МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М .В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

на правах рукописи

УДК 519.21

Иванов Михаил Юрьевич

МАКСИМИЗАЦИЯ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЛЕВИ

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —

доктор физико-математических наук

Гущин Александр Александрович

Москва – 2015

Оглавление

Введение

Диссертация подготовлена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета и затрагивает вопросы, связанные с максимизацией ожидаемой полезности в финансовой математике.

Актуальность темы. В современной стохастической финансовой математике одна из наиболее распространенных задач связана с максимизацией полезности терминального значения капитала портфеля. Понятие полезности впервые возникло в исследованиях по теории игр и характеризовалось как выгода, которую игрок может получить при определенном исходе (см., к примеру, [64]). Вскоре понятие полезности получило распространение в теории вероятностей и математической статистике, и в монографии [58] описывается важное для финансовой математики понятие — математическое ожидание полезности $E_P U(\xi)$, где U есть сама функция полезности, случайная величина ξ принимает значение в зависимости от исхода события, а P — вероятностная мера.

В современные дни экономическая интерпретация нашей модели предполагается следующей. Имеется финансовый рынок и инвестор, владеющий портфелем из определенного количества активов. Свою задачу он видит в том, чтобы разработать такую стратегию покупки и продажи активов, которая принесла бы ему максимальную прибыль.

Как правило, считается, что инвестору свойственно желание избегать риска. Это находит свое отражение в том, что функция полезности является вогнутой. Помимо этого, чем больше он заработает на операциях, тем для него лучше. Это отвечает свойству возрастания. Пусть вогнутая неубывающая функция $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ описывает предпочтения инвестора, а случайность на рынке реализована с помощью вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда можно записать стандартную задачу максимизации ожидаемой полезности благосостояния в конечный момент времени как

$$\sup_{\xi \in A(x)} E_P U(\xi),$$

где множество $A(x)$ имеет вид $A(x) = \{X_T : X \in \mathcal{X}(x)\}$, $\mathcal{X}(x)$ состоит из всех возможных процессов капиталов инвестора, отвечающих допустимым стратегиям с начальным капиталом x, T есть заключительный момент времени.

Как принято считать, зарождение теории о максимизации терминальной полезности портфеля началось в 1950-е годы, когда появились работы Г. Марковица по оптимизации портфелей. В статье [53] и последующих работах он сформулировал основные принципы своей теории, основанной на анализе средних значений и дисперсий случайных величин. В значительной степени при решении рассматриваемых задач Марковиц пользовался методами линейного и нелинейного программирования. Из работ других авторов по этой же теме отметим работу [63].

В работе Р. Мертона 1969 года [54] задача оптимизации портфеля была рассмотрена для непрерывного времени, основная проблема сводилась к решению стохастического дифференциального уравнения, решения были найдены в некоторых частных случаях.

Впервые в достаточной степени методы стохастического исчисления для решения проблем финансовой математики были применены в работах [32, 33]. В них особое внимание уделяется введению вероятностного пространства с фильтрацией, построению эквивалентной мартингальной меры, рассматривается как дискретный случай, так и непрерывный. Вскоре подобный метод был применен в [21, 47] для решения задачи оптимизации портфеля в модели полных рынков, когда любое платежное поручение достижимо для некоторой стратегии. Оптимизация портфеля подразделялась на три типа: максимизация полезности от потребления, максимизация полезности от терминального значения капитала и максимизация полезности от потребления и терминального значения капитала.

Вскоре задача оптимизации портфеля с помощью мартингального подхода была рассмотрена и в случае неполных рынков, в [48, 22] и других работах. В них особое внимание уделяется двойственной задаче. При ее решении важную роль играют методы выпуклого анализа, которые для решения задач стохастического управления впервые применил Ж.-М. Бисмут в своей работе [19]. В классической работе Д. Крамкова и В. Шахермайера [51] было проведено создание исчерпывающей теории на основе существующих результатов для функций полезности, удовлетворяющих стандартным условиям и определенных на $\mathbb{R}_+$. В достаточно простой форме для полных и неполных рынков представлены условия существования решения как основной задачи максимизации полезности, так и двойственной. Помимо этого, приводятся уравнения, связывающие решения этих двух задач. Из более поздних работ отметим статьи [2, 28, 17, 60, 50]. В статье [60] был рассмотрен случай, когда функция полезности определена на $\mathbb{R}$, а не только на $\mathbb{R}_+$. С задачей поиска портфеля, максимизирующего ожидаемую полезность, тесно связана задача нахождения эталонного портфеля $X^* \geq 0, X^* \in \mathcal{X}(1)$, для которого отношение X/X^* есть супермартингал при любом $X \in \mathcal{X}(1)$. Данный вопрос исследовался в [15, 46] и других работах.

Одним из наиболее важных понятий, характеризующих финансовый рынок, является понятие арбитража. Под арбитражем, как правило, понимают такую безрисковую стратегию, которая может позволить инвестору с положительной вероятностью получить прибыль в результате торговли на рынке. Нетрудно понять, что при возникновении подобной возможности на реальном рынке инвесторы тут же попытаются ею воспользоваться, что неизбежно повлияет на цены финансовых инструментов и приведет к исчезновению подобных стратегий. Поэтому в литературе по финансовой математике, как правило, рассматриваются именно рынки, предполагающие отсутствие арбитража. Следующее важное предположение связано с риск-нейтральным подходом. Оно состоит в том, что стоимость финансовых инструментов рассчитывается как математическое ожидание возможных выплат в будущем, и здесь отсутствует зависимость от рисковых предпочтений инвестора. Для семимартингальной модели рынка с конечным числом активов, цены которых задаются процессом S, это означает, что математическое ожидание необходимо брать по такой мере Q, относительно которой S является мартингалом. В дискретной модели наличие хотя бы одной эквивалентной мартингальной меры равносильно отсутствию арбитража (см. [13]), в непрерывном же случае все несколько сложнее. Определить отсутствие арбитража можно разными способами, в одних моделях накладываются более сильные условия, в других — более слабые. Детальное изучение данного вопроса проводилось многими авторами в [32, 33, 25] и других работах. Фундаментальный результат был получен в статье Ф. Делбаена и У. Шахермайера [24]. Авторы показали, что для процесса цены S, являющегося семимартингалом, условие отсутствия арбитража в смысле NFLVR (отсутствие бесплатного ленча с исчезающим риском) эквивалентно наличию σ-мартингальной меры для S. Помимо условия NFLVR отметим также условие NUPBR (отсутствие неограниченной прибыли с ограниченным риском, см. [46, 61]) и NA (отсутствие арбитража, см. [24, 25]). В литературе, как правило, соответствие различных условий отсутствия арбитража носит название первой фундаментальной теоремы теории арбитража (или теории расчета финансовых активов). Вторая же фундаментальная теорема описывает различные свойства, эквивалентные полноте рынка. Как правило, это равносильно тому, что либо множество мартингальных мер, либо множество σ-мартингальных мер состоит из одной единственной. Достаточно подробная классификация этих теорем для непрерывного случая была проведена в работе [14].

