}\right) \right] - \left[10.5 \cdot 1 + 9.5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \exp\left(-\frac{1-1}{4}\right) \right] \right\} = 1. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения определим время до разрушения \bar{t}_ω^* .

$$\bar{t}_\omega^* = 1.195.$$

В таблице 3.1 показаны времена до разрушения \bar{t}_ω^* пластины при различных значениях параметра $\zeta = M_2/M_1$, а также суммы парциальных времен

$$S = \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1^*} + \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_2^*} = \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1^*} + \frac{(\bar{t}_\omega^* - \bar{t}_1)}{\bar{t}_2^*}, \text{ где } \bar{t}_2^* - \text{ время до разрушения пластины в условиях}$$

действия только одного момента M_2 .

Таблица 3.1 - Времена до разрушения пластины и сумма парциальных времен S при различных значениях параметра $\zeta = M_2/M_1$.

Значение параметра ζ	Время до разрушения \bar{t}_ω^*	S
2	0.240	0.867
1	0.422	1.000
0.5	1.195	1.164

Из таблицы 3.1 следует, что последовательное уменьшение (увеличение) напряжений приводит к увеличению (уменьшению) времени до разрушения \bar{t}_ω^* и

увеличению (уменьшению) суммы парциальных времен S , при этом $(S-1) > 0$ для $(M_2 - M_1) < 0$ и $(S-1) \leq 0$ для $(M_2 - M_1) \geq 0$.

Можно провести аналогию полученных результатов с результатами испытаний стержня на длительную прочность при кусочно-постоянном растягивающем напряжении $\sigma(t)$ [43-45]:

$$\sigma(t) = \sigma_1 \text{ при } 0 < t < t_1, \quad \sigma(t) = \sigma_2 \text{ при } t_1 < t < t_{\omega}^*.$$

Эти испытания показали следующие результаты:

$$S = 3.15 > 1 \text{ при } \sigma_1 > \sigma_2, \quad S = 0.77 < 1 \text{ при } \sigma_1 < \sigma_2, \quad [43]$$

$$S = 1.26 > 1 \text{ при } \sigma_1 > \sigma_2, \quad S = 0.71 < 1 \text{ при } \sigma_1 < \sigma_2, \quad [44]$$

$$S = 1.04 > 1 \text{ при } \sigma_1 > \sigma_2, \quad S = 0.84 < 1 \text{ при } \sigma_1 < \sigma_2. \quad [45]$$

Как в рассмотренных результатах испытаний растягиваемых стержней, так и при аналогичном исследовании изгибаемых пластин ступенчатое увеличение изгибающего момента приводит к уменьшению суммы парциальных времен S относительно единицы, а уменьшение изгибающего момента - к увеличению величины S .

3.2.2 Длительная прочность пластины при кусочно-постоянных изгибающих моментах (двухосный случай)

Сначала к пластине прикладывается момент $M_1 > 0$, который действует в одной плоскости и приложен к паре противоположно расположенных краев пластины в течение времени $0 < \bar{t} \leq 0.5\bar{t}_1^*$ (где \bar{t}_1^* - время до разрушения пластины при действии только одного момента M_1). При этом $M_2 = 0$ (под M_2 понимается изгибающий момент, прикладываемый в другой плоскости к другой паре противоположно расположенных краев пластины), затем при $0.5\bar{t}_1^* < \bar{t} < \bar{t}^*$

выполняются условия $M_1 = 0$, $M_2 > 0$. Схема нагружения пластины показана на рисунке 3.3.

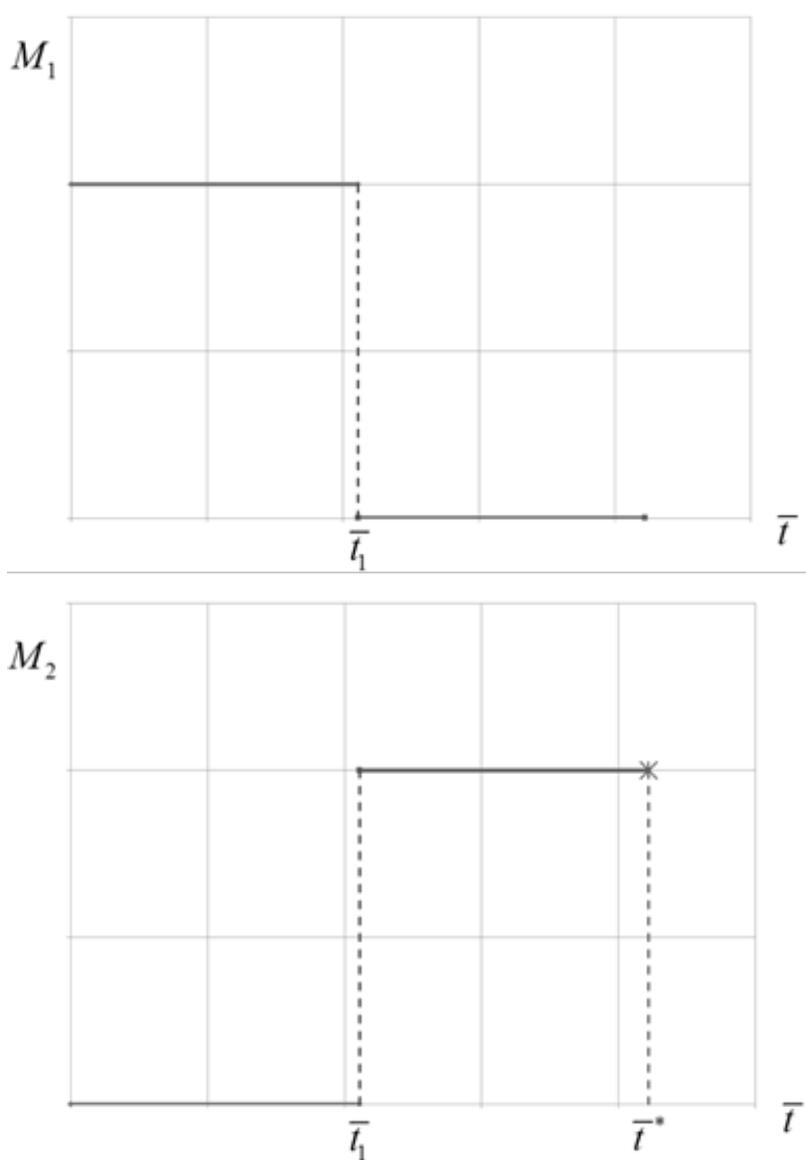


Рис. 3.3. Схема нагружения пластины (двухосный случай)

Как и в п. 3.2.1 используем кинетическую теорию ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова и введем в кинетические уравнения функцию от интегрально средней концентрации.

Кинетические уравнения при учете скалярного параметра поврежденности рассмотрим в следующем виде:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{d\bar{t}} = \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_0} \right)^k \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad (3.17)$$

где σ_u - интенсивность напряжений.

Поскольку в соответствии с принятой схемой нагружения на каждом этапе нагружения действует только один из двух изгибающих моментов (второй момент равен нулю), то время до разрушения можно определить, принимая в соответствии с (3.11) следующие выражения:

$$\sigma_u = \begin{cases} \sigma_1(M_1) & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 0.5\bar{t}_1^* , \\ \sigma_2(M_2) & \text{при } 0.5\bar{t}_1^* < \bar{t} < \bar{t}^* . \end{cases} \quad (3.18)$$

Кинетические уравнения при учете векторного параметра поврежденности примем в следующем виде [46]:

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_i = \frac{d\Omega_i}{d\bar{t}} = \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^k \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \sigma_i > 0 , \quad i=1, 2 \\ 0 & \text{при } \sigma_i \leq 0 , \end{cases} \quad (3.19)$$

где Ω_i - проекция вектора поврежденности на i -ю ось системы координат, σ_0 - постоянная величина размерности МПа .

Поврежденность (модуль вектора поврежденности) определяется как $\Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$.

В соответствии с кинетической теорией критерием разрушения пластины принимается условие: $\Omega(\bar{t}_\Omega^*) = 1$, где \bar{t}_Ω^* - время до разрушения пластины, определенное с использованием векторного параметра поврежденности.

Из (3.11) и (3.19) следует, что равенство параметра поврежденности единице наступает впервые на внешней стороне поверхности $z = 0.5H$, при увеличении времени на поверхности $z = 0.5H$ возникает фронт разрушения, при реальных значениях показателя степени $3 < n < 9$ фронт разрушения движется достаточно быстро. В связи с этим временем разрушения пластины примем время, при котором $\Omega_i|_{z=0.5H} = 1$, при этом согласно (3.11)

$$\sigma_i(z = 0.5H) = \frac{2(2n+1)}{H^2 n} \cdot M_i. \quad (3.20)$$

Используем постоянную безразмерную величину $G = \left[\frac{2(2n+1)}{H^2 n} \cdot \frac{M_0}{\sigma_0} \right]^k$, где M_0 - произвольная величина размерности Н.

Тогда уравнения (3.19) принимают вид:

$$\frac{d\Omega_i}{d\bar{t}} = \begin{cases} G(\zeta_i)^k \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \zeta_i = M_i/M_0 > 0 \\ 0 & \text{при } \zeta_i = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

где M_i - величина изгибающего момента на i -й стадии нагружения.

Согласно схеме нагружения момент M_i действует на i -й стадии нагружения и вызывает возникновение поврежденности в направлении i -й оси системы координат, т.е. момент M_1 действует на 1-й стадии нагружения и вызывает возникновение поврежденности с проекцией вектора поврежденности 1-ю ось системы координат, а момент M_2 действует на 2-й стадии нагружения и вызывает возникновение поврежденности с проекцией вектора на 2-ю ось системы координат. Поэтому в соотношении (3.21) используется один и тот же индекс i для обозначения проекции вектора поврежденности и стадии нагружения. В общем случае необходимо использовать два индекса в обозначении.

Поскольку в соотношение для G входит M_0 как произвольная величина размерности Н, то можно всегда подобрать её такой, чтобы $G = 1$. Таким образом, соотношение (3.21) принимает следующий вид:

$$\frac{d\Omega_i}{d\bar{t}} = \begin{cases} (\zeta_i)^k \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \zeta_i = M_i/M_0 > 0, \\ 0 & \text{при } \zeta_i = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Зададим $M_0 = M_1$. Тогда $\zeta_1 = 1$, а $\zeta_2 = \zeta = M_2/M_1$. Тогда соотношения (3.22) на 1-й и 2-й стадиях нагружения соответственно примут следующий вид:

$$\frac{d\Omega_1}{d\bar{t}} = \begin{cases} f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 0.5\bar{t}_1^*, \\ 0 & \text{при } 0.5\bar{t}_1^* < \bar{t} < \bar{t}_\Omega^*, \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\frac{d\Omega_2}{d\bar{t}} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 0.5\bar{t}_1^*, \\ \zeta^k \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } 0.5\bar{t}_1^* < \bar{t} < \bar{t}_\Omega^*. \end{array} \right\} \quad (3.24)$$

Используем соотношения (3.23) и (3.24) для определения времен до разрушения пластины при различных значениях константы $\zeta = M_2/M_1$.

Используя критерий разрушения $\omega = 1$, из первого уравнения соотношений (3.23) с учетом линейного вида функции $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$ (константу примем $a = 9.5$) и первого уравнения системы (1.7) (п. 1.1.1) определим время \bar{t}_1^* .

Используем только первую стадию диффузионного процесса.

$$\Omega_1^* = \int_0^{\bar{t}_1^*} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t} = \int_0^{\bar{t}_1^*} \left[1 + 9.5 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} \right] d\bar{t} = 1; \quad \bar{t}_1^* = 0.422; \quad \bar{t}_1 = \frac{1}{2} \bar{t}_1^* = 0.211.$$

Т.к. $\bar{t}_1^* < 1$, то использование только первой стадии диффузионного процесса (первого уравнения системы (1.7)) верно.

В течение всего времени $0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_1$ поврежденность $\Omega_2(\bar{t}) \equiv 0$ (в связи с нулевым значением момента $M_2 = 0$ на протяжении всей первой стадии).

Таким образом, компоненты вектора поврежденности на I стадия нагружения имеют вид:

$$\Omega_1(\bar{t}) = \bar{t} + \frac{19}{9} (\bar{t})^{1.5}, \quad \Omega_2(\bar{t}) \equiv 0 \quad \text{при } 0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_1; \quad \Omega_1(\bar{t}_1) = 0.416.$$

где $\Omega_1(\bar{t})$ - проекция вектора поврежденности на ось 1 системы координат,

$\Omega_2(\bar{t})$ - проекция вектора поврежденности на ось 2 системы координат.

Рассмотрим II стадию нагружения: $M_1 = 0$, $M_2 = \zeta M_1$.

Поврежденность на второй стадии от действия момента $M_2 = \zeta M_1$ при $M_1 = 0$

согласно уравнению (3.24) определяется как $\Omega_2(\bar{t}) = \zeta^k \cdot \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}} f(\bar{c}_m(\bar{t})) d\bar{t}$.

Таким образом, компоненты вектора поврежденности на II стадии нагружения имеют вид:

$$\begin{cases} \Omega_1(\bar{t}) = \Omega_1(\bar{t}_1) = 0,416 & \text{при } \bar{t} > \bar{t}_1, \\ \Omega_2(\bar{t}) = \zeta^k \cdot \left[\left(\bar{t} + \frac{19}{9}(\bar{t})^{1.5} \right) - 0,416 \right] & \text{при } \bar{t} > \bar{t}_1. \end{cases}$$

Время до разрушения \bar{t}_Ω^* при векторном подходе определяется с помощью следующего критерия разрушения: $[\Omega_1(\bar{t}_\Omega^*)]^2 + [\Omega_2(\bar{t}_\Omega^*)]^2 = 1$.

Компонента вектора $\Omega_1(\bar{t}_\Omega^*)$ в данном случае равна $\Omega_1(\bar{t}_\Omega^*) = \Omega_1(\bar{t}_1)$, т.к. поврежденность $\Omega_1(\bar{t}_1)$ накопленная на первой стадии нагружения сохраняется и на второй стадии до разрушения ($\Omega_1(\bar{t}_\Omega^*)$).

В случае скалярного параметра поврежденности время до разрушения \bar{t}_ω^* определяется с помощью (3.17) и (3.18) на основе критерия: $\omega(\bar{t}_\omega^*) = 1$.

3.2.3 Результаты расчетов

На рисунке 3.4 приведены зависимости поврежденности от времени $\omega(\bar{t})$ и $\Omega(\bar{t})$ при значениях параметра $\zeta = M_2/M_1 = 1, 2, 0.5$.

