

«УТВЕРЖДАЮ»

И.о. Директора Института математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, чл.-корр. РАН

В.В. Напалков



«28» октября 2015 г.

ведущей организации на диссертацию Бориса Олеговича Василевского «Функция Грина конечнозонного при одной энергии оператора Шредингера на квад-графах», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация посвящена разработке ряда актуальных аспектов метода конечнозонного интегрирования. Основным объектом в ней служит дискретный линейный оператор Шредингера, заданный на вершинах «квад-графа» (quad-graph), то есть такой двумерной решетки, у которой каждая грань представляет собой четырехугольник. Данная тематика восходит к середине 1980-х годов, когда в пионерских работах И.М.Кричевера, А.И.Бобенко и других был предложен подход к построению n -периодических решений нелинейных дискретных уравнений в терминах тэта функций. Основная идея метода была переформулирована из спектральной теории оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом. Последний естественно возникает в теории n -периодических решений уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ, одномерный по пространственной переменной случай) и Кадомцева-Петвиашвили (КП, двумерный случай) как один из операторов пары Лакса. Оказалось, что спектральный параметр и собственные функции «живут» на римановой поверхности рода n , построенной над запрещенными зонами спектра. При этом собственные функции и решение уравнения КдФ и КП строятся явно с помощью тэта функций, определенных на этой римановой поверхности.

Позднее метод конечнозонного интегрирования был перенесен на дискретные по пространственной переменной нелинейные уравнения (цепочка Тоды, дискретное уравнение КдФ (цепочка Вольтерра) и т.д.), а также на чисто дискретные интегрируемые системы на решетках. В последнем случае в работах А.И.Бобенко и Ю.Б.Суриса удалось построить дискретные обобщения минимальных поверхностей, а также корректно определить понятие гауссовской и средней кривизны для кусочно-линейных поверхностей. На этом пути естественно возникает идея переноса структур комплексного анализа на функции, определенные на решетках. Первоначально в середине прошлого века Дж.Ферран и Р.Даффин перенесли определение аналитичности на квадратные решетки. Позднее У.Тёрстен в известной работе 1985 года предложил определить дискретные аналитические функции как римановы отображения, отвечающие плотным

упаковкам кругов. При этом уравнения Коши-Римана превращаются в двойное отношение значений функции в вершинах грани, которое должно оставаться постоянным на всех гранях. В последующих работах эти идеи обобщались на треугольные решетки (И.А.Дынников и С.П.Новиков), а также на ромбические решетки. Результаты Р.Даффина использовались и обобщались в работах Ч.Мерката, Р.Кейона, Ю.Б.Суриса, А.И.Бобенко и ряда других авторов. При этом оказалось, что условие аналитичности фактически совпадает с условием интегрируемости соответствующего дискретного нелинейного уравнения, играющего роль уравнения Коши-Римана.

Другим интересным приложением гармонических функций на ромбических решетках служат квазипериодические покрытия плоскости типа паркета Пенроуза. Здесь покрытие осуществляется бесконечным числом ромбов, взятых из конечного набора конфигураций (углов при вершине). Паркет Пенроуза отвечает углу $2\pi/5$, так что в вершине сходится пять ромбов. Из кристаллографии известно, что не существует периодического покрытия плоскости с группой точечных симметрий пятого порядка. Однако покрытие Пенроуза демонстрирует «дальний порядок», характерный для кристаллических решеток. В частности, двумерное преобразование Фурье по координатам вершин имеет компактный носитель и симметрии, кратные пяти. В последние годы подобные квазикристаллические структуры в \mathbb{R}^3 были обнаружены в природе как расположение атомов в некоторых аморфных материалах. Безусловный физический интерес представляет квантовое описание таких атомных решеток. В пионерской работе П.А.Калугина, А.Ю.Китаева и Л.С.Левитова (1986) было дано геометрическое описание квазикристаллов как проекций кубической решетки в шестимерном пространстве на трехмерную гиперплоскость с иррациональными координатами направляющих косинусов. Однако такая геометрическая структура должна быть дополнена вычислением волновых функций уравнения Шредингера, откуда можно вывести спектральные свойства квазикристаллов, такие как электронный спектр, намагниченность, теплопроводность и т.п.

