

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 514.84

**Василевский Борис Олегович**

**Функция Грина конечнозонного при одной энергии  
оператора Шредингера на квад-графах**

01.01.04 – геометрия и топология

диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. П. Г. Гриневич

Москва – 2015

# Содержание

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Введение</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Функция Грина пятиточечной дискретизации двумерного конечнозонного оператора Шрёдингера: случай четырёх особых точек на спектральной кривой</b> | <b>10</b> |
| 2.1      | Рост волновой функции . . . . .  | 16        |
| 2.2      | Квазиимпульсы . . . . .  | 21        |
| 2.3      | Ненормализованная функция Грина по $C$ -контур . . . . .   | 24        |
| 2.4      | Функция Грина оператора $L$ . . . . .  | 30        |
| <b>3</b> | <b>Достаточное условие несингулярности дискретного конечнозонного при одной энергии двумерного оператора Шрёдингера на квад-графе</b>              | <b>32</b> |
| 3.1      | Дискретные комплексы, квад-графы и комплексный анализ . . .  | 33        |
| 3.2      | Многоточечная волновая функция и дискретные уравнения Коши-Римана . . . . .  | 37        |
| 3.3      | Достаточное условие несингулярности оператора Лапласа . . . .  | 44        |
| <b>4</b> | <b>Функция Грина оператора Лапласа на квад-графах</b>  | <b>55</b> |
| 4.1      | Рост волновой функции . . . . .  | 55        |
| 4.2      | Квазиимпульсы . . . . .  | 60        |
| 4.3      | Функция Грина оператора Лапласа . . . . .  | 63        |
| <b>5</b> | <b>Заключение</b>  | <b>68</b> |
|          | <b>Список литературы</b>   | <b>69</b> |

# 1 Введение

Современное развитие теории пространственно-одномерных нелинейных интегрируемых систем принято вести с работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1] 1967 года, в которой было показано, что уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ) можно линеаризовать, используя в качестве переменных данные рассеяния для одномерного оператора Шредингера. Годом позже Лакс [2] дал алгебраическую интерпретацию, показав линеаризуемость одномерных уравнений, представляемых в виде

$$\partial L / \partial t = [L, A].$$

Вслед за этим появились работы по применению метода к другим уравнениям математической физики. Захаров и Шабат [3] решили задачу Коши для нелинейного  $1+1$  уравнения Шредингера с быстроубывающими начальными данными. Абловиц, Кауп, Ньюелл, Сигур [4] проинтегрировали уравнение  $\sin$ -Гордон. В дальнейшем число примеров интегрируемых пространственно-одномерных задач стало быстро расти.

Периодическая задача для КдФ была решена в работе Новикова [5]. В ней вводится «конечнозонный» подход построения широкого класса периодических и почти-периодических решений, ассоциированных с операторами  $L$ , спектр которых имеет конечнозонную структуру. Развитие подхода происходило в работах Дубровина [6], Матвеева и Итса [7] и в ряде других работ. В исследовании конечнозонного случая хочется также упомянуть Лакса [8] и Мак-Кина, ван Мербеке [9].

Перенос метода на задачи пространственной размерности более одного был осуществлен у Захарова, Шабата [11] и параллельно с ними у Дрюма [12], где они построили пары Лакса для уравнения КП. В работе Захарова и Шабата

также описан метод «одевания» и класс  $N$ -солитонных решений. Кричевер [13] проинтергрировал периодическую периодическую задачу для КП, используя конечнозонный подход.

В дальнейшем развитии двумерной задачи хотелось бы выделить работы Манакова и Дубровина, Кричевера, Новикова, вышедшие в 1976 году. Важной идеей этих работ было фиксирование одного уровня энергии в методе обратной задачи. Манаков [14] показал, что для двумерных систем правильным обобщением пары Лакса является  $L, A, B$ -тройка. Дубровин, Кричевер и Новиков [15] показали интегрируемость двумерного стационарного конечнозонного оператора Шрёдингера при фиксированной энергии, используя конечнозонный подход.

Следующий важный шаг в размерности 2 был произведен в работах Веселова и Новикова [16], в которых авторы нашли условие на конечнозонные спектральные данные, соответствующие нулевому магнитному полю. Это условие включает в себя существование на спектральной кривой голоморфной инволюции  $\sigma$  с двумя неподвижными точками (условие Чередниковского типа). На операторах с нулевым магнитным полем возникает иерархия Веселова-Новикова, порождающая бесконечную алгебру симметрий для задачи рассеяния. Для потенциала с нулевым магнитным полем была выведена явная формула в терминах  $\theta$ -функции Прима, что само по себе является нетривиальным результатом. В этих же работах было сформулировано условие на вещественность потенциала, заключающееся в существовании антиголоморфной инволюции  $\tau$ , коммутирующей с  $\sigma$  и с некоторыми дополнительными условиями. В условиях нулевого магнитного поля и вещественности естественной задачей является отбор данных рассеяния, отвечающих неособым потенциалам. Ее решение было получено Натанзоном [17], [18], [19].

Случай убывающих на бесконечности потенциалов (в частности, выде-

ления нулевого магнитного поля) был исследован в работах Гриневича, Р. Г. Новикова [21] и Гриневича, Манакова [22].

Вопрос о существовании спектральной кривой в прямой задаче для двумерного периодического оператора Шредингера достаточно нетривиален, в отличие от одномерного случая. Кричевером [23] построена спектральная кривая с использованием теории возмущений и сделана аппроксимация периодических потенциалов конечнозонными. Тайманов [24], [25] доказал существование спектральной кривой для оператора Дирака, используя теорему Келдыша о резольvente пучка некоторых классов аналитических операторов.

В конечнозонном подходе оказывается достаточно важен случай, когда спектральная кривая является М-кривой относительно антиголоморфной инволюции, то есть имеет максимально возможное число неподвижных овалов  $g + 1$ , где  $g$  — род кривой. При некоторых дополнительных ограничениях на спектральные данные получается достаточное условие несингулярности и строгой положительности построенного по ним двумерного оператора Шредингера — Веселов, Новиков [16]. В статье Гриневича и Новикова [26] при рассмотрении быстроубывающего случая для отрицательных энергий возник континуальный аналог М-кривой, формулируемый в терминах теории обобщенных аналитических функций.

В связи с невозможностью всегда выписать точные решения стали развиваться альтернативные подходы. Одним из самых важных является построение дискретной системы по непрерывному уравнению. Первый подход к написанию дискретного уравнения предпринял Люстерник [27] ещё в 1926 году

$$\Delta^2 z = z_{i+1,k} + z_{i-1,k} + z_{i,k+1} + z_{i,k-1} - 4z_{ik} = 0,$$

применив метод конечных разностей для доказательства существования решения задачи Дирихле. В дальнейшем построение разностных схем успешно при-

менялось в вычислительной математике для нахождения приближённых решений. Тем не менее, с современной точки зрения большинство стандартных дискретизаций не являются интегрируемыми.

Интерес к исследованию интегрируемых дискретизаций уравнений математической физики существенно возрос благодаря эксперименту Ферми-Пасты-Улама [28] 1955 года по исследованию стохастизации нелинейных осцилляторов. Первые доказательства интегрируемости одномерных дискретных систем были даны для цепочки Тоды

$$\ddot{x}_n = e^{x_{n+1}-x_n} - e^{x_n-x_{n-1}},$$

(совпадающей до кубического члена с одной из рассмотренных в [28]), и цепочки Ленгмюрра

$$\dot{x}_n = x_n(x_{n+1} - x_{n-1}),$$

или «разностного уравнения КдФ». Интегрируемость цепочки Тоды была доказана (построена пара Лакса) независимо в 1974 году у Манакова [29] и Флашки [30], а также с использованием другой техники – Хеноном [31]. В работе Манакова доказана также интегрируемость цепочки Ленгмюрра.

В развитии интегрируемых дискретизаций выделяется два подхода. В первом подходе, который логично называть линейным, изучаются дискретизации уравнений Коши-Римана. В середине 20 века в работах Ферранд [32] и Даффина [33] рассматриваются комплексные функции на двумерной решетке  $\mathbb{Z}^2$ , удовлетворяющие уравнению

$$f_{m,n+1} - f_{m+1,n} = i(f_{m+1,n+1} - f_{m,n}).$$

В другой своей работе [34] Даффин обобщил решетку до произвольных планарных графов, у которых все грани являются ромбами. В данной работе такие графы мы будем называть квад-графами. В 2001 году Меркат [35] существенно

обобщил идеи Даффина, построив линейную комплексную теорию на дискретных римановых поверхностях. При построении функции Грина для оператора Лапласа на описанных планарных графах хотелось бы отметить работу Кейона [36].

Долгое время линейная теория и второй подход, называемый нелинейным, рассматривались отдельно друг от друга. Бобенко, Меркат, Сурис в работе [37] показали, что линейная теория является в некотором смысле линеаризацией нелинейной. Особое внимание в работе уделено квазикристаллическим решеткам, у которых по определению углы любой из граней принадлежат фиксированному конечному множеству.

В отличие от непрерывного случая, на квадратной решетке и ее упомянутых обобщениях оператор Лапласа не удается факторизовать на оператор Коши-Римана и сопряженный к нему. В работе Дынникова и Новикова [38] строится дискретная модель комплексного анализа на треугольной решетке, в которой оператор Лапласа уже допускает факторизацию.

В развитии интегрируемых дисктеризаций отдельную роль сыграл конечно-зонный подход. Двумерный дискретный гиперболический оператор Шредингера на квадратной решетке, интегрируемый в смысле решенной обратной задачи рассеяния, был получен Кричевером [39]. В этой работе также приведены спектральные кривые  $\Gamma$ , дающие по размерности все дискретные периодические операторы

$$L\psi_{nm} = \psi_{n+1,m+1} + a_{nm}\psi_{n+1,m} + b_{nm}\psi_{n,m+1} + v_{nm}\psi_{nm},$$

взятые с точностью до калибровки. Прямая задача для этого оператора была решена Обломковым, Пенским в работе [40], в ней же обсуждается случай полунепрерывного двумерного дискретного оператора (решены прямая и обратная задачи в периодическом случае). Далее, в статье Доливы, Гриневича,

Нишпровски и Сантини [41] была получена эллиптическая дискретизация из специальной редукции гиперболической дискретизации. Эта редукция в терминах спектральных данных оказалась очень похожа на редукцию в работах Веселова и Новикова [16] для непрерывного случая. В частности, на спектральной кривой требуется наличие голоморфной инволюции с двумя неподвижными точками.

Случаи двух и нуля неподвижных точек у голоморфной инволюции на римановой поверхности являются наиболее интересными, согласно Фэю [43]. Из работы Кричевера и Грушевского [42] в частности следует, что общие решения отвечают инволюции без неподвижных точек, а решения из [41] являются специальными. Решения общего положения отвечают спектральным кривым, у которых инволюция не имеет неподвижных точек. Для них найдены явные формулы в терминах  $\theta$ -функции Прима. Хочется упомянуть, что в работе [42] была решена проблема Шоттки-Прима для инволюции без неподвижных точек. Вслед за [41] мы будем рассматривать инволюцию именно с двумя неподвижными точками. Более общий случай нуля неподвижных точек — тема для дальнейших исследований.

В первой части диссертации идет работа с двумерной дискретизацией оператора Шредингера на квадратной решетке, построенного в [41]. Рассматривается наиболее симметричный случай, когда все точки серий совпадают, или, что эквивалентно, имеется ровно 4 особых точки. Основным результатом — представление функции Грина для описанного оператора Шредингера в виде интеграла по специальному контуру от дифференциала, построенного по спектральным данным.

Во второй части диссертации конечнозонный подход применяется для построения дискретизации оператора Шредингера на квад-графе. Обсуждается



идея о том, что правильным определением несингулярности является его эллиптичность. Дело в том, что перенос определения несингулярности в чистом виде с непрерывного случая на дискретный не имеет большого смысла. Действительно, ограниченность коэффициентов в совокупности у дискретного оператора будет выполняться с вероятностью 1 даже если исходный непрерывный оператор сингулярен. Для рассматриваемых дискретных операторов Лапласа эллиптичность означает постоянный знак у его коэффициентов. Во второй части приводятся условия на обобщенные спектральные данные и квад-граф, достаточные для положительности коэффициентов построенных операторов. Примечательно, что для спектральных данных работают условия, абсолютно аналогичные условиям из [16] для выделения несингулярных и строго положительных потенциалов двумерного оператора Шредингера в непрерывном случае.

В третьей части диссертации обобщается результат части первой. Рассмотрим дискретизацию оператора Шредингера на квад-графе, построенную во второй части. Для функции Грина этого дискретного оператора найдено представление в виде интеграла по специальному семейству контуров от дифференциала, построенного по спектральным данным. Строение этого дифференциала аналогично строению дифференциала из части первой.

Автор благодарен д.ф.-м.н. Петру Георгиевичу Гриневичу за постановку задач и помощь в работе.

## 2 Функция Грина пятиточечной дискретизации двумерного конечнозонного оператора Шрёдингера: случай четырёх особых точек на спектральной кривой

В этой части мы будем работать с пятиточечным эллиптическим дискретным конечнозонным оператором  $L$ , построенном в работе Доливы, Гриневича, Нишпровски и Сантини [41]. При этом мы сразу будем рассматривать случай только 4 особых точек как наиболее симметричный.

Начнем с построения гиперболического дискретного конечнозонного оператора Шрёдингера из работы Кричевера [39]. Пусть у нас имеется:

1. Компактная, регулярная риманова поверхность рода  $g$ .
2. Фиксированная точка  $R_1$  на  $\Gamma$  — точка нормировки для волновой функции  $\Psi(\gamma, m, n)$ .
3.  $g$  точек  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$  на  $\Gamma$  — дивизор полюсов волновой функции.
4. Четыре выделенных точки  $P^+, P^-, Q^+, Q^-$ .

По теореме Римана-Роха, для данных общего положения и для любых целых  $m, n$  существует единственная функция  $\Psi(\gamma, m, n)$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , со следующими свойствами:

1.  $\Psi(\gamma, m, n)$  является мероморфной функцией от  $\gamma$  на  $\Gamma$ .
2.  $\Psi$  имеет полюса не более первого порядка в точках  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ , полюс не более  $m$ -го порядка в точке  $P^+$ , полюс не более  $n$ -го порядка в точке  $Q^+$  и не имеет никаких других особенностей.
3.  $\Psi$  имеет нуль по крайней мере  $m$ -го порядка в точке  $P^-$  и нуль по крайней мере  $n$ -го порядка в точке  $Q^-$ .

$$4. \Psi(R_1, m, n) = 1.$$

Из теоремы Римана-Роха также следует справедливость равенства

$$\begin{aligned} & \Psi(\gamma, m+1, n+1) + \alpha_1(m, n)\Psi(\gamma, m+1, n) + \\ & \alpha_2(m, n)\Psi(\gamma, m, n+1) + \alpha_3(m, n)\Psi(\gamma, m, n) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где коэффициенты  $\alpha_j(m, n)$  задаются формулами

$$\begin{aligned} \alpha_1(m, n) &= - \lim_{\gamma \rightarrow P^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n+1)}{\Psi(\gamma, m+1, n)}, \\ \alpha_2(m, n) &= - \lim_{\gamma \rightarrow Q^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n+1)}{\Psi(\gamma, m, n+1)}, \\ \alpha_3(m, n) &= -1 - \alpha_1(m, n) - \alpha_2(m, n). \end{aligned}$$

Равенство (2.1) задает гиперболический оператор вместе с собственной функцией. Как уже говорилось, они были получены в [39] для в более общего случая — коллекция точек вместо каждой из  $P^\pm, Q^\pm$ .

Рассмотрим четырехточечное уравнение общего вида

$$\alpha_{m,n}\varphi_{m+1,n+1} + \beta_{m,n}\varphi_{m+1,n} + \gamma_{m,n}\varphi_{m,n+1} + \delta_{m,n}\varphi_{m,n} = 0. \quad (2.2)$$

В [41] показано, что уравнение (2.2) допускает редукцию до пятиточечного уравнения на четную подрешетку (так что любое решение исходного уравнения является решением редуцированного) тогда и только тогда, когда выполняется

$$\beta_{m,n}\alpha_{m-1,n}\delta_{m,n-1}\gamma_{m-1,n-1} = \gamma_{m,n}\delta_{m-1,n}\alpha_{m,n-1}\beta_{m-1,n-1}.$$

Кроме того, при выполнении этого условия четырехточечное уравнение (2.2) эквивалентно с точностью до калибровки дискретному уравнению Коши-Римана (2.4).

Рассмотрим теперь уравнение (2.1). Возникает естественный вопрос — можно ли сформулировать аналогичное условие на языке спектральных данных,

при котором данное уравнение допускает редукцию до пятиточечной схемы на четную подрешетку. Такое достаточное условие также было получено в [41] и строится следующим образом.

**Лемма 2.1** (Лемма 16 из [41]). *Пусть теперь на  $\Gamma$  определена голоморфная инволюция  $\sigma$  ровно двумя неподвижными точками  $R_+ = R_1, R_-$  и следующими свойствами:*

1. *На  $\Gamma$  существует мероморфный дифференциал  $\Omega$  с двумя полюсами первого порядка в  $R_+, R_-$  и  $2g$  нулями в  $\gamma_1, \dots, \gamma_g, \sigma\gamma_1, \dots, \sigma\gamma_g$ .*
2.  $\sigma P^+ = P^-, \sigma Q^+ = Q^-$ .

Тогда

$$\Psi(R_-, m, n) = (-1)^{m+n}, \quad \alpha_1(m, n) + \alpha_2(m, n) = 0, \quad \alpha_3(m, n) = -1, \quad (2.3)$$

а волновая функция  $\Psi$  удовлетворяет 4-точечному уравнению Коши–Римана

$$\Psi(m+1, n+1) - \Psi(m, n) = if(m, n)(\Psi(m+1, n) - \Psi(m, n+1)), \quad (2.4)$$

$$f(m, n) = i\alpha_1(m, n) = -i\alpha_2(m, n). \quad (2.5)$$

**Доказательство.** По аналогии с [16], рассмотрим мероморфный дифференциал

$$\Psi(\gamma, m, n)\Psi(\sigma\gamma, m, n)\Omega.$$

По построению  $\sigma$  и  $\Omega$ , из особенностей у него только два простых полюса в точках  $R_+$  и  $R_-$ . Следовательно, вычеты в них противоположны

$$\operatorname{res}_{R_+} \Psi(\gamma, m, n)\Psi(\sigma\gamma, m, n)\Omega = -\operatorname{res}_{R_-} \Psi(\gamma, m, n)\Psi(\sigma\gamma, m, n)\Omega.$$

Вычеты  $\Omega$  в точках  $R_+, R_-$  также противоположны по аналогичным соображениям. Расписывая вычеты, получаем

$$\Psi^2(R_+, m, n) = \Psi^2(R_-, m, n) \equiv 1.$$

Докажем, что  $\Psi(R_-, m, n) = (-1)^{m+n}$ . Для случая  $m = n = 0$  это выполняется, поскольку  $\Psi(\gamma, 0, 0) \equiv 1$  (следует из единственности волновой функции и из того, что 1 удовлетворяет всем требованиям). Рассмотрим теперь  $\Psi(R_-, m, n)$  как функцию от точки  $P^+$  (она также зависит от  $P^- = \sigma P^+$ ). По построению она мероморфна в  $P^+$ . Из связности  $\Gamma$  вытекает, что  $\Psi(R_-, m + 1, n)$  не зависит от  $P^+$ . Предположим, что  $P^+$  находится в окрестности  $R_-$ , и рассмотрим в этой окрестности локальный параметр  $z$ , такой что  $z(R_-) = 0$ ,  $\sigma z = -z$ . Тогда

$$\Psi(z, m + 1, n) = \frac{z + P^+}{z - P^+} \Psi(z, m, n) + o(P^+).$$

Следовательно,

$$\Psi(R_-, m + 1, n) = -\Psi(R_-, m, n).$$

Отсюда вытекает первое равенство (2.3). Подставив  $\gamma = R_-$  в (2.1), получим остальные утверждения леммы. ■

Будем считать, что такие  $\sigma$  и  $\Omega$  существуют. Нормируем  $\Omega(\gamma)$  таким образом, что его вычеты в точках  $R_+$ ,  $R_-$  равны соответственно  $+\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ .

**Замечание 2.1.** В работе Кричевера и Грушевского [42] было замечено, что типичные конструкции отвечают случаю, когда инволюция  $\sigma$  не имеет неподвижных точек, а  $\gamma$ -дивизор состоит из  $g - 1$  точки. При этом дифференциал  $\Omega$  голоморфен, имеет нули в точках  $\gamma$ -дивизора и  $\sigma\gamma$ -дивизора,  $\sigma\Omega = \Omega$ . Дело оказывается в том, что если мы добавим  $\gamma_g$  в дивизор волновой функции, то у нее не будет в нем полюса. Действительно, рассмотрим дифференциал

$$\Psi(\gamma, m, n)\Psi(\sigma\gamma, m, n)\Omega.$$

Пусть у  $\Psi(\gamma, m, n)$  есть полюс не более первого порядка в  $\gamma_g$ , тогда этот дифференциал имеет всего два полюса не более чем первого порядка в  $\gamma_g$  и  $\sigma\gamma_g$ ,

и вычеты в них противоположны. С другой стороны, этот дифференциал инвариантен относительно  $\sigma$  и эти вычеты должны совпадать. Следовательно, полюсов в  $\gamma_g$ ,  $\sigma\gamma_g$  у дифференциала и волновой функции нет.

Из существования  $\sigma$  и  $\Omega$  по теореме Римана–Роха следует

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(m,n)}(\Psi(m+1, n+1) - \Psi(m, n)) + \\ & f(m, n-1)(\Psi(m+1, n-1) - \Psi(m, n)) + \\ & f(m-1, n)(\Psi(m-1, n+1) - \Psi(m, n)) + \\ & \frac{1}{f(m-1, n-1)}(\Psi(m-1, n-1) - \Psi(m, n)) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

После перехода на чётную подрешётку

$$\begin{aligned} m &= \mu - \nu, & n &= \mu + \nu, & \Psi_{\mu,\nu} &= \Psi(m, n) = \Psi(\mu - \nu, \mu + \nu), \\ a_{\mu,\nu} &= \frac{1}{f(m,n)}, & a_{\mu-1,\nu} &= \frac{1}{f(m-1, n-1)}, \\ b_{\mu,\nu} &= f(m-1, n), & b_{\mu,\nu-1} &= f(m, n-1), \\ c_{\mu,\nu} &= a_{\mu,\nu} + a_{\mu-1,\nu} + b_{\mu,\nu} + b_{\mu,\nu-1}, \end{aligned}$$

пятиточечный оператор запишется в следующем виде

$$(L\Phi)_{\mu,\nu} = a_{\mu,\nu}\Phi_{\mu+1,\nu} + a_{\mu-1,\nu}\Phi_{\mu-1,\nu} + b_{\mu,\nu}\Phi_{\mu,\nu+1} + b_{\mu,\nu-1}\Phi_{\mu,\nu-1} - c_{\mu,\nu}\Phi_{\mu,\nu} \quad (2.7)$$

Как отмечалось в [41], оператор  $L$  самосопряжен.

Двойственная волновая функция определяется как  $\Psi^+(\gamma, m, n) = \Psi(\sigma\gamma, m, n)$ . При ее участии строится дифференциал

$$\tilde{\Omega}(\gamma, m, n, \tilde{m}, \tilde{n}) = \Psi(\gamma, m, n)\Psi^+(\gamma, \tilde{m}, \tilde{n})\Omega$$

из доказательства леммы 2.1. Такое обозначение отличается от [41] заменой  $\mu \leftrightarrow \tilde{\mu}$  и  $\nu \leftrightarrow \tilde{\nu}$ , что позволяет избежать излишнего загромождения формул. При помощи  $\tilde{\Omega}$  мы будем строить функцию Грина для оператора  $L$ .

Мы также потребуем существование на  $\Gamma$  антиголоморфной инволюции  $\tau$ , такой что

1.  $\tau$  и  $\sigma$  коммутируют.
2.  $\tau R_+ = R_-$ .
3. Точки  $P^+, P^-, Q^+, Q^-$  являются неподвижными для  $\tau$ .
4. Дивизор  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$  инвариантен относительно  $\tau$ .

В этом случае по лемме 17 [41]

$$f(m, n) \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

$$\Psi(\tau\gamma, m, n) = (-1)^{m+n} \overline{\Psi(\gamma, m, n)}. \quad (2.9)$$

Основные результаты этого раздела получены в работе автора [48].

**Пример 2.1.** Рассмотрим случай сферы Римана. Пусть  $P^\pm = \pm 1$ ,  $Q^\pm = \pm i$ ,  $R_+ = \infty$ ,  $R_- = 0$ . Волновая функция запишется как

$$\Psi(z, m, n) = \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^m \left( \frac{z+i}{z-i} \right)^n.$$

Отсюда видно, что  $f(m, n) \equiv 1$ , то есть  $\Psi$  удовлетворяет гиперболическому уравнению

$$\varphi_{m+1, n+1} - \varphi_{mn} = i(\varphi_{m+1, n} - \varphi_{m, n+1}).$$

Определим инволюции и дифференциал  $\Omega$ :

$$\sigma z = -z, \quad \Omega = -\frac{dz}{2z}, \quad \tau z = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Из существования  $\sigma$ ,  $\Omega$  немедленно следует, что  $\Psi$  является также решением эллиптического уравнения

$$\varphi_{m+1, n+1} + \varphi_{m+1, n-1} + \varphi_{m-1, n+1} + \varphi_{m-1, n-1} - 4\varphi_{mn} = 0.$$

Заметим, что на  $\Gamma$  есть только один вещественный овал (множество точек, инвариантных относительно  $\tau$ )  $|z| = 1$ , на нём лежат все наши выделенные точки  $P^\pm, Q^\pm$ .

## 2.1 Рост волновой функции

Вопрос о том, как ведет себя  $|\Psi(\gamma, m, n)|$  при фиксированном  $\gamma$ , очень важен для оценки роста функции Грина, построенной в данной работе. Для формулировки и доказательства теоремы нам потребуются некоторые понятия теории римановых поверхностей.

Выберем на  $\Gamma$  канонический базис циклов  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  и базис голоморфных дифференциалов  $\omega_1, \dots, \omega_g$ , нормированный следующим образом:

$$\oint_{a_k} \omega_j = \delta_{jk}.$$

Нам понадобится тета-функция Римана поверхности  $\Gamma$ , которая определяется рядом

$$\theta(z|B) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i \langle BN, N \rangle + 2\pi i \langle N, z \rangle),$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — евклидово скалярное произведение, а  $B$  — матрица  $b$ -периодов голоморфных дифференциалов

$$\oint_{b_k} \omega_j = B_{jk}.$$

Зададим отображение Абеля как

$$\vec{A}(\gamma) = \left( \int_{R_+}^{\gamma} \omega_1, \dots, \int_{R_+}^{\gamma} \omega_g \right). \quad (2.10)$$

Напомним, что это корректно определенное отображение  $\Gamma \xrightarrow{A} J(\Gamma)$ , где  $J(\Gamma)$  — многообразие Якоби,  $J(\Gamma) = \mathbb{C}^g / \{M + BN\}$  для  $M, N \in \mathbb{Z}^g$ .

Для двух различных точек  $P, Q$  римановой поверхности существует мероморфный дифференциал  $\Omega(P, Q)$  с полюсами первого порядка в  $P, Q$  и вычетами  $-1$  и  $1$  соответственно, не имеющих других особенностей. Мы добавим



условие равенства нулю по всем  $a$ -циклам, благодаря которому  $\Omega(P, Q)$  определяется однозначно. Он противоположен соответствующему нормированному абелеву дифференциалу третьего рода.

Для волновой функции  $\Psi$  есть формула в явном виде (5.2 [41]), верная при любых целых  $m, n$ :

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma, m, n) = & \exp \left( m \int_{R_+}^{\gamma} \Omega(P^+, P^-) + n \int_{R_+}^{\gamma} \Omega(Q^+, Q^-) \right) \times \quad (2.11) \\ & \times \frac{\theta \left( \vec{A}(\gamma) + m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)}{\theta \left( \vec{A}(\gamma) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)} \times \\ & \times \frac{\theta \left( \vec{A}(R_+) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)}{\theta \left( \vec{A}(R_+) + m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)}, \end{aligned}$$

где

$$\vec{\Delta}_P = \vec{A}(P^-) - \vec{A}(P^+), \quad \vec{\Delta}_Q = \vec{A}(Q^-) - \vec{A}(Q^+).$$

Пути во всех интегралах берутся одинаковыми. Проверим, что (2.11) задаёт однозначную на  $\Gamma$  функцию. Если путь до фиксированного  $\gamma$  изменяется на некоторый цикл, гомологичный

$$\sum_{j=1}^g (N_j a_j + M_j b_j), \quad \vec{N}, \vec{M} \in \mathbb{Z}^g,$$

то отношение  $\theta$ -функций умножится на

$$t = \exp(-2\pi i \langle \vec{M}, m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q \rangle).$$

Из теории римановых поверхностей нам известно, что

$$\oint_{b_k} \Omega(P^+, P^-) = 2\pi i \int_{P^+}^{P^-} \omega_k, \quad \oint_{b_k} \Omega(Q^+, Q^-) = 2\pi i \int_{Q^+}^{Q^-} \omega_k, \quad (2.12)$$

а следовательно, экспонента умножится на  $t^{-1}$ .

Пусть  $\Gamma$  является М-кривой, то есть инволюция  $\tau$  имеет  $g + 1$  неподвижный овал  $a_1, a_2, \dots, a_g, c$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $\Gamma$  является М-кривой, выделенные точки  $P^\pm, Q^\pm$  попадают на овал  $c$ , на остальные овалы попадает по одной точке  $\gamma$ -дивизора:  $\gamma_j \in a_j, j = 1, \dots, g$ . Тогда канонический базис циклов и пути интегрирования на  $\Gamma$  можно выбрать таким образом, что для любого фиксированного  $\gamma \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$  выполняется неравенство при всех целых  $m, n$ :

$$|\Psi(\gamma, m, n)| \leq R(\gamma) \left| \exp \left( m \int_{R_+}^{\gamma} \Omega(P^+, P^-) + n \int_{R_+}^{\gamma} \Omega(Q^+, Q^-) \right) \right|, \quad (2.13)$$

где  $R : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая на  $\Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$  функция.

Другими словами, почти всех  $\gamma \in \Gamma$  рост абсолютной величины  $\Psi(m, n)$  зависит только от  $\Omega(P^+, P^-), \Omega(Q^+, Q^-)$ .

**Замечание 2.2.** Как было указано автору С. М. Натанзоном, теорема имеет более простое доказательство, нежели то, что приведено ниже. Оно основано на следующих соображениях. Рассмотрим дивизор

$$D = mP^+ - mP^- + nQ^+ - nQ^- + \sum_{k=1}^g \gamma_k.$$

Отображение Абеля переводит его на единственный неособый (не пересекающийся с тета-дивизором) тор вещественной части якобиана, см. теорему 8.1 главы 2 [20]. Из этого вытекает, что модуль тета-функции

$$\theta \left( \vec{A}(\gamma) - \vec{A}(D) - \vec{K} \right)$$

ограничен сверху и снизу положительными константами, откуда и следует утверждение теоремы.

**Доказательство.** Благодаря расположению  $\gamma_j$  все нули  $\Psi(\gamma, m, n)$  при любых  $m, n$  располагаются только на неподвижных овалах  $a_1, \dots, a_g, c$ . Действительно, на каждом из  $a_j$  ( $j = 1, \dots, g$ ), функция  $\Psi(\gamma, m, n)$  вещественная или чисто мнимая (2.9) и имеет полюс первого порядка. Тогда на  $a_j$  найдется и нуль по крайней мере первого порядка. Степень дивизора  $(mP^- - mP^+ + nQ^- - nQ^+ - \gamma_1 - \dots - \gamma_g)$  равна  $(-g)$  и по построению у  $\Psi(\gamma, m, n)$  нет полюсов вне точек этого дивизора. Следовательно, все нули на  $a_j$  имеют первый порядок и более на  $\Gamma$  нулей у  $\Psi(\gamma, m, n)$  нет.

Рассмотрим явную формулу (2.11). Пусть  $\gamma \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$ , тогда ни одна из  $\theta$ -функций не обращается в нуль. Мы докажем существование гладких  $R_{min}(\gamma) > 0$  и  $R_{max}(\gamma) > 0$ , таких что для любых  $m, n$  выполняется

$$R_{min}(\gamma) \leq \left| \theta \left( \vec{A}(\gamma) + m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right) \right| \leq R_{max}(\gamma).$$

Искомая оценка будет выполняться при

$$R(\gamma) = \frac{R_{max}(\gamma)}{R_{min}(R_+)} \frac{\left| \theta \left( \vec{A}(R_+) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right) \right|}{\left| \theta \left( \vec{A}(\gamma) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right) \right|}.$$

Возьмем в качестве  $a$ -циклов канонического базиса неподвижные овалы  $\tau$  с точками  $\gamma$ -дивизора  $a_1, \dots, a_g$ . Благодаря такому выбору мы получаем целый ряд свойств.

Для каждого  $j = 1, \dots, g$  дифференциал  $\overline{\tau\omega_j}$  является голоморфным и имеет ту же нормировку, что и  $\omega_j$ . Следовательно,  $\tau\omega_j = \overline{\omega_j}$  и  $\omega_j$  принимает вещественные значения на неподвижных овалах  $\tau$ .

Рассмотрим подмножество  $R \subset J(\Gamma)$  классов эквивалентности с вещественными представителями  $\vec{x} + B\vec{M}$ , где  $\vec{x} \in \mathbb{R}^g$ ,  $\vec{M} \in \mathbb{Z}^g$ .

Вспомним, что при изменении  $m, n$  аргументы  $\theta$ -функций изменяются на

$\vec{\Delta}_P = \vec{A}(P^-) - \vec{A}(P^+)$ ,  $\vec{\Delta}_Q = \vec{A}(Q^-) - \vec{A}(Q^+)$  соответственно. Тогда из вещественности  $\omega_j$  на неподвижных овалах и определения

$$(\vec{\Delta}_P)_j = \int_{P^+}^{P^-} \omega_j, \quad (\vec{\Delta}_Q)_j = \int_{Q^+}^{Q^-} \omega_j$$

следует  $\vec{\Delta}_P \in R$ ,  $\vec{\Delta}_Q \in R$ , так как от вещественного вектора они могут отличаться только на периоды многообразия Якоби.

Фиксируем  $\lambda \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$  и рассмотрим множество всех значений аргументов рассматриваемой  $\theta$ -функции при различных  $m, n$

$$V(\lambda) = \left\{ \vec{A}(\lambda) + m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Докажем, что замыкание  $V(\lambda)$  в  $J(\Gamma)$  не содержит нулей  $\theta$ -функции. Пусть такой нуль  $z \in J(\Gamma)$  все-таки нашелся. Тогда разность

$$z - \left( \vec{A}(\lambda) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)$$

сколь угодно приближается суммой  $m\vec{\Delta}_P + n\vec{\Delta}_Q \in R$  и по замкнутости сама принадлежит  $R$ . Следовательно, найдется такая  $\lambda_0 \in \Gamma$ ,  $\tau\lambda_0 = \lambda_0$ , что на  $J(\Gamma)$  выполняется равенство

$$z = \vec{A}(\lambda_0) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K},$$

откуда следует  $\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\lambda) \in R$ . Воспользуемся теперь возможностью выбрать пути интегрирования и добьемся вещественности последней разности:  $\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\lambda) \in \mathbb{R}^g$ . Из  $\tau\omega_j = \bar{\omega}_j$  вытекает

$$\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\tau\lambda) = \overline{\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\lambda)},$$

а из вещественности правой части  $\vec{A}(\lambda) = \vec{A}(\tau\lambda)$ . Поскольку  $\tau\lambda \neq \lambda$ , такое может быть только на сфере  $g = 0$ , где доказываемая оценка тривиальна.

Из отсутствия нулей в замыкании  $V(\lambda) \subset J(\Gamma)$  и компактности последнего следует существование искомым  $R_{min}(\lambda)$ ,  $R_{max}(\lambda)$  для всех  $\lambda \notin (a_1 \cup \dots \cup a_h \cup c)$ , этим и завершается доказательство.  $\blacksquare$

**Замечание 2.3.** Выбор путей интегрирования в точности соответствует случаю  $\vec{\Delta}_P \in \mathbb{R}^g$ ,  $\vec{\Delta}_Q \in \mathbb{R}^g$ , поэтому по (2.12) интегралы от  $\Omega(P^+, P^-)$ ,  $\Omega(Q^+, Q^-)$  по любому циклу являются чисто мнимыми.

**Замечание 2.4.** По всей видимости, оценка (2.13) выполняется почти всюду и в более общем случае, когда  $\Gamma$  не является М-кривой. Но строгое доказательство требует более серьезной техники. Эта задача — тема для дальнейших исследований.

## 2.2 Квазиимпульсы

Дифференциалы квазиимпульсов  $dp_m$ ,  $dp_n$  определяются по аналогии с [46]. А именно, это мероморфные дифференциалы третьего рода;  $dp_m$  имеет вычеты  $i$ ,  $-i$  в точках  $P^+$ ,  $P^-$  соответственно,  $dp_n$  — такие же вычеты в точках  $Q^+$ ,  $Q^-$  соответственно. Дифференциалы квазиимпульсов однозначно определяются условием вещественности интегралов по всем контурам. Сами квазиимпульсы определяются как

$$p_m(\gamma) = \int_{R_+}^{\gamma} dp_m, \quad p_n(\gamma) = \int_{R_+}^{\gamma} dp_n \quad (2.14)$$

и являются многозначными на  $\Gamma$ , однако их мнимые части  $\text{Im } p_m(\gamma)$ ,  $\text{Im } p_n(\gamma)$  уже являются однозначными на  $\Gamma$ .

Из замечания 2.3 и единственности дифференциалов квазиимпульсов следует, что при выборе канонического базиса циклов и путей интегрирования как в теореме 2.1 выполняется  $\Omega(P^+, P^-) = -idp_m$ ,  $\Omega(Q^+, Q^-) = -idp_n$ . Поэтому

оценка (2.13) может быть переписана в терминах квазиимпульсов:

$$|\Psi(\gamma, m, n)| \leq R(\gamma) e^{m \operatorname{Im} p_m(\gamma)} e^{n \operatorname{Im} p_n(\gamma)}. \quad (2.15)$$

Отметим, что поскольку и левая часть, и квазиимпульсы уже не зависят от выбора базиса или путей интегралов, то функция  $R(\gamma)$  также не зависит от них.

Оценка абсолютной величины двойственной волновой функции получается заменой  $\gamma$  на  $\sigma\gamma$

$$|\Psi^+(\gamma, m, n)| \leq R(\sigma\gamma) e^{m \operatorname{Im} p_m(\sigma\gamma)} e^{n \operatorname{Im} p_n(\sigma\gamma)}.$$

Дифференциал  $-dp_m(\sigma\gamma)$  имеет полюса в  $P^+$ ,  $P^-$  с вычетами соответственно  $+i$ ,  $-i$ , а также интеграл от него по любому контуру является вещественным. Следовательно,  $dp_m(\sigma\gamma) = -dp_m$ . Рассуждая аналогично, получим  $dp_n(\sigma\gamma) = -dp_n$ . Поэтому последнее неравенство можно переписать в виде

$$|\Psi^+(\gamma, m, n)| \leq R(\sigma\gamma) e^{-m \operatorname{Im} p_m(\gamma)} e^{-n \operatorname{Im} p_n(\gamma)}. \quad (2.16)$$

Для контроля роста  $\Psi$  мы будем рассматривать множества вида

$$C_\lambda = \{\gamma : \operatorname{Im} p_n(\gamma) = \operatorname{Im} p_n(\lambda)\}, \quad \lambda \in \Gamma.$$

Такого рода контуры возникли ещё в работе И. М. Кричевера и С. П. Новикова [45].

