ФГБОУ ВО Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Василевский Борис Олегович

Функция Грина конечнозонного при одной энергии оператора Шредингера на квад-графах

Специальность 01.01.04 – Геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на кафедре Высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Гриневич Петр Георгиевич**,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник.

Официальные оппоненты: **Натанзон Сергей Миронович**,
доктор физико-математических наук,
профессор (ФГАОУ ВПО
«НИУ «Высшая школа экономики»,
Факультет математики).

Миронов Андрей Евгеньевич,
доктор физико-математических наук,
ведуший научный сотрудник (ФГБУ Институт
математики имени С.Л. Соболева СО РАН,
Лаборатория динамический систем).

Ведущая организация: **ФГБУ Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН**.

Защита состоится 25 декабря 2015 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 на базе ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу Российская Федерация 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, ФГБОУ ВО МГУ имени М В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А), http://mech.math.msu.su/ snark/index.cgi, http://istina.msu.ru/dissertations/10553915.

Автореферат разослан 25 ноября 2015 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 на базе
ФГБОУ ВО МГУ имени М. В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор **Иванов Александр Олегович**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В 1974 году Новиков[1] предложил «конечнозонный» подход решения периодической задачи для уравнения Кортевега — де Фриза. В дальнейшем с помощью этого подхода был построен широкий класс периодических и почти-периодических решений, ассоциированных с операторами, спектр которых имеет конечнозонную структуру [2] [3] [4] [5].

В 1985 году Кричевер[6] применил конечнозонный подход для решения обратной задачи рассеяния двумерного дискретного периодического оператора на квадратной решетке

$$L\psi_{nm} = \psi_{n+1,m+1} + a_{nm}\psi_{n+1,m} + b_{nm}\psi_{n,m+1} + v_{nm}\psi_{nm},$$

получив гиперболическую дискретизацию оператора Шредингера. Набор обобщенных спектральных данных выглядел следующим образом:

1. Компактная, регулярная риманова поверхность рода g.

2. Фиксированная точка R_1 на Γ — точка нормировки для волновой функции $\Psi(\gamma, m, n)$.

3. g точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ на Γ — дивизор полюсов волновой функции.

4. Четыре коллекции выделенных точек $P_1^+, \ldots, P_M^+$, $P_1^-, \ldots, P_M^-$, $Q_1^+, \ldots Q_N^+$, $Q_1^-, \ldots, Q_N^-$, где M, N — произвольные положительные целые числа.

По теореме Римана-Роха, для данных общего положения существует единственная функция $\Psi(\gamma, m, n)$, $\gamma \in \Gamma$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant m \leqslant M$, $1 \leqslant n \leqslant N$, со следующими свойствами:

---

[1] С. П. Новиков, «Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза I» // *Функц. анализ и его прил.*, **8:3** (1974), 54-–66

[2] Б. А. Дубровин, «Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов» // *Функц. анализ и его прил.*, **9:1** (1975), 65-–66

[3] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, «Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриса» // *ТМФ*, **23:1** (1975), 51—68

[4] P. Lax, «Periodic solutions of the KdV equation» // *Lecture in Appl. Math.*, **15** (1974), 85–96

[5] H. P. McKean, P. van Moerbeke «The spectrum of Hill's equation» // *Invent. Math.*, **30** (1975), 217–274

[6] И. М. Кричевер, «Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия» // *ДАН СССР*, **285:1** (1985), 31–36

1. $\Psi(\gamma, m, n)$ является мероморфной функцией от γ на Γ.

2. Ψ имеет полюса не более первого порядка в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, P_k^+, $k = 1, \ldots, m$, Q_k^+, $k = 1, \ldots, n$, и не имеет никаких других особенностей.

3. Ψ имеет нули не более чем первого порядка в точках P_k^-, $k = 1, \ldots, m$, Q_k^-, $k = 1, \ldots, n$.

4. $\Psi(R_1, m, n) = 1$.

Коэффициенты дискретного оператора L, для которого Ψ является волновой: $L\Psi(\gamma, m, n) = 0$ для всех γ, m, n, — однозначно определяются через функцию Ψ:

$$a(m,n) = -\lim_{\gamma \to P_{m+1}^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n+1)}{\Psi(\gamma, m+1, n)},$$

$$b(m,n) = -\lim_{\gamma \to Q_{n+1}^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n+1)}{\Psi(\gamma, m, n+1)},$$

$$v(m,n) = -1 - a(m,n) - b(m,n).$$

Рассмотрим четырехточечное уравнение общего вида

$$\alpha_{m,n}\varphi_{m+1,n+1} + \beta_{m,n}\varphi_{m+1,n} + \gamma_{m,n}\varphi_{m,n+1} + \delta_{m,n}\varphi_{m,n} = 0. \qquad (1)$$

