

ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ
на кандидатскую диссертацию Зеленовой Марии
Евгеньевны “Решение систем уравнений в полях
алгебраических чисел” на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук по специальности
01.01.06 (математическая логика, алгебра и теория чисел)

Диссертация объёмом в 90 страниц состоит из двух глав и введения. Во введении изложена краткая история исследуемого вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты диссертации.

Диссертация посвящена построению алгоритмов решения полиномиальных уравнений и систем таких уравнений в полях алгебраических чисел. Решения разыскиваются в заданных порядках таких полей в точном виде. Основная идея состоит в том, что достаточно хорошее в p -адической метрике приближение целого алгебраического числа некоторого порядка числами из того же порядка, одновременно не очень сильно отличающееся от приближаемого числа в обычной метрике, должно совпадать с ним. Технически удобнее работать с целыми рациональными коэффициентами представления чисел порядка через его базис и p -адической метрикой в поле рациональных чисел.

Приближение искомого корня в p -адической метрике может быть построено с помощью метода подъёма решений алгебраических уравнений, предложенного еще Гензелем. В диссертации используется метод касательных Ньютона, реализованный в поле p -адических чисел. Этот метод имеет квадратичную сходимость, т.е. фактически удваивает на каждом шаге количество верных цифр в p -адическом разложении. Он работает существенно быстрее и приводит к полиномиальному в зависимости от длины записи многочлена алгоритму.

Впервые описанный подход нахождения корней был реализован в 1993 г. Д. Бюлером, Х.В. Ленстрой и К. Померансом в связи с реализацией так называемого “общего алгоритма решета в числовых полях”. В их работе рассматривалась простейшая ситуация, где требовалось извлечь квадратный корень из целого числа в некотором конечном расширении поля \mathbb{Q} , лежащий в том же поле, что равносильно решению уравнения $x^2 - \alpha = 0$ в поле $\mathbb{Q}(\alpha)$. Подчеркнём, что здесь, как и во всех результатах диссертации речь идет не о приближённом, а о точном решении. Простейший пример дает формула $\sqrt{179 - 126\sqrt{2}} = 7\sqrt{2} - 9$. В первой главе рассматриваемой диссертации речь идёт не о поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, а о произвольном фиксированном поле алгебраических чисел конечной степени. Здесь описывается алгоритм, позволяющий находить корни произвольного фиксированного уравнения, лежащие в конечном расширении поля рациональных чисел,

над которым это уравнение определено, доказываемая корректность алгоритма и полиномиальность в зависимости от величины коэффициентов.

Ещё одна реализация указанного подхода была предложена в 1982г. в работе Ж. Д. Диксона. Речь в его работе шла о точном нахождении решений в рациональных числах систем линейных уравнений над полем рациональных чисел. Во второй главе диссертации рассматриваются произвольные системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, имеющие нулевую размерность. Здесь ставится и решается задача поиска решений таких систем в целых числах. Среди технических результатов, доказанных в этой связи, отметим эффективную оценку величины решений системы в зависимости от величины коэффициентов входящих в неё уравнений. Здесь к исследованию привлекаются методы коммутативной алгебры. Такая оценка нужна для эффективной оценки сложности алгоритма. Приближения в p -адической метрике к решениям также строятся с помощью метода Ньютона, удваивающего количество верных цифр в p -адическом представлении приближений. Отметим ещё одну техническую трудность, преодолённую М.Е. Зеленовой при выполнении диссертационной работы. В классическом виде формулы Ньютона имеют в знаменателе значение якобиана в точке, равной предыдущему приближению и, значит, меняющиеся с каждой итерацией. Автор диссертации получила формулы с фиксированными знаменателями, что существенно упрощает вычисления. Эти формулы, естественно, используются как в первой, так и во второй главе диссертации.

В заключение отметим, что диссертация выполнена автором самостоятельно. Она потребовала большой изобретательности и достаточно сложной технической работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на семинарах кафедры теории чисел механико-математического факультета МГУ и на международной научной конференции в г. Москве.

Диссертация содержит новые глубокие результаты, имеющие практическое применение. Она удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям. Я полагаю, автор диссертации Зеленова М.Е. заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель:

чл.-корр. РАН, профессор Ю.В. Нестеренко

Ю.В. Нестеренко

Подпись чл.-корр. РАН, профессора Ю.В. Нестеренко удостоверяю

И.О. декана механико-математического ф-та МГУ

профессор В.Н. Чубариков