**Пример 2.2.** Продолжим рассмотрение случая  $g = 0$ . В качестве дифференциалов квазиимпульсов подходят

$$dp_m = \frac{idz}{z-1} - \frac{idz}{z+1}, \quad dp_n = \frac{idz}{z-i} - \frac{idz}{z+i}.$$

Действительно, мнимые части квазиимпульсов получаются однозначными:

$$p_m = i \ln \left( \frac{z-1}{z+1} \right), \quad p_n = i \ln \left( \frac{z-i}{z+i} \right),$$

$$\operatorname{Im} p_m = \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right|, \quad \operatorname{Im} p_n = \ln \left| \frac{z-i}{z+i} \right|.$$

На сфере Римана контуры  $\operatorname{Im} p_m = \operatorname{const}$ ,  $\operatorname{Im} p_n = \operatorname{const}$  представляют собой окружности с центрами в  $P^\pm$ ,  $Q^\pm$  соответственно. Заметим, что точки  $P^\pm$ ,  $R_\pm$  лежат на одном контуре  $\operatorname{Im} p_n = 0$ .

Оценки (2.15) и (2.16) в случае сферы обращаются в равенства при  $R \equiv 1$ .

Перечислим важные для нас в будущем свойства контура  $C_\lambda$ . Для начала заметим, что при  $\lambda = Q^\pm$  он вырождается в точку.

**Лемма 2.2.** *Для всех  $\lambda \in \Gamma \setminus \{Q^+, Q^-\}$  верны следующие свойства.*

- 1)  $C_\lambda$  является объединением некоторого количества кусочно-гладких замкнутых кривых,
- 2)  $C_\lambda$  гомологичен точке,
- 3) точки  $R_+$ ,  $R_-$  лежат по одну сторону относительно  $C_\lambda$ , точки  $Q^+$ ,  $Q^-$  — по разные.

**Доказательство.** 1) Дифференциал  $dp_n$  имеет  $2g$  нулей на  $\Gamma$  с учетом кратностей. Если  $C_\lambda$  через них не проходит, то по теореме о неявной функции в окрестности каждой своей точки  $C_\lambda$  представляет собой гладкую неособую кривую. При прохождении через нули кривая может потерять гладкость, но она остается непрерывной. Из компактности  $\Gamma$  следует замкнутость каждого пути.

2) Гомологичность точке  $C_\lambda$  следует из того, что он является границей подмногообразия с краем  $\{\gamma : \operatorname{Im} p_n(\gamma) \leq \operatorname{Im} p_n(\lambda)\}$ , гладкого почти для всех  $\lambda$ .

3) Утверждение о  $Q^+$ ,  $Q^-$  следует из  $\operatorname{Im} p_n(Q^+) = -\infty$ ,  $\operatorname{Im} p_n(Q^-) = +\infty$ . В силу предыдущих пунктов достаточно показать, что  $\operatorname{Im} p_n(R_-) = \operatorname{Im} p_n(R_+) = 0$ .

Для начала заметим, что дифференциал  $-\overline{\tau(dp_n)}$  является мероморфным, имеет простые полюса в  $Q^+$ ,  $Q^-$  с вычетами  $i$  и  $-i$  соответственно, а также интеграл от него по любому контуру является вещественным. Тогда по единственности  $\tau(dp_n) = -\overline{dp_n}$ . Используя  $\tau R_+ = R_-$  и вещественность интегралов по контурам, получаем

$$\operatorname{Im} \int_{R_+}^{R_-} dp_n = -\operatorname{Im} \int_{R_+}^{R_-} \overline{\tau(dp_n)} = -\operatorname{Im} \int_{R_-}^{R_+} dp_n = \operatorname{Im} \int_{R_+}^{R_-} dp_n \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} \int_{R_+}^{R_-} dp_n = 0,$$

что и требовалось. ■

### 2.3 Ненормализованная функция Грина по С-контуре

Нас интересует такая функция  $G(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ , что для любого фиксированного  $\lambda \in \Gamma$

$$LG = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = \tilde{\mu} \text{ и } \nu = \tilde{\nu}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.17)$$

где

$$LG = a_{\mu, \nu} G(\lambda, \mu + 1, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) + a_{\mu-1, \nu} G(\lambda, \mu - 1, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) + b_{\mu, \nu} G(\lambda, \mu, \nu + 1, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) + b_{\mu, \nu-1} G(\lambda, \mu, \nu - 1, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) - c_{\mu, \nu} G(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}). \quad (2.18)$$

Забегая вперед, скажем, что почти при всех  $\lambda$  для найденной функции выполнено

$$|G(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})| \leq R_1(\lambda) e^{(\mu - \tilde{\mu}) \operatorname{Im} p_\mu(\lambda)} e^{(\nu - \tilde{\nu}) \operatorname{Im} p_\nu(\lambda)}, \quad (2.19)$$

где

$$p_\mu = p_n + p_m, \quad p_\nu = p_n - p_m \quad (2.20)$$



и  $R_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая в точках выполнения неравенства. Другими словами, почти всюду рост абсолютной величины  $G$  такой же, как и  $\Psi$ .

Предположение П. Г. Гриневича заключалось в том, что функцию Грина можно найти примерно в таком же виде, что и в непрерывном случае (см. [47]). Здесь мы покажем справедливость предположения. Искомую  $G$  будет строить в два шага: сначала построим ненормализованную функцию  $G_0$ , удовлетворяющую (2.17), а затем подправим её, чтобы обеспечить нужный рост (2.19).

Прежде чем формулировать основную теорему раздела, докажем несколько лемм.

**Лемма 2.3.** *При  $\mu - \nu = \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$  выполняется*

$$\operatorname{res}_{P^+} a_{\mu,\nu} \Psi_{\mu+1,\nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma) = - \operatorname{res}_{P^+} b_{\mu,\nu-1} \Psi_{\mu,\nu-1} \Psi_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma). \quad (2.21)$$

**Доказательство.** Посчитаем порядок полюса в  $P^+$  у левого дифференциала. Функция  $\Psi_{\mu+1,\nu}(\gamma)$  имеет в  $P^+$  полюс не более чем  $\mu - \nu + 1$  порядка,  $\Psi_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}^+(\gamma)$  имеет в  $P^+$  нуль не менее чем  $\tilde{\mu} - \tilde{\nu}$  порядка; в сочетании с условием леммы это означает, что левый дифференциал имеет в  $P^+$  полюс не более чем 1 порядка. Аналогично получаем, что и у правого дифференциала в  $P^+$  полюс не более чем 1 порядка. Следовательно, при вычислении вычетов мы можем использовать  $\operatorname{res}_{\gamma_0} \omega(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \gamma_0} (\gamma - \gamma_0) \omega(\gamma)$ . Перейдём к обозначениям  $m = \mu - \nu$ ,  $n = \mu + \nu$

$$a_{\mu,\nu} = \frac{1}{f(m,n)} = i \lim_{\gamma \rightarrow P^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n)}{\Psi(\gamma, m+1, n+1)},$$

$$b_{\mu,\nu-1} = f(m, n-1) = -i \lim_{\gamma \rightarrow P^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n)}{\Psi(\gamma, m+1, n-1)}.$$

По условию  $\tilde{m} = m$ , тогда левая часть (2.21) равна

$$\lim_{\gamma \rightarrow P^+} (\gamma - P^+) i \frac{\Psi(\gamma, m+1, n)}{\Psi(\gamma, m+1, n+1)} \Psi(\gamma, m+1, n+1) \Psi^+(\gamma, m, \tilde{n}) \Omega(\gamma).$$

Расписав таким же образом правую часть, получим после сокращений утверждение леммы. ■

Напомним, что через  $\tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$  мы обозначили дифференциал  $\Psi_{\mu, \nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma)$ .

**Лемма 2.4.** *Для любых  $\mu, \nu$  выполняется*

$$\operatorname{res}_{Q^+} a_{\mu, \nu} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu + 1, \nu, \mu, \nu) = i \quad (2.22)$$

**Доказательство.** Это утверждение возникло ещё в 5.2 [41]. Поскольку  $a_{\mu, \nu} = 1/f(m, n)$ , то в обозначениях  $m, n$  оно выглядит как

$$\operatorname{res}_{Q^+} \Psi(m + 1, n + 1) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma) = if(m, n).$$

Для доказательства рассмотрим 4-точечное равенство (2.4), домножим его на  $\Psi^+(m, n) \Omega(\gamma)$  и возьмём вычеты в точке  $Q^+$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{Q^+} (\Psi(m + 1, n + 1) - \Psi(m, n)) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma) = \\ = if(m, n) \operatorname{res}_{Q^+} (\Psi(m + 1, n) - \Psi(m, n + 1)) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma), \end{aligned}$$

$$\operatorname{res}_{Q^+} \Psi(m + 1, n + 1) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma) = -if(m, n) \operatorname{res}_{Q^+} \Psi(m, n + 1) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma).$$

Дифференциал  $\Psi(m, n + 1) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma)$  имеет полюса в точках  $R_+, R_-, Q^+$ . По (2.3), оба вычета в  $R_+, R_-$  равны  $\frac{1}{2}$ , поэтому  $\operatorname{res}_{Q^+} \Psi(m, n + 1) \Psi^+(m, n) \Omega(\gamma) = -1$ . Подставив этот результат в формулу выше, получим утверждение леммы.

■

**Определение 2.1.** *Объединение  $\alpha$  некоторого количества замкнутых кусочно-гладких кривых на  $\Gamma$  будем называть **C-контуром**, если*

- $\alpha$  гомологичен тривиальному пути, то есть разбивает  $\Gamma$  на две части и интеграл по  $\alpha$  равен сумме вычетов;
- точки  $R_+$  и  $R_-$  лежат по одну сторону относительно него, точки  $Q^+$  и  $Q^-$  лежат по разные стороны относительно него, точки  $P^\pm$  не лежат на нём;

- ориентация кривых фиксируется следующим условием:

$$\oint_{\alpha} dp_n = +2\pi. \quad (2.23)$$

По лемме 2.2 контур  $C_\lambda$  с правильно выбранной ориентацией почти при всех  $\lambda \in \Gamma$  является  $C$ -контуром.

**Лемма 2.5.** Пусть  $\alpha$  является  $C$ -контуром. Тогда функция

$$K(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \oint_{\alpha} \Psi_{\mu, \nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma) = \oint_{\alpha} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}), \quad (2.24)$$

обнуляется оператором  $L$  по переменным  $\mu, \nu$ . Кроме того,  $K(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = 0$  при  $\mu - \nu = \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$ .

**Доказательство.** Первое утверждение легко следует из  $L\Psi_{\mu, \nu}(\gamma) \equiv 0$ .

У подынтегрального дифференциала  $\tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$  при  $\mu - \nu = \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$  имеется только три полюса —  $R_+$ ,  $R_-$  и либо  $Q^+$ , либо  $Q^-$  в зависимости от знака  $\tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \mu - \nu = \tilde{n} - n$ . Из определений и (2.3) следует, что вычеты в  $R_+$  и  $R_-$  у  $\tilde{\Omega}$  равны соответственно  $+\frac{1}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$ , как у  $\Omega$ . Поэтому вычет в третьем полюсе равен нулю. Поскольку  $R_+$  и  $R_-$  лежат по одну сторону относительно  $\alpha$ , и  $\alpha$  гомологичен точке, то  $\oint_{\alpha} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = 0$ , что и требовалось. ■

**Теорема 2.2** (Ненормализованная функция Грина по  $C$ -контур). Функция

$$G_0(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{sgn}(\mu - \nu + \tilde{\nu} - \tilde{\mu}) K(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \quad (2.25)$$

удовлетворяет условию (2.17).

**Доказательство.** Пусть сначала  $\mu - \nu \neq \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$ . Обозначим  $\delta_m = (\mu - \nu) - (\tilde{\mu} - \tilde{\nu})$ ,  $\delta_m \neq 0$ , и  $K(\mu, \nu) = K(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ . Тогда

$$\begin{aligned} 4\pi(LG_0)_{\mu, \nu} &= \operatorname{sgn}(\delta_m + 1) a_{\mu, \nu} K(\mu + 1, \nu) + \operatorname{sgn}(\delta_m - 1) b_{\mu, \nu-1} K(\mu, \nu - 1) + \\ &+ \operatorname{sgn}(\delta_m - 1) a_{\mu-1, \nu} K(\mu - 1, \nu) + \operatorname{sgn}(\delta_m - 1) b_{\mu, \nu} K(\mu, \nu + 1) - \operatorname{sgn}(\delta_m) c_{\mu, \nu} K(\mu, \nu) \end{aligned}$$

Равенство нулю правой части следует из леммы 2.5. Действительно, если  $\text{sgn}$  при каком-либо слагаемом обращается в нуль, то по лемме и  $K = 0$ . Поэтому  $\text{sgn}$  можно вынести за оператор  $L$ , то есть  $4\pi LG_0 = \text{sgn}(\delta_m)(LK)_{\mu,\nu} \equiv 0$ .

Пусть теперь  $\mu - \nu = \tilde{\mu} - \tilde{\nu}$ . Из леммы 2.5 следует  $K(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = 0$ . Имеем

$$LG_0 = \frac{1}{4\pi} (a_{\mu,\nu}K(\mu + 1, \nu) + b_{\mu,\nu-1}K(\mu, \nu - 1) - \quad (2.26)$$

$$-a_{\mu-1,\nu}K(\mu - 1, \nu) - b_{\mu,\nu}K(\mu, \nu + 1))$$

Прибавим к правой части  $LK \equiv 0$ , слагаемые с минусами сократятся, а с плюсами — умножатся на 2

$$LG_0 = \frac{1}{2\pi} \oint_{\alpha} a_{\mu,\nu} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu + 1, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) + b_{\mu,\nu-1} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu - 1, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}). \quad (2.27)$$

Данный интеграл равен сумме вычетов по гомологичности нулю  $C$ -контура  $\alpha$ . Дифференциалы  $\tilde{\Omega}(\gamma, \mu + 1, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ ,  $\tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu - 1, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$  имеют полюса в точках  $R_+$ ,  $R_-$ ,  $P^+$ , и каждый из них может иметь полюс в  $Q^+$  или  $Q^-$  в зависимости от  $\mu + \mu - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} = n - \tilde{n}$ . В точках  $R_+$ ,  $R_-$  вычеты равны  $+\frac{1}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$ . Следовательно, сумма вычетов во всех остальных полюсах равна 0.

Поскольку  $R_{\pm}$  лежат по одну сторону относительно  $\alpha$ , вместе они дают нулевой вклад. По лемме 2.3 вычет в точке  $P^+$  суммы  $\omega = a_{\mu,\nu} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu + 1, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) + b_{\mu,\nu-1} \tilde{\Omega}(\gamma, \mu, \nu - 1, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$  равен нулю, поэтому  $P^+$  также не влияет на итоговую сумму.

Если  $\mu + \mu \neq \tilde{\mu} + \tilde{\nu}$ , то у  $\omega$  ровно четыре полюса. Следовательно, и в четвёртом полюсе у этой суммы вычет равен нулю, что доказывает  $LG_0 = 0$ .

Итак, остался случай, когда  $\mu = \tilde{\mu}$ ,  $\nu = \tilde{\nu}$ . Перейдём от интегралов к вычетам. По сказанному выше, полюса  $R_{\pm}$ ,  $P^+$  дают нулевой вклад. В точках  $Q^+$ ,  $Q^-$  у  $\omega$  полюса первого порядка. Поскольку они лежат по разные стороны относительно  $\alpha$ , в результат нужно включить любой из них. Из ориентации

контура (2.23) множитель для вычета в  $Q^+$  равен  $-2\pi i$ . Используя лемму 2.4, получим

$$LG_0 = -i \operatorname{res}_{Q^+} \omega = -i \operatorname{res}_{Q^+} a_{\mu, \nu} \tilde{\Omega}(\mu + 1, \nu, \mu, \nu) = -i^2 = 1. \quad (2.28)$$

Мы получили, что  $G_0$  удовлетворяет (2.17), это и требовалось.  $\blacksquare$

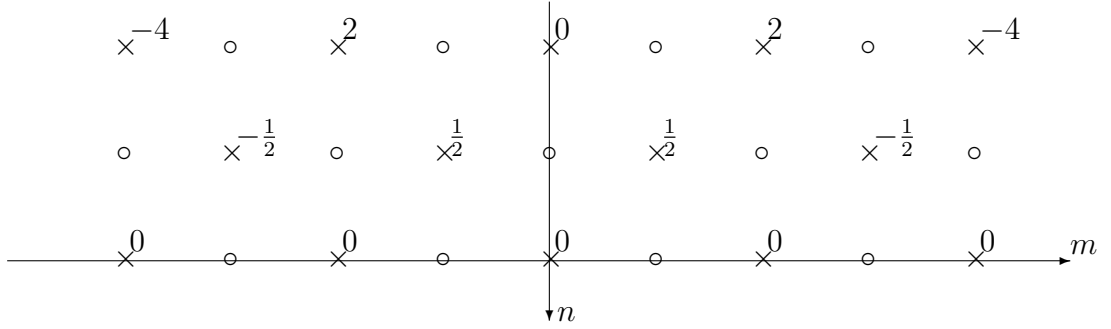


Рис. 1: Значения  $G_0(m, n, 0, 0)$  в случае сферы.

**Пример 2.3.** В случае сферы из предыдущих примеров в качестве  $S$ -контура можно взять малую окружность  $O_\varepsilon$  центром в  $Q^+ = i$  с ориентацией по часовой стрелке. Для краткости будем использовать обозначения  $m = \mu - \nu$ ,  $\nu = \mu + \nu$ ,  $(m + n)$  четное. Функция  $G_0$  имеет вид

$$G_0(m, n, \tilde{m}, \tilde{n}) = \frac{1}{4\pi} \int_{O_\varepsilon} \operatorname{sgn}(m - \tilde{m}) \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^{m-\tilde{m}} \left( \frac{z+i}{z-i} \right)^{n-\tilde{n}} \left( -\frac{dz}{2z} \right).$$

Предположим, что  $\tilde{m} = \tilde{n} = 0$ . Из ориентации  $O_\varepsilon$  вычет в точке  $i$  входит в правую часть со знаком минус:

$$G_0(m, n, 0, 0) = \frac{i}{2} \operatorname{sgn}(m) \operatorname{res}_{z=i} \left[ \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^m \left( \frac{z+i}{z-i} \right)^n \frac{dz}{2z} \right].$$

Очевидно, что  $G_0(m, n, 0, 0) = 0$  при  $n \geq 0$ . Прямым вычислением получается

$$G_0(m, -1, 0, 0) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(m) (-i)^{m+1}, \quad G_0(m, -2, 0, 0) = -\operatorname{sgn}(m) m (-i)^m.$$

Из формулы для  $G_0(m, n, 0, 0)$  видно, что рост  $G_0$  не ограничен экспонентой и условие (2.19) не выполняется.

## 2.4 Функция Грина оператора $L$

Рассмотрим уже упоминавшееся семейство  $C_\lambda = \{\gamma : \text{Im } p_n(\gamma) = \text{Im } p_n(\lambda)\}$ . Как уже упоминалось,  $C_\lambda$  является регулярным почти при всех  $\lambda \in \Gamma$ . Следовательно, при  $\alpha = C_\lambda$  функция  $G_0$  из теоремы 2.2 удовлетворяет (2.17).