Сказанное выше подтверждает, что тема диссертации актуальна и лежит на стыке научных направлений, развиваемых ныне в современной математике и физике.

В диссертации Б. О. Василевского с помощью конечнозонного метода построена дискретизация двумерного оператора Шредингера на квад-графе, получено достаточное условие положительности его коэффициентов (что предложено как определение несингулярности данного оператора), дана явная формула для функции Грина и для нее указана асимптотика. Также найдена явная формула с асимптотикой для функции Грина оператора на квадратной решетке, построенного в работе А.Доливы, П.Г.Гриневича, М.Нишпровски и П.Сантини.

Работа состоит из введения, трех глав и списка цитированной литературы, включающего 50 наименований. Общий ее объем составляет 74 страницы.

Во введении изложена краткая история вопроса, показана актуальность рассматриваемых задач, обозначены цели работы и ее результаты.

В первой главе диссертации ставятся задачи для двумерного пятиточечного дискретного оператора Шредингера на квадратной решетке. Рассматривается его

редукция к четырехточечному уравнению Коши-Римана, когда решение имеет ровно 4 особые точки, связанные голоморфной инволюцией. Основным результатом — представление функции Грина для описанного оператора Шредингера в виде интеграла по специальному контуру от дифференциала, построенного по спектральным данным.

Во второй главе диссертации конечнозонный подход применяется для построения дискретизации оператора Шредингера на квад-графе. Обсуждается идея о том, что правильным определением несингулярности является его эллиптичность. Для рассматриваемых дискретных операторов Лапласа эллиптичность означает постоянный знак у его коэффициентов. Во второй части приводятся условия на обобщенные спектральные данные и квад-граф, достаточные для положительности коэффициентов построенных операторов. Примечательно, что для спектральных данных работают условия, абсолютно аналогичные условиям для выделения несингулярных и строго положительных потенциалов двумерного оператора Шредингера в непрерывном случае.

В третьей главе диссертации обобщается результат первой главы на случай квазикристаллической ромбической решетки. Автор применяет дискретизацию оператора Шредингера на квад-графе, построенную во второй главе. Для функции Грина этого дискретного оператора найдено представление в виде интеграла по специальному семейству контуров от дифференциала, построенного по спектральным данным. Структура этого дифференциала аналогична построениям из первой главы, что позволяет разложить соответствующий интегральный оператор в сумму вычетов.

Принципиальных возражений по содержанию и изложению нет. Заметим, что основные результаты имеют место в предположениях, накладывающих существенные ограничения на первоначальный набор спектральных данных. Тем не менее, при упомянутых предположениях результаты являются достаточно общими и представляют самостоятельный интерес.

Отметим также недостатки работы, не носящие принципиального характера. Буква L используется для обозначения как оператора на квадратной решетке (стр. 5 автореферата), так и для оператора на квад-графе (стр. 12 автореферата). Зачастую автор ссылается на последующие формулы, иногда далеко впереди по тексту, что затрудняет чтение.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация Бориса Олеговича Василевского является полноценным научным исследованием; в ней получены важные результаты в теории конечнозонных интегрируемых систем и дискретных интегрируемых систем. Работа имеет теоретический характер. Все результаты диссертации являются новыми, снабжены строгими математическими доказательствами. Основное содержание диссертации опубликовано в 3 работах автора в журналах, входящих в перечень ВАК. Результаты диссертации докладывались на различных научных конференциях и семинарах. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа Бориса Олеговича Василевского «Функция Грина конечнозонного при одной энергии оператора Шредингера на квад-графах», пред-

ставленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 (геометрия и топология), соответствует требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степени» ВАК РФ к кандидатским диссертациям, а автор диссертации заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доктор физ.-мат. наук,
главный научный сотрудник
Института математики с ВЦ УНЦ РАН




В.Ю.Новокшенов

Подпись В.Ю.Новокшенова заверяю
Инспектор Отдела кадров

Л.Ф.Сабирова

Контактная информация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение «Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН»

Адрес: 450008, Россия, г.Уфа, ул.Чернышевского, 112.

Тел.: (347) 272-59-36; 273-33-42;

Факс: (347) 272-59-36

e-mail: shaig@anrb.ru