В конце 90-х годов и в начале 2000-х произошло резкое увеличение числа работ, посвященных экспоненциальным моделям Леви, когда процесс цены акции S есть стохастическая экспонента от процесса Леви L, $S = \mathcal{E}(L)$. Подобная востребованность связана с тем, что при помощи процессов Леви модель Блэка–Шоулса получает естественное обобщение, главным образом состоящее в том, что цены активов могут допускать скачки и не обязаны быть непрерывными. Как можно видеть из реальных данных с финансовых рынков, цены активов действительно совершают скачки. К примеру, когда компания полностью разоряется и цена ее акций становится равной нулю. Это полезно учитывать при оценке рисков, а модель Блэка–Шоулса не позволяет это сделать, так как цена предполагается непрерывной. Помимо этого, процессы Леви сохраняют свойство независимости и стационарности приращений, а их свойства и некоторые характеристики можно записать с помощью формул, которыми удобно пользоваться при различных вычислениях. Все это применялось для оценки стоимости опционов, хеджирования платежных обязательств, анализа подразумеваемой волатильности. Достаточно подробный обзор результатов приводится в [62]. Отметим также работу К. Кардараса [49], где был произведен анализ различных свойств отсутствия арбитража для экспоненциальной модели Леви.

Помимо вышеперечисленных областей применения экспоненциальные модели Леви применялись и для определения оптимальной стратегии, которая максимизирует терминальную полезность. В работе [44] впервые была рассмотрена задача максимизации полезности в экспоненциальной модели Леви для трех типов функций — логарифмической, степенной и экспоненциальной. Также предполагалось наличие процесса потребления. Решения, выраженные при помощи триплетов процесса Леви, в достаточно явном виде были получены, но на сам процесс Леви и модель помимо безарбитражности были наложены дополнительные ограничения. В данной работе мы не предполагаем никаких ограничений для экспоненциальной модели Леви, кроме безарбитражности, и решаем задачу в общем случае.

Двойственная задача обычно заключается в минимизации определенного функционала на множестве мартингальных мер. Решение двойственной задачи позволяет найти функцию цены в основной задаче и охарактеризовать оптимальный портфель. Кроме того, двойственная задача имеет и самостоятельное значение, позволяющее сделать выбор риск-нейтральной меры. В работе [27] авторы исследовали задачу минимизации относительной энтропии по множеству локально эквивалентных мартингальных мер для процесса Леви L. Было доказано, что процесс L при определенных условиях остается процессом Леви по мере, на которой достигается минимум энтропии. Данную задачу можно рассматривать как двойственную к задаче максимизации экспоненциальной полезности. В случае же степенной функции аналогичный результат был получен в [41]. На процесс Леви в этих двух работах накладывались похожие ограничения. В данной работе мы решаем двойственную задачу для логарифмической и степенной полезности в общем случае, когда нет арбитража.

Цели исследования. Целями исследования являются:

1) Определение свойств решения двойственной задачи к задаче максимизации логарифмической полезности в экспоненциальной модели Леви.

2) Поиск эталонного портфеля в экспоненциальной модели Леви в общем случае.

3) Решение задачи максимизации полезности в экспоненциальной модели Леви в общем случае, когда полезность задается логарифмической, степенной и экспоненциальной функциями.

Научная новизна.

1) В экспоненциальной модели Леви найден явный вид эталонного портфеля во всех случаях, когда он существует. Доказано, что процесс, обратный к капиталу эталонного портфеля, есть либо мартингал и процесс плотности эквивалентной мартингальной меры, либо мартингал, но не процесс плотности эквивалентной мартингальной меры, либо строгий супермартингал. Каждый из трех случаев охарактеризован в терминах триплета Леви–Хинчина. Полностью решена задача максимизации логарифмической полезности.

2) В экспоненциальной модели Леви полностью решена задача максимизации степенной полезности путем сведения ее к задаче нахождения эталонного портфеля по другой мере.

3) В задаче максимизации экспоненциальной полезности в экспоненциальной модели Леви предложен класс стратегий, в котором задача всегда имеет нетривиальное решение, и найдено это решение.

Все вышеупомянутые задачи решены для произвольной безарбитражной модели Леви.

Методы исследования. В работе применяются методы теории вероятностей и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны в теории вероятностей, математической статистике, функциональном анализе, теории случайных процессов и различных областях ее применения, в частности, в задачах финансовой математики.

Апробация работы. Результаты, относящиеся к диссертации, излагались на следующих семинарах:

1. Большой семинар кафедры теории вероятностей (МГУ,механико-математический факультет) под руководством действительного члена РАН профессора А. Н. Ширяева, Москва, 2014;

2. Семинар “Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании”, проводимый в Центральном экономико-математическом институте под руководством кандидата физико-математических наук В. И. Аркина и доктора физико-математических наук Э. Л. Пресмана, Москва, 2014;

и конференциях:

3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов”, Москва, 2012;

4. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов”, Москва, 2013;

5. Международная конференция “Стохастическая оптимизация и оптимальная остановка”, Москва, 2012;

6. Международная конференция “Углубленные финансы и стохастика”, Москва, 2013.

Публикации. Результаты работы опубликованы в работах [3, 4, 5, 6, 7, 36, 37].

Структура и объем работы.

Диссертация изложена на 98 страницах и состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 64 наименования.

Содержание работы. В главе 1 приводятся основные определения и вспомогательные утверждения, которые используются в остальных главах диссертации. Приведем наиболее важные из них, необходимые для дальнейшего понимания. Основная задача, которую мы решаем — это поиск оптимального процесса капитала X^*, который бы максимизировал ожидаемую полезность U инвестора:

$$u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} EU(X_T).$$

Здесь $\mathcal{X}(x)$ есть множество возможных процессов капитала для инвестора, которые в начальный момент принимают значение x. Для логарифмической и степенной функции мы считаем, что $\mathcal{X}$ содержит лишь неотрицательные процессы. Сам же процесс капитала задается по формуле

$$X_t = x + \int_0^t H_u dS_u,\ 0 \leq t \leq T,$$

где x есть начальный капитал, а S есть процесс цены некоторого финансового актива. В нашей одномерной модели мы полагаем, что S является стохастической экспонентой от процесса Леви L:

$$S = \mathcal{E}(L), \Delta L > -1.$$

Каждый процесс Леви однозначно определяется своим детерминированным триплетом (b, c, ν), где b и $c \geq 0$ — константы, а мера ν интегрирует $1 \wedge x^2$.

С поиском оптимального процесса капитала тесно связана так называемая двойственная задача

$$v(y) = \inf_{Y \in \mathcal{Y}(y)} E\, V(Y_T),$$

где функция $V = \sup_{x>0}(U(x) - xy), y > 0$ есть преобразование Лежандра от функции U. Множество $\mathcal{Y}$ строится по множеству $\mathcal{X}$ как

$$\mathcal{Y} = \{Y > 0, Y_0 = y, (XY) \text{ есть супермартингал } \forall X \in \mathcal{X}.\}$$

Эквивалентная мартингальная мера (EMM) есть такая мера Q, эквивалентная исходной мере P, по которой процесс цены S является мартингалом, в этом случае ее процесс плотности будет лежать в $\mathcal{Y}$.