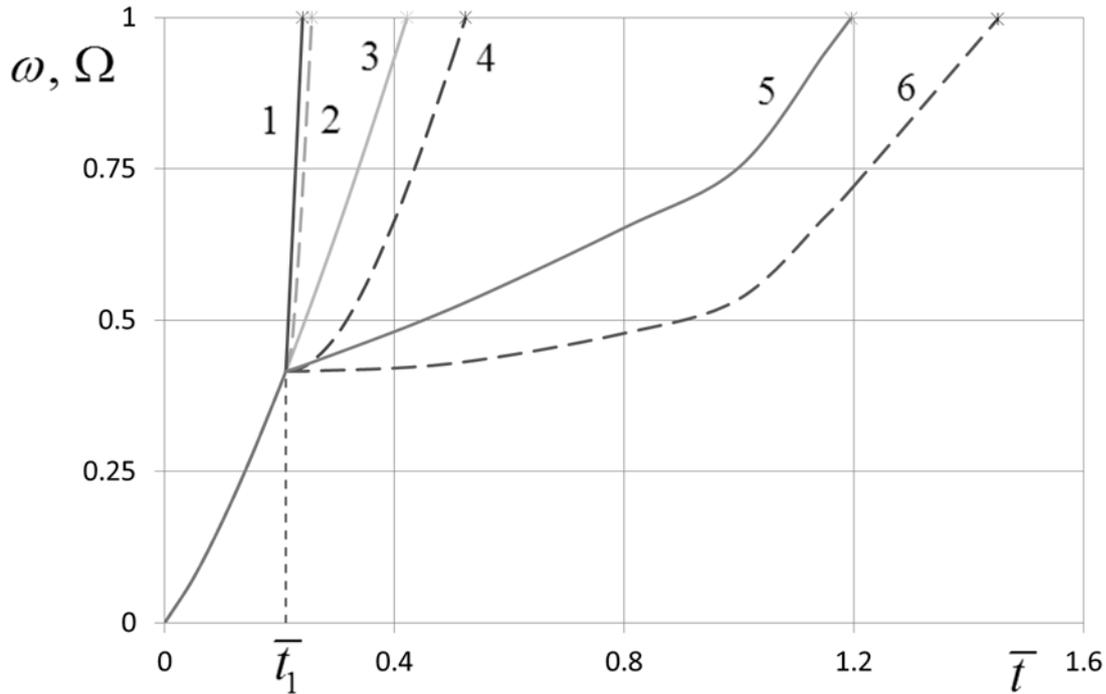


Рис. 3.4. Зависимости поврежденности от времени $\omega(\bar{t})$ и $\Omega(\bar{t})$ при значениях параметра $\zeta = M_2/M_1 = 1, 2, 0.5$.

На рисунке сплошная линия обозначает зависимость скалярного параметра $\omega(\bar{t})$ от времени \bar{t} . Штриховая линия обозначает зависимость векторного параметра $\Omega(\bar{t})$ от времени \bar{t} . Линии 1, 2 соответствуют параметру $\zeta = 2$, линии 3, 4 – параметру $\zeta = 1$, линии 5, 6 – параметру $\zeta = 0.5$.

Примечания:

- 1) В интервале времени $0 < \bar{t} < \bar{t}_1$ графики для векторной и скалярной поврежденности совпадают.
- 2) Для линий 5 и 6, соответствующих значению $\zeta = 0.5$, в момент времени $\bar{t} = 1$ начинается второго этапа (насыщения) диффузионного процесса.
- 3) Графики на второй стадии нагружения $0.5\bar{t}_1^* < \bar{t} < \bar{t}^*$ имеют визуально почти незаметную от прямолинейной зависимость $\omega(\bar{t})$, поскольку $\omega(\bar{t})$ пропорционально $\omega(\bar{t}) \sim \bar{t} + \frac{19}{9} \cdot \bar{t}^{1.5}$.

В таблице 3.2 приведены значения времен до разрушения \bar{t}_ω^* и \bar{t}_Ω^* , полученные при использовании скалярного и векторного параметра поврежденности соответственно, а также суммы парциальных времен $S = \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1^*} + \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_2^*} = \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1^*} + \frac{(\bar{t}^* - \bar{t}_1)}{\bar{t}_2^*}$ (где \bar{t}_2^* - время до разрушения пластины в условиях действия только одного момента M_2), значения S_ω и S_Ω определяются соответственно при использовании скалярного или векторного подходов.

Таблица 3.2 - Времена до разрушения и суммы парциальных времен до разрушения.

$\zeta = M_2/M_1$	\bar{t}_ω^*	S_ω	\bar{t}_Ω^*	S_Ω
2	0.240	0.867	0.256	1.070
1	0.422	1.000	0.524	1.242
0.5	1.195	1.164	1.450	1.335

Из рисунка 3.4 и таблицы 3.2 следует, что векторный подход всегда приводит к большему значению времени до разрушения и к большей сумме парциальных времен.

3.3 Определение компонент напряженно-деформированного состояния при использовании дробно-линейной модели ползучести

Определяющее соотношение примем в виде:

$$\dot{p}_u = B \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} \right)^n \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad n = 1. \quad (3.25)$$

Дополнительно примем следующие допущения:

- 1) распределение напряжений по толщине пластины в направлении оси 3 равно нулю $\sigma_3 = 0$ (толщина пластины H мала по сравнению с двумя другими размерами пластины) это означает, что в пластине осуществляется плоское напряженное состояние;
- 2) несжимаемость материала пластины при малых деформациях имеет вид $\dot{p}_3 = -(\dot{p}_1 + \dot{p}_2)$.
- 3) Принимается нерастяжимость срединной поверхности пластины, вследствие этого изменением длины средней линии пренебрегается.

В этих предположениях интенсивности напряжений и скоростей деформаций ползучести принимают следующий вид:

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}, \quad \dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\dot{p}_1^2 + \dot{p}_1\dot{p}_2 + \dot{p}_2^2}.$$

Упругопластическими деформациями пренебрегаем по сравнению с деформациями ползучести.

По аналогии с σ_u и \dot{p}_u введем интенсивность изгибающих моментов M_u и интенсивность скоростей изменения кривизны пластины $\dot{\chi}_u$ соответственно:

$$M_u = \sqrt{M_1^2 - M_1M_2 + M_2^2}, \quad \dot{\chi}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_1\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2}. \quad (3.26)$$

Пренебрегаем изменением длины средней линии:

$$\dot{p}_i = \dot{\chi}_i z \quad (3.27)$$

(здесь и всюду далее индекс i принимает значения $i=1, 2$, координата z отсчитывается в направлении оси 3), в этом случае

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} |z| \sqrt{(\dot{\chi}_1)^2 + (\dot{\chi}_1\dot{\chi}_2) + (\dot{\chi}_2)^2} = |z| \dot{\chi}_u.$$

Из определяющего соотношения (3.25) выразим интенсивность напряжений:

$$\dot{p}_u = B \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} \right)^n \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad n=1$$

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} = \frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))},$$

$$\sigma_u = \left(\frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \cdot (\sigma_b - \sigma_u),$$

$$\sigma_u = \left(\frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \cdot \sigma_b - \left(\frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \cdot \sigma_u,$$

$$\sigma_u + \left(\frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \cdot \sigma_u = \left(\frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \cdot \sigma_b,$$

$$\sigma_u \cdot \left[1 + \left(\frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \right] = \left(\frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \cdot \sigma_b,$$

$$\sigma_u = \left\{ \left(\frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \cdot \sigma_b \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \right]} \right\},$$

$$\sigma_u = \sigma_b \cdot \left\{ \frac{\left(\frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right)}{\left[1 + \left(\frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \right]} \right\} = \sigma_b \cdot \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\dot{p}_u}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) + 1} \right\}^{-1},$$

$$\sigma_u = \sigma_b \cdot \left\{ 1 + \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\dot{p}_u} \right\}^{-1} \quad (3.28)$$

Используем гипотезу пропорциональности девиаторов напряжений s_{ij} и скоростей деформаций ползучести \dot{p}_{ij} :

$$\dot{p}_i = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_u(\sigma_u, \bar{t})}{\sigma_u} (\sigma_i - \sigma_{cp}), \quad \sigma_{cp} = (\sigma_1 + \sigma_2)/3 \quad (3.29)$$

На основе гипотезы плоских сечений (3.27) и соотношений (3.25) и (3.29) запишем:

$$\dot{p}_i = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_u(\sigma_u, \bar{t})}{\sigma_u} (\sigma_i - \sigma_0),$$

$$\dot{p}_u = \frac{dp_u}{d\bar{t}} = B \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})),$$

$$\dot{p}_1 = \dot{\chi}_1 \cdot z = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_u(\sigma_u, \bar{t})}{\sigma_u} \left(\sigma_1 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2) \right) = \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \cdot \frac{1}{\sigma_u} \left(\sigma_1 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2) \right)$$

$$\dot{p}_1 = \dot{\chi}_1 \cdot z = \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{(\sigma_b - \sigma_u)} \left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 \right).$$

Аналогично можно поручить выражение для \dot{p}_2 :

$$\dot{p}_2 = \dot{\chi}_2 \cdot z = \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{(\sigma_b - \sigma_u)} \left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 \right).$$

Получим выражения для напряжений (для этого сложим два последних соотношения для \dot{p}_1 и \dot{p}_2 , причем соотношение для \dot{p}_1 умножим на 2):

$$\dot{p}_1 = \dot{\chi}_1 \cdot z = \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{(\sigma_b - \sigma_u)} \left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 \right),$$

$$\dot{p}_2 = \dot{\chi}_2 \cdot z = \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{(\sigma_b - \sigma_u)} \left(\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1 \right),$$

$$(2\dot{p}_1 + \dot{p}_2) = z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) = \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{(\sigma_b - \sigma_u)} \cdot \left[2 \left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 \right) + \left(\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1 \right) \right],$$

$$(2\dot{p}_1 + \dot{p}_2) = z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) = \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{(\sigma_b - \sigma_u)} \cdot \left[2\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1 \right],$$

$$(2\dot{p}_1 + \dot{p}_2) = z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) = \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{(\sigma_b - \sigma_u)} \cdot \frac{3}{2}\sigma_1,$$

$$\sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{(\sigma_b - \sigma_u)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2).$$

Аналогично получим выражение для напряжения $\bar{\sigma}_2$ (для этого сложим соотношения для \dot{p}_1 и \dot{p}_2 , причем соотношение для \dot{p}_2 умножим на 2):

$$\sigma_2 = \frac{2}{3} \frac{(\sigma_b - \sigma_u)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z(2\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_1).$$

Используя соотношение (3.28), для σ_u получим:

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \sigma_b \cdot \left\{ 1 + \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\dot{p}_u} \right\}^{-1} = \sigma_b \cdot \left(\frac{\dot{p}_u}{\dot{p}_u + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right), \\ \sigma_1 &= \frac{2}{3} \frac{(\sigma_b - \sigma_u)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) = \frac{2}{3} \frac{\left(\sigma_b - \sigma_b \cdot \left(\frac{\dot{p}_u}{\dot{p}_u + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \right)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) = \\ &= \frac{2}{3} \sigma_b \frac{\left(1 - \frac{\dot{p}_u}{\dot{p}_u + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) = \frac{2}{3} \sigma_b \frac{\left(\frac{\dot{p}_u + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) - \dot{p}_u}{\dot{p}_u + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2), \\ \sigma_1 &= \frac{2}{3} \sigma_b \frac{\left(\frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\dot{p}_u + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2), \\ \sigma_1 &= \frac{2}{3} \sigma_b \left(\frac{1}{\dot{p}_u + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\sigma_2 = \frac{2}{3} \sigma_b \left(\frac{1}{\dot{p}_u + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) z(2\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_1).$$

С учетом $\dot{p}_u = \dot{\chi}_u \cdot |z|$ соотношения для напряжений примут вид:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{2}{3} \sigma_b \left(\frac{1}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2), \\ \sigma_2 = \frac{2}{3} \sigma_b \left(\frac{1}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) z(2\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_1). \end{cases} \quad (3.30)$$

Уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$M_1 = 2 \int_0^{H/2} \sigma_1 z dz; \quad M_2 = 2 \int_0^{H/2} \sigma_2 z dz; \quad N_1 = 0; \quad N_2 = 0 \quad (3.31)$$

где N_1, N_2 - осевые силы.

Равенство нулю осевых сил выполняется автоматически.

Подставляя выражение (3.30) в уравнение равновесия (3.31), получим:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= 2 \int_0^{H/2} \sigma_1 z dz = 2 \int_0^{H/2} \left[\frac{2}{3} \sigma_b \left(\frac{1}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) z (2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) \right] z dz = \\
 &= \frac{4}{3} \sigma_b (2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) \int_0^{H/2} \left[\left(\frac{1}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \right] z^2 dz = \\
 &= \frac{4}{3} \sigma_b \frac{(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \int_0^{H/2} \left[\left(\frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \right] z^2 dz = \\
 &= \frac{4}{3} \sigma_b \frac{(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \int_0^{H/2} \left[\left(\frac{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) - \dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \right] z^2 dz = \\
 &= \frac{4}{3} \sigma_b \frac{(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \int_0^{H/2} \left[\left(1 - \frac{\dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \right] z^2 dz = \\
 &= \frac{4}{3} \sigma_b \frac{(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \cdot I. \\
 I &= \int_0^{H/2} \left[\left(1 - \frac{\dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) \right] z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^{H/2} - \int_0^{H/2} \frac{\dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z^2 dz = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{H^3}{8} - \int_0^{H/2} \frac{\dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z^2 dz = \frac{H^3}{24} - \int_0^{H/2} \frac{\dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z^2 dz.
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{4}{3} \sigma_b \frac{(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \cdot I = P_0 \cdot (2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2), \\ M_2 = \frac{4}{3} \sigma_b \frac{(2\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_1)}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \cdot I = P_0 \cdot (2\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_1), \end{cases} \quad (3.32)$$

где $P_0 = \frac{4}{3} \sigma_b \frac{1}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \cdot I$.