Рассмотрим функцию

$$Z(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_\lambda} \text{sgn}(\text{Im } p_m(\lambda) - \text{Im } p_m(\gamma)) \Psi_{\mu, \nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma)$$

Поскольку путь интегрирования не зависит от дискретных параметров,  $LZ = 0$ . Прибавим  $Z$  к построенной  $G_0$ . Следующая теорема утверждает, что полученная функция является искомой. Чтобы не загромождать выкладки, мы формулируем ее с использованием обеих координатных систем  $\mu, \nu$  и  $m = \mu - \nu$ ,  $n = \mu + \nu$ .

**Теорема 2.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда функция*

$$G(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_\lambda} \left( \text{sgn}(m - \tilde{m}) + \text{sgn}(\text{Im } p_m(\lambda) - \text{Im } p_m(\gamma)) \right) \times \\ \times \Psi_{\mu, \nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma) \quad (2.29)$$

*является функцией Грина оператора  $L$  и почти при всех  $\lambda \in \Gamma$  для нее выполняется условие на рост (2.19).*

**Доказательство.** Фиксируем  $\lambda$ . Как было сказано выше,  $G = G_0 + Z$ , где в качестве  $\alpha$  взят контур  $C_\lambda$ . Поэтому  $G$  очевидным образом удовлетворяет условию (2.17).

Обозначим через  $C'_\lambda$  множество  $C_\lambda$  без неподвижных точек инволюции  $\tau$ . Поскольку последнее имеет в  $C_\lambda$  меру нуль, то от замены  $C_\lambda$  на  $C'_\lambda$  интеграл (2.3) не изменится. Для точек  $C'_\lambda$  уже справедлива теорема 2.1. Оценим интеграл (2.3)

стандартным способом

$$|G(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})| \leq \frac{1}{4\pi} \oint_{C_\lambda} |\Omega(\gamma)| \times \\ \times \sup_{\gamma \in C'_\lambda} \left| \left( \operatorname{sgn}(m - \tilde{m}) + \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} p_m(\lambda) - \operatorname{Im} p_m(\gamma)) \right) \Psi_{\mu, \nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma) \right|.$$

Вспомним условия на рост волновой функции (2.15) и двойственной к ней (2.16):

$$|\Psi_{\mu, \nu}(\gamma)| \leq R(\gamma) e^{m \operatorname{Im} p_n(\gamma) + n \operatorname{Im} p_n(\gamma)},$$

$$|\Psi_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}}^+(\gamma)| \leq R(\sigma\gamma) e^{-\tilde{m} \operatorname{Im} p_m(\gamma) - \tilde{n} \operatorname{Im} p_n(\gamma)}.$$

Из  $\gamma \in C_\lambda$  имеем  $\operatorname{Im} p_n(\gamma) = \operatorname{Im} p_n(\lambda)$ . Пусть  $m > \tilde{m}$ , тогда нетривиален случай  $\operatorname{Im} p_m(\gamma) \leq \operatorname{Im} p_m(\lambda)$ , в котором  $\exp((m - \tilde{m}) \operatorname{Im} p_m(\gamma)) \leq \exp((m - \tilde{m}) \operatorname{Im} p_m(\lambda))$ . Пусть теперь  $m < \tilde{m}$ , тогда  $\operatorname{Im} p_m(\gamma) \geq \operatorname{Im} p_n(\lambda)$  и это же неравенство снова выполнено.

Из проведенных рассуждений вытекает, что искомое неравенство (2.19) выполняется при

$$R_1(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_\lambda} |\Omega(\gamma)| \sup_{\gamma \in C'_\lambda} (2R(\gamma)R(\sigma\gamma)). \quad (2.30)$$

■

### 3 Достаточное условие несингулярности дискретного конечнозонного при одной энергии двумерного оператора Шредингера на квад-графе

В работе [34] Р. Даффин обобщил квадратную решетку до произвольных планарных графов, у которых все грани являются ромбами. В 2001 году К. Меркат [35] существенно обобщил идеи Даффина, построив линейную комплексную теорию на дискретных римановых поверхностях.

Вслед за работой [34], в данном разделе мы перейдем от квадратной решетки к квад-графу, то есть графу, у которого каждая грань является четырехугольником. При наличии весовой функции, определенной на гранях квад-графа, на нем можно ввести дискретную комплексную теорию, как это сделал К. Меркат [35]. Используя конечнозонный подход, мы строим весовую функцию по обобщенным спектральным данным, и работаем с полученным оператором Лапласа и его волновыми функциями. В этом построении для волновой функции имеется уже  $d \geq 2$  пар выделенных точек, что обобщает построение части 1. Подобное построение уже было проделано в более общем виде у А. Ахметшина, Ю. Вольвовского, И. Кричевера [44], где оно использовалось для построения дискретного аналога решетки Дарбу-Егорова.

П. Гриневич предложил следующее определение несингулярности дискретного оператора Лапласа: оператор несингулярен, если он эллиптичен. В разделе 3.3 мы остановимся более подробно на обоснованности такого определения. Мы приводим условия на обобщенные спектральные данные, достаточные для положительности весовой функции оператора Лапласа, что эквивалентно его несингулярности. Примечательно, что это условия весьма похожи на соответствующие достаточные условия в непрерывном случае [16].



Основные результаты данного раздела получены автором в работе [49].

### 3.1 Дискретные комплексы, квад-графы и комплексный анализ

В данном разделе активно используются определения и конструкции из [37].

Рассмотрим двумерный дискретный подкомплекс  $\Omega_{\mathcal{D}}$   $d$ -мерной квадратной решетки  $\mathbb{Z}^d$  для произвольного  $d \geq 2$ . Каждая грань  $\Omega_{\mathcal{D}}$  является двумерным единичным квадратом. Потребуем, чтобы подкомплекс укладывался в плоскость  $\mathbb{C}$  без самопересечений, то есть представлялся в виде связного планарного графа  $\mathcal{D}$ . Обратное отображение отправляет вершины графа в узлы решетки  $\mathbf{n} : V(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{Z}^d$ .

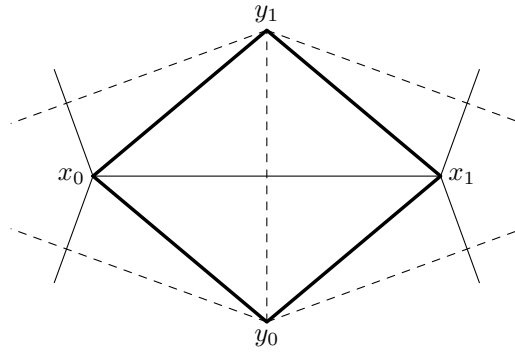


Рис. 2: Грань  $(x_0, y_0, x_1, y_1) \in F(\mathcal{D})$ . Тонкими линиями нарисованы ребра  $\mathcal{G}$ , пунктиром — ребра  $\mathcal{G}^*$ .

**Определение 3.1.** Квад-графом на  $\mathbb{C}$  называется связный планарный граф на  $\mathbb{C}$ , каждая грань которого является четырехугольником.

По построению,  $\mathcal{D}$  является квад-графом. От квад-графа общего положения он отличается лишь наличием отображения  $\mathbf{n} : V(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{Z}^d$ , переводящим его в двумерный дискретный подкомплекс  $d$ -мерной квадратной решетки.

**Определение 3.2.** Пусть  $\mathcal{H}$  — произвольный граф. Обозначим через  $V(\mathcal{H})$  множество его вершин, через  $E(\mathcal{H})$  — множество его ребер. Пусть  $\mathcal{H}$  -

произвольный планарный граф на  $\mathbb{C}$ , обозначим через  $F(\mathcal{H})$  множество его положительно ориентированных граней.

Четностью вершины  $p \in V(\mathcal{D})$  назовем четность суммы координат ее образа в  $\mathbb{Z}^d$ :  $n_1(p) + \dots + n_d(p)$ . По построению, каждая грань  $\mathcal{D}$  является четырехугольником, ребра которого соответствуют в  $\mathbb{Z}^d$  единичным отрезкам, параллельным осям. Следовательно, ребра всегда соединяют вершины различной четности. Таким образом,  $\mathcal{D}$  является двудольным: в одну долю попадают вершины одной четности.

Возьмем вершины одной доли и соединим ребрами те из них, которые лежат в одной грани ( $x_0$  и  $x_1$ ,  $y_0$  и  $y_1$  на рисунке 2). Полученный граф обозначим через  $\mathcal{G}$ , а построенный аналогично по другой доле —  $\mathcal{G}^*$ . Таким образом,  $V(\mathcal{D}) = V(\mathcal{G}) \sqcup V(\mathcal{G}^*)$ . Кроме того, для любой грани  $\mathcal{D}$  одна из ее диагоналей  $e$  является ребром в  $\mathcal{D}$  ( $(x_0, x_1)$  на рисунке 2), а другая  $e^*$  — ребром в  $\mathcal{D}^*$  ( $(y_0, y_1)$  на рисунке 2).

**Определение 3.3.** Назовем двойственными все пары ребер  $E(\mathcal{G})$  и  $E(\mathcal{G}^*)$ , лежащими в одной грани графа  $\mathcal{D}$ .

Несложно видеть, что оба построенных графа являются связными.

**Определение 3.4.** Граф  $\mathcal{G}_2$  называется двойственным к планарному графу  $\mathcal{G}_1$  если и только если (а) существует взаимно-однозначное соответствие между вершинами  $\mathcal{G}_2$  и гранями  $\mathcal{G}_1$ , (б) вершины графа  $\mathcal{G}_2$  соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие грани  $\mathcal{G}_1$  имеют общее ребро.

Графы  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{G}^*$  являются двойственными друг к другу. Рисунок 3 иллюстрирует факт двойственности  $\mathcal{G}^*$  к  $\mathcal{G}$ : например,  $y_0$  соответствует грани  $(x_1, x_0, x_5, \dots)$ ,  $y_1$  соответствует  $(x_2, x_0, x_1, \dots)$ ; в графе  $\mathcal{G}^*$  имеется ребро  $(y_0, y_1)$ , поскольку  $y_0$

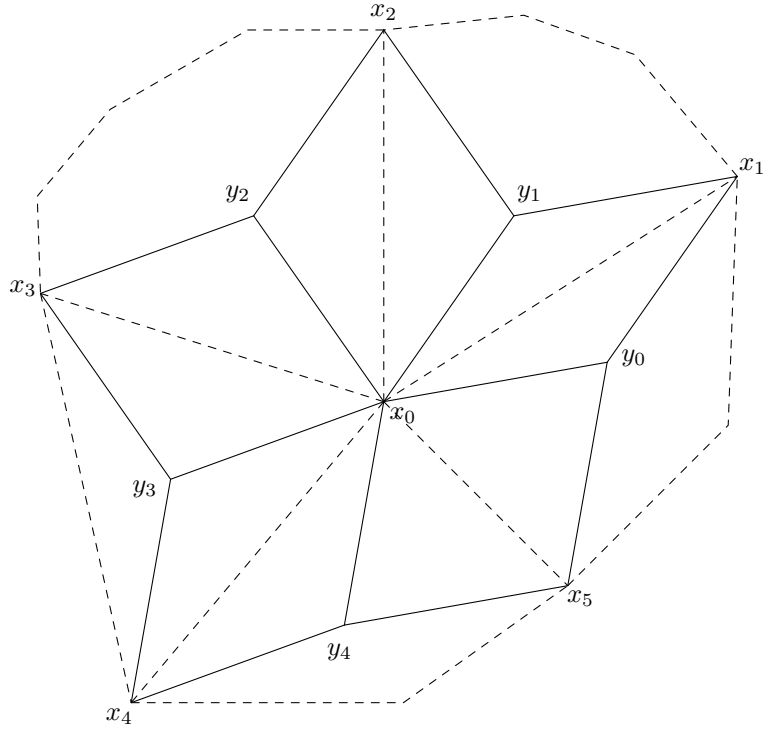


Рис. 3: Окрестность вершины  $x_0$  графа  $\mathcal{D}$ , его ребра нарисованы сплошными линиями. Граф  $\mathcal{G}$  представлен вершинами  $x_*$ , его ребра нарисованы пунктирными линиями.

и  $y_1$  лежат в одной грани графа  $\mathcal{D}$ ; соответствующие им грани графа  $\mathcal{G}$  имеют общее ребро  $(x_0, x_1)$ .

**Замечание 3.1.** Таким образом, по  $\mathcal{D}$  мы построили графы  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{G}^*$ , вершины которых являются долями  $\mathcal{D}$ , а ребра — диагоналями граней  $\mathcal{D}$ . Это построение однозначно с точностью до перестановки  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{G}^*$ , зафиксируем одну из них.

Напомним некоторые определения из линейной теории дискретного комплексного анализа. Более подробное изложение можно найти например в [37]. Пусть на ребрах графа  $\mathcal{G}$  определена комплекснозначная функция  $\nu : E(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{C}$ . Рассмотрим оператор  $\Delta$ , действующий на функциях  $f : V(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{C}$  по формуле

$$(\Delta f)(x_0) = \sum_{x \sim x_0} \nu(x_0, x)(f(x) - f(x_0)), \quad (3.1)$$

где суммирование проходит по всем соседним с  $x_0$  вершинам в графе  $\mathcal{G}$ . На-

зовем этот оператор Лапласианом, соответствующим весовой функции  $\nu$ . Дискретной гармонической (относительно весовой функции  $\nu$ ) назовем функцию  $f : V(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{C}$ , для которой выполняется  $\Delta f = 0$ .

Продолжим весовую функцию на двойственные ребра  $e^* \in E(\mathcal{G}^*)$  по формуле  $\nu(e^*) = 1/\nu(e)$ . Таким образом  $\nu$  корректно определена на  $E(\mathcal{G}) \sqcup E(\mathcal{G}^*)$ .

Голоморфные функции живут уже на вершинах  $\mathcal{D}$ . Функция  $f : V(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C}$  называется дискретной голоморфной относительно весовой функции  $\nu$ , если для любой положительно ориентированной грани  $(x_0, y_0, x_1, y_1) \in F(\mathcal{D})$  (см. рисунок 2) выполняются дискретные уравнения Коши-Римана

$$\frac{f(y_1) - f(y_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = i\nu(x_0, x_1) = -\frac{1}{i\nu(y_0, y_1)}.$$

Несложным вычислением проверяется, что ограничение дискретной голоморфной функции на любую из долей  $V(\mathcal{G})$ ,  $V(\mathcal{G}^*)$  является гармонической. Обратно, по любой гармонической функции на  $V(\mathcal{G})$  строится дискретная голоморфная на  $V(\mathcal{D})$ , однозначная с точностью до прибавления константы на  $V(\mathcal{G}^*)$ .

Меткой произвольного ребра графа  $\mathcal{D}$  назовем тот координатный вектор  $\mathbb{Z}^d$ , в который переходит это ребро. Введем ориентацию на ребрах  $\mathcal{D}$  в сторону увеличения координаты.

Параллелограммным погружением квад-графа в комплексную плоскость называется погружение  $p : V(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C}$  без самопересечения и самокасания ребер и граней графа, такое что для любой грани  $(x_0, y_0, x_1, y_1) \in F(\mathcal{D})$  выполняется  $p(y_0) - p(x_0) = p(x_1) - p(y_1)$ . Параллелограммное погружение называется ромбовидным, если ребра переходят в отрезки единичной длины:  $|p(y) - p(x)| = 1$  для любого  $(x, y) \in E(\mathcal{D})$ .

**Определение 3.5** (Параграф 3 [37]). *Параллелограммное погружение  $p$  :*

$V(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{C}$  квад-графа  $\mathcal{D}$  называется квазикристаллическим, если множество значений  $A = \{p(y) - p(x), (x, y) \in E(\mathcal{D})\}$  конечно. Обозначим  $A = \{\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_d\}$ .

Вслед за [37], мы сразу будем считать не противоположные элементы множества  $A$  линейно-независимыми над  $\mathbb{Q}$ . Из этого, в частности, следует, что все параллелограммы невырождены.

**Замечание 3.2.** Для квазикристаллических параллелограммных вложений в [37] строится и активно используется отображение  $P : V(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{Z}^d$ , по сути обратное нашему  $\mathbf{n}$ . Оно определяется следующим образом. Фиксируем вершину  $x_0 \in V(\mathcal{D})$  и положим  $P(x_0) = \mathbf{0}$ . Для всех остальных вершин  $\mathcal{D}$ , определим их образы в  $\mathbb{Z}^d$  рекуррентно по соотношению: для любых соседних  $x, y \in V(\mathcal{D})$ , если  $p(y) - p(x) = \pm\alpha_j$ , то  $P(y) - P(x) = \pm\mathbf{e}_j$ , где  $\mathbf{e}_j$  —  $i$ -й координатный вектор в  $\mathbb{Z}^d$ . Образ всего графа является двумерным подкомплексом  $\mathbb{Z}^d$  и обозначается также  $\Omega_{\mathcal{D}}$ . Ребра и грани  $\Omega_{\mathcal{D}}$  соответствуют ребрам и граням  $\mathcal{D}$ .

### 3.2 Многоточечная волновая функция и дискретные уравнения Коши-Римана

Рассмотрим квад-граф  $\mathcal{D}$  на плоскости  $\mathbb{C}$ . Потребуем, чтобы для некоторого наперед заданного  $d \geq 2$  граф  $\mathcal{D}$  представлялся бы в виде двумерного дискретного подкомплекса  $\Omega_{\mathcal{D}}$  на  $d$ -мерной квадратной решетке  $\mathbb{Z}^d$ . Обозначим отображение вершин графа в узлы решетки через  $\mathbf{n} : V(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{Z}^d$ .

Из замечания 3.1, по  $\mathcal{D}$  однозначно строятся графы  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{G}^*$ , вершины которых являются долями  $\mathcal{D}$ , а ребра — диагоналями граней  $\mathcal{D}$ .

Используя конечнозонный подход, мы построим по этому отображению весовую функцию  $\nu : E(\mathcal{G}) \sqcup E(\mathcal{G}^*) \rightarrow \mathbb{C}$ , через которую выписываются уравнения

Коши-Римана на квад-графе  $\mathcal{D}$ . Весовая функция, в свою очередь, определяется через обобщенные спектральные данные, о которых сейчас пойдет речь.

Описанная ниже конструкция спектральных данных обобщает построения, сделанные в [39] и в [41]. А именно, в указанных работах рассматривается случай квадратной решетки на плоскости и  $d = 2$ .

Рассмотрим компактную, регулярную риманову поверхность  $\Gamma$  рода  $g$ . Пусть на ней имеются следующие точки.

- Фиксированная точка  $R_1$  на  $\Gamma$  для нормировки волновой функции.
- Дивизор общего положения  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ .
- Коллекция из  $d$  пар выделенных точек  $A_1^+, A_1^-, A_2^+, A_2^-, \dots, A_d^+, A_d^-$ . Все точки попарно различны.

По теореме Римана-Роха, для любого целочисленного вектора

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$$

существует единственная функция  $\Psi(\mathbf{n}; \gamma)$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , со следующими свойствами.

1. При каждом  $\mathbf{n}$  функция  $\Psi$  является мероморфной от  $\gamma$ .
2.  $\Psi$  имеет полюса не более первого порядка в точках  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g$ .
3. Для каждого  $j = 1, 2, \dots, d$ ,  $\Psi$  имеет полюс не более чем  $n_j$  порядка в точке  $A_j^+$  и нуль по крайней мере  $n_j$  порядка в точке  $A_j^-$ .
4. Выполняется условие нормировки  $\Psi(\mathbf{n}; R_1) \equiv 1$ .