Модель рынка предполагается безарбитражной, что в случае модели Леви можно выразить сразу несколькими эквивалентными способами. Они приведены в предложении 1.7:

$$
\begin{aligned}
&NA \Leftrightarrow NFLVR \Leftrightarrow NUPBR \Leftrightarrow \\
&\exists \text{ EMM, по которой } L \text{ — процесс Леви} \Leftrightarrow \\
&L \text{ не является монотонным.}
\end{aligned}
$$

В главе 2 решается задача максимизации полезности в логарифмическом случае и двойственная к ней. Мы начинаем свои рассуждения с поиска эталонного портфеля X^*, то есть такого, что X/X^* есть супермартингал $\forall X \in \mathcal{X}$. Для процесса $Y^* = 1/X^*$ возможны 3 ситуации:

1. Y^* есть супермартингал, но не мартингал.

2. Y^* есть мартингал, но не задает EMM.

3. Y^* задает EMM, по которой L есть процесс Леви.

Точная характеризация всех этих ситуаций в терминах триплета процесса Леви L приводится в теореме 2.1, доказательство которой занимает большую часть главы. Ситуация, когда у нас присутствует арбитраж и подобная классификация невозможна, отвечает монотонным процессам Леви L, что также может быть охарактеризовано при помощи триплета L. Важную роль для классификации имеет функция F, которая задается в терминах триплета процесса Леви:

$$F(y) = cy - b + \int_{|x|\le 1} \frac{yx^2}{1+yx}\nu(dx) - \int_{x>1} \frac{x}{1+yx}\nu(dx).$$

Анализ ее свойств и поведения помогает при доказательстве теоремы.

Далее в утверждении 2.1 показывается, что эталонный портфель имеет вид $X^* = \mathcal{E}(\alpha L)$, где α либо является корнем уравнения $F(\alpha) = 0$, либо равно $\overline{N}$ или $\overline{M}$. Константы $\overline{N}$ и $\overline{M}$ характеризуют максимальное и минимальное допустимые значения для стратегии и однозначно определяются по триплету Леви.

В утверждении 2.2 мы доказываем, что в случае своего существования портфель, максимизирующий логарифмическую полезность, совпадает с эталонным. Помимо этого приводится характеризация в терминах триплета процесса Леви L ситуации, когда эталонный портфель существует, а единственного решения у задачи максимизации логарифмической полезности нет.

В главе 3 мы рассматриваем случай степенной полезности, когда $U(x) = x^p/p,\ p < 1, p \neq 0$, и анализируем его связь с логарифмическим. На триплет процесса L, помимо предположения о немонотонности, при $0 < p < 1$ накладывается еще и ограничение

$$\int_{x>1} x^p d\nu < \infty.$$

В теореме 3.1 приводится основной результат. Он состоит в том, что портфель, задающий решение задачи максимизации степенной полезности, является эталонным по некоторой другой мере $Q \sim P$. При этом существует единственная константа y^*, которая задает меру Q с параметрами Гирсанова $(\beta, Y) = (py^*, (1 + y^*x)^p)$ и портфель $X^* = \mathcal{E}(y^*L)$, который является эталонным по мере Q и решает задачу максимизации степенной полезности по мере P. Данное соответствие, помимо отображения между мерами, можно также рассматривать как соответствие между триплетами процесса Леви, порожденными мерами P и Q. В следующей теореме 3.2 показывается, что данное отображение является взаимно-однозначным между множеством триплетов $\mathcal{Q}$, задающих немонотонный процесс Леви, и множеством $\mathcal{Q}_p \in \mathcal{Q}$, таким, что для его любого триплета выполнено $\int_{x>1} x^p d\nu < \infty$.

Решение же двойственной задачи при $y = 1$ имеет вид

$$Y^* = \frac{Z}{\mathcal{E}(y^*L)},$$

где Z — процесс плотности меры Q. Таким образом, решение двойственной задачи для степенной полезности допускает классификацию, аналогичную теореме 2.1, которая дается в теореме 3.3.

Далее мы проводим сравнение задач степенной полезности для различных p. Это тесным образом связано с анализом поведения функций $F_p(y)$ для различных p,

$$F_p(y) = -b + c(1-p)y + \int (h(x) - \frac{x}{(1+yx)^{1-p}})\nu(dx).$$

В утверждении 3.5 показывается, что для любого немонотонного процесса Леви L всегда существует такое $p_1 < 1$, что для любого $p < p_1$ решение двойственной задачи есть EMM.

В главе 4 рассматривается случай экспоненциальной полезности, $U(x) = 1 - \exp(-x)$. Здесь мы не предполагаем, что $\mathcal{X}$ содержит лишь неотрицательные процессы. Для формулировки результата поделим всевозможные процессы Леви на 3 категории в терминах триплетов:

1. В процессе L есть разрывная мартингальная компонента с бесконечным числом скачков из $(-1, 1)$, либо имеется гауссовская составляющая.

2. Процесс не принадлежит к предыдущей категории, но имеет ненулевой снос .

3. Все оставшиеся виды процессов, то есть составные пуассоновские процессы.

В теореме 4.1 показывается, что при отсутствии каких-либо ограничений на $\mathcal{X}$ значение функции полезности для первых двух категорий равно 1, а для последней третьей категории $u(x) < 1$.

Если же ввести некоторые ограничения на $\mathcal{X}$, то можно получить результат, похожий на тот, что мы получили в логарифмическом и степенном случаях. Предположим, что для каждого $X \in \mathcal{X}$ процесс H является ограниченным и $-X$ — экспоненциально специальный семимартингал. Результат для данной модели приводится в теореме 4.2. Решение основной задачи всегда существует для немонотонного процесса Леви L, определяется его триплетом и имеет вид $X^* = 1 + y^* L$, где

$$y^* = \min\{y : -b + cy + \int (h(x) - xe^{-yx})\nu(dx) \geq 0\}.$$

Далее рассматривается двойственная задача. Мы предполагаем, что множество $\mathcal{Y}(y)$, по которому берется инфимум, теперь состоит из $\mathcal{M}(y)$, то есть таких процессов Y, что Y_T/y есть эквивалентная мартингальная мера. Решение будет тем же самым и для задачи

$$v(y) = \inf_{Y \in \mathcal{M}(y)} E\, Y_T \ln Y_T.$$

В предположении, что функция

$$F_e(y) = -b + cy + \int (h(x) - xe^{-yx})\nu(dx)$$

имеет корень y^*, решение двойственной задачи имеет вид

$$Y^* = C_0(t) \exp(-y^* L),$$

где $C_0(t)$ есть некоторая детерминированная функция.

В конце приводятся некоторые утверждения, демонстрирующие связь между решением задачи максимизации полезности для экспоненциальной функции с решением этой задачи для случаев логарифмической и степенной функций полезности.

Благодарность. Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук Гущина Александра Александровича, которому автор выражает искреннюю благодарность за помощь в выборе направления исследования и всестороннее внимание к работе.

Глава 1

Вспомогательные результаты

1.1 Сведения из теории семимартингалов и процессы Леви

Напомним некоторые определения и факты из теории семимартингалов, следуя известным монографиям [38, 9, 39], где также можно найти предшествующие сведения, предполагаемые здесь известными. Изначально мы полагаем, что у нас есть стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ с временным горизонтом $T \in [0, +\infty)$, где фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ непрерывна справа.

Случайный процесс $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ можно рассматривать как функцию на произведении $\Omega \times [0, T]$. Предсказуемая σ-алгебра $\mathcal{P}$ подмножеств множества $\Omega \times [0, T]$ определяется как наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все согласованные процессы Y с непрерывными слева траекториями. Процессы, измеримые относительно $\mathcal{P}$, называются предсказуемыми. Опциональная σ-алгебра $\mathcal{O}$ подмножеств множества $\Omega \times [0, T]$ определяется как наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все согласованные процессы Y, у которых траектории непрерывны справа и имеют предел слева (càdlàg процессы). Процессы, измеримые относительно $\mathcal{O}$, называются опциональными.