Подставляя выражения (3.32) в (3.26), получим интенсивность M_u в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 M_u &= \sqrt{M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2} = \\
 &= P_0 \sqrt{(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2)^2 - (2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2)(\dot{\chi}_1 + 2\dot{\chi}_2) + (\dot{\chi}_1 + 2\dot{\chi}_2)^2} = \\
 &= P_0 \sqrt{(4\dot{\chi}_1^2 + 4\dot{\chi}_1\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2) - (2\dot{\chi}_1^2 + 5\dot{\chi}_2\dot{\chi}_1 + 2\dot{\chi}_2^2) + (\dot{\chi}_1^2 + 2\dot{\chi}_1\dot{\chi}_2 + 4\dot{\chi}_2^2)} = \\
 &= P_0 \sqrt{3\dot{\chi}_1^2 + 3\dot{\chi}_1\dot{\chi}_2 + 3\dot{\chi}_2^2} = P_0 \sqrt{3} \cdot \sqrt{\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_1\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2} = \\
 &= P_0 \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\chi}_u = \frac{3}{2} P_0 \cdot \dot{\chi}_u .
 \end{aligned}$$

Итак,

$$P_0 = \frac{4}{3} \sigma_b \frac{1}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \cdot I,$$

$$M_u = \frac{3}{2} P_0 \cdot \dot{\chi}_u .$$

Выразим интенсивность скоростей кривизн $\dot{\chi}_u$ через интенсивность моментов M_u с учетом P_0 .

$$M_u = \frac{3}{2} P_0 \cdot \dot{\chi}_u,$$

$$\dot{\chi}_u = \frac{2}{3P_0} M_u,$$

$$P_0 = \frac{4}{3} \sigma_b \frac{1}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \cdot I,$$

$$\dot{\chi}_u = \frac{2}{3P_0} M_u = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_u = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_u.$$

Скорости изменения кривизн и изгибающие моменты свяжем следующими уравнениями (по аналогии связи девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести):

Пусть

$$\dot{\chi}_1 = \frac{3}{2} \frac{\dot{\chi}_u}{M_u} \left(M_1 - \frac{1}{3} (M_1 + M_2) \right) = \frac{\dot{\chi}_u}{M_u} \left(M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right).$$

С учетом $\dot{\chi}_u$ и P_0 получим:

$$\dot{\chi}_u = \frac{2}{3P_0} M_u,$$

$$P_0 = \frac{4}{3} \sigma_b \frac{1}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \cdot I,$$

$$\dot{\chi}_1 = \frac{2}{3P_0} \left(M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right).$$

$$\dot{\chi}_1 = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right).$$

Аналогично

$$\dot{\chi}_2 = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_2 - \frac{1}{2} M_1 \right).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1 = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right), \\ \dot{\chi}_2 = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_2 - \frac{1}{2} M_1 \right). \end{cases} \quad (3.33)$$

Проверим связь M_u и $\dot{\chi}_u$:

$$\dot{\chi}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_1 \dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2},$$

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1 = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right) = Q_0 \left(M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right), \\ \dot{\chi}_2 = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_2 - \frac{1}{2} M_1 \right) = Q_0 \left(M_2 - \frac{1}{2} M_1 \right), \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\chi}_u &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_1 \dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_2^2} = Q_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \times \\
&\times \sqrt{\left(M_1 - \frac{1}{2}M_2\right)^2 + \left(M_1 - \frac{1}{2}M_2\right)\left(M_2 - \frac{1}{2}M_1\right) + \left(M_2 - \frac{1}{2}M_1\right)^2} = Q_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \times \\
&\times \sqrt{\left(M_1^2 - M_1M_2 + \frac{1}{4}M_2^2\right) + \left(M_1M_2 - \frac{1}{2}M_2^2 - \frac{1}{2}M_1^2 + \frac{1}{4}M_1M_2\right) + \left(M_2^2 - M_1M_2 + \frac{1}{4}M_1^2\right)} = \\
&= Q_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3}{4}M_1^2 - \frac{3}{4}M_1M_2 + \frac{3}{4}M_2^2} = Q_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{M_1^2 - M_1M_2 + M_2^2} = \\
&= Q_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} M_u = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_u.
\end{aligned}$$

Подставим скорости изменения кривизн (3.33) в выражения для напряжений (3.30) и получим, что напряжения не зависят от агрессивной среды.

$$\begin{cases}
\sigma_1 = \frac{2}{3} \sigma_b \left(\frac{1}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) z (2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2), \\
\sigma_2 = \frac{2}{3} \sigma_b \left(\frac{1}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) z (2\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_1), \\
\dot{\chi}_1 = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_1 - \frac{1}{2}M_2 \right), \\
\dot{\chi}_2 = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_2 - \frac{1}{2}M_1 \right), \\
\dot{\chi}_u = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_u.
\end{cases}$$

Проведем выкладки для σ_1 .

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{2}{3} \sigma_b \left(\frac{1}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) z (2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2), \\
\begin{cases}
\dot{\chi}_1 = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_1 - \frac{1}{2}M_2 \right), \\
\dot{\chi}_2 = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_2 - \frac{1}{2}M_1 \right),
\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_u &= \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_u, \\ (2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) &= \left(2 \left(\frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right) \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \left(M_2 - \frac{1}{2} M_1 \right) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \cdot \left(2 \left(\left(M_1 - \frac{1}{2} M_2 \right) \right) + \left(\left(M_2 - \frac{1}{2} M_1 \right) \right) \right) = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} \cdot \left(\frac{3}{2} M_1 \right) = \\ &= \frac{3}{4} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_1.\end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}(2\dot{\chi}_2 + \dot{\chi}_1) &= \frac{3}{4} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_2. \\ \sigma_1 &= \frac{2}{3} \sigma_b \left(\frac{1}{\frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_u \cdot z + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \right) z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) = \\ &= \frac{2}{3} \sigma_b \left(\frac{1}{\frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \cdot M_u \cdot z + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \cdot 2 \cdot \sigma_b \cdot I}{2 \cdot \sigma_b \cdot I}} \right) z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) = \\ &= \frac{2}{3} \sigma_b \left(\frac{2 \cdot \sigma_b \cdot I}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \cdot M_u \cdot z + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \cdot 2 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) z(2\dot{\chi}_1 + \dot{\chi}_2) = \\ &= \frac{2}{3} \sigma_b \left(\frac{2 \cdot \sigma_b \cdot I}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \cdot M_u \cdot z + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \cdot 2 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) z \frac{3}{4} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_1 = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_b \frac{1}{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \left(\frac{2 \cdot \sigma_b \cdot I}{M_u \cdot z + 2 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) z \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_1 = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_b \frac{1}{1} \left(\frac{2 \cdot 1}{M_u \cdot z + 2 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) z \frac{1}{1} M_1 = \frac{1}{2} \sigma_b \left(\frac{2 \cdot z}{M_u \cdot z + 2 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_1 = \\ &= \sigma_b \left(\frac{z}{M_u \cdot z + 2 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_1.\end{aligned}$$

Итак,

$$\sigma_1 = \sigma_b \left(\frac{z}{M_u \cdot z + 2 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_1.$$

Системы уравнений для определения $\sigma_1(z)$ и $\sigma_2(z)$ будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_b \left(\frac{z}{M_u \cdot z + 2 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_1 \\ \dot{\chi}_u = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_u \\ I = \frac{H^3}{24} - \int_0^{H/2} \frac{\dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z^2 dz \end{array} \right. \quad (3.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2 = \sigma_b \left(\frac{z}{M_u \cdot z + 2 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_2 \\ \dot{\chi}_u = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_u \\ I = \frac{H^3}{24} - \int_0^{H/2} \frac{\dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z^2 dz \end{array} \right. \quad (3.35)$$

3.3.1 Длительная прочность пластины при кусочно-постоянных изгибающих моментах (двухосный случай)

Примем следующую программу нагружения. Сначала к пластине прикладывается момент $M_1 > 0$, который действует в одной плоскости и приложен к паре противоположно расположенных краев пластины в течение времени $0 < t \leq t_1$, $t_1 = 0.5t_1^*$ (где t_1^* - время до разрушения пластины при действии только одного момента M_1), при этом $M_2 = 0$ (под M_2 понимается изгибающий момент, прикладываемый в другой плоскости к другой паре противоположно

расположенных краев пластины). Затем в течение $t_1 < t < t^*$ выполняются условия $M_1 = 0$, $M_2 > 0$. Схема нагружения пластины аналогична схеме, которая представлена на рисунке 3.3.

Используем кинетическую теорию ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова и введем в кинетические уравнения функцию от интегрально средней концентрации.

Кинетические уравнения при учете скалярного параметра поврежденности рассмотрим в следующем виде:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})), \quad (3.36)$$

где σ_u - интенсивность напряжений.

Поскольку в соответствии с принятой схемой нагружения на каждом этапе нагружения действует только один из двух изгибающих моментов (второй момент равен нулю), то время до разрушения можно определить, принимая в соответствии с (3.11) следующие выражения:

$$\sigma_u = \begin{cases} \sigma_1(M_1) & \text{при } 0 < t \leq 0.5t_1^*, \\ \sigma_2(M_2) & \text{при } 0.5t_1^* < t < t_\omega^*. \end{cases} \quad (3.37)$$

Кинетические уравнения для поврежденности примем в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_i = \frac{d\Omega_i}{dt} = C \cdot \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_b - \sigma_i} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \sigma_i > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma_i \leq 0, \end{cases} \quad , \quad i = 1, 2, \quad (3.38)$$

где Ω_i - проекция вектора поврежденности на i -ю ось системы координат.

Распределение напряжений $\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_b$ по координате, полученное на основе численного расчета, показало, что максимальное значение достигается на внешней стороне поверхности $z = H / 2$ (т.е. $\bar{z} = \frac{2z}{H} = 1$) (смотри рисунок 3.5).

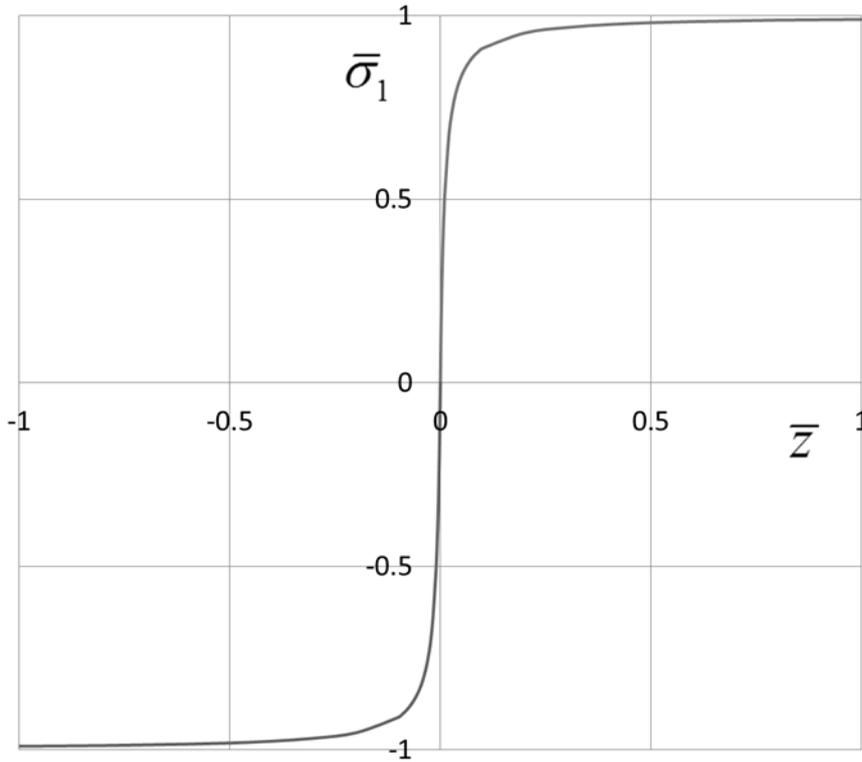


Рис. 3.5. Распределение напряжений $\bar{\sigma}_1$ по координате \bar{z} на первом этапе нагружения при $M_1 = 1$ и $M_2 = 0$.

Из (3.34), (3.35) и (3.38) следует, что равенство параметра поврежденности единице наступает впервые на внешней стороне поверхности $z = H/2$ (т.е. $\bar{z} = \frac{2z}{H} = 1$), при увеличении времени на поверхности $z = H/2$ возникает фронт разрушения, при реальных значениях показателя степени $3 < n < 9$ фронт разрушения движется достаточно быстро. В связи с этим временем разрушения пластины примем время, при котором $\Omega_i|_{z=H/2} = 1$, при этом согласно (3.34):

$$\sigma_1\left(z = \frac{H}{2}\right) = \sigma_b \left(\frac{\frac{H}{2}}{M_u \cdot \frac{H}{2} + 2 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_1 = \sigma_b \left(\frac{\frac{H}{2}}{\frac{M_u \cdot H + 2 \cdot 2 \cdot \sigma_b \cdot I}{2}} \right) M_1,$$

$$\sigma_1\left(z = \frac{H}{2}\right) = \sigma_b \left(\frac{H}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_1. \quad (3.39)$$

Подставим выражение для $\sigma_1\left(z = \frac{H}{2}\right)$ в кинетическое уравнение (3.38):

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \frac{d\Omega_1}{dt} = C \cdot \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_b - \sigma_1} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \sigma_1 > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma_1 \leq 0, \end{cases}$$

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{d\Omega_1}{dt} = C \cdot \left(\frac{\sigma_b \left(\frac{H}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_1}{\sigma_b - \sigma_b \left(\frac{H}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_1} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_1 > 0,$$

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{d\Omega_1}{dt} = C \cdot \left(\frac{\left(\frac{H}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_1}{1 - \left(\frac{H}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_1} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_1 > 0,$$

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{d\Omega_1}{dt} = C \cdot \left(\frac{\left(\frac{H \cdot M_1}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right)}{\left(\frac{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I - H \cdot M_1}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right)} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_1 > 0,$$

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{d\Omega_1}{dt} = C \cdot \left(\frac{H \cdot M_1}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I - H \cdot M_1} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_1 > 0. \quad (3.40)$$

Таким образом, система уравнений для определения поврежденности Ω_1 имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Omega}_1 = \frac{d\Omega_1}{dt} = C \cdot \left(\frac{H \cdot M_1}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I - H \cdot M_1} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_1 > 0, \\ I = \frac{H^3}{24} - \int_0^{H/2} \frac{\dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z^2 dz, \\ \dot{\chi}_u = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_u, \\ \bar{t} = \frac{48D}{H^2} t. \end{array} \right. \quad (3.41)$$

На первой стадии нагружения $0 < t \leq t_1$, $t_1 = 0.5t_1^*$ действует момент $M_1 > 0$ (момент $M_2 = 0$). Интенсивность момента будет $M_u = \sqrt{M_1^2 - M_1M_2 + M_2^2} = M_1$.