В 2007 году в работе Доливы, Гриневича, Нишкорского и Сантини[7] было показано, что уравнение (1) допускает рекукцию до пятиточечного уравнения на четную подрешетку (так что любое решение исходного уравнения является решением редуцированного) тогда и только тогда, когда выполняется

$$\beta_{m,n}\alpha_{m-1,n}\delta_{m,n-1}\gamma_{m-1,n-1} = \gamma_{m,n}\delta_{m-1,n}\alpha_{m,n-1}\beta_{m-1,n-1}.$$

Кроме того, при выполнении этого условия четырехточечное уравнение (1) эквивалентно с точностью до калибровки дискретному уравнению Коши–Римана (3).

Возникает естественный вопрос — можно ли сформулировать аналогичное условие на языке спектральных данных, при котором общее четырехточечное уравнение допускает редукцию до пятиточечной схемы на четную подрешетку. Такое достаточное условие также было получено в работе 2007 года, оно строится следующим образом.

[7] A. Doliwa, P. Grinevich, M. Nieszporski, P. M. Santini, «Integrable lattices and their sub-lattices: from the discrete Moutard (discrete Cauchy-Riemann) 4-point equation to the self-adjoint 5-point scheme» // *Journal of Mathematical Physics*, **48:1** (2007)

Лемма 1. *Пусть теперь на* Γ *определена голоморфная инволюция* σ *ровно двумя неподвижными точками* $R_+ = R_1$, R_- *и следующими свойствами:*

1. *На* Γ *существует мероморфный дифференциал* Ω *с двумя полюсами первого порядка в* $R_+ = R_1$, R_- *и* $2g$ *нулями в* $\gamma_1, \ldots, \gamma_g, \sigma\gamma_1, \ldots, \sigma\gamma_g$.

2. $\sigma P_k^+ = P_k^-$, $\sigma Q_k^+ = Q_k^-$.

Тогда

$$\Psi(R_-, m, n) = (-1)^{m+n}, \quad \alpha_1(m,n) + \alpha_2(m,n) = 0, \quad \alpha_3(m,n) = -1, \quad (2)$$

а волновая функция Ψ *удовлетворяет 4-точечному уравнению Коши–Римана*

$$\Psi(m+1, n+1) - \Psi(m,n) = if(m,n)\big(\Psi(m+1,n) - \Psi(m,n+1)\big), \quad (3)$$

$$f(m,n) = i\alpha_1(m,n) = -i\alpha_2(m,n). \quad (4)$$

Замечание 1. В работе Кричевера и Грушевского[8] было замечено, что типичные конструкции отвечают случаю, когда инволюция σ не имеет неподвижных точек, а γ-дивизор состоит из $g-1$ точки. При этом дифференциал Ω голоморфен, имеет нули в точках γ-дивизора и $\sigma\gamma$-дивизора, $\sigma\Omega = \Omega$.

Пусть такие σ и Ω существуют. Пятиточечный оператор определяется на четной подрешетке ($m = \mu - \nu, n = \mu + \nu, a_{\mu,\nu} = 1/f(m,n), b_{\mu,\nu} = f(m-1,n)$):

$$(L\Phi)_{\mu,\nu} = a_{\mu,\nu}\Phi_{\mu+1,\nu} + a_{\mu-1,\nu}\Phi_{\mu-1,\nu} + b_{\mu,\nu}\Phi_{\mu,\nu+1} + b_{\mu,\nu-1}\Phi_{\mu,\nu-1} - c_{\mu,\nu}\Phi_{\mu,\nu}. \quad (5)$$

Он является самосопряженным.

Помимо редукции гиперболического оператора на четную подрешетку, в упомянутой выше работе приводится достаточное условие вещественности коэффициентов.

Лемма 2. *Пусть на* Γ *существует антиголоморфная инволюция* τ, *такая что*

[8] S. Grushevsky, I. Krichever, «Integrable discrete Schrödinger equations and a characterization of Prym varieties by a pair of quadrisecants» // *Duke Math. J.*, **152:2** (2010), 317–371

1. τ и σ коммутируют.

2. $\tau R_+ = R_-$.

3. Точки $P_k^+, P_k^-, Q_k^+, Q_k^-$ являются неподвижными для τ.

4. Дивизор $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ инвариантен относительно τ.