В пространстве $\widetilde{\Omega} = \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}$ введем введем σ-алгебру $\widetilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ и σ-алгебру $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Функция $F : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ является предсказуемой, если она измерима относительно $\widetilde{\mathcal{P}}$, и опциональной, если она измерима относительно $\widetilde{\mathcal{O}}$.

Семимартингалом называется такой случайный процесс $X = (X_t)_{0 \le t \le T}$, который допускает представление

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

где $M = (M_t)_{0 \le t \le T}$ есть локальный мартингал, а $A = (A_t)_{0 \le t \le T}$ — процесс ограниченной вариации.

Процесс X является специальным семимартингалом, если он представим в виде суммы локального мартингала и предсказуемого процесса ограниченной вариации.

Определение 1.1. Семимартингал X является экспоненциально специальным, если процесс $\exp(X - X_0)$ является специальным семимартингалом.

Введем обозначения $\mathcal{A}^+_{loc}$ для класса локально интегрируемых возрастающих процессов и $\mathcal{M}_{loc}$ для множества локальных мартингалов.

Для предсказуемого процесса H и семимартингала X обозначим через $H \cdot X = (H \cdot X_t)_{0 \le t \le T}$ процесс стохастического интеграла H по X, для $H \cdot X_t$ будем также использовать обозначение $\int_0^t H_s dX_s$. Для предсказуемого локально ограниченного H он определяется как $H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A$, где $H \cdot M$ есть стохастический интеграл по локальному мартингалу M, а $H \cdot A$ есть интеграл Лебега–Стилтьеса по процессу ограниченной вариации A, и это определение не зависит от разложения $X = X_0 + M + A$. Более подробное описание определений этих интегралов можно найти в [14]. В общем же случае мы полагаем, что H интегрируем по X, если для некоторого разложения $X = X_0 + M + A$ существуют интеграл по локальному мартингалу $H \cdot M$ и интеграл Лебега–Стилтьеса $H \cdot A$, тогда определен $H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A$. Корректность определения также приводится в [14]. Множество процессов, интегрируемых по X, обозначим через $L(X)$. Заметим, что в случае $X \in \mathcal{M}_{loc}$ для $H \in L(X)$ интеграл по локальному мартингалу $H \cdot X$ может не существовать.

Определение 1.2. Семимартингал X является σ-мартингалом, если процесс X представим как $X = X_0 + H \cdot M$, где M является локальным мартингалом, а предсказуемый процесс H лежит в $L(M)$.

Случайной мерой на $[0,T] \times \mathbb{R}$ назовем такое семейство неотрицательных мер $\mu = \mu(\omega, dt, dx)_{\omega\in\Omega}$ на $([0,T]\times\mathbb{R}, \mathcal{B}([0,T])\times\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, что $\mu(\omega; \{0\}\times\mathbb{R}) = 0$.

Пусть W — опциональная функция на $\widetilde{\Omega}$. Тогда для нее мы можем определить интегральный процесс $W * \mu$ (см. II.1.5 в [39]) как

$$W*\mu_t = \begin{cases} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} W(\omega, s, x)\mu(\omega; ds, dx), \text{ если } \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} |W(\omega, s, x)|\mu(\omega; ds, dx) < \infty, \\ +\infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Случайная мера μ является предсказуемой, если для любой $W \in \widetilde{\mathcal{P}}$ процесс $W * \mu$ является предсказуемым. Если для любой $W \in \widetilde{\mathcal{O}}$ процесс $W * \mu$ опционален, то мера является опциональной. Если для такой меры вдобавок существует такое разбиение $\widetilde{\Omega}$ на $\widetilde{\mathcal{P}}$-измеримые множества A_n, что каждая случайная величина $(\mathbb{1}_{A_n} * \mu)_T$ интегрируема, то мера называется $\widetilde{\mathcal{P}}$-σ-конечной.

Введем считающую меру скачков семимартингала X как целочисленную случайную меру на $[0,T] \times \mathbb{R}$:

$$\mu^X(\omega, dt, dx) = \sum_{s>0} \mathbb{1}_{\{\Delta X_s(\omega)\neq 0\}} \delta_{(s,\Delta X_s(\omega))}(dt, dx),$$

где $\delta_{(x,y)}$ есть мера Дирака в точке (x, y). По предложению II.1.16 [39] она является $\widetilde{\mathcal{P}}$-σ-конечной.

Для $\widetilde{\mathcal{P}}$-σ-конечной меры μ существует единственная (с точностью до п.н.) предсказуемая случайная мера ν, которую называют компенсатором. Она характеризуется тем, что для каждой $\widetilde{\mathcal{P}}$-измеримой функции W такой, что $|W| * \mu \in \mathcal{A}^+_{loc}$, выполнено соотношение

$$W * \mu - W * \nu \in \mathcal{M}_{loc},$$

а также эквивалентное свойство

$$E(W * \nu)_T = E(W * \mu)_T$$

для произвольной неотрицательной $W \in \widetilde{\mathcal{P}}$. Доказательство этого факта и корректность определения приводятся в теореме II.1.8 [39].

Поставим в соответствие каждой $\widetilde{\mathcal{P}}$-измеримой функции W процесс

$$\widehat{W}_t(\omega) = \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}} W(\omega, t, x)\nu(\omega; \{t\} \times dx), \text{ если } \int\limits_{\mathbb{R}} |W(\omega, t, x)|\nu(\omega; \{t\} \times dx) < \infty, \\ +\infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Обозначим через $G_{loc}(\mu)$ класс всех таких предсказуемых функций $W : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, что для процесса $\widetilde{W}_t(\omega) = W(\omega, t, \Delta X_t(\omega))\mathbb{1}_{\{\Delta X_t \neq 0\}}(\omega, t) - \widehat{W}_t(\omega, t)$ выполнено $[\sum_{s \leq \cdot}(\widetilde{W}_s)^2]^{1/2} \in \mathcal{A}^+_{loc}$.

Для $W \in G_{loc}(\mu)$ назовем стохастическим интегралом W по мере $\mu - \nu$ и обозначим через $W * (\mu - \nu)$ любой чисто разрывный локальный мартингал X, такой, что ΔX и $\widetilde{W}$ неразличимы по P.

Предложение 1.1 (Предложение II.1.28 [39]). *Пусть W есть предсказуемая функция на $\widetilde{\Omega}$, такая, что $|W| * \mu \in \mathcal{A}^+_{loc}$ (эквивалентно $|W| * \nu \in \mathcal{A}^+_{loc}$). Тогда $W \in G_{loc}(\mu)$ и*

$$W * (\mu - \nu) = W * \mu - W * \nu.$$

Отметим также, что здесь знак $*$ подразумевает два различных интегрирования. Для слагаемых справа мы берем интегралы Лебега на $[0, T] \times \mathbb{R}$

по соответствующим мерам. Для выражения слева мы берем стохастический интеграл по компенсированной мере скачков $(\mu-\nu)$, введенный выше. Как правило, из контекста понятно, какой именно интеграл следует брать, поэтому мы для удобства используем одинаковые обозначения.