Система уравнений (3.41) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \frac{d\Omega_1}{dt} = C \cdot \left(\frac{H \cdot M_1}{4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_1 > 0, \\ I = \frac{H^3}{24} - \int_0^{H/2} \frac{\dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z^2 dz, \\ \dot{\chi}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \dot{\chi}_1 = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_1, \\ \bar{t} = \frac{48D}{H^2} t. \end{cases} \quad (3.42)$$

В соответствии с [2, 3] и формулой (1.7) настоящего отчета $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$ имеет вид:

$$f(\bar{c}_m(\bar{t})) = 1 + a \cdot \begin{cases} \frac{1}{3} \sqrt{\bar{t}} & \text{при } \bar{t} < 1, \\ 1 - \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{\bar{t}-1}{4}\right) & \text{при } \bar{t} \geq 1, \end{cases} \quad \text{где } \bar{t} = \frac{48D}{H^2} \cdot t.$$

Преобразуем систему (3.42) безразмерному виду.

$$\text{Т.к. } M = 2 \int_0^{H/2} \sigma z dz, \text{ то } M_b = 2 \int_0^{H/2} \sigma_b z dz = 2\sigma_b \frac{z^2}{2} \Big|_0^{H/2} = \sigma_b \frac{H^2}{4}.$$

$$\text{Введем безразмерные переменные } \bar{z} = \frac{2z}{H}, \quad \hat{t} = C \cdot t, \quad \hat{M}_1 = \frac{M_1}{M_b} = \frac{4 \cdot M_1}{\sigma_b H^2},$$

$$\bar{\chi}_u = \frac{d\chi_u}{dt} = \frac{H}{2B}.$$

Выразим введенные размерные переменные через безразмерные:

$$\bar{z} = \frac{2z}{H} \rightarrow z = \frac{\bar{z}H}{2}; \quad \text{при } z = \frac{H}{2} \quad \bar{z} = 1;$$

$$\hat{t} = C \cdot t \rightarrow t = \frac{\hat{t}}{C};$$

$$\hat{M}_1 = \frac{M_1}{M_b} = \frac{4 \cdot M_1}{\sigma_b H^2} \rightarrow M_1 = \frac{\sigma_b H^2}{4} \hat{M}_1;$$

$$\frac{d\chi_u}{dt} = \dot{\chi}_u = \bar{\chi}_u \frac{2B}{H}, \quad \text{размерность} \left[\frac{d\chi_u}{dt} \right] = \frac{1}{\text{м} \cdot \text{час}} = \bar{\chi}_u \frac{1}{\text{час} \cdot \text{м}}.$$

$$\frac{d\chi_u}{dt} = \bar{\chi}_u \frac{2B}{H},$$

$$\bar{\chi}_u = \frac{d\chi_u}{dt} \cdot \frac{H}{2B}, \quad \text{размерность} \left[\bar{\chi}_u \right] = \frac{1}{\text{м} \cdot \text{час}} \cdot \frac{\text{м} \cdot \text{час}}{1} = 1.$$

Подставим полученные размерные переменные в систему (3.42) и произведем преобразования:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Omega}_1 = C \frac{d\Omega_1}{d\hat{t}} = C \cdot \left(\frac{H \cdot \sigma_b H^2 \hat{M}_1}{4 \cdot \sigma_b \cdot H^3 \cdot \bar{I}} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при} \quad \sigma_1 > 0, \\ I = \int_0^{H/2} z^2 dz - \int_0^{H/2} \frac{\dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z^2 dz = \\ = \int_0^1 \left(\frac{\bar{z}H}{2} \right)^2 \frac{H}{2} d\bar{z} - \int_0^1 \frac{\dot{\chi}_u \cdot \frac{\bar{z}H}{2}}{\dot{\chi}_u \cdot \frac{\bar{z}H}{2} + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \left(\frac{\bar{z}H}{2} \right)^2 d\left(\frac{\bar{z}H}{2} \right) = \\ = \frac{H^3}{8} \int_0^1 \bar{z}^2 d\bar{z} - \frac{H^3}{8} \int_0^1 \frac{\bar{\chi}_u \frac{2B}{H} \cdot |\bar{z}|}{\bar{\chi}_u \frac{2B}{H} \cdot |\bar{z}| + \frac{2B}{H} \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \bar{z}^2 d\bar{z} = \\ = \frac{H^3}{8} \cdot \left\{ \int_0^1 \bar{z}^2 d\bar{z} - \int_0^1 \frac{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}|}{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}| + f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \bar{z}^2 d\bar{z} \right\} = \frac{H^3}{8} \cdot \bar{I}, \\ \bar{\chi}_u \frac{2B}{H} = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot \frac{H^3}{8} \cdot \bar{I}} \cdot \frac{\sigma_b H^2}{4} \hat{M}_1 \quad \rightarrow \quad \bar{\chi}_u \frac{2}{1} = \frac{1 \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{2 \cdot \frac{1}{8} \bar{I}} \cdot \frac{1}{4} \hat{M}_1 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \bar{\chi}_u = \frac{1}{2} \frac{f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\bar{I}} \cdot \hat{M}_1, \\ \bar{t} = \frac{48D}{H^2} t. \end{array} \right.$$

Таким образом, система (3.42) в безразмерном виде имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\Omega}_1 = \frac{d\Omega_1}{d\hat{t}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{M}_1}{\bar{I}} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_1 > 0, \\
I = \frac{H^3}{8} \cdot \left\{ \int_0^1 \bar{z}^2 d\bar{z} - \int_0^1 \frac{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}|}{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}| + f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \bar{z}^2 d\bar{z} \right\} = \frac{H^3}{8} \cdot \bar{I}, \\
\bar{I} = \frac{1}{3} - \int_0^1 \frac{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}|}{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}| + f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \bar{z}^2 d\bar{z}, \\
\bar{\chi}_u = \frac{d\chi_u}{dt} \cdot \frac{H}{2B} = \frac{1}{2} \frac{f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\bar{I}} \cdot \hat{M}_1, \\
\bar{t} = \frac{48D}{H^2} t, \\
\hat{t} = C \cdot t, \\
\frac{\bar{t}}{\hat{t}} = K = \frac{48D}{C \cdot H^2}, \quad [K] = \frac{\frac{m^2}{\text{час}}}{\frac{1}{\text{час}} m^2}.
\end{array} \right. \quad (3.43)$$

В первом уравнении системы (3.43) перейдем к единому безразмерному времени \bar{t} и тождественно введем произвольную безразмерную величину M_0 .

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{d\Omega_1}{d\hat{t}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{M}_1}{\bar{I}} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_1 > 0,$$

$$K \frac{d\Omega_1}{d\hat{t}} = \frac{1}{2} \bar{I}^{-1} \hat{M}_1 \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_1 > 0,$$

$$\frac{d\Omega_1}{d\hat{t}} = \frac{1}{2} \bar{I}^{-1} \frac{1}{K} \hat{M}_1 \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_1 > 0,$$

$$\frac{d\Omega_1}{d\hat{t}} = \frac{1}{2} \bar{I}^{-1} \frac{1}{K} \frac{M_0}{M_0} \hat{M}_1 \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_1 > 0,$$

$$\frac{d\Omega_1}{d\hat{t}} = \frac{1}{2} \bar{I}^{-1} \frac{M_0}{K} \frac{\hat{M}_1}{M_0} \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \zeta_1 = \frac{\hat{M}_1}{M_0} > 0$$

$$\frac{d\Omega_1}{d\hat{t}} = \frac{1}{2} \bar{I}^{-1} G_0 \cdot \zeta_1 \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \zeta_1 = \frac{\hat{M}_1}{M_0} > 0,$$

$$\text{где } G_0 = \frac{M_0}{K}.$$

Поскольку в соотношении для G_0 входит M_0 как произвольная величина, то можно всегда подобрать её такой, чтобы $G_0 = 1$.

Таким образом, система уравнений в безразмерном виде для определения ω_1 будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Omega_1}{d\bar{t}} = \frac{1}{2} \bar{I}^{-1} \cdot \zeta_1 \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при} \quad \zeta_1 = \frac{\hat{M}_1}{M_0} > 0, \\ \bar{I} = \frac{1}{3} - \int_0^1 \frac{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}|}{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}| + f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \bar{z}^2 d\bar{z}, \\ \bar{\chi}_u = \frac{d\chi_u}{dt} \cdot \frac{H}{2B} = \frac{1}{2} \frac{f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\bar{I}} \cdot \hat{M}_1, \\ \bar{t} = \frac{48D}{H^2} t, \\ \hat{t} = C \cdot t, \\ \frac{\bar{t}}{\hat{t}} = K = \frac{48D}{C \cdot H^2}, \quad [K] = \frac{\frac{m^2}{\text{час}}}{\frac{1}{\text{час}} m^2}. \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Зададим $\hat{M}_0 = \hat{M}_1$, тогда $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = \zeta = \frac{\hat{M}_2}{\hat{M}_0} = \frac{\hat{M}_2}{\hat{M}_1}$.

Произведем аналогичные выкладки для напряжения σ_2 .

$$\sigma_2\left(z = \frac{H}{2}\right) = \sigma_b \left(\frac{\frac{H}{2}}{M_u \cdot \frac{H}{2} + 2 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_2 = \sigma_b \left(\frac{\frac{H}{2}}{\frac{M_u \cdot H + 2 \cdot 2 \cdot \sigma_b \cdot I}{2}} \right) M_2,$$

$$\sigma_2\left(z = \frac{H}{2}\right) = \sigma_b \left(\frac{H}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_2.$$

Подставим выражение для $\sigma_2\left(z = \frac{H}{2}\right)$ в кинетическое уравнение (3.38):

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_2 = \frac{d\Omega_2}{dt} = C \cdot \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_b - \sigma_2} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \sigma_2 > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma_2 \leq 0, \end{cases}$$

$$\sigma_2 \left(z = H/2 \right) = \sigma_b \left(\frac{H}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_2 ,$$

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{d\Omega_2}{dt} = C \cdot \left(\frac{\sigma_b \left(\frac{H}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_2}{\sigma_b - \sigma_b \left(\frac{H}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_2} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})),$$

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{d\Omega_2}{dt} = C \cdot \left(\frac{\left(\frac{H}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_2}{1 - \left(\frac{H}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) M_2} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})),$$

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{d\Omega_2}{dt} = C \cdot \left(\frac{\left(\frac{H \cdot M_2}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right)}{\left(\frac{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I - H \cdot M_2}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right)} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})),$$

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{d\Omega_2}{dt} = C \cdot \left(\frac{H \cdot M_2}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I - H \cdot M_2} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})).$$

Таким образом, система уравнений для определения поврежденности Ω_2 будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_2 = \frac{d\Omega_2}{dt} = C \cdot \left(\frac{H \cdot M_2}{M_u \cdot H + 4 \cdot \sigma_b \cdot I - H \cdot M_2} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) & \text{при } \sigma_2 > 0, \\ I = \frac{H^3}{24} - \int_0^{H/2} \frac{\dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z^2 dz, \\ \dot{\chi}_u = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_u, \\ \bar{t} = \frac{48D}{H^2} t. \end{cases}$$

На второй стадии нагружения $t_1 < t < t^*$ действует момент $M_2 > 0$ (момент $M_1 = 0$). Интенсивность момента будет $M_u = \sqrt{M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2} = M_2$. Система уравнений примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Omega}_2 = \frac{d\Omega_2}{dt} = C \cdot \left(\frac{H \cdot M_2}{4 \cdot \sigma_b \cdot I} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_2 > 0, \\ I = \frac{H^3}{24} - \int_0^{H/2} \frac{\dot{\chi}_u \cdot |z|}{\dot{\chi}_u \cdot |z| + B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))} z^2 dz, \\ \dot{\chi}_u = \frac{1}{2} \frac{B \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\sigma_b \cdot I} M_2, \\ \bar{t} = \frac{48D}{H^2} t. \end{array} \right.$$

Преобразуем к безразмерному виду.

Используем безразмерные переменные $\bar{z} = \frac{2z}{H}$, $\hat{t} = C \cdot t$, $\hat{M}_2 = \frac{M_2}{M_b} = \frac{4 \cdot M_2}{\sigma_b H^2}$,

$$\bar{\chi}_u = \frac{d\chi_u}{dt} = \frac{H}{2B}.$$

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Omega}_2 = \frac{d\Omega_2}{d\hat{t}} = \frac{1}{2} (\bar{I}^{-1}) \cdot \hat{M}_2 \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_2 > 0, \\ I = \frac{H^3}{8} \cdot \left\{ \int_0^1 \bar{z}^2 d\bar{z} - \int_0^1 \frac{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}|}{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}| + f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \bar{z}^2 d\bar{z} \right\} = \frac{H^3}{8} \cdot \bar{I}, \\ \bar{I} = \frac{1}{3} - \int_0^1 \frac{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}|}{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}| + f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \bar{z}^2 d\bar{z}, \\ \bar{\chi}_u = \frac{1}{2} \frac{f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\bar{I}} \cdot \hat{M}_2 = \frac{1}{2} \frac{f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\bar{I}} \cdot \zeta \cdot \hat{M}_1, \\ \frac{\bar{t}}{\hat{t}} = K = \frac{48D}{C \cdot H^2}. \end{array} \right. \quad (3.45)$$

В первом уравнении системы (3.45) перейдем к единому безразмерному времени \bar{t} и тождественно введем произвольную безразмерную величину M_0 .

$$K \frac{d\Omega_2}{d\bar{t}} = \frac{1}{2} (\bar{I}^{-1}) \cdot \hat{M}_2 \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_2 > 0,$$

$$\frac{d\Omega_2}{d\bar{t}} = \frac{1}{2}(\bar{I}^{-1}) \cdot \frac{1}{K} \frac{M_0}{M_0} \hat{M}_2 \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_2 > 0,$$

$$\frac{d\Omega_2}{d\bar{t}} = \frac{1}{2}(\bar{I}^{-1}) \cdot \frac{M_0}{K} \frac{\hat{M}_2}{M_0} \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \sigma_2 > 0,$$

$$\frac{d\Omega_2}{d\bar{t}} = \frac{1}{2}(\bar{I}^{-1}) \cdot G_0 \cdot \zeta_2 \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \zeta_2 = \frac{\hat{M}_2}{M_0} > 0,$$

где $G_0 = \frac{M_0}{K}$.

Поскольку в соотношении для G_0 входит M_0 как произвольная величина, то можно всегда подобрать её такой, чтобы $G_0 = 1$.

Таким образом, система уравнений в безразмерном виде для определения Ω_2 будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Omega_2}{d\bar{t}} = \frac{1}{2}(\bar{I}^{-1}) \cdot \zeta_2 \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad \text{при } \zeta_2 = \frac{\hat{M}_2}{M_0} > 0, \\ \bar{I} = \frac{1}{3} - \int_0^1 \frac{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}|}{\bar{\chi}_u \cdot |\bar{z}| + f(\bar{c}_m(\bar{t}))} \bar{z}^2 d\bar{z}, \\ \bar{\chi}_u = \frac{d\chi_u}{dt} \cdot \frac{H}{2B} = \frac{1}{2} \frac{f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\bar{I}} \cdot \hat{M}_2 = \frac{1}{2} \frac{f(\bar{c}_m(\bar{t}))}{\bar{I}} \cdot \zeta \cdot \hat{M}_1, \\ \bar{t} = \frac{48D}{H^2} t, \\ \hat{t} = C \cdot t, \\ \frac{\bar{t}}{\hat{t}} = K = \frac{48D}{C \cdot H^2}. \end{array} \right. \quad (3.46)$$

Зададим $\hat{M}_0 = \hat{M}_1$, тогда $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = \zeta = \frac{\hat{M}_2}{\hat{M}_0} = \frac{\hat{M}_2}{\hat{M}_1}$.

Способ решения систем (3.44) и (3.46):

- 1) Для момента времени $t=0$ вычисляем $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$, задаем нулевое приближение $\bar{\chi}_u$, с помощью второй формулы системы (3.44) (или (3.46))

вычисляем значение интеграла \bar{I} . С помощью третьей формулы системы (3.44) (или (3.46)) уточняем $\bar{\chi}_u$. При помощи последовательных итераций для \bar{I} и $\bar{\chi}_u$ добиваемся удовлетворительной точности для $\bar{\chi}_u$ и, таким образом, определяем значение интеграла \bar{I} .

2) Записываем первое уравнение для $\dot{\Omega}_1 = \frac{d\Omega_1}{d\bar{t}}$ (или $\dot{\Omega}_2 = \frac{d\Omega_2}{d\bar{t}}$) в виде конечных разностей. Используя начальное значение поврежденности $\Omega_1(\bar{t} = 0) = 0$, находим значение поврежденности на следующем шаге по времени.

3) Далее весь алгоритм повторяется. Численно решаем до $\Omega_1(\bar{t}_1^*) = 1$.

Таким образом, время до разрушения \bar{t}_1^* пластины при действии на нее только одного момента $\hat{M}_1 > 0$ определяется.

3.3.2 Результаты расчета

Используя критерий разрушения $\Omega(\bar{t}_1^*) = 1$, определим время до разрушения \bar{t}_1^* при условии действия только одного момента $\hat{M}_1 = 0.5$. Для этого численно решим дифференциальное уравнение (3.44). Для расчета используем первую стадию диффузионного процесса, т.е. первое уравнение для $f(\bar{c}_m(\bar{t}))$.

