Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Иванов Михаил Юрьевич

МАКСИМИЗАЦИЯ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЛЕВИ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва–2015

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Гущин Александр Александрович.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
доцент Рохлин Дмитрий Борисович,
Южный федеральный университет,
профессор кафедры высшей математики и исследования операций;

кандидат физико-математических наук,
Иванов Роман Валерьевич,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Лаборатория № 38,
старший научный сотрудник.

Ведущая организация:

Центральный экономико-математический институт РАН (ЦЭМИ РАН)

Защита диссертации состоится 11 декабря 2015 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке МГУ имени М. В. Ломоносова по адресу: г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета `http://mech.math.msu.su`.

Автореферат разослан   2015 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 на базе МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор   В. В. Власов

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В современной стохастической финансовой математике одна из наиболее распространенных задач связана с максимизацией полезности терминального значения капитала портфеля. Понятие полезности впервые возникло в исследованиях по теории игр и характеризовалось как выгода, которую игрок может получить при определенном исходе (см., к примеру, [1]).

Вскоре понятие полезности получило распространение в теории вероятностей и математической статистике, и в монографии [2] описывается важное для финансовой математики понятие — математическое ожидание полезности $E_P U(\xi)$, где U есть сама функция полезности, случайная величина ξ принимает значение в зависимости от исхода события, а P — вероятностная мера.

В современные дни экономическая интерпретация нашей модели предполагается следующей. Имеется финансовый рынок и инвестор, владеющий портфелем из определенного количества активов. Свою задачу он видит в том, чтобы разработать такую стратегию покупки и продажи активов, которая принесла бы ему максимальную прибыль.

Как правило, считается, что инвестору свойственно желание избегать риска. Это находит свое отражение в том, что функция полезности является вогнутой. Помимо этого, чем больше он заработает на операциях, тем для него лучше. Это отвечает свойству возрастания. Пусть вогнутая неубывающая функция $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ описывает предпочтения инвестора, а случайность на рынке реализована с помощью вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда можно записать стандартную задачу максимизации ожидаемой полезности благосостояния в конечный момент времени как

$$\sup_{\xi \in A(x)} E_P U(\xi),$$

где множество $A(x)$ имеет вид $A(x) = \{X_T : X \in \mathcal{X}(x)\}$, $\mathcal{X}(x)$ состоит из всех возможных процессов капиталов инвестора, отвечающих допустимым стратегиям с начальным капиталом x, T есть заключительный момент времени.

Как принято считать, зарождение теории о максимизации терминальной полезности портфеля началось в 1950-е годы, когда появились работы Г.

---

[1] *Von Neumann J., Morgenstern O.* Theory of games and economic behavior. Princeton: Princeton University Press, 1944.

[2] *Savage L.* The foundations of statistics. New York: Wiley, 1954.

Марковица по оптимизации портфелей. В статье [3] и последующих работах он сформулировал основные принципы своей теории, основанной на анализе средних значений и дисперсий случайных величин. В значительной степени при решении рассматриваемых задач Марковиц пользовался методами линейного и нелинейного программирования. Из работ других авторов по этой же теме отметим работу [4].

В работе Р. Мертона 1969 года [5] задача оптимизации портфеля была рассмотрена для непрерывного времени, основная проблема сводилась к решению стохастического дифференциального уравнения, решения были найдены в некоторых частных случаях.

Впервые в достаточной степени методы стохастического исчисления для решения проблем финансовой математики были применены в работах [6,7]. В них особое внимание уделяется введению вероятностного пространства с фильтрацией, построению эквивалентной мартингальной меры, рассматривается как дискретный случай, так и непрерывный. Затем подобный метод был применен в [8,9] для решения задачи оптимизации портфеля в модели полных рынков, когда любое платежное поручение достижимо для некоторой стратегии. Оптимизация портфеля подразделялась на три типа: максимизация полезности от потребления, максимизация полезности от терминального значения капитала и максимизация полезности от потребления и терминального значения капитала.