Для любого семимартингала X имеет место следующее каноническое представление (см. [39]):

$$X_t = X_0 + B_t + X^c_t + h(x) * (\mu^X - \nu)_t + (x - h(x)) * \mu^X_t.$$

Здесь X^c является непрерывным локальным мартингалом, $B = B(h)$ есть предсказуемый процесс ограниченной вариации, $h(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция усечения (ограниченная функция с компактным носителем, для которой в окрестности нуля выполнено $h(x) = x$), μ^X есть мера скачков, а ν является компенсатором μ^X.

Каждому семимартингалу X можно поставить в соответствие триплет локальных характеристик (B, C, ν). Предсказуемый процесс B и предсказуемую меру ν мы использовали выше в каноническом представлении, C же есть предсказуемый процесс с неотрицательными значениями, соответствующий квадратической вариации процесса X^c.

С помощью характеристик нетрудно получить необходимое и достаточное условие того, что семимартингал X является локальным мартингалом (предложение II.2.29 в [39]):

$$\begin{cases} (|x|^2 \wedge |x|) * \nu \in \mathcal{A}^+_{loc}, \\ B(h) + (x - h(x)) * \nu = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Приведем формулу Ито (см., например, [39]), которой мы будем пользоваться в своих рассуждениях. Пусть X есть семимартингал, а f —дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $f(X)$ есть семимартингал и

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})d\langle X^c, X^c\rangle_s$$
$$+ \sum_{0<s\le t} \left[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s\right].$$

Процесс X является процессом с независимыми приращениями, если он принимает значения в $\mathbb{R}$, его траектории непрерывны справа и имеют предел слева и для любых $0 \le s \le t$ случайная величина $X_t - X_s$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_s$.

Процесс с независимыми приращениями является однородным, если для любого s распределение $X_{t+s} - X_t$ не зависит от t.

Процессом Леви называется такой однородный процесс с независимыми приращениями, для которого $X_0 = 0$ п.н.

Однородные процессы с независимыми приращениями всегда являются семимартингалами, более того, их распределения выражаются через характеристики.

Предложение 1.2 (Следствие II.4.19 [39]). *Процесс X является однородным процессом с независимыми приращениями тогда и только тогда, когда он является семимартингалом, допускающим следующий вид своих характеристик (B, C, ν^X):*

$$B_t(\omega) = bt, \quad C_t(\omega) = ct, \quad \nu^X(\omega; dt, dx) = dt\nu(dx),$$

где $b \in \mathbb{R}, c \ge 0$, а ν есть такая положительная мера, что $\nu(\{0\}) = 0$ и $\int(1 \wedge x^2)d\nu < \infty$.

Помимо этого, для любых $t \in \mathbb{R}_+$ и $u \in \mathbb{R}$ выполнено

$$E(e^{iuX_t}) = \exp\left\{t\left(iub - \frac{1}{2}u^2c + \int(e^{iux} - 1 - iuh(x))\nu(dx)\right)\right\}.$$

Данная формула также называется формулой Леви–Хинчина.

Для упрощения изложения в дальнейшем для процессов Леви триплет характеристик называем просто триплетом и пишем его в сокращенном виде без времени — (b, c, ν). Функцию усечения без ограничения общности полагаем равной $h(x) = x\mathbb{1}_{|x|\leq 1}$. С помощью канонического разложения семимартингала процесс Леви L можно записать в явном виде как сумму четырех независимых слагаемых $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, где $L_1 = bt$, $L_2 = \sqrt{c}B_t$ есть стандартное броуновское движение, помноженное на константу $\sqrt{c}$, $L_3 = \int_0^t \int_{|x|>1} x\mu^L(ds, dx)$ есть составной пуассоновский процесс со скачками, по модулю большими 1, и $L_4 = \int_0^t \int_{|x|\leq 1} x(\mu^L - \nu^L)(ds, dx)$ есть чисто разрывный мартингал, со скачками по модулю меньшими или равными 1, которых в общем случае может быть и бесконечное число. Таким образом, любой процесс Леви L имеет вид

$$L = bt + \sqrt{c}B_t + \int_0^t \int_{|x|>1} x\mu^L(ds, dx) + \int_0^t \int_{|x|\leq 1} x(\mu^L - \nu^L)(ds, dx).$$

В терминах триплета процесса Леви можно записать условия, при которых он будет монотонным. Из теоремы 21.5 [57] вытекает следующий результат.

Предложение 1.3. *Процесс Леви монотонно не убывает тогда и только тогда, когда*

$$c = 0, \nu[x < 0] = 0, b - \int x\mathbb{1}_{|x|\leq 1}\nu(dx) \geq 0.$$

Процесс Леви монотонно не возрастает тогда и только тогда, когда

$$c = 0, \nu[x > 0] = 0, b - \int x\mathbb{1}_{|x|\leq 1}\nu(dx) \leq 0.$$

Следующая результат, известный как теорема Гирсанова для семимартингалов, играет весьма важную роль в финансовой математике. Он позволяет для семимартингала пересчитать триплет характеристик по другим мерам.

Предложение 1.4 (Теорема III.3.24 [39])**.** *Пусть P' есть вероятностная мера, абсолютно непрерывная относительно P, а X — произвольный семимартингал с триплетом характеристик (B, C, ν). Тогда X есть семимартингал по мере P' и существуют предсказуемая функция $Y \geq 0$ на*

$\widetilde{\Omega}$ и предсказуемый процесс β на Ω такие, что новый триплет (B', C', ν') процесса X по мере P' имеет вид

$$B' = B + \beta \cdot C + h(x)(Y-1) * \nu$$
$$C' = C$$
$$\nu' = Y \cdot \nu.$$

Формулы выполнены с точностью до п.н. по P'. Обозначим через P_t сужение меры P на σ-алгебру $\mathcal{F}_t$. Существуют уравнения, зависящие от X и процесса плотности Z ($dP'_t = Z_t dP_t$), из которых можно определить β и Y, см. [39]. Пара (β, Y) называется параметрами Гирсанова для меры P' и процесса X.

Стохастической экспонентой семимартингала X называют процесс Y, являющийся решением уравнения

$$Y = 1 + Y_- \cdot X \text{ (эквивалентно: } dY = Y_- dX, Y_0 = 1),$$

и обозначают $\mathcal{E}(X)$. Его можно записать в явном виде:

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp(X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t) \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}.$$

Теорема Гирсанова позволяет по процессу плотности Z определить параметры β и Y. Возможно и обратное построение. По заданным β и Y при определенных условиях можно построить такой процесс плотности Z некоторой меры P' относительно P, что пара (β, Y) задает параметры Гирсанова для P'. Пример построения дает следующее предложение.

Предложение 1.5. *Пусть L есть процесс Леви, а предсказуемая функция $Y \geq 0$ и предсказуемый процесс β таковы, что процесс*

$$N = \beta \cdot L^c + (Y-1) * (\mu - \nu),$$

корректно определен, а процесс $Z = \mathcal{E}(N)$ является мартингалом. Тогда для процесса L и меры P', определяемой равенством $dP' = Z_T dP$, β и Y есть параметры Гирсанова.

Из теоремы 5.16 и следствия 8.30 книги [38] нетрудно вывести следующее предложение, которое нам понадобится в дальнейшем.