В результате получена зависимость поврежденности $\Omega_1(\bar{t})$ от безразмерного времени \bar{t} , которая представлена на рисунке 3.6.

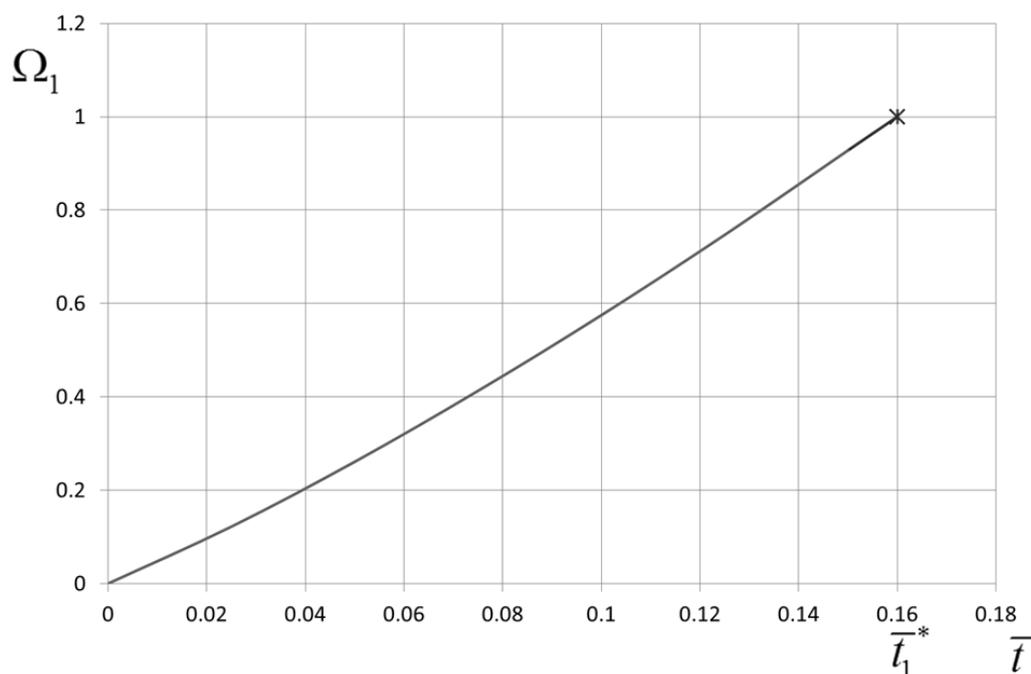


Рис. 3.6. Зависимость поврежденности $\Omega_1(\bar{t})$ от безразмерного времени \bar{t} .

Время до разрушения равно $\bar{t}_1^* = 0.16$. Т.к. $\bar{t}_1^* < 1$, то использование только первой стадии диффузионного процесса (первого уравнения системы (1.7) п.1.1.1) верно. Время действия момента \hat{M}_1 примем равным $\bar{t}_1 = 0.5\bar{t}_1^* = 0.08$. Поврежденность $\Omega_1(\bar{t}_1) = 0.444$.

Согласно схеме нагружения момент M_i действует на i -й стадии нагружения и вызывает возникновение поврежденности в направлении i -й оси системы координат. А именно, момент M_1 действует на 1-й стадии нагружения и вызывает возникновение поврежденности с проекцией вектора поврежденности на 1-ю ось системы координат, а момент M_2 действует на 2-й стадии нагружения и вызывает возникновение поврежденности с проекцией вектора на 2-ю ось системы координат. Поэтому индексы у компонент вектора Ω_i и стадий нагружения одинаковы.

$\Omega_1(\bar{t})$ - проекция вектора поврежденности на ось 1 системы координат.

$\Omega_2(\bar{t})$ - проекция вектора поврежденности на ось 2 системы координат.

В течение всего времени $0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_1$ поврежденность $\Omega_2(\bar{t}) \equiv 0$ (в связи с нулевым значением момента $\hat{M}_2 = 0$ на протяжении всей первой стадии).

Таким образом, компоненты вектора поврежденности на I стадии нагружения имеют вид:

$$\begin{cases} \Omega_1(\bar{t}) \text{ в соответствии с графиком на рис. 3.6 при } 0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_1, \bar{t}_1 = 0.08, \Omega_1(\bar{t}_1) = 0.444, \\ \Omega_2(\bar{t}) \equiv 0. \end{cases}$$

Рассмотрим II-ю стадию нагружения: $\hat{M}_1 = 0$, $\hat{M}_2 = \zeta \hat{M}_1$.

Поврежденность на второй стадии от действия момента $M_2 = \zeta M_1$ при $M_1 = 0$ определяется согласно уравнению (3.46).

Таким образом, компоненты вектора поврежденности на II стадии нагружения имеют вид:

$$\begin{cases} \Omega_1(\bar{t}) = \Omega_1(\bar{t}_1) = 0.444, & \text{при } \bar{t} > \bar{t}_1, \\ \Omega_2(\bar{t}) \text{ в соответствии с численным решением при } \bar{t} > \bar{t}_1. \end{cases}$$

Время до разрушения \bar{t}^* при векторном подходе определяется с помощью следующего критерия разрушения: $[\Omega_1(\bar{t}_\Omega^*)]^2 + [\Omega_2(\bar{t}_\Omega^*)]^2 = 1$.

Компонента вектора $\Omega_1(\bar{t}_\Omega^*)$ в данном случае равна $\Omega_1(\bar{t}_\Omega^*) = \Omega_1(\bar{t}_1)$, т.к. поврежденность $\Omega_1(\bar{t}_1)$, накопленная на первой стадии нагружения, сохраняется и на второй стадии до разрушения ($\Omega_1(\bar{t}_\Omega^*)$).

В случае скалярного параметра поврежденности уравнения в общем случае рассматриваются в виде:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = C \cdot \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_b - \sigma_u} \right) \cdot f(\bar{c}_m(\bar{t})) \quad (3.47)$$

где σ_u - интенсивность напряжений.

Поскольку в соответствии с принятой схемой нагружения на каждом этапе нагружения действует только один из двух моментов (второй момент равен нулю), то время до разрушения можно определить, принимая

$$\sigma_u = \begin{cases} \sigma_1(M_1) & \text{при } 0 < \bar{t} \leq 0.5\bar{t}_1^* , \\ \sigma_2(M_2) & \text{при } 0.5\bar{t}_1^* < \bar{t} < \bar{t}_\omega^* , \end{cases} \quad (3.48)$$

в соответствии с (3.44) и (3.46).

В случае скалярного параметра поврежденности время до разрушения \bar{t}_ω^* определяется с помощью (3.47) и (3.48) на основе критерия: $\omega(\bar{t}_\omega^*) = 1$.

На рисунке 3.7 приведены зависимости поврежденности от времени при значении $\zeta = 1$, полученные при скалярном $\omega(\bar{t})$ (сплошные кривые) и векторном $\Omega(\bar{t})$ (штриховые кривые) параметрах поврежденности. В интервале времени $0 < \bar{t} < \bar{t}_1$ графики для векторной и скалярной поврежденности совпадают.

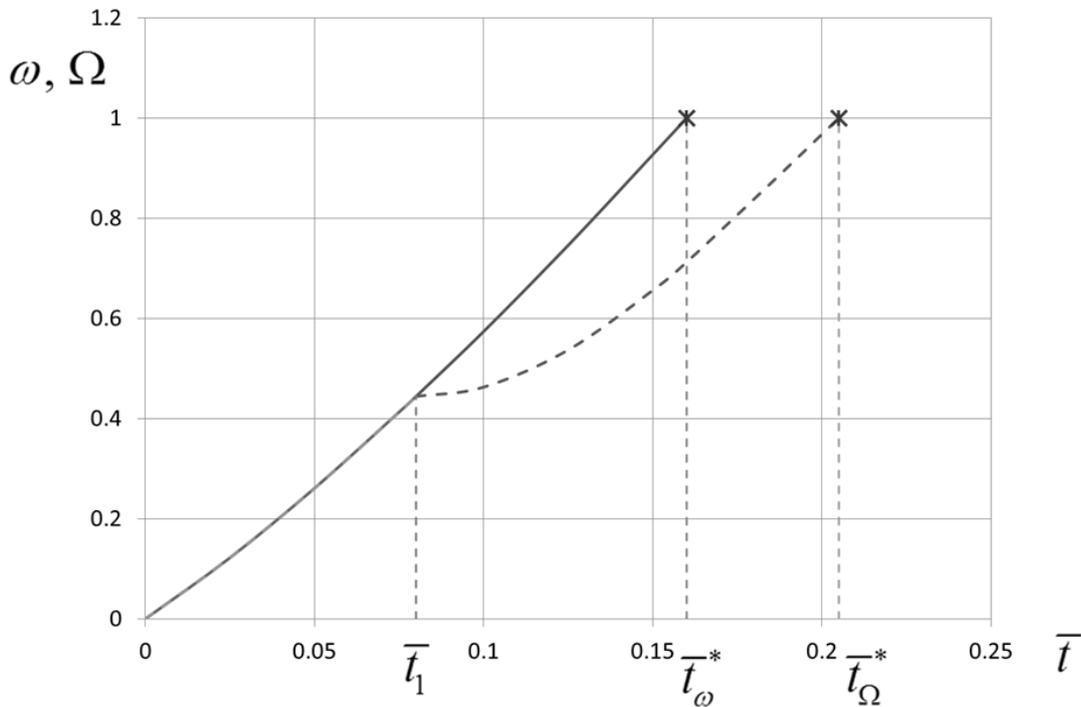


Рис. 3.7. Зависимости поврежденности от времени при скалярном и векторном подходах.

3.4 Обсуждение результатов

С помощью кинетической теории длительной прочности проведено моделирование времени до разрушения прямоугольной пластины, изгибаемой во взаимно ортогональных плоскостях в присутствии агрессивной окружающей среды. Показано, что время до разрушения при использовании скалярного параметра поврежденности меньше, чем при использовании векторного параметра поврежденности. Получены особенности отклонения суммы парциальных времен от единицы в случаях ступенчатого увеличения и уменьшения изгибающего момента.

Обсуждения результатов и выводы по главе 3

1. Использование кинетической теории ползучести и длительной прочности Ю.Н. Работнова позволяет наряду с характеристиками ползучести получить характеристики длительной прочности пластины, а именно, времена до разрушения пластины в условиях нестационарного сложного напряженного состояния с учетом влияния агрессивной среды.
2. Проведенный анализ характеристик ползучести пластины в условии сложного напряженного состояния с учетом влияния агрессивной среды показал, что напряжения не зависят от времени, имеют нелинейные распределения по соответствующим поперечным координатам и не зависят от концентрации элементов агрессивной среды в материале пластины.
3. Для определения времен до разрушения используется критерий: равенство параметра поврежденности единице в момент разрушения. В работе использовался скалярный и векторный подход определения поврежденности. Проведенный анализ показал, что времена до разрушения, полученные с использованием векторного параметра поврежденности выше, чем с использованием скалярного параметра.
4. Определены суммы парциальных времен при изгибе пластины и проведена аналогия с испытаниями на длительную прочность при кусочно-постоянном растягивающем напряжении. Этот анализ показал сходство процессов поведения материала изгибаемой пластины и растягиваемого стержня в условиях длительного ступенчатого нагружения.

5. Проведен расчет времен до разрушения в случае применения скалярных и векторных критериев разрушения с учетом степенных и дробно-линейных определяющих и кинетических соотношений.

Глава 4. Новый метод определения поврежденности при ползучести

4.1 Прямой экспериментальный метод определения поврежденности на основе обработки экспериментальных данных с учетом определяющего соотношения ползучести

Все существующие материалы при различных температурах в той или иной мере обладают свойствами ползучести. Металлы, как и все конструкционные материалы, проявляют свойства ползучести в определённом диапазоне напряжений и температур. При этом пренебрежение учёта явления ползучести может привести к существенным ошибкам в оценке деформируемости и работоспособности исследуемых объектов.

В общем случае кривая ползучести при постоянном растягивающем напряжении состоит из трёх последовательных стадий: I – стадия, характеризующаяся постепенно уменьшающейся скоростью ползучести; II – стадия с постоянной (минимальной) скоростью ползучести; III – стадия ускоряющейся ползучести, предшествующая разрушению, когда в экспериментах на ползучесть наблюдается деформация с возрастающей скоростью. В зависимости от уровня напряжения соотношение между длительностями этих стадий может сильно различаться. Так, например, при достаточно малых напряжениях кривая $p(t)$, где p - деформация ползучести, обычно имеет достаточно протяжённую I стадию (неустановившаяся ползучесть). На кривых ползучести, соответствующих достаточно большим напряжениям, могут вообще отсутствовать либо I стадия, либо первые две стадии.

При описании различных видов кривых ползучести необходимо сочетать учёт характерных особенностей процесса ползучести с простотой используемых уравнений.

В настоящем параграфе рассматривается вопрос моделирования процесса ползучести при постоянном напряжении, причем особое внимание уделено III стадии ползучести (стадии прогрессирующей ползучести), когда в экспериментах на ползучесть наблюдается деформация с возрастающей скоростью.

Классические результаты в моделировании стадии прогрессирующей ползучести принадлежат Ю.Н. Работнову и Л.М. Качанову [1-14], предположившим механизм возрастания скорости деформации, связанный с развитием и быстрым ростом поврежденности материала, которая предположительно имеет смысл возникновения и быстрого “размножения” микротрещин. В работе [1] предложено учитывать данный механизм, используя известное уравнение ползучести $\dot{\rho} = A_0 \sigma^n$ для установившейся стадии, модифицированное с помощью введения поврежденности ω , которая должна определяться из специальных опытов (например, из структурных исследований) на стадии предразрушения с целью установить и описать процесс накопления и роста микротрещин, ослабляющих рабочее сечение. Однако проведение опытов по измерению поврежденности во время опыта до сих пор остаётся трудно решаемой задачей.

Определяющее соотношение теории ползучести [1] в классической постановке кинетической теории Ю.Н. Работнова имеет вид:

$$\dot{\rho} = A_0 \left(\frac{\sigma}{1 - \omega} \right)^n, \quad \omega(t=0) = 0, \quad \omega(t=t^*) = 1 \quad (4.1)$$

где t^* - время до разрушения.

Величина $\frac{\sigma}{1 - \omega}$ представляет собой эффективное напряжение, которое становится больше номинального σ по причине ослабления сечения, воспринимающего нагрузку за счет увеличения поврежденности ω , имеющей природу образования микропор и микротрещин.

Для определения поврежденности $\omega(t)$ постулировано дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\dot{\omega} = \frac{B_0 \sigma^m}{(1-\omega)^s} \quad (4.2)$$

и, таким образом, законы ползучести представляются соотношениями (4.1) и (4.2) где

$p = \varepsilon - \varepsilon_0$ - деформация ползучести,

ε - текущая деформация,

ε_0 - начальная “мгновенная” деформация в момент нагружения,

$\dot{p} = \frac{dp}{dt}$ - производная деформации ползучести p по времени t ,

$\sigma = \text{const}$ - напряжение ползучести,

$\omega = \omega(t, \sigma)$ - поврежденность,

A_0, B_0, n, m, s – материальные константы.