Тогда

$$f(m,n) \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

$$\Psi(\tau\gamma, m, n) = (-1)^{m+n}\overline{\Psi(\gamma, m, n)}. \tag{7}$$

Как известно, одним из наиболее мощных методов математической физики является метод функций Грина, знание которых позволяет, в частности, эффективно строить теорию возмущений. Естественный шаг в исследовании оператора L — построение его функции Грина. По аналогии с непрерывным случаем, интересна такая функция Грина, асимптотика которой совпадает с асимптотикой волновой функции.

Еще одно интересное направление заключается в рассмотрении более общих решеток, на которых вводится дискретный аналог оператора Шредингера, применении к ним конечнозонного подхода и исследованию полученного оператора.

В середине 20 века в работах Ферранд[9] и Даффина[10] рассматриваются комплексные функции на двумерной решетке $\mathbb{Z}^2$, удовлетворяющие уравнению (Коши-Римана)

$$f_{m,n+1} - f_{m+1,n} = i(f_{m+1,n+1} - f_{m,n}).$$

В другой своей работе Даффин[11] обобщил квадратную решетку до квад-графа — произвольного планарного графа, у которого все грани являются ромбами. Квад-граф является двудольным графом. В этой теории определяется дискретный оператор Коши-Римана, действующий на функциях, определенных на вершинах квад-графа, и дискретный оператор Лапласа, действующий на функциях, определенных на вершинах одной из долей квад-графа.

[9] J. Ferrand, «Fonctions preharmoniques et functions preholomorphes» // *Bull. Sci. Math.*, **68:2** (1944), 152-–180

[10] R. J. Duffin, «Basic properties of discrete analytic functions» // *Duke Math. J.*, *23* (1956), 335-–363

[11] R. J. Duffin, «Potential theory on a rhombic lattice» // *J. Combinatorial Theory*, **5** (1968), 258-–272

В работе Бобенко, Мерката и Суриса[12] рассматривается пример квазикристаллического параллелограммного погружения квад-графа в плоскость, при котором соответствующее уравнение Коши-Римана интегрируемо в смысле «3D-совместности». Особое место отведено для случаю положительных весов, в котором параллелограммы обращаются в ромбы.

При использовании конечнозонного подхода получается в некотором смысле обобщить квазикристаллический пример, при этом последний соответствует спектральной кривой рода 0.

Случай положительных весов интересен и в связи с определением несингулярного дискретного оператора. Дело в том, что перенос определения несингулярности в чистом виде с непрерывного случая на дискретный не имеет большого смысла. Действительно, ограниченность коэффициентов в совокупности у дискретного оператора будет выполняться с вероятностью 1 даже если исходный непрерывный оператор сингулярен. Для данной работы П. Гриневич предложил следующее определение несингулярности: оператор несингулярен, если он эллиптичен, то есть имеет положительные веса.

Цель работы

Найти представление для функции Грина пятиточечной дискретизации оператора Шредингера (5) в виде контурного интеграла, построенного по спектральным данным, которое имеет асимптотику волновой функции. Выделить конечнозонные операторы Лапласа на квад-графе, найти достаточные условия для эллиптичности. Найти представление для функции Грина конечнозонного оператора Лапласа в виде контурного интеграла, построенного по спектральным данным, которое также имеет асимптотику волновой функции.

Научная новизна

Все результаты работы являются новыми, получены автором самостоятельно. В диссертации получены следующие основные результаты:

- Представление функции Грина для пятиточечной дискретизации оператора Шредингера в виде интеграла по специальному контуру от дифференциала, построенного по спектральным данным.

[12] A. Bobenko, C. Mercat, Y. Suris, «Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green's function» // *J. Reine Angew. Math.*, **583** (2005), 117-–161

- Условия на обобщенные спектральные данные и квад-граф, достаточные для положительности коэффициентов конечнозонного дискретного оператора Лапласа (то есть его несингулярности) на квад-графе.

- Представление функции Грина для конечнозонного дискретного оператора Лапласа на квад-графе в виде интеграла по специальному семейству контуров от дифференциала, построенного по спектральным данным.

Методы исследования

Классическая теория римановых поверхностей, элементы теории вещественных алгебраических кривых, методы конечнозонного интегрирования, линейный подход к построению дискретного комплексного анализа на дискретных решетках.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при исследовании конечнозонных дискретных операторов Шредингера.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и общеуниверситетских, всероссийских и международных конференциях:

- Конференция «Ломоносов» (Москва, 11–15 апреля, 2011 г.).

- Семинар «Геометрия, топология и математическая физика» под руководством акад. С. П. Новикова, чл.-корр. РАН В. М. Бухштабер, 2012 г.