Вскоре задача оптимизации портфеля с помощью мартингального подхода была рассмотрена и в случае неполных рынков, в [10,11] и других работах. В них особое внимание уделяется двойственной задаче. При ее решении важную роль играют методы выпуклого анализа, которые для решения задач стохастического управления впервые применил Ж.-М. Бисмут в своей ра-

---

[3] *Markowitz H.* Portfolio Selection // Journal of Finance, 1952, Vol. 7, № 1, p. 71–91.

[4] *Tobin J.* Liquidity preference as behavior towards risk // The review of economic studies, 1958, Vol. 25, № 2, p. 68–85.

[5] *Merton R. C.* Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case // The Review of Economics and Statistics, 1969, Vol. 51, № 3, p. 247–257.

[6] *Harrison J.M., Kreps D.M.* Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // Journal of Economic Theory, 1979, Vol. 20, № 3, p. 381–408.

[7] *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales and Stochastic integrals in the theory of continuous trading // Stochastic Processes and their Applications, 1981, Vol. 11, № 3, p. 215-–260.

[8] *Cox J., Huang C.-F.* Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process // Journal of Economic Theory, 1989, Vol. 49, № 1, p. 33–83.

[9] *Karatzas I., Lehoczky J. P., Shreve S. E.* Optimal portfolio and consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon // SIAM journal on control and optimization, 1987, Vol. 25, № 6, p. 1557–1586.

[10] *Karatzas I., Lehoczky J.P., Shreve S.E., Xu G.L.* Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market // SIAM Journal on Control and Optimization, 1991, Vol. 29, № 3, p. 702–730.

[11] *Cvitanic J., Karatzas I.* Convex duality in constrained portfolio optimization // Annals of Applied Probability, 1992, Vol. 2, № 4, p. 767–818.

боте[12]. В классической работе Д. Крамкова и В. Шахермайера[13] было проведено создание исчерпывающей теории на основе существующих результатов для функций полезности, удовлетворяющих стандартным условиям и определенных на $\mathbb{R}_+$. В достаточно простой форме для полных и неполных рынков представлены условия существования решения как основной задачи максимизации полезности, так и двойственной. Помимо этого, приводятся уравнения, связывающие решения этих двух задач. Из более поздних работ отметим статьи[14,15,16,17,18]. В статье[17] был рассмотрен случай, когда функция полезности определена на $\mathbb{R}$, а не только на $\mathbb{R}_+$. С задачей поиска портфеля, максимизирующего ожидаемую полезность, тесно связана задача нахождения эталонного портфеля $X^* \geq 0, X^* \in \mathcal{X}(1)$, для которого отношение X/X^* есть супермартингал при любом $X \in \mathcal{X}(1)$. Данный вопрос исследовался в[19,20] и других работах.

Одним из наиболее важных понятий, характеризующих финансовый рынок, является понятие арбитража. Под арбитражем, как правило, понимают такую безрисковую стратегию, которая может позволить инвестору с положительной вероятностью получить прибыль в результате торговли на рынке. Нетрудно понять, что при возникновении подобной возможности на реальном рынке инвесторы тут же попытаются ею воспользоваться, что неизбежно повлияет на цены финансовых инструментов и приведет к исчезновению подобных стратегий. Поэтому в литературе по финансовой математике, как правило, рассматриваются именно рынки, предполагающие отсутствие арбитража. Следующее важное предположение связано с риск-нейтральным подходом. Оно состоит в том, что стоимость финансовых инструментов рассчитывается как математическое ожидание возможных выплат в будущем, и здесь отсутствует зависимость от рисковых предпочтений инвестора. Для

---

[12] *Bismut J. M.* Conjugate convex functions in optimal stochastic control // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1973, Vol. 44, № 2, p. 384–404.

[13] *Kramkov D., Schachermayer W.* The condition on the asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets // Annals of Applied Probability, 1999, Vol. 9, № 3, p. 904–950.

[14] *Гущин А. А.* Двойственная характеризация цены в задаче максимизации робастной полезности // Теория вероятностей и ее применения, 2010, т. 55, № 4, с. 680–704.

[15] *Frittelli M.* The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets // Mathematical Finance, 2000, Vol. 10, № 1, p. 39–52.