Предложение 1.6. *Пусть локальный мартингал* $M, M_0 = 0$ *имеет вид* $M = M^c + W * (\mu^L - \nu^L)$, *где* M^c *обозначает непрерывную мартингальную составляющую,* W *есть предсказуемая функция, а* μ^L *— считающая мера скачков процесса Леви* L, *имеющая компенсатор* ν^L. *Тогда, если* $\Delta M > -1$ *и выполнено*

$$\langle M^c, M^c \rangle_T + \int_0^T \int_{x>-1} (1 - \sqrt{1 + W(t,x)})^2 \nu^L(dt, dx) < C < \infty,$$

то процессы M *и* $\mathcal{E}(M)$ *являются мартингалами.*

1.2 Модель финансового рынка и условия отсутствия арбитража

Введем модель рынка с одним рисковым активом, которая рассматривалась в работах [51, 24, 44]. Пусть у нас есть стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, где фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ непрерывна справа. Зададим на нем семимартингал S с действительными неотрицательными значениями, у которого траектории непрерывны справа и имеют пределы слева на интервале времени $[0, T]$, он моделирует цену актива. Банковский счет предполагается тождественно равным 1.

Экспоненциальной моделью Леви мы будем называть такой вид рынка, для которого выполнено $S = \mathcal{E}(L)$, где L — процесс Леви с $\Delta L > -1$.

На рынке присутствует инвестор, который путем покупки и продажи вышеупомянутого актива с течением времени пытается максимизировать свой капитал. Он определяется самофинансируемым портфелем Π — парой (x, H), где константа x означает начальный капитал портфеля, а $H = \{H_t\}$ — предсказуемый процесс, интегрируемый по S, который также называют стратегией. H_t интерпретируется как количество единиц актива в портфеле в момент t. Процесс капитала $X = (X_t)_{0 \le t \le T}$ такого портфеля Π будет следующим:

$$X_t = x + \int_0^t H_u dS_u,\ 0 \le t \le T.$$

Мы рассматриваем задачу максимизации полезности капитала в момент времени T.

Обозначим через $\mathcal{X}(x)$ семейство допустимых процессов капиталов с начальным значением x:

$$\mathcal{X}(x) = \{X : X = x + \int HdS,\ H \text{ предсказуем и интегрируем по } S\}.$$

В зависимости от вида модели на $\mathcal{X}(x)$ могут накладываться дополнительные условия — к примеру, $X \ge 0$ или равномерная ограниченность X снизу. Для удобства полагаем $\mathcal{X} = \mathcal{X}(1)$. Далее в разделе мы рассматриваем такое множество капиталов $\mathcal{X}$, что $\forall X \in \mathcal{X}$ выполнено $X \ge 0$. Введем понятие эталонного (numéraire) портфеля:

Определение 1.3. Портфель $X^* \in \mathcal{X}$ является эталонным, если выполнено $P(\inf_t X_t^* > 0) = 1$ и для любого $X \in \mathcal{X}$ отношение X/X^* есть супермартингалом.

В большинстве работ на данную модель накладывается условие об отсутствии арбитража, которое можно ввести разными способами. Интуитивный смысл этого термина состоит в том, что наличие на рынке арбитража означает возможность “делать деньги из ничего”, получать гарантированную прибыль, не рискуя потерять начальный капитал. Приведем некоторые известные факты и утверждения, связанные с данным понятием, и дадим математические определения.

Для начала приведем три основных условия, характеризующие степень отсутствия арбитража на рынке.

Определение 1.4.

(1) Условие NA (no arbitrage, отсутствия арбитража) выполнено тогда, когда не существует такого $\hat{X} \in \mathcal{X}$, что $P(\hat{X}_T \geq 1) = 1$ и $P(\hat{X}_T > 1) > 0$.

(2) Условие NUPBR (no unbounded profit with bounded risk, отсутствие неограниченной прибыли с ограниченным риском) выполнено тогда, когда набор случайных величин $(X_T)_{X\in\mathcal{X}}$ ограничен по вероятности, то есть $\lim_{n\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{X}} P(X_T > n) = 0$.

(3) Условие NFLVR (no free lunch with vanishing risk, отсутствие бесплатного ленча с исчезающим риском) выполнено тогда, когда не существует такой последовательности портфелей $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X^n \in \mathcal{X}$, что $P(X^n_T \geq 1-\delta_n) = 1$ для некоторой убывающей последовательности $\delta_n \downarrow 0$ и $P(X^n_T > 1 + \epsilon) > \epsilon$ для некоторого $\epsilon > 0$.

Условие NFLVR эквивалентно одновременному выполнению NA и NUPBR (см. [46], предложение 3.2):

$$\text{NFLVR} \Leftrightarrow \text{NA+NUPBR}.$$

Для изучения определенных свойств рынка важное значение имеет выбор множества мер, относительно которых процессы капиталов имеют свойство типа мартингальности. Для этой цели введем множество эквивалентных локально мартингальных мер:

$$\mathcal{M} = \{Q : Q \sim P, \text{ процесс } X \text{ есть локальный мартингал по } Q \ \forall X \in \mathcal{X}\}.$$

С понятием эквивалентной локально мартингальной меры связаны следующие определения.

Определение 1.5. Мера $Q \sim P$ называется

– эквивалентной мартингальной мерой (EMM), если процесс цены S является мартингалом по Q.

– эквивалентной σ-мартингальной мерой (EσMM), если процесс цены S является σ-мартингалом по Q, то есть представим в виде $S = 1 + \int KdM$, где K — предсказуемый процесс, а M — мартингал.

– эквивалентной супермартингальной мерой (ESMM), если любой процесс $X \in \mathcal{X}$ является супермартингалом по Q.

Очевидно, что EMM есть EσMM, и нетрудно убедиться, что EσMM есть ESMM.

Определение 1.6. Процесс $D, D_0 = 1, P(\inf_t D_t > 0) = 1$ называется

– эквивалентной σ-мартингальной плотностью (EσMD), если D есть локальный мартингал, а SD — σ-мартингал.

– эквивалентной супермартингальной плотностью (ESMD), если для любого $X \in \mathcal{X}$ процесс XD будет супермартингалом.

Легко проверить, что EσMD есть ESMD, EσMD (соответственно ESMD) является процессом плотности EσMM (соответственно ESMM) тогда и только тогда, когда он есть мартингал. Из определения 1.3 следует, что портфель $X^* \in \mathcal{X}$ есть эталонный, если $1/X^*$ есть ESMD.

Фундаментальный результат Ф. Делбаена и В. Шахермайера [24] состоит в том, что NFLVR эквивалентно существованию EσMM, а также существованию ESMM (хотя множества всевозможных EσMM и ESMM могут различаться).

В свою очередь, в работе И. Каратзаса и К. Кардараса [46] было показано, что условие NUPBR эквивалентно существованию ESMD и влечет (а значит, эквивалентно) существование эталонного портфеля. Похожий результат можно найти и в работе [11]. К. Такаока и М. Швайцер в [61] показали, что условие NUPBR эквивалентно существованию EσMD.

В случае экспоненциальной модели Леви все вышеупомянутые определения эквивалентны и справедливо следующее предложение.

Предложение 1.7. *Для экспоненциальной модели Леви следующие условия эквивалентны:*

(1) Существует хотя бы одна EMM, по которой L — процесс Леви.

(2) Существует хотя бы одна EMM.

(3) Выполнено условие NFLVR.

(4) Выполнено условие NUPBR.

(5) Выполнено условие NA.

(6) Процесс L не является монотонным, или $L = 0$.

(7) Существует эталонный портфель.