- «55 научная конференция МФТИ» (Москва, 19-–25 ноября 2012 г.), http://iitp.ru/upload/publications/6079/bookfupm1.pdf

- Конференция «Ломоносов» (Москва, 8–13 апреля 2013 г.).

- Семинар «Алгебраическая топология и ее приложения» под руководством чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, проф. А. В. Чернавского, проф. И. А. Дынникова, проф. Т. Е. Панова, доц. Л. А. Алании, проф. А. А. Гайфуллина, доц. Д. В. Миллионщикова, 2013 г.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в шести работах, список которых приводится к конце автореферата [1-6]. Три из них опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объем работы составляет 74 страницы. Список литературы включает 50 наименований.

Краткое содержание работы

Во **Введении** изложена краткая история вопроса, показана актуальность рассматриваемых задач, обозначены цели работы и ее результаты.

В **Первой главе** мы работаем с пятиточечным эллиптическим дискретным конечнозонным оператором L (5). Мы сразу рассматриваем случай только четырех выделенных точек P^+, P^-, Q^+, Q^- ($M = 1, N = 1$) как наиболее симметричный. Дискретные переменные m, n волновой функции — произвольные целые числа, соответствующие порядкам нулей и полюсов в выделенных точках: полюс порядка не более m в P^+, полюс порядка не более n в Q^+, нуль порядка не менее m в P^- и нуль порядка не менее n в Q^-. Мы также требуем существования инволюций σ, τ и дифференциала Ω из лемм 1 и 2.

Вопрос о том, как ведет себя $|\Psi(\gamma, m, n)|$ при фиксированном γ, важен для оценки роста функции Грина. Пусть Γ является M-кривой, то есть инволюция τ имеет $g+1$ неподвижный овал $a_1, a_2, \ldots, a_g, c$. Через $\Omega(S_1, S_2)$ обозначим мероморфный дифференциал третьего рода с полюсами первого порядка в точках S_1, S_2 и вычетами -1, 1, однозначно определенный условием равенства нулю по всем a-циклам.

Теорема 1. *Пусть Γ является M-кривой, выделенные точки $P^\pm$, $Q^\pm$ попадают на овал c, на остальные овалы попадает по одной точке γ-дивизора: $\gamma_j \in a_j$, $j = 1, \ldots, g$. Тогда канонический базис циклов и пути интегрирования на Γ можно выбрать таким образом, что для любого фиксированного $\gamma \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \cdots \cup a_g \cup c)$ выполняется неравенство при* *всех целых m, n:*

$$|\Psi(\gamma,m,n)| \leqslant R(\gamma)\left|\exp\left(m\int\limits_{R_+}^{\gamma}\Omega(P^+,P^-)+n\int\limits_{R_+}^{\gamma}\Omega(Q^+,Q^-)\right)\right|, \qquad (8)$$

где $R:\Gamma\to\mathbb{R}$ — гладкая на $\Gamma\setminus(a_1\cup\dots\cup a_g\cup c)$ функция.

Другими словами, почти при всех $\gamma\in\Gamma$ рост абсолютной величины $\Psi(m,n)$ зависит только от $\Omega(P^+,P^-)$, $\Omega(Q^+,Q^-)$.

Дифференциалы квазиимпульсов dp_m, dp_n определяются как мероморфные дифференциалы третьего рода; dp_m имеет вычеты i, $-i$ в точках P^+, P^- соответственно, dp_n — такие же вычеты в точках Q^+, Q^- соответственно. Дифференциалы квазиимпульсов однозначно определяются условием вещественности интегралов по всем контурам. Такой способ нормировки использовался у Кричевера и Новикова[13]. Сами квазиимпульсы определяются как

$$p_m(\gamma)=\int\limits_{R_+}^{\gamma}dp_m,\quad p_n(\gamma)=\int\limits_{R_+}^{\gamma}dp_n \qquad (9)$$

и являются многозначными на Γ, однако их мнимые части $\operatorname{Im}p_m(\gamma)$, $\operatorname{Im}p_n(\gamma)$ уже являются однозначными на Γ.

Оценка (8) переписывается в терминах квазиимпульсов:

$$|\Psi(\gamma,m,n)|\leqslant R(\gamma)e^{m\operatorname{Im}p_m(\gamma)}e^{n\operatorname{Im}p_n(\gamma)}. \qquad (10)$$

Для контроля роста Ψ по одной дискретной переменной мы будем рассматривать множества вида

$$C_\lambda=\{\gamma:\operatorname{Im}p_n(\gamma)=\operatorname{Im}p_n(\lambda)\},\quad \lambda\in\Gamma.$$

Такого рода контуры возникли в упомянутой выше работе Кричевера и Новикова.