Для идентификации модели (4.1) и (4.2) в классической постановке используется следующий алгоритм [1]: решить дифференциальное уравнение первого порядка (4.2) и найти функцию $\omega = \omega(t, \sigma, A_0, B_0, n, m, s)$. После этого подставить данное решение в (4.1), получить аналитическое выражение для \dot{p} , а затем для p , и, подбирая соответствующие константы модели из имеющихся опытов, максимально близко описать экспериментальные данные.

Здесь также необходимо отметить, что в классической постановке поврежденность в образце в процессе ползучести возникает непосредственно в момент начала опыта.

В новой постановке предлагается новый метод идентификации модели (4.1), (4.2) непосредственно из серии опытов на ползучесть без постулирования дифференциального уравнения для поврежденности [47-55]. Такой подход позволяет избежать введения в модель не опирающегося на эксперимент уравнения и связанных с этим трудностей.

Рассмотрим новый подход. Используя уравнение (4.1), находим поврежденность непосредственно из серии опытов следующим образом. Получив из i -го эксперимента с заданным уровнем напряжений σ_i деформацию p как функцию времени $p = p(t)$, определим производную деформации $\dot{p}(t)$. Зная $\dot{p}(t)$, найдём из (4.1) поврежденность $\omega_i = \omega(t, \sigma_i)$ в виде:

$$\omega(t, \sigma_i) = 1 - \left[\frac{A_0}{\dot{p}(t)} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot \sigma_i. \quad (4.3)$$

Константы A_0 и n определяются из обработки установившихся стадий (II стадии) серии экспериментальных кривых ползучести.

Таким образом, поврежденность $\omega_i = \omega(t, \sigma_i)$ определяется из эксперимента с точностью, равной точности экспериментальных данных для каждой кривой семейства. Задача моделирования состоит в том, чтобы полностью вычислить кривую ползучести при произвольном уровне напряжения σ в известном диапазоне на основании имеющихся экспериментальных данных для конкретного материала.

В работах [47-55] реализуется предложенный алгоритм решения сформулированной задачи. А именно, аппроксимируются все имеющиеся кривые ползучести, используя одну и ту же формулу для всех кривых, при условии, что значения коэффициентов аппроксимации зависят от напряжения σ . Строятся графики зависимости найденных коэффициентов от напряжения σ .

Отметим, что в основе построенного решения лежит аппроксимация кривых ползучести, причем возможны разные конкретные реализации аппроксимации. Однако, при достаточно точной аппроксимации получаемые искомые функции по существу будут слабо зависеть от вида аппроксимации. В частности, их графики будут близкими или совпадающими, что позволяет выбрать аппроксимацию из соображения удобства для перевода графических данных в аналитический вид. Возможно также прямое использование оцифровки, что позволяет всегда иметь точность, равную точности эксперимента, однако аналитическое представление позволяет получить интересный, наглядный и удобный результат.

Различие вида кривых ползучести на II и III стадиях можно интерпретировать с помощью рассмотрения поврежденности материала. В отличие от работы [1] предположим, что поврежденность материала появляется не во время нагружения образца ($t = 0$), а в момент времени t_s - во время начала стадии прогрессирующей ползучести (III стадии), предшествующей разрушению. Появление поврежденности обуславливает нелинейный характер кривой ползучести на этой стадии. Трудно объяснить постоянную скорость $\dot{\rho}$ на II стадии, допуская, что в это время имеет место процесс возникновения и роста микротрещин, всегда согласованный с условием $\dot{\rho} = \text{const}$. Более естественно предположить, что на II стадии количество таких микротрещин пренебрежимо мало.

Основным фактором, определяющим установившуюся стадию ползучести, является баланс процессов упрочнения, возникшего на первой стадии, и разупрочнения, возникшего на второй стадии, что обусловлено движением дислокаций, а не образованием микропор [56].

Как отмечает Ю.Н. Работнов [57], причиной образования третьей стадии кривой ползучести является тот факт, что ползучесть сопровождается образованием микротрещин и микрополостей на границах кристаллических зерен. В результате эффективная площадь сечения, воспринимающая нагрузку, уменьшается, и скорость ползучести увеличивается. С увеличением скорости ползучести увеличивается скорость образования новых микротрещин и роста уже имеющихся; наконец, в каком-то месте образца микротрещины сливаются, образуя большую трещину разрушения. В соответствии с принятой новой гипотезой поврежденность ω существует только на III стадии кривой ползучести, а на I и II стадиях поврежденность тождественно равна нулю.

Известные литературные источники, например [57, 58 и др.], подтверждают, что поврежденность в образце, имеющая смысл микропор и микротрещин, возникает на III стадии ползучести и является причиной развития данной стадии.

В новой постановке [47-55,59], принимая гипотезу о существовании ω только на III участке кривой ползучести, построим аппроксимацию этого участка кривой в виде:

$$p(t) = \left(\frac{C}{(t_* - t)^k} \right) + b, \quad (4.4)$$

где t_* , k , C , b - материальные параметры, зависящие от σ .

В формуле (4.4) введено “критериальное” время до разрушения t_* , определяемое согласно принятому в кинетической теории ползучести критерию разрушения $\omega(t_*) = 1$, причем в силу (4.1) в этом случае скорость ползучести \dot{p} резко возрастает, т.е. формально $\dot{p} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_*$.

Однако, во многих случаях, например [2, 3, 5, 6], в момент разрушения скорость ползучести, найденная по экспериментальным кривым $p = p(t, \sigma)$, не является слишком большой и условие $\dot{p} \rightarrow \infty$ не выполняется даже приближенно. Это обстоятельство можно объяснить тем, что в рассматриваемом случае разрушение наступает не за счет максимального развития поврежденности материала, когда $\omega \rightarrow 1$, а от образования и роста макротрещины в момент $t = t_{\max} < t_*$, причем условие $\omega(t_*) = 1$, очевидно, не может быть выполнено.

Таким образом, будем различать момент реального разрушения $t = t_{\max}$ и критериального $t = t_*$ (рисунок 4.1). Для определения t_* используем аппроксимацию (4.4) следующим образом: зависимость гиперболического типа (4.4) с известной степенью точности аппроксимирует на третьем участке $t_s \leq t \leq t_{\max}$ (где t_s - время начала III стадии) кривую ползучести с учетом найденных параметров. Тогда $t = t_*$ определено автоматически из условия наилучшей аппроксимации III участка.

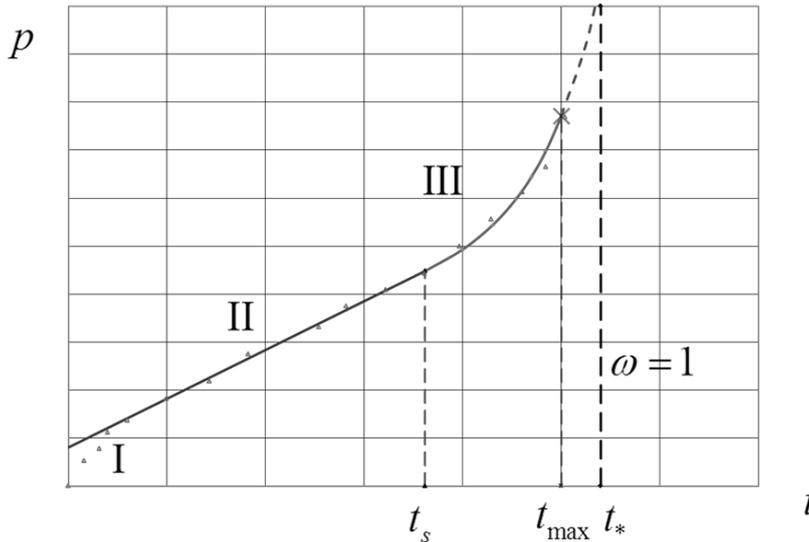


Рис. 4.1. К определению характерных параметров кривой ползучести: t_s - начало участка возрастающей скорости, t_{\max} - момент разрушения, t_* - критериальное время до разрушения.

Метод поиска параметров аппроксимации с учетом плавного сопряжения II и III стадий ползучести будет рассмотрен в следующем параграфе.

Здесь необходимо отметить, что опыты на ползучесть характеризуются значительным разбросом экспериментальных данных [1, 14, 32, 60]. Поэтому найденные параметры аппроксимации могут изменяться в зависимости от диапазона разброса экспериментальных данных. В данной работе предложенный метод аппроксимации применяется к некоторой усредненной внутри диапазона разброса экспериментальных данных величине деформации ползучести.

Для определения поврежденности с учетом принятой аппроксимации III участка кривой ползучести, выразим производную деформации ползучести $\dot{p}(t)$ и выразим $\omega(t, \sigma)$:

$$\omega(t, \sigma) = 1 - (t_* - t)^{(k+1)/n} \cdot \left[\frac{A_0}{Ck} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot \sigma.$$

Выпишем $\dot{\omega}(t, \sigma)$:

$$\dot{\omega} = \left(\frac{A_0}{Ck} \right)^{1/n} \cdot \sigma \cdot \left(\frac{k+1}{n} \right) \cdot (t_* - t)^{\left(\frac{k+1}{n} - 1 \right)} = \left(\frac{A_0}{Ck} \right)^{1/n} \cdot \sigma \cdot \left(\frac{k+1}{n} \right) \cdot \frac{(t_* - t)^{\left(\frac{k+1}{n} \right)}}{(t_* - t)}.$$

Но

$$1 - \omega(t, \sigma) = (t_* - t)^{(k+1)/n} \cdot \left[\frac{A_0}{Ck} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot \sigma,$$

следовательно, кинетическое уравнение для поврежденности $\omega(t, \sigma)$ имеет вид:

$$\dot{\omega} = (1 - \omega) \cdot \left[\frac{k + 1}{n(t_* - t)} \right]$$

Важно отметить, что материал при быстром росте поврежденности является, очевидно, нестабильным (стареющим) [1, 47, 61], что и приводит к появлению явной зависимости правой части уравнения от t , при этом время входит в виде разности $t_* - t$, т.е. интервала времени, который является инвариантным относительно сдвига начала отсчета.

На рисунке 4.2 приведены полученные зависимости поврежденности от времени для семейства кривых ползучести [3] на основе представленного нового метода. Как указывалось ранее в этом параграфе, величины A_0 и n вычисляются на основе обработки серии экспериментальных кривых ползучести [3] на установившейся стадии.

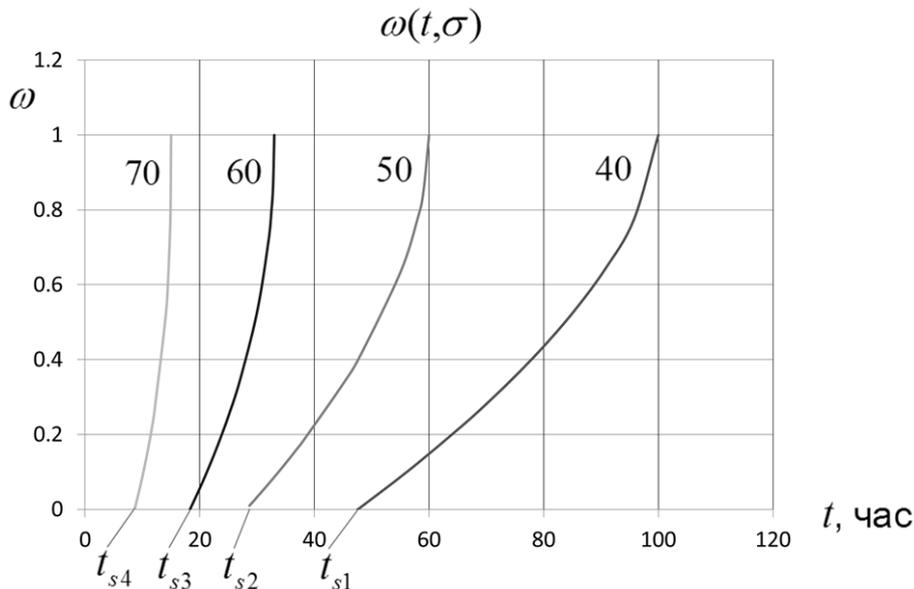


Рис. 4.2. Зависимости поврежденности от времени для семейства кривых ползучести [3], полученные на III стадии ползучести.

Обсуждение результатов и выводы по параграфу 4.1

Предложен самосогласованный метод описания экспериментальных данных по одномерной ползучести с использованием поврежденности $\omega(t, \sigma)$, определяемой непосредственно из серии опытов, а не постулируемой из кинетического уравнения. Такой подход позволяет избежать введения в модель не опирающегося на эксперимент уравнения и связанных с этим трудностей. В этом параграфе говорится о модели одномерной ползучести. В качестве перспективы видится обобщение предложенной теории на случай сложного напряженного и деформированного состояния. Работы в этом направлении [62] уже начинали проводиться в НИИ механики МГУ.

4.2 Моделирование процесса ползучести с учетом III стадии на основе аппроксимации экспериментальных данных.

В отличие от подхода моделирования кривой ползучести с учетом параметра поврежденности, в этом разделе диссертационной работы процесс ползучести, развивающийся вплоть до разрушения, моделируется без использования параметра поврежденности. При этом целью исследования является разработка метода аналитического описания семейства кривых ползучести, адекватного известным экспериментальным данным, и определения констант, фигурирующих в определяющем соотношении ползучести. Этот метод может также применяться для аппроксимации кривых ползучести только на III стадии с учетом плавного сопряжения II и III стадий кривых ползучести (смотри предыдущий параграф 4.1).

Постановка задачи заключается в том, чтобы имеющееся для данного материала семейство кривых ползучести аппроксимировать функциями, зависящими от времени и содержащими материальные параметры [47-55]. Эти

кривые, входящие в семейство, зависят от уровня напряжения. Вид аппроксимирующей функции принимается один и тот же для всех кривых семейства, а материальные параметры зависят от напряжения. Затем определяются аналитические зависимости найденных параметров, обеспечивая достаточно хорошее соответствие экспериментальным данным.

Сначала рассмотрим кривую ползучести, характеризующую процесс разупрочнения, описываемую только третьей (ускоряющейся) стадией. В этом случае зависимость $p(t)$ можно аппроксимировать следующим выражением:

$$p(t) = A_0 t + B_0 + \frac{C_0}{(t_* - t)^r},$$

где параметры аппроксимации A_0, B_0, C_0, r, t_* считаются зависящими от напряжения σ и определяются для каждой экспериментальной кривой ползучести. С помощью такого подхода определяются зависимости $A_0 = A_0(\sigma)$, $B_0 = B_0(\sigma)$ и т.д. в конкретных точках при $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots$, затем получают зависимости этих параметров аппроксимации от σ как непрерывные функции.

Здесь используется аппроксимация кривых ползучести, причем, очевидно, возможны различные её реализации. При достаточно точной аппроксимации получаемые искомые кривые ползучести по существу будут слабо зависеть от конкретного вида аппроксимации. Это позволяет выбрать аппроксимацию из соображения простоты и удобства для перевода графических данных в аналитический вид.