Функцию  $\Psi$  называют волновой. Она естественно переводится на граф  $\mathcal{D}$ :

$$\Psi(p, \gamma) = \Psi(\mathbf{n}(p); \gamma), \quad p \in V(\mathcal{D}).$$

Рассмотрим произвольную (положительно ориентированную) грань  $(p_1, p_2, p_4, p_3) \in F(\mathcal{D})$ . Без ограничения общности будем считать, что ребра этой грани ориентированы в сторону вершин с большими номерами (см. рисунок 4). Пусть ребро  $(p_1, p_2)$  имеет метку  $e_x$ , а ребро  $(p_1, p_3)$  — метку  $e_y$ ,  $1 \leq x, y \leq d$ ,  $x \neq y$ .

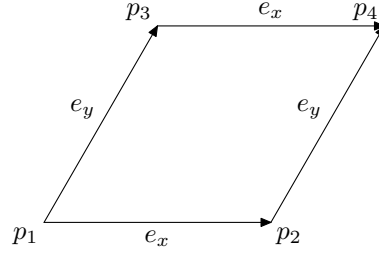


Рис. 4: Грань  $(p_1, p_2, p_4, p_3) \in F(\mathcal{D})$ .

Проверим, что

$$\Psi(p_4, \gamma) + \alpha_1(p_1, p_2)\Psi(p_2, \gamma) + \alpha_2(p_1, p_3)\Psi(p_3, \gamma) + \alpha_3(p_1, p_4)\Psi(p_1, \gamma) = 0, \quad (3.2)$$

где коэффициенты  $\alpha_j$  не зависят от  $\gamma$  и определяются по следующим формулам:

$$\alpha_1(p_1, p_2) = - \lim_{\gamma \rightarrow A_x^+} \frac{\Psi(p_4, \gamma)}{\Psi(p_2, \gamma)}, \quad (3.3)$$

$$\alpha_2(p_1, p_3) = - \lim_{\gamma \rightarrow A_y^+} \frac{\Psi(p_4, \gamma)}{\Psi(p_3, \gamma)}, \quad (3.4)$$

$$\alpha_3(p_1, p_4) = -1 - \alpha_1(p_1, p_2) - \alpha_2(p_1, p_3). \quad (3.5)$$

Действительно, сумма (3.2) удовлетворяет всем условиям для  $\Psi(p, \gamma)$  за исключением того, что в  $R_1$  она обращается в нуль. Тогда по теореме Римана-Роха сумма равна нулю при любом  $\gamma \in \Gamma$ .

Проделанные к этому моменту алгебро-геометрические построения аналогичны [39].

Для того, чтобы уравнение (3.2) привести к виду дискретного Коши-Римана, нам потребуются дополнительные условия на обобщенные данные рассеяния.

**Лемма 3.1.** Пусть на  $\Gamma$  существует голоморфная инволюция  $\sigma$  с двумя неподвижными точками  $R_+ = R_1$  и  $R_-$ . Пусть спектральные данные обладают следующей симметрией.

1. Для  $j = 1, \dots, d$  выполняется  $\sigma A_j^+ = A_j^-$ .

2. Существует мероморфный дифференциал  $\Omega$  с двумя полюсами первого порядка в неподвижных точках  $R_+, R_-$  и  $2g$  нулями в  $\gamma_1, \dots, \gamma_g, \sigma\gamma_1, \dots, \sigma\gamma_g$ .

Тогда

$$\Psi(p, R_-) = (-1)^{s(\mathbf{n}(p))}, \quad (3.6)$$

$$\alpha_1(x_0, y_0) = -\alpha_2(x_0, y_1), \quad \alpha_3(x_0, x_1) = -1, \quad (3.7)$$

где  $s(\mathbf{n}) = n_1 + n_2 + \dots + n_d$ .

**Доказательство.** Ход доказательства сходен с [41]. По аналогии с [16], рассмотрим мероморфный дифференциал

$$\tilde{\Omega}(p, \gamma) = \Psi(p, \gamma)\Psi(p, \sigma\gamma)\Omega(\gamma).$$

У него два простых полюса в точках  $R_+, R_-$  и никаких других особенностей. Следовательно, вычеты в них противоположны, как и у  $\Omega$ . Поскольку  $\Psi(p, R_+) = 1$ , то

$$\Psi^2(p, R_-) \equiv 1. \quad (3.8)$$

Докажем, что для любого  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$  выполняется  $\Psi(\mathbf{n}; R_-) = (-1)^{s(\mathbf{n})}$ . По единственности и выполнению всех свойств волновой функции,  $\Psi(\mathbf{0}, \gamma) \equiv 1$ , поэтому при  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$  равенство верно. Зададимся произвольным  $1 \leq j \leq d$  и рассмотрим  $\Psi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j; \gamma)$  как функцию от  $A_j^+$  (вспомним про  $A_j^- = \sigma A_j^+$ ). Из явной формулы для  $\Psi$  вытекает, что  $\Psi(\mathbf{n}, \gamma)$  является мероморфной от  $A_j^+$ . Более подробно



формула обсуждается в разделе 4.1. Пусть  $A_j^+$  расположена в окрестности  $R_-$ . Выберем в этой окрестности такой локальный параметр  $z$ , чтобы  $z(R_-) = 0$  и  $\sigma z = -z$ . Тогда

$$\Psi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j; \gamma) = \frac{z + A_j^+}{z - A_j^+} \Psi(\mathbf{n}; \gamma) + o(A_j^+),$$

откуда по (3.8) и непрерывности  $\Psi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j; \gamma)$  получаем  $\Psi(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j; R_-) = -\Psi(\mathbf{n}; R_-)$  при любом расположении  $A_j^+$ . Из проведенных рассуждений легко следует искомое равенство.

Подставляя (3.6) в (3.2), получаем второе утверждение леммы.  $\blacksquare$

**Замечание 3.3.** Будем считать нормировку дифференциала  $\Omega$  такой, что его вычеты в точках  $R_+, R_-$  равны соответственно  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ .

**Замечание 3.4.** Условия леммы накладывают довольно сильные ограничения на спектральные данные.

Хочется отметить, что многоточечная волновая функция вместе с уравнением (3.2) были построены еще в [44] при более общих предположениях. В работе они используются для построения дискретного аналога решетки Дарбу–Егорова, размерность которой равна половине от количества неподвижных точек инволюции  $\sigma$ .

Мы готовы определить весовую функцию  $\nu : E(\mathcal{G}) \sqcup E(\mathcal{G}^*) \rightarrow \mathbb{C}$ . Пусть условия леммы 3.1 выполнены. Вернемся к рассмотрению произвольной грани с описанной нумерацией вершин  $(p_1, p_2, p_4, p_3) \in F(\mathcal{D})$ . Положим по определению

$$\nu(p_1, p_4) = \frac{1}{i\alpha_1(p_1, p_2)} = \frac{i}{\alpha_2(p_1, p_3)}, \quad (3.9)$$

$$\nu(p_2, p_3) = \frac{1}{\nu(p_1, p_4)}. \quad (3.10)$$

Перепишем равенство (3.2) в терминах весовой функции

$$\frac{\Psi(p_3, \gamma) - \Psi(p_2, \gamma)}{\Psi(p_4, \gamma) - \Psi(p_1, \gamma)} = i\nu(p_1, p_4) = -\frac{1}{i\nu(p_2, p_3)}.$$

Рассмотрением всех 4 случаев взаимной ориентации ребер несложно показать, что данное равенство верно и без условия на ориентацию ребер. Можно сказать, что выполнением именно этого свойства продиктовано правило продолжения весовой функции с ребер  $\mathcal{G}$  на ребра двойственного графа  $\nu(e^*) = 1/\nu(e)$ .

Таким образом, для произвольной грани  $(x_0, y_0, x_1, y_1) \in F(\mathcal{D})$  (рисунок 2) выполняется

$$\frac{\Psi(y_1, \gamma) - \Psi(y_0, \gamma)}{\Psi(x_1, \gamma) - \Psi(x_0, \gamma)} = i\nu(x_0, x_1) = -\frac{1}{i\nu(y_0, y_1)}. \quad (3.11)$$

По определению, волновая функция  $\Psi(p, \gamma)$  является дискретной голоморфной на графе  $\mathcal{D}$  с весовой функцией  $\nu$  при любом фиксированном  $\gamma \in \Gamma$ . Ограничение  $\Psi(p, \gamma)$  на каждый из  $\mathcal{G}, \mathcal{G}^*$  дает гармоническую функцию

$$(L_x \Psi)(x_0, \gamma) = \sum_{x \sim x_0} \nu(x_0, x)(\Psi(x, \gamma) - \Psi(x_0, \gamma)) = 0, \quad (3.12)$$

$$(L_y \Psi)(y_0, \gamma) = \sum_{y \sim y_0} \nu(y_0, y)(\Psi(y, \gamma) - \Psi(y_0, \gamma)) = 0. \quad (3.13)$$

По умолчанию под  $L$  мы будем подразумевать оператор  $L_x$ .

В работе [37] неоднократно отмечается особый интерес случая положительной весовой функции. Следующая лемма формулирует условия на обобщенные спектральные данные, достаточные для вещественности получаемой  $\nu$ .

**Лемма 3.2.** *Пусть выполнены условия леммы 3.1. Пусть на  $\Gamma$  существует антиголоморфная инволюция  $\tau$  со следующими свойствами.*

1.  $\tau$  коммутирует с  $\sigma$ .
2.  $\tau R_+ = R_-$ .
3. Точки  $A_1^+, A_1^-, \dots, A_d^+, A_d^-$  являются неподвижными для  $\tau$ .
4. Дивизор  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$  переходит в себя под действием  $\tau$  (но любая точка дивизора может переходить в отличную от себя).

Тогда весовая функция  $\nu$  принимает вещественные значения и выполняется

$$\Psi(p, \tau\gamma) = (-1)^{s(\mathbf{n}(p))} \overline{\Psi(p, \gamma)}. \quad (3.14)$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $(-1)^{s(\mathbf{n}(p))} \overline{\Psi(p, \tau\gamma)}$ . Она является мероморфной и удовлетворяет всем условиям волновой функции, включая условие нормировки. По единственности она равна  $\Psi(p, \gamma)$ , откуда получается искомое равенство (3.14). Таким образом, в неподвижных точках инволюции  $\tau$  волновая функция принимает вещественные значения на одной из долей  $\mathcal{D}$  и чисто мнимые — на другой. Для доказательства вещественности  $\nu = i/\alpha_2$  достаточно заметить, что в определении  $\alpha_2$  (3.4) вершины в числителе и знаменателе относятся к разным долям. ■

Проделанные к текущему моменту алгебро-геометрические построения аналогичны [41]. Инволюция  $\tau$  также используется и в [44] как условие вещественности решетки.

**Пример 3.1.** Рассмотрим произвольный квад-граф  $\mathcal{D}$ , допускающий квазикристаллическое параллелограммное погружение (определение 3.5). По замечанию 3.2, для него существует представление в виде двумерного подкомплекса  $\Omega_{\mathcal{D}}$  в  $\mathbb{Z}^d$ . Зададим спектральные данные следующим образом.

В качестве спектральной кривой  $\Gamma$  возьмем сферу  $g = 0$ . Выделенные точки:  $R_1 = \infty$ ,  $A_j^{\pm} = \pm\alpha_j$ , гамма-дивизор пустой. Тогда получается, что волновая функция — это дискретная экспонента

$$\Psi(\mathbf{n}; z) = \prod_{j=1}^d \left( \frac{z + \alpha_j}{z - \alpha_j} \right)^{n_j}.$$

Зададим инволюцию  $\sigma$  как центральную симметрию  $\sigma z = -z$  с неподвижными точками  $R_- = 0$ ,  $R_+ = \infty$ , дифференциал  $\Omega = -dz/2z$ . Тогда весовая функция

равна

$$\nu(p_2, p_3) = \frac{1}{\nu(p_1, p_4)} = i \frac{\alpha_y - \alpha_x}{\alpha_y + \alpha_x}.$$

Получается, что значение  $i\nu$  на любом параллелограмме равно отношению его диагоналей. По одному из результатов [37], эта весовая функция определяет дискретные уравнения Коши-Римана, интегрируемые в смысле 3D - совместности.

В случае вещественных весов из последней формулы следует, что все  $\alpha_j$  равны между собой по абсолютной величине:  $|\alpha_j|^2 = C^2$ . Определим антиголоморфную инволюцию  $\tau z = C/\bar{z}$ , тогда все  $\alpha_j$  будут для нее неподвижными точками и условия леммы 3.2 будут выполнены. Таким образом, в квазикристаллическом случае достаточное условие вещественности является еще и необходимым.

### 3.3 Достаточное условие несингулярности оператора Лапласа

Прежде всего определимся с тем, что такое несингулярность для оператора Лапласа. Как уже обсуждалось, перенос определения несингулярности в чистом виде с непрерывного случая на дискретный не имеет большого смысла. Было решено считать, что оператор несингулярен, когда он эллиптичен. Ниже мы покажем, что из положительности коэффициентов вытекает принцип максимума модуля, из которого и получается эллиптичность. В связи с этим мы уточним определение несингулярности как условие постоянства знака коэффициентов оператора.

Рассмотрим связный планарный граф  $\mathcal{G}$ , вложенный в  $\mathbb{C}$ . Пусть на его ребрах определена весовая функция  $\nu : E(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{C}$ . Выберем в  $\mathcal{G}$  простой цикл  $p = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$ , он делит  $\mathbb{C}$  на две части. Выберем одну из частей и назовем все вершины  $x \notin p$ , лежащие в этой части, внутренними по отношению

к  $p$ . Граничными будем называть вершины цикла  $p$ . По построению, соседями внутренних вершин могут быть только внутренние и граничные.

Рассмотрим класс  $K$  комплекснозначных функций, определенных на всех внутренних и граничных вершинах. Введем оператор Лапласа  $\Delta$  на таких функциях: результат на любой внутренней вершине определяется по стандартной формуле (3.1), а значение результата на границе равно 0.

Теперь рассмотрим следующую краевую задачу. Пусть в вершинах пути  $p$  заданы некоторые граничные условия. Необходимо найти все  $f \in K$ , удовлетворяющие граничным условиям и обнуляющие оператор Лапласа:  $\Delta f = 0$ .

**Утверждение 3.1.** *Пусть весовая функция  $\nu$  принимает только положительные значения. Тогда для любого простого пути  $p$  и для любых граничных условий существует не более одного решения краевой задачи  $f \in K$ .*

**Доказательство.** Перепишем условие гармоничности функции во внутренних вершинах  $x_0$

$$\sum_{x \sim x_0} \nu(x_0, x) f(x_0) = \sum_{x \sim x_0} \nu(x_0, x) f(x).$$

Отсюда следует дискретный аналог принципа максимума

$$|f(x_0)| \leq \max_{x \sim x_0} |f(x)|.$$

Действительно, в противном случае левая часть равенства будет больше правой по абсолютной величине.

Если в  $K$  найдется два различных решения данной краевой задачи  $f_1, f_2$ , то  $(f_1 - f_2)$  является ненулевым решением  $\Delta f = 0$  при нулевых граничных условиях, что противоречит принципу максимума. ■

В связи с этим логично ввести следующее определение несингулярности дискретного оператора. Вместо положительности удобнее говорить о значениях одного знака.

**Определение 3.6.** Оператор  $\Delta$  называется несингулярным, если соответствующая ему весовая функция  $\nu : E(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}$  принимает только значения одного знака.

Далее в этом разделе мы будем искать достаточные условия положительности либо отрицательности весовой функции, построенной по обобщенным спектральным данным.

Пусть выполнены условия лемм 3.1 и 3.2. Пусть также  $\Gamma$  является  $M$ -кривой. Это означает, что антиголоморфная инволюция  $\tau$  имеет  $g+1$  неподвижный овал  $a_1, a_2, \dots, a_g, c$ . Заметим, что инволюция  $\sigma$  переводит неподвижные точки  $\tau$  в неподвижные благодаря условию коммутации:  $\gamma = \tau\gamma \Rightarrow \sigma\gamma = \sigma\tau\gamma = \tau\sigma\gamma$ . Из непрерывности следует, что  $\sigma$  овалы переводит целиком в овалы.

По определению  $\tau$ , выделенные точки  $A_1^\pm, A_2^\pm, \dots, A_d^\pm$  являются неподвижными. Потребуем, чтобы все они попадали на один овал:  $A_j^\pm \in c, j = 1, 2, \dots, d$ . Отсюда  $\sigma c = c$ .

Для каждой точки  $A_j^+, j = 1, 2, \dots, d$ , выберем такой локальный параметр  $z_j$ , чтобы в окрестности  $A_j^+$  все точки овала  $c$  были вещественными:  $\text{Im } z_j = 0$ . Это в точности такие параметры, в которых  $\tau z = \bar{z}$ . Для любой вершины  $p$  квад-графа рассмотрим разложение волновой функции  $\Psi(p, \gamma)$  и двойственной ей  $\Psi^+(p, \gamma) = \Psi(p, \sigma\gamma)$  в выбранных окрестностях:

$$\Psi(p, z_j) = r_j(p)z_j^{-\mathbf{n}_j(p)} + O\left(z_j^{-\mathbf{n}_j(p)+1}\right), \quad (3.15)$$

$$\Psi^+(p, z_j) = r_j^+(p)z_j^{\mathbf{n}_j(p)} + O\left(z_j^{\mathbf{n}_j(p)+1}\right), \quad (3.16)$$

где  $r_j(p), r_j^+(p)$  — ненулевые комплексные числа для всех  $j = 1, 2, \dots, d$  и  $p \in V(\mathcal{D})$ .

**Замечание 3.5.** В окрестности каждой из  $A_j^-, j = 1, 2, \dots, d$ , в качестве локального параметра можно взять  $\sigma z_j, \tau\sigma z_j = \overline{\sigma z_j}$ . Поскольку  $\Psi(p, \sigma\gamma) =$

$\Psi^+(p, \gamma)$ , то (3.16) эквивалентно разложению  $\Psi(p, \gamma)$  в окрестности  $A_j^-$ .

Из (3.14) и выбора локального параметра следует

**Утверждение 3.2.** *При четном  $s(\mathbf{n}(p))$  главные коэффициенты  $r_j(p)$ ,  $r_j^+(p)$  являются вещественными, а при нечетном — чисто мнимыми.*

Нам потребуются некоторые сведения о соотношении знаков главных коэффициентов.

**Лемма 3.3.** *Рассмотрим произвольную вершину  $p \in V(\mathcal{D})$ . Для любого  $j = 1, 2, \dots, d$ , при котором  $\mathbf{n}_j(p) \neq 0$ , выполняется*

$$r_j(p)r_j^+(p) > 0 \quad (3.17)$$

**Доказательство.** Рассмотрим ограничение  $h(\lambda)$ ,  $\lambda \in c$ , волновой функции  $\Psi(p, \lambda)$  на неподвижный овал  $c$ . По (3.14) это ограничение является вещественной либо чисто мнимой функцией на окружности, поэтому можно говорить об ее знаке. По замечанию 3.5,  $r_j^+(p)$  является главным коэффициентом разложения  $h(\lambda)$  в точке  $A_j^-$ . Функция  $h(\lambda)$  может менять знак только в точках  $A_1^\pm, A_2^\pm, \dots, A_d^\pm$ , поскольку во всех остальных точках овала  $c$  ее значения отличны от нуля и бесконечности. Заметим, что при переходе через точку четного порядка (неважно, полюс это или нуль) знак сохраняется, а при переходе через точку нечетного порядка — меняется на противоположный. Рассмотрим два случая.

1. Пусть сначала  $s(\mathbf{n}(p))$  четно, тогда  $h(\lambda)$  вещественна. Покажем, что знаки  $r_j(p)$  и  $r_j^+(p)$  совпадают. Действительно, если  $\mathbf{n}_j(p)$  четно, то сумма порядков во всех остальных выделенных точках также четна, а следовательно, функция  $h(\lambda)$  на пути от  $A_j^+$  до  $A_j^-$  меняет знак четное количество раз. Если же  $\mathbf{n}_j(p)$  нечетно, то и знак  $h$  на рассмотренном пути меняется нечетное число раз, что также говорит о совпадении знаков.