[16] *Biagini S., Frittelli M.* Utility maximization in incomplete markets for unbounded processes // Finance and Stochastics, 2005, Vol. 9, № 4, p. 493–517.

[17] *Schachermayer W.* Optimal Investment in Incomplete Markets when Wealth may Become Negative // Annals of Applied Probability, 2001, Vol. 11, № 3, p. 694–734.

[18] *Kramkov D., Schachermayer W.* Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets // Annals of Applied Probability, 2003, Vol. 13, № 4, p. 1504–1516.

[19] *Becherer D.* The Numéraire Portfolio for Unbounded Semimartingales // Finance and Stochastics, 2001, Vol. 5, № 3, p. 327–341.

[20] *Karatzas I., Kardaras C.* The Numéraire Portfolio in Semimartingale Financial Models // Finance and Stochastics, 2007, Vol. 11, № 4, p. 447–493.

семимартингальной модели рынка с конечным числом активов, цены которых задаются процессом S, это означает, что математическое ожидание необходимо брать по такой мере Q, относительно которой S является мартингалом. В дискретной модели наличие хотя бы одной эквивалентной мартингальной меры равносильно отсутствию арбитража (см. [21]), в непрерывном же случае все несколько сложнее. Определить отсутствие арбитража можно разными способами, в одних моделях накладываются более сильные условия, в других — более слабые. Детальное изучение данного вопроса проводилось многими авторами в [6,7,22] и других работах. Фундаментальный результат был получен в статье Ф. Делбаена и У. Шахермайера[23]. Авторы показали, что для процесса цены S, являющегося семимартингалом, условие отсутствия арбитража в смысле NFLVR (отсутствие бесплатного ленча с исчезающим риском) эквивалентно наличию σ-мартингальной меры для S. Помимо условия NFLVR отметим также условие NUPBR (отсутствие неограниченной прибыли с ограниченным риском, см. [20,24]) и NA (отсутствие арбитража, см. [23,22]). В литературе, как правило, соответствие различных условий отсутствия арбитража носит название первой фундаментальной теоремы теории арбитража (или теории расчета финансовых активов). Вторая же фундаментальная теорема описывает различные свойства, эквивалентные полноте рынка. Как правило, это равносильно тому, что либо множество мартингальных мер, либо множество σ-мартингальных мер состоит из одной единственной. Достаточно подробная классификация этих теорем для непрерывного случая была проведена в работе[25].

В конце 90-х годов и в начале 2000-х произошло резкое увеличение числа работ, посвященных экспоненциальным моделям Леви, когда процесс цены акции S есть стохастическая экспонента от процесса Леви L, $S = \mathcal{E}(L)$. Подобная востребованность связана с тем, что при помощи процессов Леви модель Блэка–Шоулса получает естественное обобщение, главным образом состоящее в том, что цены активов могут допускать скачки и не обязаны быть непрерывными. Как можно видеть из реальных данных с финансовых рынков, цены активов действительно совершают скачки. К примеру, когда компания полностью разоряется и цена ее акций становится равной нулю. Это полезно учитывать при оценке рисков, а модель Блэка–Шоулса

[21] *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС, 1998.

[22] *Delbaen F., Schachermayer W.* A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing // Mathematische Annalen, 1994, Vol. 300, № 1, p. 463–520.

[23] *Delbaen F., Schachermayer W.* The Fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes // Mathematische Annalen, 1998, Vol. 312, № 2, p. 215–250.

[24] *Takaoka K., Schweizer M.* A note on the condition of no unbounded profit with bounded risk // Finance and Stochastics, 2014, Vol. 18, № 2, 393–405.

[25] *Ширяев А. Н., Черный А. С.* Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража // Труды МИАН, 2002, т. 237, с. 12–56.

не позволяет это сделать, так как цена предполагается непрерывной. Помимо этого, процессы Леви сохраняют свойство независимости и стационарности приращений, а их свойства и некоторые характеристики можно записать с помощью формул, которыми удобно пользоваться при различных вычислениях. Все это применялось для оценки стоимости опционов, хеджирования платежных обязательств, анализа подразумеваемой волатильности. Достаточно подробный обзор результатов приводится в [26]. Отметим также работу К. Кардараса [27], где был произведен анализ различных свойств отсутствия арбитража для экспоненциальной модели Леви.