Ниже рассмотрим аппроксимацию кривых ползучести при учёте II и III стадий. Примем, согласно работе [47], что кривая ползучести $p = p(t, \sigma)$ может быть аппроксимирована следующим выражением при условии замены I стадии – стадии неустановившейся ползучести – прямой линией, рассматриваемой как продолжение участка установившейся ползучести [1, 63]. В этом случае кривую ползучести можно аппроксимировать следующей зависимостью:

$$p(t) = \begin{cases} At + B & \text{при } 0 \leq t \leq t_s, \\ \frac{C}{(t_* - t)^k} + b & \text{при } t_s \leq t \leq t_{\max}, \end{cases} \quad (4.5)$$

где A, B, t_*, C, k, b – материальные параметры, зависящие от σ . Значение $t_s(\sigma)$ характеризует момент окончания II и начала III стадии, значение $t_{\max}(\sigma)$ означает фактическое время разрушения образца при напряжении σ .

Методика определения констант, входящих в предложенные уравнения

При аппроксимации кривой ползучести со II и III стадиями в соответствии с уравнениями в (4.5) должны быть выполнены следующие четыре условия: непрерывность и гладкость кривой $p(t)$ в точке t_s , и равенства деформации и скорости ползучести в этой же точке их известным экспериментальным значениям:

$$p(t)|_{(t_s-0)} = p(t)|_{(t_s+0)} = p_s, \quad \dot{p}(t)|_{(t_s-0)} = \dot{p}(t)|_{(t_s+0)} = A.$$

Для определения шести параметров аппроксимации (4.5) используем шесть условий: четыре вышеупомянутых условия в точке t_s ; кроме того, мы имеем значение функции в точке реального разрушения $p(t_{\max}) = p_{\max}$ и значение функции в некоторой средней точке внутри интервала $t_s < t_{\text{cp}} < t_{\max}$: $p(t_{\text{cp}}) = p_{\text{cp}}$ (эти данные также известны из эксперимента).

Таким образом, для каждой кривой ползучести, соответствующей определённому значению напряжения σ , получаем систему шести нелинейных уравнений с шестью неизвестными A, B, t_*, C, k, b :

$$\begin{cases} p_s = At_s + B = \frac{C}{(t_* - t_s)^k} + b, \\ \dot{p}_s = A = Ck(t_* - t_s)^{-(k+1)}, \\ p_{\max} = \frac{C}{(t_* - t_{\max})^k} + b, \\ p_{\text{cp}} = \frac{C}{(t_* - t_{\text{cp}})^k} + b. \end{cases} \quad (4.6)$$

Предлагается следующая итерационная методика решения данной нелинейной системы уравнений. Преобразуем систему уравнений (4.6) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta p_1 = p_{\max} - p_s = C \cdot \left[(\Delta t_{\max})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k} \right], \\ \Delta p_2 = p_{\text{cp}} - p_s = C \cdot \left[(\Delta t_{\text{cp}})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k} \right], \\ A = Ck \Delta t_s^{-(k+1)}, \quad \Delta t_s = t_* - t_s, \quad \Delta t_{\text{cp}} = t_* - t_{\text{cp}}, \quad \Delta t_{\max} = t_* - t_{\max}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Далее очевидным образом получаем:

$$\begin{cases} \Delta p_1 = \frac{(\Delta t_{\max})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k}}{(\Delta t_{\text{cp}})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k}}, & (4.8) \\ \Delta p_2 = \frac{(\Delta t_{\text{cp}})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k}}{(\Delta t_{\max})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k}}, & (4.9) \\ C = \Delta p_1 \cdot \left((\Delta t_{\max})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k} \right)^{-1}, & (4.10) \\ A = Ck (\Delta t_s)^{-(k+1)}. \end{cases}$$

В этой системе величины $\Delta p_1 = p_{\max} - p_s$ и $\Delta p_2 = p_{\text{cp}} - p_s$ вычисляются по известным из эксперимента и аппроксимации данным. В частности, величины t_s , t_{\max} , t_{cp} – также известны из эксперимента, а для величины t_* предлагается итерационная схема и рекуррентное соотношение, представленное ниже. Константа A характеризуется тангенсом угла наклона кривой ползучести на Π (прямолинейном) участке.

Таким образом, получена система из трёх уравнений (4.8) – (4.10), в которой неизвестными величинами являются C , k и t_* . Для решения этой системы используем метод итераций. Для нахождения k составим невязку $f(k)$, используя уравнение (4.8):

$$f(k) = \frac{(\Delta t_{\max})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k}}{(\Delta t_{\text{cp}})^{-k} - (\Delta t_s)^{-k}} - \frac{\Delta p_1}{\Delta p_2}.$$

Зададим нулевое приближение $t_* = t_*^{(0)}$ (на 5-15 % больше, чем t_{\max} в зависимости от величины скорости деформации ползучести на III стадии) и, варьируя значение k , будем искать такое значение k , которое удовлетворяет условию $f(k) = 0$. Данное значение k и будет решением системы в нулевом приближении. Далее из уравнения (4.9) вычисляется значение C . Найденные таким образом значения k и C используются для нахождения величины $t_*^{(1)}$ – первого приближения, на основе рекуррентной формулы, полученной из уравнения (4.10):

$$t_*^{(1)} = t_s + \left(\frac{Ck}{A} \right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Далее весь приведенный алгоритм повторяется с использованием первого приближения $t_*^{(1)}$ и т.д.

Количество итераций по данной методике, как обычно, определяется условием, что погрешность аппроксимации не превышает погрешность эксперимента в определении значения функции и её производной в начале III стадии. Погрешность аппроксимации контролируется среднеквадратичным отклонением аппроксимации относительно эксперимента на III стадии кривой ползучести.

Описание известных экспериментальных данных

В качестве примера применения предложенного метода аппроксимации семейства кривых ниже использованы результаты испытаний медных цилиндрических образцов при температуре 400 °С и напряжениях $\sigma = 40, 50, 60, 70$ МПа [3]. Для семейства экспериментальных кривых ползучести (рисунок 4.3) в соответствии с решением системы уравнений (4.6) были найдены параметры аппроксимации A, B, t_*, C, k, b и построены аппроксимации согласно уравнению (4.5) II-х и III-их стадий этих кривых ползучести (с напряжениями $\sigma = 40, 50, 60, 70$ МПа соответственно). Параметры $t_s, t_{cp}, t_{\max}, P_s, P_{cp}, P_{\max}$,

взяты из экспериментальных кривых, представлены в таблице 4.1; параметры аппроксимации – в таблице 4.2. Результаты аппроксимаций этих кривых показаны на рисунке 4.3

Таблица 4.1 - Значения экспериментальных параметров $t_s, t_{cp}, t_{max}, p_s, p_{cp}, p_{max}$

σ , МПа	t_s , ч	t_{cp} , ч	t_{max} , ч	p_s	p_{cp}	p_{max}
40	46.92	56.35	65.78	$\frac{0.0525}{0.0525}$	$\frac{0.0675}{0.0649}$	$\frac{0.0913}{0.0913}$
50	28.65	33.17	36.73	$\frac{0.0823}{0.0823}$	$\frac{0.0969}{0.0969}$	$\frac{0.1135}{0.1135}$
60	18.08	21.54	25.00	$\frac{0.0896}{0.0896}$	$\frac{0.1104}{0.1090}$	$\frac{0.1542}{0.1542}$
70	8.462	10.00	11.92	$\frac{0.1104}{0.1104}$	$\frac{0.1292}{0.1295}$	$\frac{0.1844}{0.1844}$

Примечание. Для столбцов p_s, p_{cp}, p_{max} в числителе записано экспериментальное значение, в знаменателе – аналитическое значение, вычисленное на основе решения системы уравнений (4.6).

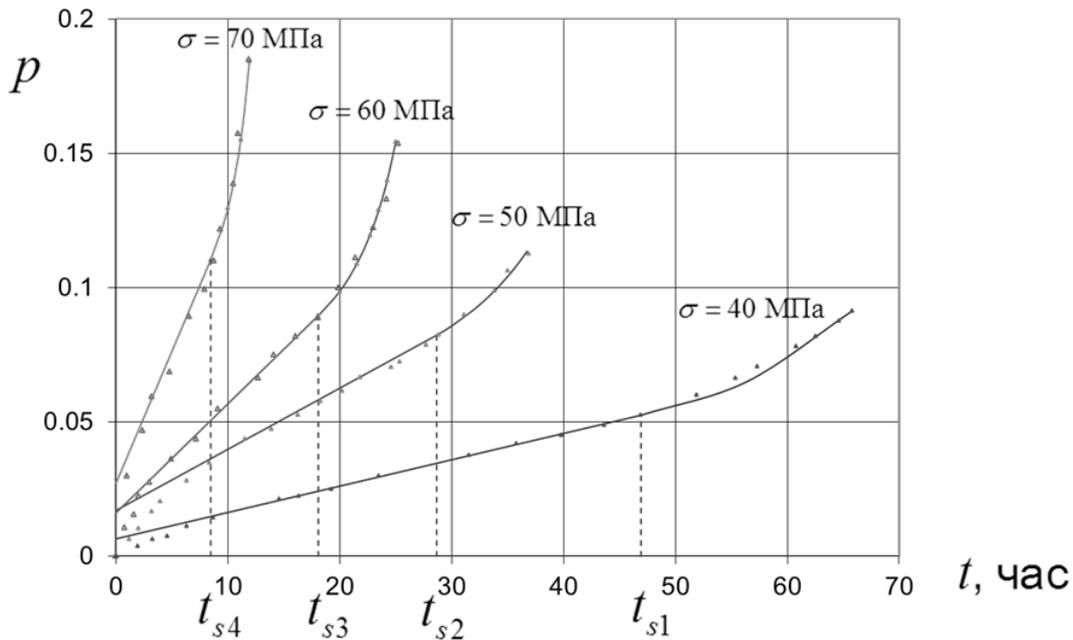


Рис. 4.3. Семейство кривых ползучести [3] при различных уровнях напряжений и температуры $T=400$ °С: сплошные линии – аппроксимации, Δ – экспериментальные точки.

Таблица 4.2 - Значения параметров аппроксимации II и III стадий кривых ползучести как функций напряжения σ

σ , МПа	$A \cdot 10^3$, ч^{-1}	$B \cdot 10^2$	t_* , ч	C , ч^k	k	b
40	$\frac{0.981}{0.984}$	$\frac{0.646}{0.638}$	$\frac{100.0}{100.0}$	$\frac{286}{317.1}$	$\frac{2.4}{2.45}$	$\frac{0.031}{0.032}$
	$\frac{2.278}{2.037}$	$\frac{1.702}{1.612}$	$\frac{60.0}{59.9}$	$\frac{49.8}{43.9}$	$\frac{2.1}{2.05}$	$\frac{0.046}{0.046}$
50	$\frac{4.063}{4.405}$	$\frac{1.615}{1.688}$	$\frac{33.0}{33.0}$	$\frac{3.39}{3.39}$	$\frac{1.7}{1.65}$	$\frac{0.055}{0.055}$
	$\frac{9.830}{9.725}$	$\frac{2.724}{2.662}$	$\frac{15.0}{15.0}$	$\frac{0.47}{0.47}$	$\frac{1.2}{1.25}$	$\frac{0.060}{0.060}$

Примечание. В числителе записаны значения параметров аппроксимации, вычисленные на основе решения системы уравнений (4.6), в знаменателе – значения параметров аппроксимации, вычисленные на основе аналитических зависимостей, указанных ниже.

На основе обработки значений параметров аппроксимации II и III стадий кривых ползучести были построены аналитические зависимости параметров аппроксимаций от напряжения σ :

$$1) A(\sigma) = a_1 \exp(a_2 \sigma) + a_3; \quad a_1 = 3.305 \cdot 10^{-5} \text{ ч}^{-1}, \quad a_2 = 0.081 \text{ МПа}^{-1},$$

$$a_3 = 1.407 \cdot 10^{-4} \text{ ч}^{-1};$$

$$2) B(\sigma) = B_1 \cdot (\sigma - B_2)^3 + B_3; \quad B_1 = 3.0 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-3}, \quad B_2 = 55 \text{ МПа}, \quad B_3 = 0.0165;$$

$$3) t_*(\sigma) = \beta_1 \exp(-\beta_2 \sigma) - \beta_3; \quad \beta_1 = 602.62 \text{ ч}, \quad \beta_2 = 0.04 \text{ МПа}^{-1}, \quad \beta_3 = 21.64 \text{ ч};$$

$$4) C(\sigma) = C_1 \exp(-C_2 \sigma) + C_3 \sigma - C_4; \quad C_1 = 486143 \text{ ч}^k, \quad C_2 = 0.1823 \text{ МПа}^{-1},$$

$$C_3 = 0.43325 \text{ ч}^k \cdot \text{МПа}^{-1}, \quad C_4 = 31.2443 \text{ ч}^k;$$

$$5) k(\sigma) = k_1 - k_2 \sigma; \quad k_1 = 4.05, \quad k_2 = 0.04 \text{ МПа}^{-1};$$

$$6) b(\sigma) = b_1 - b_2 \cdot \exp(-b_3 \sigma); \quad b_1 = 0.069, \quad b_2 = 0.273, \quad b_3 = 0.05 \text{ МПа}^{-1},$$

где все входящие константы характеризуют механические свойства материала независимо от напряжения σ .

Результаты, представленные на рисунке 4.3 и в таблице 4.1 и 4.2, характеризуют хорошее соответствие численных расчётов результатам испытаний.

Выводы по параграфу 4.2

На основе аппроксимационного метода построено аналитическое выражение деформации ползучести для II и III стадий кривых ползучести. Получены аналитические зависимости параметров аппроксимации от уровня напряжения. Показано хорошее соответствие результатов расчётов известным экспериментальным данным.

Обсуждение результатов и выводы по главе 4

1. Предлагается новый метод определения зависимости поврежденности от времени, основанный на обработке серии экспериментальных кривых ползучести с использованием кинетической теории Ю.Н. Работнова. В этой постановке предполагается наличие поврежденности только на III стадии ползучести. Получено кинетическое уравнение для поврежденности, определяемой в соответствии с новым методом, согласованным с экспериментальными данными.
2. Построено аналитическое выражение деформации ползучести для II и III стадиях кривых ползучести. Вид аппроксимирующей функции принимается один и тот же для всех кривых семейства, а материальные параметры зависят от напряжения. Получены аналитические зависимости параметров аппроксимации от уровня напряжения. Показано хорошее соответствие результатов расчётов известным экспериментальным данным.

Заключение

1. В диссертационной работе получены решения задач о растяжении стержня и изгибе стержня и пластины при ползучести с учетом влияния агрессивной среды и с использованием определяющего и кинетического уравнений, как правило, в виде дробно-степенных зависимостей скорости ползучести и скорости накопления поврежденности от напряжения.
2. Сингулярность предлагаемых соотношений вблизи характерных для данного материала предельных напряжений, а именно, пределов кратковременно прочности дает возможность более адекватного по сравнению со стандартными степенными зависимостями описания поведения материалов при ползучести под действием напряжений, близким к пределам кратковременной прочности при заданной температуре.
3. На основе кинетической теории с двумя структурными параметрами, а именно, концентрации элементов окружающей среды в материале и поврежденности, определены связанные характеристики диффузионного процесса и длительной прочности при растяжении. Такие исследования имеют как фундаментальный, так и прикладной характер и позволяют проанализировать известные экспериментальные данные.
4. Результаты исследования, применения и развития предложенных соотношений могут использоваться для анализа поведения при ползучести и определения времен до разрушения материалов и элементов конструкций с учетом влияния агрессивной среды.
5. Применение критериев разрушения, в которые входят скалярный и векторный параметр поврежденности, учитывают возникновение и рост поврежденности, что дает возможность применять их в условиях сложного

напряженного состояния с учетом влияния агрессивной среды и, как следствие, вносит общий вклад полученных результатов в развитие механики повреждений.