Лемма 3. *Для всех $\lambda\in\Gamma\setminus\{Q^+,Q^-\}$ верны следующие свойства.*

1) *C_λ является объединением некоторого количества кусочно-гладких замкнутых кривых,*

[13] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, «Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов» // *Функциональный анализ и его приложения*, **21:2** (1987), 46–63

2) C_λ гомологичен точке,

3) точки R_+, R_- лежат по одну сторону относительно C_λ, точки Q^+, Q^- — по разные.

Нас интересует такая функция $G(\lambda,\mu,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu)$, что для любого фиксированного $\lambda\in\Gamma$

$$LG=\begin{cases}1, & \text{если } \mu=\tilde\mu \text{ и } \nu=\tilde\nu,\\ 0 & \text{иначе,}\end{cases} \tag{11}$$

где

$$LG=a_{\mu,\nu}G(\lambda,\mu+1,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu)+a_{\mu-1,\nu}G(\lambda,\mu-1,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu)+$$
$$b_{\mu,\nu}G(\lambda,\mu,\nu+1,\tilde\mu,\tilde\nu)+b_{\mu,\nu-1}G(\lambda,\mu,\nu-1,\tilde\mu,\tilde\nu)-c_{\mu,\nu}G(\lambda,\mu,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu).$$

Чтобы не загромождать формулы, в формулировке следующей теоремы мы используем обе координатных системы на четной подрешетке целочисленной решетки μ, ν и $m=\mu-\nu$, $n=\mu+\nu$.

Теорема 2. *Пусть Γ является M-кривой, выделенные точки $P^\pm$, $Q^\pm$ попадают на овал c, на остальные овалы попадает по одной точке γ-дивизора: $\gamma_j\in a_j$, $j=1,\ldots,g$. Тогда функция*

$$G(\lambda,\mu,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu)=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{C_\lambda}\Big(\operatorname{sgn}(m-\tilde m)+\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}p_m(\lambda)-\operatorname{Im}p_m(\gamma))\Big)\times$$
$$\times\Psi_{\mu,\nu}(\gamma)\Psi^+_{\tilde\mu,\tilde\nu}(\gamma)\Omega(\gamma)$$

является функцией Грина оператора L в смысле (11) *и почти при всех $\lambda\in\Gamma$ для нее выполняется условие на рост*

$$|G(\lambda,\mu,\nu,\tilde\mu,\tilde\nu)|\leqslant R_1(\lambda)e^{(\mu-\tilde\mu)(\operatorname{Im}p_m(\lambda)+\operatorname{Im}p_n(\lambda))}e^{(\nu-\tilde\nu)(\operatorname{Im}p_n(\lambda)-\operatorname{Im}p_m(\lambda))},$$

где $R_1:\Gamma\to\mathbb{R}$ — гладкая в точках выполнения неравенства. Другими словами, почти всюду рост абсолютной величины G такой же, как и Ψ.

В **Главе 2** конечнозонная конструкция используется для построения дискретного оператора на квад-графе, который является обобщением квадратной решетки. Для конечнозонного дискретного оператора Лапласа, полученного в результате этого обобщения, приводятся достаточные условия для его несингулярности.

Определение 1. *Квад-графом на плоскости называется связный планарный граф на $\mathbb{C}$, каждая грань которого является четырехугольником.*

Для произвольного планарного графа $\mathcal{H}$ на $\mathbb{C}$ будем использовать обозначения: $V(\mathcal{H})$ — множество вершин графа $\mathcal{H}$, $E(\mathcal{H})$ — множество ребер графа, $F(\mathcal{H})$ — множество положительно ориентированных граней графа, ориентация индуцируется с плоскости $\mathbb{C}$.

Рассмотрим квад-граф $\mathcal{D}$ на плоскости $\mathbb{C}$. Потребуем, чтобы для некоторого наперед заданного $d \geqslant 2$ граф $\mathcal{D}$ представлялся бы в виде двумерного дискретрного подкомплекса $\Omega_{\mathcal{D}}$ на d-мерной квадратной решетке $\mathbb{Z}^d$. Обозначим отображение вершин графа в узлы решетки через $\mathbf{n} : V(\mathcal{D}) \to \mathbb{Z}^d$.

По $\mathcal{D}$ однозначно строятся графы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$, вершины которых являются долями $\mathcal{D}$, а ребра — диагоналями граней $\mathcal{D}$.