2. Пусть теперь  $s(\mathbf{n}(p))$  нечетно, тогда  $h(\lambda)$  чисто мнимая. Аналогичными рассуждениями получаем, что знаки  $r_j(p)$  и  $r_j^+(p)$  различаются, тогда некоторое неравенство будет выполняться за счет их чистой мнимости.

Таким образом, в обоих случаях (3.17) выполняется. ■

Будем говорить, что числа  $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{C}$  одного знака и писать  $a \sim b$ , если  $b \neq 0$  их отношение положительно  $\frac{a}{b} > 0$ .

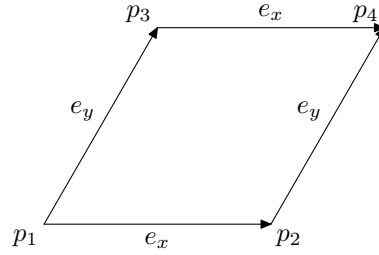


Рис. 5: Произвольная грань из леммы 3.4

**Лемма 3.4.** *Рассмотрим произвольную грань  $(p_1, p_2, p_4, p_3) \in F(\mathcal{D})$ . Не умаляя общности будем считать, что ребра этой грани ориентированы в сторону вершин с большими номерами (см. рисунок 5). Пусть ребро  $(p_1, p_2)$  имеет метку  $e_x$ , а ребро  $(p_1, p_3)$  — метку  $e_y$ ,  $1 \leq x, y \leq d$ ,  $x \neq y$ . Справедливы следующие соотношения*

$$\frac{r_x(p_2)}{r_x(p_4)} \sim \frac{r_x(p_1)}{r_x(p_3)}, \quad \frac{r_y(p_3)}{r_y(p_4)} \sim \frac{r_y(p_1)}{r_y(p_2)}. \quad (3.18)$$

**Доказательство.** Мы будем писать  $\Psi(p)$  вместо  $\Psi(p, \gamma)$  там, где второй параметр понятно какой. Вспомним равенство Коши-Римана

$$\Psi(p_4) - \Psi(p_1) = \frac{r_y(p_4)}{r_y(p_3)} (\Psi(p_3) - \Psi(p_2)) = -\frac{r_x(p_4)}{r_x(p_2)} (\Psi(p_3) - \Psi(p_2)). \quad (3.19)$$

Выражая  $\Psi(p_4)$  через остальные слагаемые, вычислим

$$\operatorname{res}_{A_y^+} \Psi(p_4) \Psi^+(p_1) \Omega = \frac{r_y(p_4)}{r_y(p_3)} \operatorname{res}_{A_y^+} \Psi(p_3) \Psi^+(p_1) \Omega = -\frac{r_y(p_4)}{r_y(p_3)}.$$



Первый переход справедлив, так как только  $\Psi(p_3)$  при умножении на  $\Psi^+(p_1)$  дает полюс в  $A_y^+$ . Во втором переходе мы воспользовались тем, что у дифференциала  $\Psi(p_3)\Psi^+(p_1)\Omega$  только три полюса: в  $R_+$ ,  $R_-$ ,  $A_y^+$ , причем вычет в каждом из  $R_+$ ,  $R_-$  равен  $\frac{1}{2}$  благодаря соотношению для соседних вершин  $\Psi(p_3, R_-)\Psi^+(p_1, R_-) = -1$ , откуда вычет в третьем полюсе равен  $-1$ .

С другой стороны, у  $\Psi(p_4)\Psi^+(p_1)\Omega$  в  $A_y^+$  полюс первого порядка, и вычет легко выражается через главные члены разложений в ряды при локальном параметре  $z_y$ :

$$\operatorname{res}_{A_y^+} \Psi(p_4)\Psi^+(p_1)\Omega = r_y(p_4)r_y^+(p_1)\Omega(A_y^+),$$

где под  $\Omega(A_y^+)$  имеется в виду значение  $f(A_y^+)$  при  $\Omega(z_y) = f(z_y)dz_y$  в окрестности  $A_y^+$ . Из двух этих равенств получаем

$$-\frac{1}{\Omega(A_y^+)} = r_y(p_3)r_y^+(p_1).$$

Аналогичными рассуждениями получаются равенства

$$\begin{aligned} -\frac{r_x(p_4)}{r_x(p_2)} &= \operatorname{res}_{A_x^+} \Psi(p_4)\Psi^+(p_1)\Omega = r_x(p_4)r_x^+(p_1)\Omega(A_x^+) \Rightarrow -\frac{1}{\Omega(A_x^+)} = r_x(p_2)r_x^+(p_1), \\ -\frac{r_y(p_3)}{r_y(p_4)} &= \operatorname{res}_{A_y^+} \Psi(p_3)\Psi^+(p_2)\Omega = r_y(p_3)r_y^+(p_2)\Omega(A_y^+) \Rightarrow -\frac{1}{\Omega(A_y^+)} = r_y(p_4)r_y^+(p_2), \\ -\frac{r_x(p_2)}{r_x(p_4)} &= \operatorname{res}_{A_x^+} \Psi(p_2)\Psi^+(p_3)\Omega = r_x(p_2)r_x^+(p_3)\Omega(A_x^+) \Rightarrow -\frac{1}{\Omega(A_x^+)} = r_x(p_4)r_x^+(p_3). \end{aligned}$$

Откуда следуют

$$\frac{r_y(p_3)}{r_y(p_4)} = \frac{r_y^+(p_2)}{r_y^+(p_1)}, \quad \frac{r_x(p_2)}{r_x(p_4)} = \frac{r_x^+(p_3)}{r_x^+(p_1)}.$$

В каждом из них избавимся от  $r^+$  с помощью соотношения (3.17) и получим искомое (3.18). ■

Итак, благодаря условиям на обобщенные спектральные данные мы получили соотношения, достаточные для выводов о знаках весовой функции. Теперь

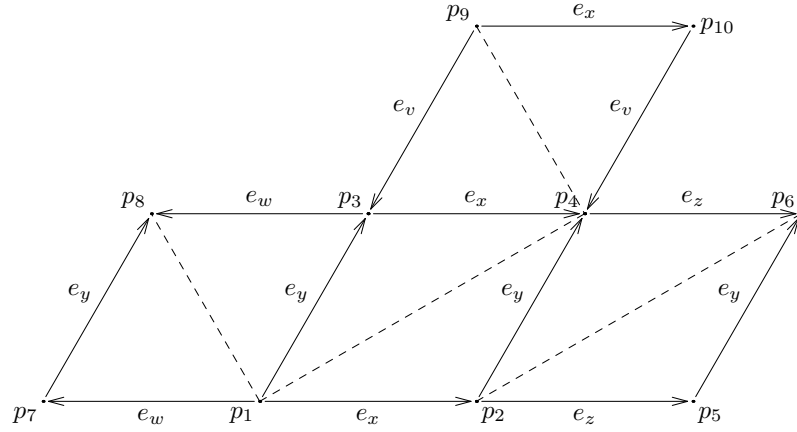


Рис. 6: Три случая взаимного расположения:  $(p_1, p_2, p_5, p_6, p_4, p_3)$ ,  $(p_2, p_1, p_7, p_8, p_3, p_4)$ ,  $(p_1, p_3, p_9, p_{10}, p_4, p_2)$

мы готовы перейти к определению условий на граф  $\mathcal{D}$ , необходимых и достаточных для того, чтобы для любых двух соседних граней графа значения весовой функции на них имеют один знак. Все возможные случаи взаимного расположения с точностью до поворотов и учетом ориентации ребер представлены на рисунке 6.

С помощью (3.19) можно быстро расписать значения весовой функции в терминах главных коэффициентов. При однознаковых преобразованиях мы используем (3.18).

$$i\nu(p_1, p_4) = \frac{r_y(p_3)}{r_y(p_4)} = -\frac{r_x(p_2)}{r_x(p_4)} \sim -\frac{r_x(p_1)}{r_x(p_3)},$$

$$i\nu(p_9, p_4) = -\frac{r_v(p_3)}{r_v(p_4)},$$

$$i\nu(p_2, p_6) = -\frac{r_z(p_5)}{r_z(p_6)} \sim -\frac{r_z(p_2)}{r_z(p_4)},$$

$$i\nu(p_1, p_8) = \frac{r_w(p_7)}{r_w(p_8)} \sim \frac{r_w(p_1)}{r_w(p_3)}.$$

Разберем требование

$$i\nu(p_1, p_4) \sim i\nu(p_9, p_4) \iff \frac{r_y(p_3)}{r_y(p_4)} \sim -\frac{r_v(p_3)}{r_v(p_4)}.$$

Для этого рассмотрим мероморфную на  $\Gamma$  функцию  $f(\gamma) = \Psi(p_3, \gamma)/\Psi(p_4, \gamma)$ . Ее ограничение на овал  $s$  чисто мнимое (вершины  $p_3$  и  $p_4$  — соседние), имеет один нуль первого порядка в  $A_x^+$  и один полюс первого порядка в  $A_x^-$ . Нужное требование эквивалентно тому, что значения  $f(A_y^+)$  и  $f(A_v^+)$  имеют разный знак. Другими словами, точки  $A_y^+$  и  $A_v^+$  лежат на разных дугах, соединяющих  $A_x^+$ ,  $A_x^-$  на овале  $s$ . Аналогичными рассуждениями с остальными соотношениями приходим к следующим выводам.

1.  $i\nu(p_1, p_4) \sim i\nu(p_9, p_4) \iff (A_y^+ \text{ и } A_v^+ \text{ лежат на разных дугах } A_x^+, A_x^-)$ .
2.  $i\nu(p_1, p_4) \sim i\nu(p_2, p_6) \iff -\frac{r_x(p_2)}{r_x(p_4)} \sim -\frac{r_z(p_2)}{r_z(p_4)} \iff (A_x^+, A_z^+ \text{ лежат на одной дуге } A_y^+, A_y^-)$ .
3.  $i\nu(p_1, p_4) \sim i\nu(p_1, p_8) \iff -\frac{r_x(p_1)}{r_x(p_3)} \sim \frac{r_w(p_1)}{r_w(p_3)} \iff (A_x^+, A_w^+ \text{ лежат на разных дугах } A_y^+, A_y^-)$ .

Сформулируем найденное условие.

**Определение 3.7.** *Рассмотрим две произвольные соседние грани квад-графа  $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in F(\mathcal{D})$ ,  $(p_2, p_5, p_6, p_4) \in F(\mathcal{D})$ . Пусть ребро  $(p_2, p_4)$  имеет метку  $e_y$ , ребро  $(p_1, p_2)$  — метку  $e_x$ , ребро  $(p_2, p_5)$  — метку  $e_z$ . Ориентация  $(p_2, p_4)$  может быть произвольной. Потребуем, чтобы ребра  $(p_1, p_2)$  и  $(p_2, p_5)$  были направлены в разные стороны (имели общий конец или общее начало) тогда и только тогда, когда точки  $A_x^+$ ,  $A_z^+$  лежат на разных дугах, соединяющих  $A_y^+$ ,  $A_y^-$  на овале  $s$  (см. рисунки 7, 8). Тогда будем говорить, что разметка ребер квад-графа  $\mathcal{D}$  положительно согласована с их ориентацией.*

Сформулируем доказанное условие.

**Теорема 3.1** (Достаточное условие положительности весовой функции). *Пусть  $\Gamma$  является  $M$ -кривой, выделенные точки  $A_j^\pm$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ , попадают*

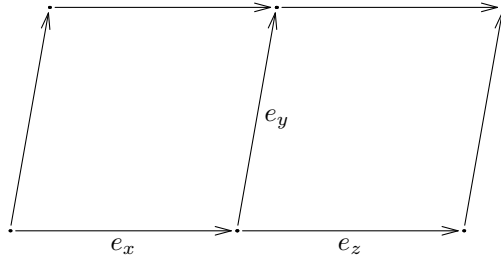


Рис. 7:  $A_x^+, A_z^+$  лежат на одной дуге  $A_y^+, A_y^-$

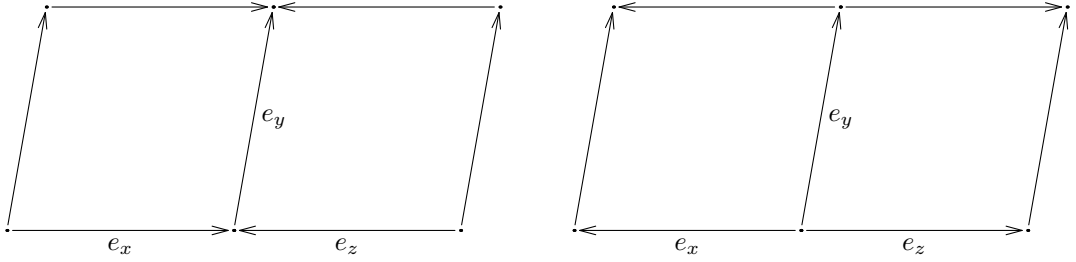


Рис. 8:  $A_x^+, A_z^+$  лежат на разных дугах  $A_y^+, A_y^-$

на овал  $s$ , на остальные овалы попадает по одной точке  $\gamma$ -дивизора:  $\gamma_k \in a_k$ ,  $k = 1, \dots, g$ . Все значения весовой функции  $\nu$ , построенной по этим спектральным данным, имеют один знак тогда и только тогда, когда разметка ребер квад-графа  $\mathcal{D}$  положительно согласована с их ориентацией.

**Пример 3.2.** У стандартной квадратной решетки ( $d = 2$ ) координат разметка ребер положительно согласована с их ориентацией по возрастанию координат.

**Пример 3.3.** Рассмотрим квадратную решетку, отображенную в  $\mathbb{Z}^3$  в виде лесенки: на вертикальных сторонах решетки написано  $e_3$ , а на горизонтальных чередуются  $e_1$  с  $e_2$ , ориентация ребер такая же, выделенные точки располагаются на овале в порядке нумерации  $A_1^+, A_2^+, A_3^+$ . Положительная согласованность также достигается, так как любые две соседних грани отвечают случаю рисунка 7 и порождают условия «точка  $A_3^+$  не лежит между  $A_1^+, A_2^+$ » и тривиальное «точки  $A_1^+, A_2^+$  не лежат между  $A_3^+$  и  $A_3^+$ ».

Выберем в нашей квадратной решетке вертикальную прямую из ребер и поменяем ориентацию на противоположную у всех горизонтальных ребер слева

от этой прямой. В каждой из половинок по отдельности положительная согласованность продолжит выполняться, но на границе появятся противоречия в виде условий « $A_3^+$  лежит между  $A_1^+$ ,  $A_2^+$ ». Положительную согласованность можно вернуть, добавив еще две размерности,  $d = 5$ , и поменяв пометку каждого горизонтального ребра слева от выбранной прямой: с  $e_1$  на  $e_4$  и с  $e_2$  на  $e_5$ .

**Пример 3.4.** Вернемся к примеру 3.1. Пусть спектральные данные ( $g = 0$ ) построены по квад-графу, для которого существует квазикристаллическое робмовидное погружение  $p$ ,  $\{A_j^+, A_j^-\} = \{\alpha_j, -\alpha_j\}$ ,  $|\alpha_j| = 1$  (необходимо для существования  $\tau$ ). Проверим, что условие положительной согласованности разметки ребер и ориентации выполняется. Рассмотрим  $\mathcal{D}$ , вложенный в  $\mathbb{C}$  посредством  $p$  и две произвольные соседние грани из определения 3.7. Будем считать, что  $(p_2, p_4)$  направлено в сторону  $p_4$ , в этом случае  $A_y^+ = p(p_4) - p(p_2)$ . Пусть сначала ребро  $(p_1, p_2)$  направлено в сторону  $p_2$ ,  $(p_2, p_5)$  — в сторону  $p_5$ . Тогда  $A_x^+ = p(p_2) - p(p_1)$ ,  $A_z^+ = p(p_5) - p(p_2)$ . Поскольку обе грани невырождены и не пересекаются, точки  $p(p_2) - p(p_1)$ ,  $p(p_5) - p(p_2)$  лежат по одну сторону относительно прямой, соединяющей  $p(p_4) - p(p_2)$ ,  $p(p_2) - p(p_4)$  (прямая  $A_y^+ A_y^-$ ), что и требовалось. Пусть теперь ребра  $(p_1, p_2)$ ,  $(p_2, p_5)$  имеют общее начало  $p_2$ , тогда  $A_x^+ = p(p_1) - p(p_2)$ ,  $A_z^+ = p(p_5) - p(p_2)$ , и по невырожденности и непересечению граней эти точки лежат по разные стороны относительно прямой  $A_y^+ A_y^-$ . Если ребра  $(p_1, p_2)$ ,  $(p_2, p_5)$  имеют общий конец  $p_2$ , то  $A_x^+ = p(p_2) - p(p_1)$ ,  $A_z^+ = p(p_2) - p(p_5)$  и они снова лежат по разные стороны относительно  $A_y^+ A_y^-$ .

Факт из примера 3.4 обобщается на случай произвольного рода.

**Утверждение 3.3.** Если граф  $\mathcal{D}$  имеет квазикристаллическое робмовидное погружение  $p$  [37] и комплекс  $\Omega_{\mathcal{D}}$  получен из  $\mathcal{D}$  с помощью  $p$  (замечание 3.2),

то для любого корректного набора спектральных данных (требуется существование  $\sigma$ ,  $\Omega$  и  $\tau$ ) конечнозонный подход дает после подходящей перенумерации пар точек  $A_j^\pm$  разметку, положительно согласованную с ориентацией.

Под перенумерацией  $A_j^\pm$  здесь понимается изменение взаимно-однозначного соответствия  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\} \leftrightarrow \{A_1^\pm, \dots, A_d^\pm\}$ , индексы  $\mathbf{e}_j$  остаются на месте.

**Доказательство.** Построим по квазикристаллическому вложению  $p$  вспомогательный набор спектральных данных на сфере  $g = 0$ . По примеру 3.4, для полученной разметки будет выполняться положительная согласованность с ориентацией. Рассмотрим теперь выделенные точки исходного набора  $A_j^\pm$ . По условию, они лежат на овале  $s$ . Перенумерацией можно добиться того, что их порядок на овале  $s$  будет совпадать с порядком  $\pm\alpha_j$  на единичной окружности. После этой перенумерации разметка ребер графа  $\mathcal{D}$  для исходного набора спектральных будет совпадать с разметкой для вспомогательного, и соотношения вида  $A_x^+$ ,  $A_z^+$  лежат на одной/разных дугах  $A_y^+ A_y^-$  будут равносильны соотношениям для  $\pm\alpha_j$ . Следовательно, из положительной согласованности для вспомогательного набора вытекает положительная согласованность для исходного, что и требовалось. ■

## 4 Функция Грина оператора Лапласа на квад-графах

Рассмотрим оператор Лапласа  $L = L_x$ , действующий на  $\mathcal{G}$  по формуле (3.12). Нас интересует такая функция  $G(x, \tilde{x}, \lambda)$ ,  $x \in V(\mathcal{G})$ ,  $\tilde{x} \in V(\mathcal{G})$ , что для почти любого фиксированного  $\lambda \in \Gamma$  выполняется

$$LG = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \tilde{x}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$(LG)(x, \tilde{x}, \lambda) = \sum_{x_1 \sim x} \nu(x, x_1)(G(x_1, \tilde{x}, \lambda) - G(x, \tilde{x}, \lambda)).$$

Забегая вперед, скажем, что почти при всех  $\lambda$  для найденной функции  $G$  выполнено условие роста

$$|G(x, \tilde{x}, \lambda)| \leq R_1(\lambda, \tilde{x}) e^{\langle \mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(\tilde{x}), \operatorname{Im} p_{\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(\tilde{x})}(\lambda) \rangle}, \quad (4.1)$$

где  $R_1(\cdot, \tilde{x}) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая в точках выполнения неравенства. Другими словами, почти всюду рост абсолютной величины  $G$  такой же, как и  $\Psi$ .