Помимо вышеперечисленных областей применения экспоненциальные модели Леви применялись и для определения оптимальной стратегии, которая максимизирует терминальную полезность. В работе [28] впервые была рассмотрена задача максимизации полезности в экспоненциальной модели Леви для трех типов функций — логарифмической, степенной и экспоненциальной. Также предполагалось наличие процесса потребления. Решения, выраженные при помощи триплетов процесса Леви, в достаточно явном виде были получены, но на сам процесс Леви и модель помимо безарбитражности были наложены дополнительные ограничения. В данной работе мы не предполагаем никаких ограничений для экспоненциальной модели Леви, кроме безарбитражности, и решаем задачу в общем случае.

Двойственная задача обычно заключается в минимизации определенного функционала на множестве мартингальных мер. Решение двойственной задачи позволяет найти функцию цены в основной задаче и охарактеризовать оптимальный портфель. Кроме того, двойственная задача имеет и самостоятельное значение, позволяющее сделать выбор риск-нейтральной меры. В работе [29] авторы исследовали задачу минимизации относительной энтропии по множеству локально эквивалентных мартингальных мер для процесса Леви L. Было доказано, что процесс L при определенных условиях остается процессом Леви по мере, на которой достигается минимум энтропии. Данную задачу можно рассматривать как двойственную к задаче максимизации экспоненциальной полезности. В случае же степенной функции аналогичный результат был получен в [30]. На процесс Леви в этих двух работах накла-

[26] *Tankov P.* Pricing and hedging in exponential Lévy models: review of recent results // Paris-Princeton Lecture Notes in Mathematical Finance, Springer, 2010, p. 319–359.

[27] *Kardaras C.* No-free-lunch equivalences for exponential Lévy models under convex constraints on investment // Mathematical Finance, 2009, Vol. 19, p. 161–187.

[28] *Kallsen J.* Optimal portfolios for exponential Lévy processes // Mathematical Methods of Operations Research, 2000, Vol. 51, № 3, p. 357–374.

[29] *Essche F., Schweizer M.* Minimal entropy preserves the Lévy property: how and why // Stochastic Processes and their Applications, 2005, Vol. 115, № 2, p. 299–327.

[30] *Jeanblanc M., Klöppel S., Miyahara Y.* Minimal f^q-martingale measures for exponential Lévy processes // Annals of Applied Probability, 2007, Vol. 17, № 5-6, p. 1615–1638.

дывались похожие ограничения. В данной работе мы решаем двойственную задачу для логарифмической и степенной полезности в общем случае, когда нет арбитража.

Цели исследования. Целями исследования являются:

1) Определение свойств решения двойственной задачи к задаче максимизации логарифмической полезности в экспоненциальной модели Леви.

2) Поиск эталонного портфеля в экспоненциальной модели Леви в общем случае.

3) Решение задачи максимизации полезности в экспоненциальной модели Леви в общем случае, когда полезность задается логарифмической, степенной и экспоненциальной функциями.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

1) В экспоненциальной модели Леви найден явный вид эталонного портфеля во всех случаях, когда он существует. Доказано, что процесс, обратный к капиталу эталонного портфеля, есть либо мартингал и процесс плотности эквивалентной мартингальной меры, либо мартингал, но не процесс плотности эквивалентной мартингальной меры, либо строгий супермартингал. Каждый из трех случаев охарактеризован в терминах триплета Леви–Хинчина. Полностью решена задача максимизации логарифмической полезности.

2) В экспоненциальной модели Леви полностью решена задача максимизации степенной полезности путем сведения ее к задаче нахождения эталонного портфеля по другой мере.

3) В задаче максимизации экспоненциальной полезности в экспоненциальной модели Леви предложен класс стратегий, в котором задача всегда имеет нетривиальное решение, и найдено это решение.

Все вышеупомянутые задачи решены для произвольной безарбитражной модели Леви.