6. Предлагаемый в четвертой главе диссертации новый метод определения поврежденности при ползучести непосредственно путем обработки серии кривых ползучести с учетом определяющего соотношения основывается на предположении возникновения поврежденности только на III стадии ползучести, это подтверждается данными из области физики твердого тела, приведенных в известных литературных источниках. Поврежденность, определяемая новым методом, основывается на аппроксимации кривых ползучести и позволяет построить согласованное с реальными экспериментальными данными кинетическое уравнение.
7. В предлагаемом научном исследовании поставленная в самом начале данной диссертационной работы основная научная цель по применению и развитию дробно-степенных определяющих и кинетических соотношений ползучести и длительной прочности, учитывающих влияние агрессивной среды, а также учет скалярного и векторного параметров поврежденности, по мнению автора на данном этапе работы достигнута.
8. В качестве научной перспективы дальнейших работ видится развитие и продвижение нового метода определения поврежденности на случай сложного напряженного состояния с учетом векторной и, возможно, что требует дополнительного анализа, тензорной природы поврежденности, применение и развитие дробно-степенных определяющих и кинетических соотношений с учетом взаимного влияния агрессивной среды и накопления поврежденности при ползучести в случае сложного напряженного состояния.

Список литературы

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. – 178 с.
3. Локощенко А.М. Моделирование ползучести и длительной прочности металлов. Монография. – М.: МГИУ, 2007. – 264 с.
4. Кулагин Д.А., Локощенко А.М. Анализ влияния окружающей среды на длительную прочность с помощью вероятностного подхода // Известия РАН. Механика твердого тела. 2001. № 1. С. 124-132.
5. Одинг И.А., Фридман З.Г. Роль поверхностных слоев при длительном разрушении металлов в условиях ползучести // Заводская лаборатория. 1959. Т. 25. № 3. С. 329 — 332.
6. B.J. Cane, R.D. Townsend. Prediction of Remaining Life in Low-Allow Steels // Flow and Fracture at Elevated Temperatures. ASM (Amer. Soc. For Metals). Metals Park. Ohio. 1985. P. 279-316.
7. Фомин Л.В. Описание длительной прочности растягиваемых стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений в высокотемпературной воздушной среде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, №3(32). 2013. С. 87-97.
8. Шестериков С.А., Юмашева М.А.. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Известия АН СССР, Механика твердого тела. 1984 г. №1. С. 86 –92.

9. Стали и сплавы. Марочник: Справ. изд. / В.Г. Сорокин и др. Науч. ред. В.Г. Сорокин, М.А. Гервасьев – М.: “Интермет инжиниринг”. 2001/ 608 стр.: ил.
10. Кулагин Д.А. Метод приближённого решения двумерного уравнения диффузии // Научн. тр. III Международного семинара «Современные проблемы прочности» (20-24.IX.1999. Старая Русса). НовГУ. Великий Новгород. 1999. Т.2. С. 114-117.
11. Гельд П.В., Рябов Р.А. Водород в металлах и сплавах. – М.: Metallurgy. 1974. 364 с.
12. Локощенко А.М., Фомин Л.В. Моделирование длительной прочности растягиваемых стержней в агрессивной среде с учетом переменного коэффициента диффузии // Механика композитных материалов. Рига. 2014. №6. С. 1033-1042.
13. Lokoshchenko A., Fomin L. Modelling the Creep Rupture of Tensile Rods in an Aggressive Medium With Account of a Variable Diffusion Coefficient // *Mechanics of Composite Materials, Vol. 50, No. 6, January, 2015 (Russian Original Vol. 50, No. 6, November-December, 2014) P. 739–746. DOI [10.1007/s11029-015-9463-1](https://doi.org/10.1007/s11029-015-9463-1)* (Web of Science, Scopus).
14. Качанов Л.М. Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960.- 456 с.
15. Boyle J.T., Spence J. Stress analysis for creep, Buteenworth and Co. 1983. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Пер. с англ. А.С. Кравчук.- М.: Мир, 1986. – 360 с.
16. К расчету ползучести балок при изгибе / О.В.Сорокин, Ю.П.Самарин, И.А. Одинг // Доклады АН СССР. - 1964. - т.157 - №6.-С.1325-1328.
17. K. Naumenko, H. Altenbach, Y. Corash. Creep analysis with a stress range depended constitutive model // Arch Appl Mech (2009) 79: 619-630 DOI [10.1007/s00419-008-0287-5](https://doi.org/10.1007/s00419-008-0287-5).

18. Применение структурной модели стержневого типа для решения задачи изгиба и разрушения балки в условиях ползучести / М.В. Басов // Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки: Труды 3-й Межд. конф. молодых ученых и студентов (30 сент.-2 окт.2002г.) Часть 1 Математика. Механика /Сам. гос. техн. ун-т. - Самара, 2002. - С.47-48. ISBN 5-7964-0348-6.
19. Радченко В.П., Еремин Ю.А. Реологическое деформирование материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение – 1. 2004. – 264 с. ISBN 5–94275–111–0.
20. Решение краевой задачи изгиба балки из пластически разупрочняющегося материала на основании структурной модели / Е.А.Андреева, А.А.Агафонов // Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки: Тр. Междунар. форума молодых ученых (9-й Междунар. конф. (20-23 нояб. 2008 г.) Ч.1-3 Математика. Математическое моделирование. Механика / Гос. образоват. учреждение высш. профес. образования Самар. гос. техн. ун-т. - Самара. - 2008.-С.168-178. – Самара. ISBN 978-5-7964-1171-1.
21. Никитенко А.Ф, Соснин О.В. Изгиб балки из материала с разными характеристиками ползучести при растяжении и сжатии. // Проблемы прочности. 1971. № 6. С. 67 - 70.
22. Работнов Ю.Н. Соппротивление материалов. М. Физматгиз, 1962, 456 с.
23. К расчету на неустановившуюся ползучесть изгибаемого бруса из материала с разными характеристиками на растяжение и сжатие. / Горев. Б.В./ Сб. “Динамика сплош. среды.” / Новосибирск, 1973, Вып. 14, С. 44-51.
24. Леллеп Я. Установившаяся ползучесть балок в случае материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие. // «Tartu Ulirooli toimetised. Уч. зап. Тартус. ун-та». 1975. Вып. 355. С. 245-252.

25. Еремин Ю.А., Кайдалова Л.В., Радченко В.П. Исследование ползучести балок на основе аналогии структуры уравнения состояния материалов и элементов конструкций // *Машиноведение*. – 1983.- №2. – С. 67-74.
26. А.Ф. Никитенко, В.А. Заев. К расчёту элементов конструкций с учётом повреждаемости материала в процессе ползучести. // *Проблемы прочности*, 1979, №4, с. 20-25.
27. Т.Э. Захарова. Описание процесса ползучести и разрушения при изгибе балок. // *Вестник СибГУТИ*, 2008, № 2, с. 41-44.
28. А. М. Локощенко, Н. Е. Печенина, С.А. Шестериков. Долговечность цилиндрического бруса при чистом изгибе. // *Известия ВУЗов. Машиностроение*. 1988 г, №9, с.9-13.
29. Лепин Г.Ф., Бондаренко Ю.Д. Ползучесть прямого бруса при изгибе с учетом поврежденности материала // *Проблемы прочности*. 1970. № 7. С. 68 – 70.
30. Горев Б.В., Клопотов И.Д. Описание процесса ползучести и разрушения при изгибе балок и кручении валов уравнениями со скалярным параметром поврежденности // *Прикладная механика и техническая физика*. 1999. Т. 40. № 6. С. 157 – 162.
31. *Venkateswaran Anaduradha Hasselman D.P.H.* Creep analysis of bend specimens subject to tensile cracking // *J. Amer. Ceram. Soc.* 1984. Vol. 67. No. 7. С. 144 – 145.
32. Работнов Ю.Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1991. – 196 с.
33. Локощенко А.М., Агахи К.А., Фомин Л.В. Чистый изгиб балки в условиях ползучести из разносопротивляющегося материала // *Вестн. Сам. Гос. техн. ун-та. Сер. Физ.- мат. науки*. 2012. № 1(26). С. 66-73.

34. Шестериков С.А., Юмашева М.А.. Вариант уравнения состояния при ползучести и его приложения. В. сб. “Вопросы долговременной прочности энергетического оборудования”. Труды Центрального котлотурбинного института. Ленинград. 1988. №246. С. 74-77.
35. Локощенко А.М., Агахи К.А., Фомин Л.В., Изгиб балки при ползучести с учетом поврежденности и разносопротивляемости материала. // Машиностроение и инженерное образование. 2012. № 3. С. 29-35.
36. Локощенко А.М., Агахи К.А., Фомин Л.В. Изгиб балок при ползучести с учетом поврежденности и разносопротивляемости материала растяжению и сжатию. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Апрель 2012 г., Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова. – М.: Изд-во Московского университета. 2012. С. 112
37. Магниевые сплавы: справочник. Ч. 1. Металловедение магния и его сплавов. Область применения. М.: Металлургия, 1978. – 232 с.
38. Локощенко А.М., Агахи К.А., Фомин Л.В. Ползучесть балок при изгибе в агрессивных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. №4. С. 7-75.
39. Локощенко А.М., К.А. Агахи, Л.В. Фомин. Ползучесть и длительная прочность стержней при растяжении и изгибе в агрессивных средах // Международная конференция «Живучесть и конструкционное материаловедение»: Труды конференции. Том II (Москва, 22-24 октября 2012 г.). / М: Изд-во ИМАШ РАН, 2012. С. 170-181.
40. ISSN 1052-6188, Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2013, Vol. 42, No. 4, pp. 319-324. ©Allerton Press, Inc., 2013, Original Russian Text ©А.М. Lokoshchenko, К.А. Agakhi, L.V. Fomin, 2013, published in Problemy Mashinostroeniya i Nadezhnosta Mashin, 2013, No. 4, pp. 70-75 Bending Creep of Beams in Aggressive Media DOI: 10.3103/S1052618813040079.

41. Локощенко А.М., Фомин Л.В. Длительное разрушение пластин при изгибе с учетом влияния агрессивной среды // Успехи современного естествознания. Физ.-мат. науки. Москва “Академия естествознания”. 2015 . №1. Часть 4. С. 639-640.
42. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 625 с.
43. Гуляев В.Н., Колесниченко М.Г. К оценке долговечности в процессе ползучести при ступенчатом изменении нагрузки // Заводская лабор. 1963. № 6. С. 748-752.
44. Marriott D.I., Penny R.K. Strain accumulation and rupture during creep under variable uniaxial tensile loading // The Journal of strain analysis. 1973. Vol. 8. № 3. P. 151-159.
45. Осасюк В.В., Олисов А.Н. К вопросу о гипотезах суммирования относительных долговечностей // Проблемы прочности. 1979. № 11. С. 31-33.
46. Наместникова И.В., Шестериков С.А. Векторное представление параметра поврежденности. // Деформирование и разрушение твердых тел. Отчет Института механики. Под редакцией Н.И. Малинина, С.А. Шестерикова. Издательство Московского университета. 1985 г. С. 43-52.
47. Моделирование процесса ползучести с учетом стадии предразрушения и идентификация модели / К.А. Агахи, Ю.Г. Басалов, В.Н. Кузнецов, Л.В. Фомин // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ. мат. науки. 2009. № 2(19). с. 243–247.
48. Кузнецов В.Н., Агахи К.А., Фомин Л.В. Моделирование процесса ползучести с учетом стадии предразрушения // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Апрель 2009 г.,

Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова. – М.: Изд-во Московского университета, 2009., с. 97-98

49. Фомин Л.В. Анализ и идентификация модели, описывающей ускоряющуюся стадию ползучести // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Апрель 2009 г., Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова. – М.: Изд-во Московского университета, 2009., с. 148
50. Фомин Л.В., Кузнецов В.Н. Экспериментальное определение функции поврежденности в кинетической модели ползучести Ю.Н. Работнова. // XXII Международная Иновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов по современным проблемам машиноведения (МИКМУС-2009). Материалы конференции 16-18 ноября 2009 г. с. 53
51. Л.В. Фомин, В.Н. Кузнецов. Экспериментальное определение функции поврежденности в кинетической модели ползучести Ю.Н. Работнова. XXI Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов по современным проблемам машиноведения (МИКМУС-2009). Избранные труды конференций ИМАШ РАН. Москва 2010 с. 126-132.
52. В.Н. Кузнецов, К.А, Агахи, Л.В. Фомин. Самосогласованный вариант кинетической теории ползучести Ю.Н. Работнова. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Апрель 2010 г., Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова. – М.: Изд-во Московского университета, 2010 – с. 117.
53. К.А. Агахи, Л.В. Фомин. О выводе дифференциального уравнения для функции поврежденности в кинетической теории ползучести. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Апрель 2010 г., Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова. – М.: Изд-во Московского университета, 2010 – с. 19.

54. Л.В. Фомин, В.Н. Кузнецов. Конкретизация механического уравнения состояния в кинетической теории ползучести Ю.Н. Работнова. XXII Международная Инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов по современным проблемам машиноведения (МИКМУС – 2010). 26-29 октября 2010 г. Материалы конференции ИМАШ РАН. Москва 2010 г. с. 19.
55. К.А. Агахи, В.Н. Кузнецов, А.М. Локощенко, В.К. Ковальков, Л.В. Фомин. Моделирование процесса ползучести на основе аппроксимации экспериментальных данных. / Машиностроение и инженерное образование, 2011, №2, с. 52-57.
56. Физический энциклопедический словарь. / гл. ред. А. М. Прохоров. — М.: Советская энциклопедия, 1983. – 944 с.
57. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
58. J. Gittus “Creep, Viscoelasticity and Creep Fracture in Solid”. London. APPLIED SCIENCE PUBLISHER LTD 1975.
59. Агахи К.А., Кузнецов В.Н., Ковальков В.К., Фомин Л.В. Модифицированная кинетическая теория ползучести // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. № 4 Часть 4. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011 – С. 1340-1342.
60. А.П. Кузнецов, В.А. Трубный. Исследование разброса кривых ползучести. // Прикладная математика и техническая физика. 1972. № 5. С. 188 – 192.
61. В.Н. Кузнецов, К.А. Агахи, В.К. Ковальков, Л.В. Фомин. О реологических определяющих соотношениях для нестабильных материалов и их идентификации. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Апрель 2010 г., Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова. – М.: Изд-во Московского университета, 2010 – с. 118.

62. Агахи К.А., Георгиевский Д.В. Тензорно нелинейные определяющие соотношения изотропной теории ползучести с тензорной мерой поврежденности // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. С. 2-9.
63. Odquist F. K. G., Influence of primary creep on stresses in structural parts, Transactions of the Roy. Inst, of Technology, № 66, Stockholm, 1953.