Результаты данного раздела получены автором в работе [50].

### 4.1 Рост волновой функции

Вопрос о том, как ведет себя  $|\Psi(\mathbf{n}, \gamma)|$  при фиксированном  $\gamma$ , очень важен для оценки роста функции Грина. Для формулировки и доказательства теоремы нам потребуются некоторые понятия теории римановых поверхностей.

Основной результат настоящего раздела является обобщением основного результата раздела 2.1. А именно, теорема 2.1 является частным случаем теоремы 4.1 при  $d = 2$ .

Нормировка базиса голоморфных дифференциалов, определение тета-функции Римана, отображения Абеля и дифференциала  $\Omega(P, Q)$  в точности такие же, как и в разделе 2.1, мы не будем повторять их здесь.

По аналогии с 5.2 [41], для волновой функции  $\Psi$  можно написать явную формулу, верную при любых  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ :

$$\Psi(\mathbf{n}, \gamma) = \exp \left( \sum_{j=1}^d n_j \int_{R_+}^{\gamma} \Omega(A_j^+, A_j^-) \right) \times \quad (4.2)$$

$$\times \frac{\theta \left( \vec{A}(\gamma) + \sum_{j=1}^d n_j \vec{\Delta}_j - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)}{\theta \left( \vec{A}(\gamma) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)} \times \frac{\theta \left( \vec{A}(R_+) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)}{\theta \left( \vec{A}(R_+) + \sum_{j=1}^d n_j \vec{\Delta}_j - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)},$$

где

$$\vec{\Delta}_j = \vec{A}(A_j^-) - \vec{A}(A_j^+)$$

и пути во всех интегралах берутся одинаковыми. Проверим, что (4.2) задаёт однозначную на  $\Gamma$  функцию. Если путь до фиксированного  $\gamma$  изменяется на некоторый цикл, гомологичный

$$\sum_{j=1}^g (N_j a_j + M_j b_j), \quad \vec{N}, \vec{M} \in \mathbb{Z}^g,$$

то отношение  $\theta$ -функций умножится на

$$t = \exp \left( -2\pi i \left\langle \vec{M}, \sum_{j=1}^g n_j \vec{\Delta}_j \right\rangle \right).$$

Из теории римановых поверхностей нам известно, что

$$\oint_{b_k} \Omega(A_j^+, A_j^-) = 2\pi i \int_{A_j^+}^{A_j^-} \omega_k = 2\pi i \delta_j, \quad (4.3)$$

а следовательно, экспонента умножится на  $t^{-1}$ .

Пусть  $\Gamma$  является М-кривой, то есть инволюция  $\tau$  имеет  $g + 1$  неподвижный овал  $a_1, a_2, \dots, a_g, c$ .



**Теорема 4.1.** Пусть  $\Gamma$  является  $M$ -кривой, выделенные точки  $A_j^\pm$ ,  $j = 1, \dots, d$ , попадают на овал  $c$ , на остальные овалы попадает по одной точке  $\gamma$ -дивизора:  $\gamma_k \in a_k$ ,  $k = 1, \dots, g$ . Тогда канонический базис циклов и пути интегрирования на  $\Gamma$  можно выбрать таким образом, что для любого фиксированного  $\gamma \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$  выполняется неравенство при всех  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ :

$$|\Psi(\mathbf{n}, \gamma)| \leq R(\gamma) \left| \exp \left( \sum_{j=1}^d n_j \int_{R_+}^{\gamma} \Omega(A_j^+, A_j^-) \right) \right|, \quad (4.4)$$

где  $R : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая на  $\Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$  функция.

Другими словами, почти всех  $\gamma \in \Gamma$  рост абсолютной величины  $\Psi(\mathbf{n})$  зависит только от  $\Omega(A_j^+, A_j^-)$ ,  $j = 1, \dots, d$ .

**Замечание 4.1.** Как было указано автору С. М. Натанзоном, теорема имеет более простое доказательство, нежели то, что приведено ниже. Оно основано на следующих соображениях. Рассмотрим дивизор

$$D = \sum_{j=1}^d n_j (A_j^+ - A_j^-) + \sum_{k=1}^g \gamma_k.$$

Отображение Абеля переводит его на единственный неособый (не пересекающийся с тета-дивизором) тор вещественной части якобиана, см. теорему 8.1 главы 2 [20]. Из этого вытекает, что модуль тета-функции

$$\theta \left( \vec{A}(\gamma) - \vec{A}(D) - \vec{K} \right)$$

ограничен сверху и снизу положительными константами, откуда и следует утверждение теоремы.

**Доказательство.** Благодаря расположению  $\gamma_k$  все нули  $\Psi(\mathbf{n}, \gamma)$  при любых  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$  располагаются только на неподвижных овалах  $a_1, \dots, a_g, c$ . Действительно, на каждом из  $a_k$  ( $k = 1, \dots, g$ ), функция  $\Psi(\mathbf{n}, \gamma)$  вещественная или

чисто мнимая (3.14) и имеет полюс первого порядка. Тогда на  $a_k$  найдется и нуль по крайней мере первого порядка. Степень дивизора  $\Psi$

$$\sum_{j=1}^d n_j (A_j^- - A_j^+) - \sum_{k=1}^g \gamma_k$$

равна  $(-g)$  и по построению у  $\Psi(\mathbf{n}, \gamma)$  нет полюсов вне точек этого дивизора. Следовательно, все нули на  $a_k$  имеют первый порядок и больше на  $\Gamma$  нулей у  $\Psi(\mathbf{n}, \gamma)$  нет.

Рассмотрим явную формулу (4.2). Пусть  $\gamma \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$ , тогда ни одна из  $\theta$ -функций не обращается в нуль. Мы докажем существование гладких  $R_{min}(\gamma) > 0$  и  $R_{max}(\gamma) > 0$ , таких что для любых  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$  выполняется

$$R_{min}(\gamma) \leq \left| \theta \left( \vec{A}(\gamma) + \sum_{j=1}^d n_j \vec{\Delta}_j - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right) \right| \leq R_{max}(\gamma).$$

Искомая оценка будет выполняться при

$$R(\gamma) = \frac{R_{max}(\gamma)}{R_{min}(R_+)} \frac{\left| \theta \left( \vec{A}(R_+) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right) \right|}{\left| \theta \left( \vec{A}(\gamma) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right) \right|}.$$

Возьмем в качестве  $a$ -циклов канонического базиса неподвижные овалы  $\tau$  с точками  $\gamma$ -дивизора  $a_1, \dots, a_g$ . Благодаря такому выбору мы получаем целый ряд свойств.

Для каждого  $k = 1, \dots, g$  дифференциал  $\overline{\tau\omega_k}$  является голоморфным и имеет ту же нормировку, что и  $\omega_k$ . Следовательно,  $\tau\omega_k = \overline{\omega_k}$  и  $\omega_k$  принимает вещественные значения на неподвижных овалах  $\tau$ .

Рассмотрим подмножество  $R \subset J(\Gamma)$  классов эквивалентности с вещественными представителями  $\vec{x} + B\vec{M}$ , где  $\vec{x} \in \mathbb{R}^g$ ,  $\vec{M} \in \mathbb{Z}^g$ . По построению  $R$  является замкнутым множеством.

Вспомним, что при изменении  $\mathbf{d}$  аргументы  $\theta$ -функций изменяются на  $\vec{\Delta}_j = \vec{A}(A_j^-) - \vec{A}(A_j^+)$ ,  $j = 1, \dots, d$ . Тогда из вещественности  $\omega_k$  на неподвижных

овалах и определения

$$(\vec{\Delta}_j)_k = \int_{A_j^+}^{A_j^-} \omega_k$$

следует  $\vec{\Delta}_j \in R$ , так как от вещественного вектора они могут отличаться только на периоды многообразия Якоби.

Фиксируем  $\lambda \in \Gamma \setminus (a_1 \cup \dots \cup a_g \cup c)$  и рассмотрим множество всех значений аргументов рассматриваемой  $\theta$ -функции при различных  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ :

$$V(\lambda) = \left\{ \vec{A}(\lambda) + \sum_{j=1}^d n_j \vec{\Delta}_j - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \mid \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d \right\}.$$

Докажем, что замыкание  $V(\lambda)$  в  $J(\Gamma)$  не содержит нулей  $\theta$ -функции. Пусть такой нуль  $z \in J(\Gamma)$  все-таки нашелся. Тогда разность

$$z - \left( \vec{A}(\lambda) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K} \right)$$

сколь угодно приближается суммой

$$\sum_{j=1}^d n_j \vec{\Delta}_j \in R$$

и по замкнутости сама принадлежит  $R$ . Следовательно, найдется такая  $\lambda_0 \in \Gamma$ ,  $\tau\lambda_0 = \lambda_0$ , что на  $J(\Gamma)$  выполняется равенство

$$z = \vec{A}(\lambda_0) - \sum_{k=1}^g \vec{A}(\gamma_k) - \vec{K},$$

откуда следует  $\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\lambda) \in R$ . Воспользуемся теперь возможностью выбрать пути интегрирования и добьемся вещественности последней разности:  $\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\lambda) \in \mathbb{R}^g$ . Из  $\tau\omega_j = \bar{\omega}_j$  вытекает

$$\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\tau\lambda) = \overline{\vec{A}(\lambda_0) - \vec{A}(\lambda)},$$

а из вещественности правой части  $\vec{A}(\lambda) = \vec{A}(\tau\lambda)$ . Поскольку  $\tau\lambda \neq \lambda$ , такое может быть только на сфере  $g = 0$ , где доказываемая оценка тривиальна.

Из отсутствия нулей в замыкании  $V(\lambda) \subset J(\Gamma)$  и компактности последнего следует существование искомым  $R_{min}(\lambda)$ ,  $R_{max}(\lambda)$  для всех  $\lambda \notin (a_1 \cup \dots \cup a_h \cup c)$ , этим и завершается доказательство. ■

**Замечание 4.2.** Выбор путей интегрирования в точности соответствует случаю  $\vec{\Delta}_j \in \mathbb{R}^g$ ,  $j = 1, \dots, d$ , поэтому по (4.3) интегралы от  $\Omega(A_j^+, A_j^-)$  по любому циклу являются чисто мнимыми.

**Замечание 4.3.** По всей видимости, оценка (4.4) выполняется почти всюду и в более общем случае, когда  $\Gamma$  не является М-кривой. Но строгое доказательство требует более серьезной техники. Эта задача — тема для дальнейших исследований.

## 4.2 Квазиимпульсы

Дифференциалы квазиимпульсов  $dp_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , определяются по аналогии с [46]. А именно, это мероморфные дифференциалы третьего рода;  $dp_j$  имеет вычеты  $i$ ,  $-i$  в точках  $A_j^+$ ,  $A_j^-$  соответственно. Дифференциалы квазиимпульсов однозначно определяются условием вещественности интегралов по всем контурам. Сами квазиимпульсы определяются как

$$p_j(\gamma) = \int_{R_+}^{\gamma} dp_j \quad (4.5)$$

и являются многозначными на  $\Gamma$ , однако их мнимые части  $\text{Im } p_j(\gamma)$  уже являются однозначными на  $\Gamma$ .

Из замечания 4.2 и единственности дифференциалов квазиимпульсов следует, что при выборе канонического базиса циклов и путей интегрирования как

в теореме 4.1 выполняется  $\Omega(P^+, P^-) = -idp_m$ ,  $\Omega(Q^+, Q^-) = -idp_n$ . Поэтому оценка (4.4) может быть переписана в терминах квазиимпульсов:

$$|\Psi(\mathbf{n}, \gamma)| \leq R(\gamma)e^{\langle \mathbf{n}, \text{Im } \mathbf{p}(\gamma) \rangle}, \quad (4.6)$$

где

$$\mathbf{p}(\gamma) = (p_1(\gamma), \dots, p_d(\gamma)), \quad \langle \mathbf{n}, \text{Im } \mathbf{p}(\gamma) \rangle = \sum_{j=1}^d n_j \text{Im } p_j(\gamma).$$

Отметим, что поскольку и левая часть, и квазиимпульсы уже не зависят от выбора базиса или путей интегралов, то функция  $R(\gamma)$  также не зависит от них.

Оценка абсолютной величины двойственной волновой функции получается заменой  $\gamma$  на  $\sigma\gamma$

$$|\Psi^+(\mathbf{n}, \gamma)| \leq R(\sigma\gamma)e^{\langle \mathbf{n}, \text{Im } \mathbf{p}(\sigma\gamma) \rangle}.$$

Дифференциал  $-dp_j(\sigma\gamma)$  имеет полюса в  $A_j^+$ ,  $A_j^-$  с вычетами соответственно  $+i$ ,  $-i$ , а также интеграл от него по любому контуру является вещественным. Следовательно,  $dp_j(\sigma\gamma) = -dp_j$ . Поэтому последнее неравенство можно переписать в виде

$$|\Psi^+(\mathbf{n}, \gamma)| \leq R(\sigma\gamma)e^{-\langle \mathbf{n}, \text{Im } \mathbf{p}(\gamma) \rangle}. \quad (4.7)$$

Рассмотрим вещественную линейную комбинацию дифференциалов квазиимпульсов:

$$dp_{\mathbf{k}} = k_1 dp_1 + \dots + k_d dp_d, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Построим по ней множество точек на  $\Gamma$ :

$$C_{\mathbf{k}}(\lambda) = \{\gamma : \text{Im } p_{\mathbf{k}}(\gamma) = \text{Im } p_{\mathbf{k}}(\lambda)\}.$$

Эти контуры мы будем использовать при построении функции Грина для контроля роста волновой функции. Такого рода контуры возникли ещё в работе Кричевера и Новикова [45].

**Пример 4.1.** Продолжим рассмотрение квазикристаллического случая при  $g = 0$ . В качестве дифференциалов квазиимпульсов подходят

$$dp_j = \frac{idz}{z - \alpha_j} - \frac{idz}{z + \alpha_j}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Действительно, мнимые части квазиимпульсов получаются однозначными:

$$p_j = i \ln \left( \frac{z - \alpha_j}{z + \alpha_j} \right), \quad \text{Im } p_j = \ln \left| \frac{z - \alpha_j}{z + \alpha_j} \right|.$$

На сфере Римана контуры  $\text{Im } p_{\mathbf{k}} = \text{const}$  представляют собой эллипсы, превращающиеся в окружности при равенстве нулю одной из компонент.

Оценки (4.6) и (4.7) в случае сферы обращаются в равенства с  $R \equiv 1$ .

**Лемма 4.1.** Почти для всех  $\lambda \in \Gamma \setminus \{A_j^+, A_j^-\}$  множество  $C_{\mathbf{k}}(\lambda)$  при любом  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  является объединением конечного числа непрерывных замкнутых кривых. Ориентация на нем корректно задается условием  $\text{Re } dp_{\mathbf{k}}(\gamma) > 0$ , получаемый при этом контур оказывается гомологичным точке. Кроме того,

$$\oint_{C_{\mathbf{k}}(\lambda)} \Omega = 0, \quad (4.8)$$

то есть, точки  $R_+$ ,  $R_-$  одинаково обмотаны этим контуром.

**Доказательство.** Функция  $\text{Im } p_{\mathbf{k}}$  является гармонической и множество ее нулей не имеет на  $\Gamma$  внутренних точек. Благодаря этому почти для всех  $\lambda$  рассматриваемое множество точек, находящихся на одном уровне с  $\lambda$ , является непрерывным. Конечность и замкнутость кривых следует из компактности  $\Gamma$ . Контур  $C_{\mathbf{k}}(\lambda)$  с указанной ориентацией гомологичен нулю как граница подмногообразия  $\{\gamma : \text{Im } p_{\mathbf{k}}(\gamma) \leq \text{Im } p_{\mathbf{k}}(\lambda)\}$ .

Проверим второе утверждение. Зададим любую ориентацию на контуре. Из соображений единственности следует  $\tau\Omega = -\bar{\Omega}$ . Кроме того, несложно прове-

ритель  $\text{Im } p_k(\gamma) = \text{Im } p_k(\tau\gamma)$ , откуда следует  $\tau(C_{\mathbf{k}}(\lambda)) = -C_{\mathbf{k}}(\lambda)$ . Получаем

$$\oint_{C_{\mathbf{k}}(\lambda)} \Omega = \oint_{-C_{\mathbf{k}}(\lambda)} -\bar{\Omega},$$

то есть вещественность значения интеграла (4.8). Но мы знаем, что у  $\Omega$  всего два полюса в  $R_+$ ,  $R_-$  с вычетами  $\pm\frac{1}{2}$ , поэтому значение интеграла (4.8) должно быть мнимым. Из этого следует его равенство нулю и равенство коэффициентов, с которыми вычеты в  $R_+$ ,  $R_-$  входят в значение интеграла. ■

**Лемма 4.2.** *Рассмотрим два произвольных вектора  $\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . Пусть  $J \subset \{1, \dots, d\}$  — произвольное подмножество индексов  $j$ , таких что  $k_j k'_j > 0$ . Тогда почти для всех  $\lambda \in \Gamma$  контуры  $C_{\mathbf{k}}(\lambda)$ ,  $C_{\mathbf{k}'}(\lambda)$  гомологичны в  $\Gamma \setminus \{A_j^\pm : j \in J\}$ .*

**Доказательство.** Поскольку по лемме 4.1 оба контура гомологичны на  $\Gamma$ , остается проверить сохранение гомологичности при выкалывании точек  $\{A_j^\pm : j \in J\}$ . Достаточно разобрать случай  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{e}_i$  для произвольного  $i = 1, \dots, d$ . Для этого рассмотрим деформацию одного контура в другой  $C_t(\lambda) = C_{\mathbf{k} + t\mathbf{e}_i}(\lambda)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Ни один из контуров деформации не проходит через выколотые точки  $\{A_j^\pm : j \in J\}$ , поскольку  $\text{Im } p_{\mathbf{k} + t\mathbf{e}_i}$  обращается в  $\pm\infty$  в этих точках (и  $\text{Im } p_{\mathbf{k} + t\mathbf{e}_i}(\lambda)$  конечно). Следовательно, деформация  $C_t(\lambda)$  непрерывна в  $\Gamma$  без указанных точек, исходные контуры гомотопны, а значит и гомологичны. ■

### 4.3 Функция Грина оператора Лапласа

Рассмотрим оператор Лапласа  $L = L_x$ , действующий на  $\mathcal{G}$  по формуле (3.12). Напомним, что мы ищем такую функцию  $G(x, \tilde{x}, \lambda)$ ,  $x \in V(\mathcal{G})$ ,  $\tilde{x} \in V(\mathcal{G})$ , что

для почти любого фиксированного  $\lambda \in \Gamma$  выполняется

$$LG = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \tilde{x}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4.9)$$

где

$$(LG)(x, \tilde{x}, \lambda) = \sum_{x_1 \sim x} \nu(x, x_1)(G(x_1, \tilde{x}, \lambda) - G(x, \tilde{x}, \lambda)).$$

Кроме того, рост абсолютной величины  $G$  не должен превосходить  $\Psi$  (4.1).

Вслед за автором [47], постараемся найти выражение функции Грина в виде интеграла от  $\Psi(x, \gamma)\Psi^+(\tilde{x}, \gamma)\Omega(\gamma)$  по контуру  $C_{\mathbf{n}(x)-\mathbf{n}(\tilde{x})}(\lambda)$ . Для этого исследуем функцию

$$H(x, \tilde{x}, \lambda) = \oint_{C_{\mathbf{n}(x)-\mathbf{n}(\tilde{x})}(\lambda)} \Psi(x, \gamma)\Psi^+(\tilde{x}, \gamma)\Omega(\gamma), \quad x \neq \tilde{x}.$$

По лемме 4.1, почти при всех  $\lambda$  контур интегрирования является регулярным, и приведенная формула корректно задает  $H$  для всех вершин графа  $\mathcal{G}$ ,  $x \neq \tilde{x}$ . Поопределим  $H$  при  $x = \tilde{x}$  нулем:  $H(x, x, \lambda) = 0$ , это сделано для согласования с равенством нулю дифференциала  $\Psi(x, \gamma)\Psi^+(x, \gamma)\Omega(\gamma)$  по любому регулярному  $C$ -контур рассматриваемого вида (действительно, его полюса и вычеты совпадают с полюсами и вычетами  $\Omega$ , интеграл от которого по любому  $C$ -контур равен нулю по лемме 4.1).