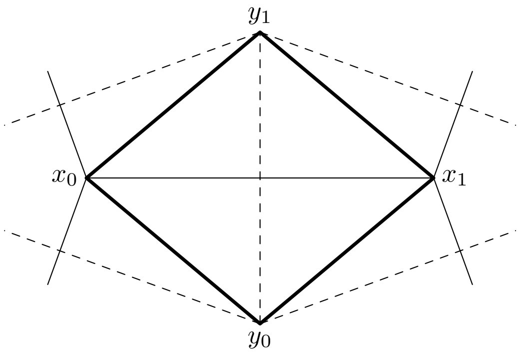

Рис. 1: Грань $(x_0, y_0, x_1, y_1) \in F(\mathcal{D})$. Тонкими линиями нарисованы ребра $\mathcal{G}$, пунктиром — ребра $\mathcal{G}^*$.

С использованием конечнозонного подхода по отображению $\mathbf{n}$ строится необходимый элемент дискретного комплексного анализа на квадграфе — весовая функция $\nu : E(\mathcal{G}) \to \mathbb{C}$, через которую вводятся

- дискретное уравнение Коши-Римана на квад-графе $\mathcal{D}$
$$\frac{f(y_1) - f(y_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = i\nu(x_0, x_1);$$
- дискретный оператор Лапласа L на графе $\mathcal{G}$
$$(Lf)(x_0) = \sum_{x \sim x_0} \nu(x_0, x)(f(x) - f(x_0)), \tag{12}$$

где суммирование проходит по всем соседним с x_0 вершинам в графе $\mathcal{G}$.

Для построения весовой функции ν необходим следующий набор обобщенных спектральных данных.

- Компактная, регулярная риманова поверхность Γ рода g.
- Фиксированная точка R_1 на Γ для нормировки волновой функции.
- Дивизор общего положения $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$.
- Коллекция из d пар выделенных точек $A_1^+, A_1^-, A_2^+, A_2^-, \ldots, A_d^+, A_d^-$. Все точки попарно различны.

По теореме Римана-Роха, для любого целочисленного вектора

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$$

существует единственная функция $\Psi(\mathbf{n}; \gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, со следующими свойствами.

1. При каждом $\mathbf{n}$ функция Ψ является мероморфной от γ.
2. Ψ имеет полюса не более первого порядка в точках $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_g$.
3. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, d$, Ψ имеет полюс не более чем n_j порядка в точке A_j^+ и нуль по крайней мере n_j порядка в точке A_j^-.
4. Выполняется условие нормировки $\Psi(\mathbf{n}; R_1) \equiv 1$.

Волновая функция естественно переводится на вершины графа $\mathcal{D}$:

$$\Psi(p, \gamma) = \Psi(\mathbf{n}(p); \gamma), \quad p \in V(\mathcal{D}).$$

В этой конструкции волновая функция зависит уже от d целочисленных переменных. Подобное построение уже было проделано в более общем виде Ахметшина, Вольвовского, Кричевера [14], где оно использовалось для построения дискретного аналога решетки Дарбу-Егорова. При $d = 2$ мы получаем построения, сделанные для гиперболического и эллиптического операторов на квадратной решетке (3), (5), соответствующие случаю, когда в каждой коллекции находится по одной выделенной точке: $M = 1, N = 1$.

[14] А. А. Ахметшин, Ю. С. Вольвовский, И. М. Кричевер, «Дискретные аналоги метрик Дарбу–Егорова» // *Труды МИАН им. Стеклова*, **225** (1999), 21–45

Также имеют место леммы, обобщающие лемму 1 и лемму 2. Мы требуем существования соответствующих инволюций σ, τ и дифференциала Ω.

Достаточное условие несингулярности оператора L формулируется в следующих теоминах.

Определение 2. *Меткой произвольного ребра графа $\mathcal{D}$ назовем тот координатный вектор $\mathbb{Z}^d$, в который переходит это ребро под действием* $\mathbf{n}$. *Введем ориентацию на ребрах $\mathcal{D}$ в сторону увеличения координаты.*

Определение 3. *Рассмотрим две произвольные соседние грани квадграфа $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in F(\mathcal{D})$, $(p_2, p_5, p_6, p_4) \in F(\mathcal{D})$. Пусть ребро (p_2, p_4) имеет метку e_y, ребро (p_1, p_2) — метку e_x, ребро (p_2, p_5) — метку e_z, где x, y, z — целочисленные индексы от 1 до d. Ориентация (p_2, p_4) может быть произвольной. Потребуем, чтобы ребра (p_1, p_2) и (p_2, p_5) были направлены в разные стороны (имели общий конец или общее начало) тогда и только тогда, когда точки A_x^+, A_z^+ лежат на разных дугах, соединяющих A_y^+, A_y^- на овале c. Тогда будем говорить, что разметка ребер квад-графа $\mathcal{D}$ положительно согласована с их ориентацией.*