Методы исследования. В работе применяются методы теории вероятностей и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны в теории вероятностей, математической статистике, функциональном анализе, теории случайных процессов и различных областях ее применения, в частности, в задачах финансовой математики.

Апробация работы. Результаты, относящиеся к диссертации, излагались на следующих семинарах:

1. Большой семинар кафедры теории вероятностей (МГУ,механико-математический факультет) под руководством действительного члена РАН профессора А. Н. Ширяева, Москва, 2014;

2. Семинар "Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании", проводимый в Центральном экономико-математическом институте под руководством кандидата физико-математических наук В. И. Аркина и доктора физико-математических наук Э. Л. Пресмана, Москва, 2014;

и конференциях:

3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", Москва, 2012;

4. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", Москва, 2013;

5. Международная конференция "Стохастическая оптимизация и оптимальная остановка", Москва, 2012;

6. Международная конференция "Углубленные финансы и стохастика", Москва, 2013.

Публикации. Результаты работы опубликованы в пяти работах [1–5] (полный список приведен в конце автореферата), из них две — в журналах, внесенных в список ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 98 страницах и состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 64 наименования.

Содержание работы

В главе 1 приводятся основные определения и вспомогательные утверждения, которые используются в остальных главах диссертации. Приведем наиболее важные из них, необходимые для дальнейшего понимания. Основная задача, которую мы решаем — это поиск оптимального процесса капитала X^*, который бы максимизировал ожидаемую полезность U инвестора:

$$u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} EU(X_T).$$

Здесь $\mathcal{X}(x)$ есть множество возможных процессов капитала для инвестора, которые в начальный момент принимают значение x. Для логарифмической и степенной функции мы считаем, что $\mathcal{X}$ содержит лишь неотрицательные процессы. Сам же процесс капитала задается по формуле

$$X_t = x + \int_0^t H_u dS_u, \ 0 \le t \le T,$$

где x есть начальный капитал, а S есть процесс цены некоторого финансового актива. В нашей одномерной модели мы полагаем, что S является стохастической экспонентой от процесса Леви L:

$$S = \mathcal{E}(L), \Delta L > -1.$$

Каждый процесс Леви однозначно определяется своим детерминированным триплетом (b, c, ν), где b и $c \ge 0$ — константы, а мера ν интегрирует $1 \wedge x^2$.

С поиском оптимального процесса капитала тесно связана так называемая двойственная задача

$$v(y) = \inf_{Y \in \mathcal{Y}(y)} E\,V(Y_T),$$

где функция $V = \sup\limits_{x>0}(U(x) - xy), y > 0$ есть преобразование Лежандра от функции U. Множество $\mathcal{Y}$ строится по множеству $\mathcal{X}$ как

$$\mathcal{Y} = \{Y > 0, Y_0 = y, (XY) \text{ есть супермартингал } \forall X \in \mathcal{X}.\}$$

Эквивалентная мартингальная мера (EMM) есть такая мера Q, эквивалентная исходной мере P, по которой процесс цены S является мартингалом, в этом случае ее процесс плотности будет лежать в $\mathcal{Y}$.

Модель рынка предполагается безарбитражной, что в случае модели Леви можно выразить сразу несколькими эквивалентными способами. Они приведены в предложении 1.7:

$$\begin{aligned}&NA \Leftrightarrow NFLVR \Leftrightarrow NUPBR \Leftrightarrow\\ &\exists\ \text{EMM, по которой } L \text{ — процесс Леви} \Leftrightarrow\\ &L \text{ не является монотонным.}\end{aligned}$$

В главе 2 решается задача максимизации полезности в логарифмическом случае и двойственная к ней. Мы начинаем свои рассуждения с поиска эталонного портфеля X^*, то есть такого, что X/X^* есть супермартингал $\forall X \in \mathcal{X}$. Для процесса $Y^* = 1/X^*$ возможны 3 ситуации:

1. Y^* есть супермартингал, но не мартингал.
2. Y^* есть мартингал, но не задает EMM.
3. Y^* задает EMM, по которой L есть процесс Леви.