Напомним, что дифференциал  $\Psi(x, \gamma)\Psi^+(\tilde{x}, \gamma)\Omega(\gamma)$  имеет следующий набор особенностей:

- Полюс порядка  $n_j(x) - n_j(\tilde{x})$  в  $A_j^+$  и нуль такого же порядка в  $A_j^-$ ,  $j = 1, \dots, d$ .
- Полюса первых порядков в  $R_{\pm}$  с вычетами  $\pm \frac{1}{2}(-1)^{s(\mathbf{n}(x))-s(\mathbf{n}(\tilde{x}))}$ .

**Теорема 4.2.** Почти для всех  $\lambda \in \Gamma$  и любых  $x \in V(\mathcal{G})$ ,  $\tilde{x} \in V(\mathcal{G})$  выполняется  $(LH)(x, \tilde{x}, \lambda) \equiv 0$ .



Для начала доказательства распишем

$$(LH)(x, \tilde{x}, \lambda) = \sum_{x_1 \sim x} \nu(x, x_1) \left( \oint_{C_{\mathbf{n}(x_1) - \mathbf{n}(\tilde{x})}(\lambda)} \Psi(x_1, \gamma) \Psi^+(\tilde{x}, \gamma) \Omega(\gamma) - \oint_{C_{\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(\tilde{x})}(\lambda)} \Psi(x, \gamma) \Psi^+(\tilde{x}, \gamma) \Omega(\gamma) \right)$$

**Лемма 4.3.** Для любой грани  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  графа  $\mathcal{D}$  найдется вершина  $p_k$ , такая что для любого  $j = 1, \dots, 4$  выполняется

$$\oint_{C_{\mathbf{n}(p_j) - \mathbf{n}(\tilde{x})}(\lambda)} \Psi(p_j, \gamma) \Psi^+(\tilde{x}) \Omega(\gamma) = \oint_{C_{\mathbf{n}(p_k) - \mathbf{n}(\tilde{x})}(\lambda)} \Psi(p_j, \gamma) \Psi^+(\tilde{x}) \Omega(\gamma).$$

Действительно, по лемме 4.1 достаточно учесть только особенности в  $A_j^\pm$ ,  $j = 1, \dots, d$ , поскольку вычеты в  $R_\pm$ , равные  $\pm \frac{1}{2}$ , вносят в сумму нулевой вклад. Искомая  $p_k$  — это вершина с лексикографически максимальным  $(|n_1(p_k) - n_1(\tilde{x})|, \dots, |n_d(p_k) - n_d(\tilde{x})|)$ .

Обозначим соответствующий контур  $C_{\mathbf{n}(p_k) - \mathbf{n}(\tilde{x})}(\lambda)$  через  $C_{p_1, p_4, \tilde{x}}(\lambda)$ . Тогда по лемме

$$(LH)(x, \tilde{x}, \lambda) = \sum_{x_1 \sim x} \oint_{C_{x_1, x, \tilde{x}}(\lambda)} \nu(x, x_1) (\Psi(x_1, \gamma) - \Psi(x, \gamma)) \Psi^+(\tilde{x}, \gamma) \Omega(\gamma).$$

Воспользуемся дискретной голоморфностью  $\Psi$ . Кроме того, поменяем порядок суммирования. Для этого рассмотрим две соседние грани в графе  $\mathcal{D}$ :  $(x, y_0, x_0, y_1)$ ,  $(x, y_1, x_1, y_2)$ , имеющие общие вершины  $x$  и  $y_1$ . Под суммированием по всем  $y_1 \sim x$  будем подразумевать суммирование по всем таким граням.

Тогда

$$(LH)(x, \tilde{x}, \lambda) = \sum_{y_1 \sim x} i \left( \oint_{C_{x, x_2, \tilde{x}}(\lambda)} - \oint_{C_{x, x_1, \tilde{x}}(\lambda)} \right) \Psi(y_1, \gamma) \Psi^+(\tilde{x}, \gamma) \Omega(\gamma). \quad (4.10)$$

**Лемма 4.4.** Вычеты полюсов из  $A_j^\pm$ ,  $j = 1, \dots, d$  дают одинаковые вклады в интегралы дифференциала  $\Psi(y_1, \gamma)\Psi^+(\tilde{x}, \gamma)\Omega(\gamma)$  по  $C_{x, x_2, \tilde{x}}(\lambda)$  и по  $C_{x, x_1, \tilde{x}}(\lambda)$ . Другими словами, при вычислении их разности достаточно учитывать только полюса  $R_+$ ,  $R_-$ .

**Доказательство.** Рассмотрим подмножество  $J \subset \{1, \dots, d\}$  индексов, таких что  $n_j(y_1) \neq n_j(\tilde{x})$ , то есть набор индексов тех точек  $A_j^\pm$ , в которых дифференциал  $\Psi(y_1, \gamma)\Psi^+(\tilde{x}, \gamma)\Omega(\gamma)$  имеет полюс. Несложно убедиться, что по построению  $J$  удовлетворяет условиям леммы 4.2 по отношению к контурам  $C_{x, x_2, \tilde{x}}(\lambda)$  и по  $C_{x, x_1, \tilde{x}}(\lambda)$ , поскольку они построены на вершинах из соседних граней. Отсюда вытекает гомологичность на  $\Gamma \subset \{A_j^\pm : j \in J\}$  и утверждение леммы.

■

Осталось учесть вычеты в  $R_+$ ,  $R_-$ . Заметим, что для любого  $y_1 \sim x$  вычеты дифференциала  $\Psi(y_1, \gamma)\Psi^+(\tilde{x}, \gamma)\Omega(\gamma)$  в  $R_+$ ,  $R_-$  равны  $\frac{1}{2}$ . Поскольку каждый из контуров  $C_{p_1, p_4, \tilde{x}}(\lambda)$  входит в сумму (4.10) дважды с разными знаками, то соответствующие слагаемые взаимно уничтожатся.

Таким образом,  $LH \equiv 0$  и теорема 4.2 доказана.

**Теорема 4.3** (Формула для функции Грина с асимптотикой волновой функции). Пусть  $\Gamma$  является  $M$ -кривой, выделенные точки  $A_j^\pm$ ,  $j = 1, \dots, d$ , попадают на овал  $s$ , на остальные овалы попадает по одной точке  $\gamma$ -дивизора:  $\gamma_l \in a_l$ ,  $l = 1, \dots, g$ . Тогда почти при любых  $\lambda \in \Gamma$  и для тех  $\tilde{x} \in V(\mathcal{G})$ , для которых сумма  $\sum_{\tilde{x}_1 \sim \tilde{x}} \nu(\tilde{x}, \tilde{x}_1)$  не обращается в нуль, определяется Функция Грина оператора  $L$  на графе  $\mathcal{G}$

$$G(x, \tilde{x}, \lambda) = \frac{1}{k(\tilde{x})} \oint_{C_{\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(\tilde{x})}(\lambda)} \Psi(x, \gamma)\Psi^+(\tilde{x}, \gamma)\Omega(\gamma), \quad x \neq \tilde{x}, \quad (4.11)$$

$$G(\tilde{x}, \tilde{x}, \lambda) = 1,$$

где

$$k(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{x}_1 \sim \tilde{x}} \nu(\tilde{x}, \tilde{x}_1),$$

и имеет асимптотику

$$|G(x, \tilde{x}, \lambda)| \leq R_1(\lambda, \tilde{x}) e^{\langle \mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(\tilde{x}), \text{Im } \mathbf{p}(\lambda) \rangle}.$$

**Замечание 4.4.** Требование про необращение в нуль суммы  $k(x) = \sum_{\tilde{x}_1 \sim \tilde{x}} \nu(\tilde{x}, \tilde{x}_1)$  является существенным. Оно выполняется для всех вершин графа при дополнительном требовании о положительной согласованности разметки и ориентации ребер по теореме 3.1. Как обстоят дела при более общих предположениях — открытый вопрос.

**Доказательство.** Из предыдущей теоремы следует, что  $LG(x, \tilde{x}, \lambda) = 0$ , если  $x \neq \tilde{x}$ . Из нее же

$$\begin{aligned} (LG)(\tilde{x}, \tilde{x}, \lambda) &= \frac{1}{k(\tilde{x})} \sum_{\tilde{x}_1 \sim \tilde{x}} \nu(\tilde{x}, \tilde{x}_1) (G(\tilde{x}_1, \tilde{x}, \lambda) - G(\tilde{x}, \tilde{x}, \lambda)) = \\ &= -\frac{G(\tilde{x}, \tilde{x}, \lambda)}{k(\tilde{x})} \sum_{\tilde{x}_1 \sim \tilde{x}} \nu(\tilde{x}, \tilde{x}_1) = 1. \end{aligned}$$

Проверим теперь, что построенная  $G$  имеет нужную асимптотику, то есть удовлетворяет условиям роста (4.1). Значение  $G$  не изменится, если из контура интегрирования мы выкинем все неподвижные точки инволюции  $\tau$  (множество меры нуль). Обозначим этот контур через  $D(x, \tilde{x}, \lambda)$ . Оценим интеграл стандартным образом

$$|G(x, \tilde{x}, \lambda)| \leq \frac{1}{k(\tilde{x})} \sup_{\gamma \in D(x, \tilde{x}, \lambda)} |\Psi(x, \gamma) \Psi^+(\tilde{x}, \gamma)| \oint_{D(x, \tilde{x}, \lambda)} |\Omega(\gamma)|$$

Условия теоремы 4.1 выполнены, поэтому для всех точек  $\gamma \in D(x, \tilde{x}, \lambda)$  выполняются неравенства (4.6), (4.7). По определению контура  $C_{\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(\tilde{x})}(\lambda)$ , в этих неравенствах можно заменить  $\gamma$  на  $\lambda$ .

Далее, функция

$$R_{\Omega}(\lambda) = \sup_{x, \tilde{x}} \oint_{D(x, \tilde{x}, \lambda)} |\Omega(\gamma)|$$

принимает конечные значения. Действительно, все контуры интегрирования параметризуются вектором  $\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(\tilde{x})$  с точностью до ненулевого множителя, а потому лежат в некотором компакте в  $\mathbb{R}P^d$ . В любой точке этого компакта значение интеграла конечно, тогда и  $\sup$  по нему конечен.

Следовательно, справедливо неравенство

$$|G(x, \tilde{x}, \lambda)| \leq R_1(\lambda, \tilde{x}) e^{\langle \mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(\tilde{x}), \text{Im } p_{\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}(\tilde{x})}(\gamma) \rangle},$$

где

$$R_1(\lambda, \tilde{x}) = \frac{1}{k(\tilde{x})} R_{\Omega}(\lambda) \sup_{\gamma \in D(x, \tilde{x}, \lambda)} (R(\gamma)R(\sigma\gamma))$$

$R_1(\cdot, \tilde{x})$  — гладкая функция  $\Gamma \setminus \{a_1, \dots, a_g, c\} \rightarrow \mathbb{R}$ , что и требовалось. ■

## 5 Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию в области конечнозонных решений дискретных интегрируемых систем.

В диссертации получены следующие основные результаты.

Найдено явное представление функции Грина конечнозонной эллиптической дискретизации двумерного оператора Шредингера на квадратной решетке. Предложено определение несингулярности дискретного оператора Лапласа на квад-графе. Построен конечнозонный при одной энергии дискретный оператор Лапласа на квад-графе ( $\Delta$ ). Получено достаточное условие несингулярности  $\Delta$ . Получена асимптотика роста волновой функции  $\Delta$ . Найдено явное представление функции Грина  $\Delta$ .

## Список литературы

- [1] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Method for solving the Korteweg-de Vries equation* // Phys.Rev.Lett., 19, 1095–1097 (1967).
- [2] P. D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves* // Comm. Pure Appl. Math, 21, 467–490 (1968).
- [3] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат *Тонкая теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах* // ЖЭТФ, 61 (1), 118–134 (1971) .
- [4] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur *Method for solving the sine-Gordon equation* // Phys. Rev. Lett., 30, 1262—1264 (1973).
- [5] С. П. Новиков *Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза I* Функц. анализ и его прил., том 8, выпуск 3, 54–66 (1974)
- [6] Б. А. Дубровин *Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов* // Функц. анализ и его прил., том 9, выпуск 1, 65–66 (1975).
- [7] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев *Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза* // ТМФ, том 23, номер 1, 51–68 (1975).
- [8] P. Lax *Periodic solutions of the KdV equation* // Lecture in Appl. Math., 15, 85–96 (1974).
- [9] Н. Р. McKean, P. van Moerbeke *The spectrum of Hill's equation* // Invent. Math., 30, 217–274 (1975).

- [10] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков. *Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия* // УМН, том 31, выпуск 1(187), 55–136 (1976).
- [11] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат *Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I* // Функциональный анализ и его прил., 8, 3, 43–53 (1974). *Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II* // Функциональный анализ и его прил., 13, 3, 13–22 (1979).
- [12] В. С. Дрюма *Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега де Фриза методом обратной задачи теории рассеяния* // Письма в ЖЭТФ, 19, 12, 753–755 (1974).
- [13] И. М. Кричевер *Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова–Шабата и их периодических решений* // Докл. Акад. наук СССР, 227 (2), 291–294 (1976).
- [14] С. В. Манаков, *Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения* // УМН, 31 вып.5 (1976), 245–246.
- [15] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков *Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности* // Доклад АН СССР, 229(1976), 15–18.
- [16] А. П. Веселов, С. П. Новиков *Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Явные формулы и эволюционные уравнения* // Доклад АН СССР, 279:1(1984), 20–24. *Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Потенциальные операторы* // Доклад АН СССР, 279:4(1984), 784–788.

- [17] С. М. Натанзон. *Примитивы вещественных кривых и их приложения к эффективизации операторов Шредингера* // Функциональный анализ и его прил., 23, 1, 41–55 (1989).
- [18] С. М. Натанзон. *Дифференциальные уравнения на тета-функции Прима. Критерий вещественности двумерных конечнозонных потенциальных операторов Шредингера* // Функциональный анализ и его прил., 26, 1, 17–26 (1992).
- [19] S. M. Natanzon. *Real nonsingular finite-zone solutions of soliton equations* // Amer. Math. Soc. Transl., 170, 2, 153–183 (1995).
- [20] С. М. Натанзон *Модули римановых поверхностей, вещественных алгебраических кривых и их супераналоги* // М.: МЦНМО (2003), 176 с.
- [21] П. Г. Гриневич, Р. Г. Новиков *Аналоги многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шредингера и нелокальная задача Римана* // Доклад АН СССР, 286 (1), 19–22 (1986).
- [22] П. Г. Гриневич, С. В. Манаков *Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шредингера,  $\bar{\partial}$  метод и нелинейные уравнения* // Функциональный анализ и его прил., 20:2 (1986), 14–24.
- [23] И. М. Кричевер *Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения* // М., Успехи Математических Наук, 44:2(266) (1989), 121–184.
- [24] И. А. Тайманов *Представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей в  $\mathbb{R}^3$*  // Функци. анализ и его прил., 32, 4, 49–62 (1998).
- [25] И. А. Тайманов *Двумерный оператор Дирака и теория поверхностей* // УМН, 61, 1(367), 85–164 (2006).

- [26] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков *Двумерная «обратная задача рассеяния» для отрицательных энергий и обобщенно-аналитические функции. 1. Энергии ниже основного состояния* // Функциональный анализ и его прил., 22, 1, 23–33 (1988).
- [27] L. Lusternik *Über einige Anwendungen der direkten Methoden in Variationsrechnung* // Матем. сб., 33:2, 173–202 (1926)
- [28] E. Fermi, J. R. Pasta, S. M. Ulam *Studies of Nonlinear Problems* // Los Alamos Sc. Lab. Rep. LA-1940 (1955).
- [29] S. V. Manakov, *Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems* // Zh. Exp. Teor. Fiz. 67, 543–555 (1974).
- [30] H. Flaschka, *The Toda lattice I. Existence of integrals* // Phys. Rev. B 9, 1924–1925 (1974).
- [31] M. Henon *Integrals of the Toda lattice* // Phys. Rev. B 9, 1921–1923 (1974).
- [32] J. Ferrand. *Fonctions preharmoniques et fonctions preholomorphes* // Bull. Sci. Math., 2nd ser., 1944, 68, 152–180.
- [33] R. J. Duffin. *Basic properties of discrete analytic functions* // Duke Math. J., 1956, 23, 335–363.
- [34] R. J. Duffin. *Potential theory on a rhombic lattice* // J. Combinatorial Theory, 1968, 5, 258–272.
- [35] Ch. Mercat. *Discrete Riemann surfaces and the Ising model* // Commun. Math. Phys., 2001, 218, 177–216.
- [36] R. Kenyon. *The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs* // Invent. Math., 2002, 150, 409–439.



- [37] A. Bobenko, C. Mercat, Y. Suris *Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green's function* // J. Reine Angew. Math., 583 (2005), 117–161
- [38] I. A. Dynnikov, S. P. Novikov. *Geometry of the triangle equation on two-manifolds* // Moscow Math. J., 2003, 3.
- [39] И. М. Кричевер *Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия* // ДАН СССР, 285:1 (1985), 31–36.
- [40] A. A. Oblomkov, A. V. Penskoï *Laplace transformations and spectral theory of two-dimensional semi-discrete and discrete hyperbolic Schrödinger operators* // IMRN, 18, 1089–1126 (2005).
- [41] A. Doliwa, P. Grinevich, M. Nieszporski, P. M. Santini *Integrable lattices and their sub-lattices: from the discrete Moutard (discrete Cauchy-Riemann) 4-point equation to the self-adjoint 5-point scheme* // Journal of Mathematical Physics, 48:1 (2007), 013513
- [42] S. Grushevsky, I. Krichever *Integrable discrete Schrödinger equations and a characterization of Prym varieties by a pair of quadrisecants* // Duke Math. J. Volume 152, Number 2, 317–371 (2010).
- [43] J. Fay *Theta Functions on Riemann Surfaces* // Lecture Notes in Mathematics, V. 352, Springer–Verlag (1973).
- [44] А. А. Ахметшин, Ю. С. Вольвовский, И. М. Кричевер. *Дискретные аналоги метрик Дарбу–Егорова* // Труды МИАН им. Стеклова, т. 225, 21–45 (1999).
- [45] И. М. Кричевер, С. П. Новиков *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов* // Функциональный анализ и его приложения, 21:2 (1987), 46–63.

- [46] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков *Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия* // М., Успехи Математических Наук, 31:1(187) (1976), 55–136.
- [47] П. Г. Гриневич *Быстроубывающие потенциалы на фоне конечнозонных и  $\bar{\partial}$ -проблема на римановых поверхностях* // Функц. анализ и его прил., 23:4 (1989), 79–80.

### Публикации автора по теме диссертации

- [48] Б. О. Василевский, «Функция Грина пятиточечной дискретизации двумерного конечнозонного оператора Шрёдингера: случай четырех особых точек на спектральной кривой» // *Сибирский математический журнал.*, **54:6** (2013), с. 1250–1262.
- [49] Б. О. Василевский, «Функция Грина дискретного конечнозонного при одной энергии двумерного оператора Шрёдингера на квад-графе» // *Математические заметки*, **98:1** (2015), с. 27–43.
- [50] Б. О. Василевский, «Достаточное условие несингулярности дискретного конечнозонного при одной энергии двумерного оператора Шрёдингера на квад-графе» // *Функц. анализ и его прил.*, **49:3** (2015), с. 65–70.