Теорема 3 (Достаточное условие положительности весовой функции)**.** *Пусть Γ является M-кривой, выделенные точки $A_j^{\pm}$, $j = 1, 2, \ldots, d$, попадают на овал c, на остальные овалы попадает по одной точке γ-дивизора: $\gamma_k \in a_k$, $k = 1, \ldots, g$. Все значения весовой функции ν, построенной по этим спектральным данным, имеют один знак тогда и только тогда, когда разметка ребер квад-графа $\mathcal{D}$ положительно согласована с их ориентацией.*

Не вдаваясь в подробности, отметим, что если граф $\mathcal{D}$ имеет упомянутое ранее квазикристаллическое робмовидное погружение p и комплекс $\Omega_{\mathcal{D}}$ получен из $\mathcal{D}$ с помощью p, то для любого корректного набора спектральных данных (требуется существование σ, Ω и τ, род кривой произвольный) конечнозонный подход дает после подходящей перенумерации пар точек $A_j^{\pm}$ разметку, положительно согласованную с ориентацией.

Глава 3 посвящена формуле для функции Грина конечнозонного оператора L (12). Нас интересует такая функция $G(x, \tilde{x}, \lambda)$, $x \in V(\mathcal{G})$, $\tilde{x} \in V(\mathcal{G})$, что для почти любого фиксированного $\lambda \in \Gamma$ выполняется

$$LG = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \tilde{x}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$(LG)(x, \tilde{x}, \lambda) = \sum_{x_1 \sim x} \nu(x, x_1)(G(x_1, \tilde{x}, \lambda) - G(x, \tilde{x}, \lambda)).$$

Дифференциалы квазиимпульсов dp_j, $j = 1, \dots, d$, определяются по аналогии с **Главой 1**. Это мероморфные дифференциалы третьего рода; dp_j имеет вычеты i, $-i$ в точках A_j^+, A_j^- соответственно. Дифференциалы квазиимпульсов однозначно определяются условием вещественности интегралов по всем контурам. Сами квазиимпульсы определяются как

$$p_j(\gamma) = \int\limits_{R_1}^{\gamma} dp_j$$

и являются многозначными на Γ, однако их мнимые части $\operatorname{Im} p_j(\gamma)$ уже являются однозначными на Γ.

Имеет место аналог теоремы 1. Условия на спектральные данные в ней такие же, как и в теореме 3: Γ является М-кривой, выделенные точки $A_j^{\pm}$, $j = 1, \dots, d$, попадают на овал c, на остальные овалы попадает по одной точке γ-дивизора: $\gamma_k \in a_k$, $k = 1, \dots, g$. Тогда выполняется неравенство, которое в терминах квазиимпульсов выглядит следующим образом:

$$|\Psi(\mathbf{n}, \gamma)| \leqslant R(\gamma) e^{\langle \mathbf{n}, \operatorname{Im} \mathbf{p}(\gamma) \rangle},$$

где

$$\mathbf{p}(\gamma) = (p_1(\gamma), \dots, p_d(\gamma)), \quad \langle \mathbf{n}, \operatorname{Im} \mathbf{p}(\gamma) \rangle = \sum_{j=1}^{d} n_j \operatorname{Im} p_j(\gamma)$$

и $R : \Gamma \to \mathbb{R}$ — гладкая на $\Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$ функция.

Определим контуры, которые используются при построении функции Грина для контроля роста волновой функции. Рассмотрим вещественную линейную комбинацию дифференциалов квазиимпульсов:

$$dp_{\mathbf{k}} = k_1 dp_1 + \dots + k_d dp_d, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Построим множество точек на Γ:

$$C_{\mathbf{k}}(\lambda) = \{\gamma : \operatorname{Im} p_{\mathbf{k}}(\gamma) = \operatorname{Im} p_{\mathbf{k}}(\lambda)\}.$$

Для множества $C_{\mathbf{k}}(\lambda)$ имеет место лемма о его регулярности, аналогичная лемме 3.