Точная характеризация всех этих ситуаций в терминах триплета процесса Леви L приводится в теореме 2.1, доказательство которой занимает большую часть главы. Ситуация, когда у нас присутствует арбитраж и подобная классификация невозможна, отвечает монотонным процессам Леви L, что также может быть охарактеризовано при помощи триплета L. Важную роль для классификации имеет функция F, которая задается в терминах триплета процесса Леви:

$$F(y) = cy - b + \int_{|x|\le 1} \frac{yx^2}{1+yx}\nu(dx) - \int_{x>1} \frac{x}{1+yx}\nu(dx).$$

Анализ ее свойств и поведения помогает при доказательстве теоремы.

Далее в утверждении 2.1 показывается, что эталонный портфель имеет вид $X^* = \mathcal{E}(\alpha L)$, где α либо является корнем уравнения $F(\alpha) = 0$, либо равно $\overline{N}$ или $\overline{M}$. Константы $\overline{N}$ и $\overline{M}$ характеризуют максимальное и минимальное допустимые значения для стратегии и однозначно определяются по триплету Леви.

В утверждении 2.2 мы доказываем, что в случае своего существования портфель, максимизирующий логарифмическую полезность, совпадает с эталонным. Помимо этого приводится характеризация в терминах триплета процесса Леви L ситуации, когда эталонный портфель существует, а единственного решения у задачи максимизации логарифмической полезности нет.

В главе 3 мы рассматриваем случай степенной полезности, когда $U(x) = x^p/p,\ p < 1, p \neq 0$, и анализируем его связь с логарифмическим. На триплет процесса L, помимо предположения о немонотонности, при $0 < p < 1$ накладывается еще и ограничение

$$\int_{x>1} x^p d\nu < \infty.$$

В теореме 3.1 приводится основной результат. Он состоит в том, что портфель, задающий решение задачи максимизации степенной полезности, является эталонным по некоторой другой мере $Q \sim P$. При этом существует единственная константа y^*, которая задает меру Q с параметрами Гирсанова $(\beta, Y) = (py^*, (1+y^*x)^p)$ и портфель $X^* = \mathcal{E}(y^*L)$, который является эталонным по мере Q и решает задачу максимизации степенной полезности по мере P. Данное соответствие, помимо отображения между мерами, можно также рассматривать как соответствие между триплетами процесса Леви, порожденными мерами P и Q. В следующей теореме 3.2 показывается, что данное отображение является взаимно-однозначным между множеством триплетов $\mathcal{Q}$, задающих немонотонный процесс Леви, и множеством $\mathcal{Q}_p \in \mathcal{Q}$, таким, что для его любого триплета выполнено $\int_{x>1} x^p d\nu < \infty$.

Решение же двойственной задачи при $y = 1$ имеет вид

$$Y^* = \frac{Z}{\mathcal{E}(y^*L)},$$

где Z — процесс плотности меры Q. Таким образом, решение двойственной задачи для степенной полезности допускает классификацию, аналогичную теореме 2.1, которая дается в теореме 3.3.

Далее мы проводим сравнение задач степенной полезности для различных p. Это тесным образом связано с анализом поведения функций $F_p(y)$ для различных p,

$$F_p(y) = -b + c(1-p)y + \int (h(x) - \frac{x}{(1+yx)^{1-p}})\nu(dx).$$

В утверждении 3.5 показывается, что для любого немонотонного процесса Леви L всегда существует такое $p_1 < 1$, что для любого $p < p_1$ решение двойственной задачи есть EMM.

В главе 4 рассматривается случай экспоненциальной полезности, $U(x) = 1 - \exp(-x)$. Здесь мы не предполагаем, что $\mathcal{X}$ содержит лишь неотрицательные процессы. Для формулировки результата поделим всевозможные процессы Леви на три категории в терминах триплетов:

1. В процессе L есть разрывная мартингальная компонента с бесконечным числом скачков из $(-1,1)$, либо имеется гауссовская составляющая.

2. Процесс не принадлежит к предыдущей категории, но имеет ненулевой снос .

3. Все оставшиеся виды процессов, то есть составные пуассоновские процессы.

В теореме 4.1 показывается, что при отсутствии каких-либо ограничений на $\mathcal{X}$ значение функции полезности для первых двух категорий равно 1, а для последней третьей категории $u(x) < 1$.