В многомерном случае эквивалентность этих пунктов была доказана у Кардараса, см. теоремы 3.7, 4.5 и замечание 3.8 в [49]. В одномерном эквивалентность некоторых была доказана ранее в работах [26, 40, 20, 12].

1.3 Постановка основной и двойственной задач

Перейдем к описанию задачи максимизации полезности терминального капитала. Предпочтения инвестора задаются функцией полезности $U : E \to \mathbb{R}$, где E есть допустимое множество значений портфеля. Как правило, рассматриваются такие ситуации, где либо $E = \mathbb{R}_+$, либо $E = \mathbb{R}$, а функция U строго возрастает, строго вогнута и непрерывно дифференцируема. Задача инвестора состоит в том, чтобы, имея начальный капитал $x > 0$, в конечный момент времени максимизировать ожидаемую полезность $EU(X_T)$. Функция цены для данной задачи имеет вид

$$u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} EU(X_T). \tag{1.2}$$

Основные функции U, которые мы будем рассматривать — логарифмическая $U(x) = \ln x$, степенная $U(x) = x^p/p$, $p < 1$, $p \neq 0$ и экспоненциальная $U(x) = 1 - \exp(-x)$, все они задают HARA-полезности. В дальнейшем под логарифмическими, степенными и экспоненциальными функциями полезности мы будем понимать именно данные функции, если не оговорено иное. Множество E определяет допустимые значения для процессов капиталов, отметим, что оно имеет различный вид у данных функций. Логарифмическая и степенная функция при $p < 0$ определены для $x > 0$, степенная при $0 < p < 1$ определена для $x \geq 0$. Для экспоненциальной функции $E = \mathbb{R}$.

Для того, чтобы получить дополнительные характеристики и сведения об оптимальном портфеле X^*, а также для нахождения явного вида функции $u(x)$, в литературе широко рассматривается двойственная задача. С помощью преобразования Лежандра (см. [1]) введем двойственную функцию

$$V(y) = \sup_{x \in E}(U(x) - xy), y > 0.$$

Тогда задача, двойственная к (1.2), в своей обычной постановке имеет вид

$$v(y) = \inf_{Y \in \mathcal{Y}(y)} EV(Y_T), \tag{1.3}$$

где $\mathcal{Y}(y)$ есть некоторое множество неотрицательных процессов Y, у которых $Y_0 = y$. Для $\mathcal{Y}(y)$ выполнено $\mathcal{Y}(y) = y\mathcal{Y}(1)$, и $\mathcal{Y}(1)$ обозначают просто как $\mathcal{Y}$. Выбор множества $\mathcal{Y}$ зависит от функции полезности и предположений на модель рынка. В большинстве работ, как правило, предполагается, что $\mathcal{Y}$ содержит процессы плотности эквивалентных локально мартингальных мер. Минимальное же требование на процессы из $\mathcal{Y}$ состоит в том, что XY является супермартингалом для всех неотрицательных $X \in \mathcal{X}$. Некоторые вариации двойственной задачи предполагают (см., например, [41]), что $Y_T dP$ лежит в множестве эквивалентных локально мартингальных мер $\mathcal{M}$, в этом случае решение сводится к поиску минимума значения выражения $EV(Y_T)$ на $\mathcal{M}$. Здесь для удобства мы отождествляем меру из $\mathcal{M}$ с ее процессом плотности по P.

Для экспоненциальной полезности $U(x) = 1 - \exp(-x)$ двойственная функция имеет вид $V(y) = 1 - y + y \ln y$. Когда Y_T задает эквивалентную меру для каждого $Y \in \mathcal{Y}$, то двойственная задача сводится к минимизации $EY_T \ln Y_T$, то есть энтропии меры Q по P, где $dQ = Y_T dP$. Задача минимизации энтропии является классической задачей, рассматриваемой в различных дисциплинах, таких как финансовая математика, статистическая физика, теория информации (см. обзор в [10]), и она исследовалась в ряде работ. В [28] отмечается ее связь с задачей максимизацией портфеля инвестора, а также разбирается случай, когда Ω является дискретным пространством. Одной из наиболее известных работ по минимизации энтропии в экспоненциальной модели Леви является статья [27], дополнительный анализ задачи приводится в [34, 55].

Случай полных рынков, когда множество $\mathcal{M}$ состоит из одной единственной меры Q, был рассмотрен, в частности, в работе [47]. В статье Крамкова и Шахермайера [51] был исследован более общий случай неполных рынков для неотрицательных процессов капиталов с функцией полезности, определенной на положительной полупрямой, когда множество мартингальных мер не обязательно состоит из одной единственной (но при этом не является пустым). При этом оказалось, что для двойственной задачи множество $\mathcal{Y}(y)$ не ограничивается $\mathcal{M}$ и также включает в себя так называемые супермартингальные плотности:

$$\mathcal{Y}(y) = \{Y > 0, Y_0 = y, (X_t Y_t) \text{ есть супермартингал для } \forall X \in \mathcal{X},\ 0 \leq t \leq T\}.$$

Упомянем также работу [16], где для модели с равномерно ограниченными снизу капиталами исследуются основная задача, двойственная, связь между ними и приводятся примеры конкретных U и V.

Пусть функция $U(x)$ определена при $x > 0$, строго вогнута, строго возрастает, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям Инада:

$$U'(0) = \lim_{x\to 0} U'(x) = \infty,$$
$$U'(\infty) = \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0.$$

Предположим, что асимптотическая эластичность функции $U(x)$ строго меньше 1, то есть

$$AE(U) = \limsup_{x\to\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1.$$

Пусть $\mathcal{M} \neq 0$. Если для некоторого x выполнено $u(x) < \infty$, то тогда справедлив следующий результат.

Предложение 1.8 (Теорема 2.2 [51]). *Решения $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$ для задач (1.2) и (1.3) существуют и единственны. Если при этом $\widehat{Y}$ есть решение такой задачи (1.3), что $y = u'(x)$, то справедливы соотношения*

$$\widehat{Y}_T(y) = U'(\widehat{X}_T(x)), \quad \widehat{X}_T(x) = I(\widehat{Y}_T(y)),$$

$I = (U')^{-1}$. *Помимо этого, процесс $\widehat{X}(x)\widehat{Y}(y)$ является равномерно интегрируемым мартингалом на $[0, T]$.*

Нетрудно проверить, что логарифмическая и степенная функции полезности полностью удовлетворяют вышеприведенным условиям, значит к ним применимо предложение 1.8.