Теорема 4 (Формула для функции Грина с асимптотикой волновой функции)**.** *Пусть Γ является М-кривой, выделенные точки $A_j^{\pm}$, $j = 1, \dots, d$, попадают на овал c, на остальные овалы попадает по одной точке γ-дивизора: $\gamma_l \in a_l$, $l = 1, \dots, g$. Тогда почти при любых $\lambda \in \Gamma$ и* *для тех $\tilde{x} \in V(\mathcal{G})$, для которых сумма $\sum_{\tilde{x}_1 \sim \tilde{x}} \nu(\tilde{x}, \tilde{x}_1)$ не обращается в нуль, определяется Функция Грина оператора L на графе $\mathcal{G}$*

$$G(x, \tilde{x}, \lambda) = \frac{1}{k(\tilde{x})} \oint\limits_{C_{\mathbf{n}(x)-\mathbf{n}(\tilde{x})}(\lambda)} \Psi(x, \gamma)\Psi^{+}(\tilde{x}, \gamma)\Omega(\gamma), \quad x \neq \tilde{x}, \tag{13}$$

$$G(\tilde{x}, \tilde{x}, \lambda) = 1,$$

где

$$k(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{x}_1 \sim \tilde{x}} \nu(\tilde{x}, \tilde{x}_1),$$

и имеет асимптотику

$$|G(x, \tilde{x}, \lambda)| \leqslant R_1(\lambda, \tilde{x}) e^{\langle \mathbf{n}(x)-\mathbf{n}(\tilde{x}), \operatorname{Im} \mathbf{p}(\lambda) \rangle},$$

где $R_1(\cdot, \tilde{x}) : \Gamma \to \mathbb{R}$ — гладкая в точках выполнения неравенства.

Замечание 2. Требование про необращение в нуль суммы $k(x) = \sum_{\tilde{x}_1 \sim \tilde{x}} \nu(\tilde{x}, \tilde{x}_1)$ является существенным. Оно выполняется для всех вершин графа при дополнительном требовании о положительной согласованности разметки и ориентации ребер по теореме 3. Как обстоят дела при более общих предположениях — открытый вопрос.

Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию в области конечнозонных решений дискретных интегрируемых систем.

В диссертации получены следующие основные результаты.

Получена асимптотическая оценка для абсолютной величины волновой функции пятиточечного конечнозонного при одной энегрии дискретного двумерного оператора Шредингера на квадратной решетке в случае, когда имеется ровно 4 выделенных точки. Найдено представление функции Грина для казанного дискретрного оператора в виде интеграла по специальному контуру от дифференциала, построенного по спектральным данным.

Предложено определение несингулярности дискретного оператора, связывающее несингулярность с эллиптичностью. Найдены условия на обобщенные спектральные данные и квад-граф, достаточные для несингулярности конечнозонного при одной энергии дискретного двумерного оператора Шредингера на квад-графе. Получена асимптотическая оценка для абсолютной величины волновой функции этого дискретного оператора. Найдено представление функции Грина упомянутого дискретного оператора в виде интеграла по специальному семейству контуров от дифференциала, построенного по спектральным данным.

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю д.ф.-м.н. Петру Георгиевичу Гриневичу за постановку задач и внимание к работе. Автор благодарен д.ф.-м.н. Пенскому Алексею Викторовичу за внимание к работе и ценные замечания. Автор благодарен сотрудникам кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ и Лаборатории геометрических метотов математической физики имени Н. Н. Боголюбова за опыт и знания, полученные в ходе обучения, и за научную атмосферу. Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской федерации 2010-220-01-077.

Публикации автора по теме диссертации

1. Б. О. Василевский, «Функция Грина пятиточечной дискретизации двумерного конечнозонного оператора Шрёдингера: случай четырех особых точек на спектральной кривой» // *Сибирский математический журнал.*, **54:6** (2013), с. 1250–1262.

2. Б. О. Василевский, «Функция Грина дискретного конечнозонного при одной энергии двумерного оператора Шредингера на квад-графе» // *Математические заметки*, **98:1** (2015), с. 27–43.

3. Б. О. Василевский, «Достаточное условие несингулярности дискретного конечнозонного при одной энергии двумерного оператора Шредингера на квад-графе» // *Функц. анализ и его прил.*, **49:3** (2015).

4. Б. О. Василевский, «Функция Грина для эллиптической дискретизации оператора Шрёдингера на квадратной решётке» // *Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2013»*, Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова — М.: МАКС Пресс, 2011, электронное издание: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2011/1257/31992_228d.pdf

5. Б. О. Василевский, «Функция Грина пятиточечной дискретизации двумерного конечнозонного оператора Шрёдингера: случай четырёх особых точек на спектральной кривой» // *Труды 55-й научной конфе-*

ренции МФТИ. Управление и прикладная математика. Том 1, 2012, Москва–Долгопрудный–Жуковский.

6. Б. О. Василевский, «Достаточное условие несингулярности дискретного конечнозонного при одной энергии двумерного оператора Шредингера на квад-графе» // *Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2013»*, Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, К.К. Андреев, М.В. Чистякова — М.: МАКС Пресс, 2013, электронное издание: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2189/31992_590f.pdf