Если же ввести некоторые ограничения на $\mathcal{X}$, то можно получить результат, похожий на тот, что мы получили в логарифмическом и степенном случаях. Предположим, что для каждого $X \in \mathcal{X}$ процесс H является ограниченным и $-X$ — экспоненциально специальный семимартингал. Результат для данной модели приводится в теореме 4.2. Решение основной задачи всегда существует для немонотонного процесса Леви L, определяется его триплетом и имеет вид $X^* = 1 + y^* L$, где

$$y^* = \min\{y : -b + cy + \int (h(x) - xe^{-yx})\nu(dx) \geq 0\}.$$

Далее рассматривается двойственная задача. Мы предполагаем, что множество $\mathcal{Y}(y)$, по которому берется инфимум, теперь состоит из $\mathcal{M}(y)$, то есть таких процессов Y, что Y_T/y есть эквивалентная мартингальная мера. Решение будет тем же самым и для задачи

$$v(y) = \inf_{Y \in \mathcal{M}(y)} E\, Y_T \ln Y_T.$$

В предположении, что функция

$$F_e(y) = -b + cy + \int (h(x) - xe^{-yx})\nu(dx)$$

имеет корень y^*, решение двойственной задачи имеет вид

$$Y^* = C_0(t) \exp(-y^* L),$$

где $C_0(t)$ есть некоторая детерминированная функция.

В конце приводятся некоторые утверждения, демонстрирующие связь между решением задачи максимизации полезности для экспоненциальной функции с решением этой задачи для случаев логарифмической и степенной функций полезности.

Заключение

В данной работе мы исследовали задачу максимизации ожидаемой полезности в произвольной безарбитражной модели, где процесс цены актива моделируется стохастической экспонентой процесса Леви, для случаев экспоненциальной, логарифмической и степенной функций полезности. Помимо этого, рассматривались также связанные с этой проблемой вопросы поиска эталонного портфеля, решения двойственной задачи, определения связи между решениями для различных функций полезности.

Главные итоги заключаются в следующем. Основные задачи были полностью решены для логарифмического и степенного случаев. Для экспоненциальной полезности предложен класс стратегий, в котором задача максимизации полезности всегда имеет нетривиальное решение, и найдено это решение. Был получен явный вид эталонного портфеля, а также показано, что процесс, обратный к нему, есть либо мартингал и процесс плотности эквивалентной мартингальной меры, либо мартингал, но не процесс плотности эквивалентной мартингальной меры, либо строгий супермартингал. Подобная классификация проведена и для решения двойственной задачи в степенном и логарифмическом случае. Была найдена связь между основной задачей в степенном случае и задачей о поиске эталонного портфеля.

Полученные результаты имеют теоретический характер, но, разумеется, могут быть применены и для анализа некоторых реальных ситуаций на финансовых рынках. Здесь отметим, что определение связи с практическими данными выходит за рамки данной работы, но может быть предметом для дополнительного исследования.

Благодарность. Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук Гущина Александра Александровича, которому автор выражает искреннюю благодарность за помощь в выборе направления исследования и всестороннее внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] *Иванов М. Ю.* Максимизация логарифмической полезности в экспоненциальной модели Леви // Вестник МГУ, 2014, № 6, с. 16–24.

[2] *Иванов М. Ю.* О связи задач максимизации степенной и логарифмической полезности в экспоненциальной модели Леви // Теория вероятностей и ее применения, 2014, т. 59, № 4, с. 781–790.

[3] *Иванов М. Ю.* Максимизация экспоненциальной полезности в модели Леви. Сборник "Современные проблемы математики и механики", 2015, т. 10, № 3, с. 83–93.

[4] *Ivanov M.* Expected utility maximization in exponential Lèvy model // International conference "Stochastic optimization and optimal stopping". Book of abstracts (Moscow, 24-28 September 2012).

[5] *Ivanov M.* Expected utility maximization in exponential Lèvy models for logarithmic and power utility functions // International conference "Advanced Finance and Stochastic". Book of abstracts (Moscow, 24-28 June 2013).