Экспоненциальная функция имеет область определения $\mathbb{R}$, поэтому предложение 1.8 нельзя применить в этом случае. Подобные функции рассматривались в статье Шахермайера [60]. В качестве $\mathcal{X}$ было введено более общее множество процессов капитала $\mathcal{X}^b$, для которого каждый $X \in \mathcal{X}^b$ ограничен снизу некоторой константой. Условия для функции U соответствующим образом поменялись, и в статье проверялось, что экспоненциальная функция им удовлетворяет. Для $u(x)$ предполагается лишь, что для некоторого x $u(x) < \lim_{x\to\infty} U(x)$. В качестве $\mathcal{Y}$ берется множество процессов абсолютно непрерывных локально мартингальных мер $\mathcal{M}^a$, при этом $v(y)$ можно записать как

$$v(y) = \inf_{Q\in\mathcal{M}^a} E\left[V(y\frac{dQ}{dP})\right]. \tag{1.4}$$

Для вышеуказанной модели и локально ограниченного S справедливо

Предложение 1.9 (Теорема 2.2 [60])**.** *Решение* $\widehat{Q}\in\mathcal{M}_a$ *для задачи (1.4) существует и единственно. Если при этом* $\widehat{Q}\in\mathcal{M}$, $u'(x)=y$ *и* $x=-v'(y)$, *то существует такой* $\widehat{X}(x)=x+H\cdot S$, *где* H *является предсказуемым и интегрируемым по* S, *что* $\widehat{X}$ *есть равномерно интегрируемый мартингал по* $\widehat{Q}$, *и для* $I=(U')^{-1}$

$$\widehat{X}_T(x) = I\left(y\frac{d\widehat{Q}(y)}{dP}\right).$$

Отметим, что процесс $\widehat{X}$ не обязательно лежит в $\mathcal{X}^b$, но при этом существует такая последовательность $X^n\in\mathcal{X}^b$, что выполнено

$$\lim_{n\to\infty} EU(X^n_T) = EU(\widehat{X}_T).$$

Глава 2

Случай логарифмической полезности и эталонного портфеля

2.1 Введение

Логарифмическая функция полезности обладает определенными свойствами, которых нет у других функций. В этом случае, как можно убедиться из предложения 1.8, оптимальный процесс капитала X^* и решение двойственной задачи Y^* связаны соотношением $X^*Y^* = 1$, и оно не зависит от времени. Таким образом, процесс $1/X^*$ является супермартингальной плотностью; более того, он однозначно характеризуется этим свойством. Процесс капитала X^* с этим свойством является эталонным портфелем и может существовать и в том случае, когда ожидаемая логарифмическая полезность равна $+\infty$. Одной из первых работ, посвященной этим и другим свойствам эталонного портфеля в общей семимартингальной модели рынка, была статья [15]. Из последующих работ отметим [46], в ней достаточно подробно исследуются свойства эталонного портфеля. При помощи триплета характеристик процесса цены актива авторы выражают условия существования эталонного портфеля, а также находят эквивалентное условие в терминах отсутствия арбитража.

Тесно связанная задача максимизации логарифмической полезности исследовалась в ряде работ, упомянем [30, 31], где рассматривалась модель многомерного семимартингального рынка с потреблением. В них обоих приводится решение данной задачи в терминах триплета характеристик процесса цены актива. В [30] по сути предполагается, что решение есть эквивалентная мартингальная мера, в [31] решение приводится для общего случая, но в менее явном виде. Задача максимизации логарифмической полезности для экспоненциальной модели Леви в предположении, что логарифмы процесса цен имеют неограниченно большие как положительные, так и отрицательные скачки, была решена с помощью двойственного метода в работе Хёрда [35]. В [44] для экспоненциальной модели Леви задача решалась в предположении, что $1/X^*$ задает эквивалентную мартингальную меру.

Мы в данной главе проводим более детальное изучение задачи максимизации логарифмической полезности и находим эталонный портфель в экспоненциальной модели Леви в явном виде. В отличие от [35] и [44] никаких предположений на процесс Леви не делается, кроме стандартного условия об отсутствии арбитража. Важное значение для описания рынка имеет классификация видов решений двойственной задачи, то есть обратной величины к эталонному портфелю. Мы все возможные случаи исследуем в терминах триплета Леви–Хинчина: приводятся условия, однозначно определяющие, задает ли решение двойственной задачи эквивалентную мартингальную меру, является ли оно мартингалом или супермартингалом. Также в терминах триплета Леви–Хинчина характеризуются условия, когда эталонный портфель существует, а единственного решения задачи логарифмической полезности нет.

2.2 Постановка задачи и основной результат

Логарифмическая функция полезности определена для положительных значений аргумента, поэтому процессы капиталов из $\mathcal{X}(x)$ должны быть в каждый момент времени неотрицательны:

$$\mathcal{X}(x) = \{X : X = x + H \cdot S,\ X \geq 0\}. \tag{2.1}$$

В дальнейшем считаем $\mathcal{X} = \mathcal{X}(1)$.

Основная задача нашего инвестора по максимизации полезности (1.2) принимает вид

$$u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} E[\ln(X_T)]. \tag{2.2}$$

Так как $\mathcal{X}(x) = x\mathcal{X}$, то задачу достаточно решить для $x = 1$. Искомый портфель в случае конечного $u(x)$ также называют log-оптимальным. Для определенности в дальнейшем термин "log-оптимальный" мы будем использовать для портфеля с начальным капиталом $x = 1$.

Решение задачи (2.2) в общем случае было найдено в работе [31].

В работе [15] было показано, что при условии NFLVR и в предположении конечности $u(x)$ log-оптимальный портфель существует, единственен и является эталонным, а супермартингал $1/X^*$ является решением двойственной задачи к (2.2) в смысле Крамкова-Шахермайера. Разумеется, возможна ситуация, когда эталонный портфель существует, а $u(x) = +\infty$.

Рассмотрим эту задачу в экспоненциальной модели Леви. Из вышесказанного и предложения 1.7 следует, что если L не является монотонным, то существует эталонный портфель X^* и $Y^* = 1/X^*$ есть ESMD. С другой стороны, существует EMM, по которой L — процесс Леви. Оказывается, что имеет место ровно одна из следующих ситуаций:

1. Y^* есть супермартингал, но не локальный мартингал (и значит, не есть EσMD и не задает ESMM).

2. Y^* есть мартингал (и значит, задает ESMM), но не является EσMD. Таким образом соответствующая ESMM не есть EσMM (и значит, не есть EMM).

3. Y^* задает EMM, по которой L есть процесс Леви.

Сделаем точную характеризацию этих случаев в терминах триплета (b, c, ν). В случае, когда логарифмы процесса цен имеют неограниченно большие как положительные, так и отрицательные скачки, задача была рассмотрена в [35].

Введем множество $\mathfrak{C} = \{p : \nu\{x : (1+px) < 0\} = 0\}$. Когда у L есть скачки, то $\mathfrak{C}$ можно записать в более явном виде. Когда скачки ограничены, обозначим через $[\lambda, \gamma]$ минимальный отрезок (либо точку), содержащий $supp(\nu)$. В случае наличия неограниченных скачков это будет полупрямая $[\lambda, \gamma),\ \gamma = +\infty$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{C}$ будет замыканием $(\overline{M}, \overline{N})$, где

$$\overline{M} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\gamma}, & \text{при } 0 < \gamma < +\infty; \\ -\infty, & \text{при } \gamma \le 0; \\ 0, & \text{при } \gamma = +\infty; \end{cases}$$

$$\overline{N} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\lambda}, & \text{при } \lambda < 0; \\ +\infty, & \text{при } \lambda \ge 0. \end{cases}$$

$\overline{M}$ и $\overline{N}$ связаны соотношением

$$-\infty \le \overline{M} \le 0 \le 1 \le \overline{N} \le +\infty.$$

Обозначим через F_1 и F_2 следующие выражения:

$$F_1 = c\overline{N} - b + \int_{|x|\le 1} \frac{x^2}{|(1/\overline{N}) + x|}\nu(dx) - \int_{x>1} \frac{x}{1+\overline{N}x}\nu(dx),$$

$$F_2 = c\overline{M} - b + \int_{|x|\le 1} \frac{-x^2}{|(1/\overline{M}) + x|}\nu(dx) - \int_{x>1} \frac{x}{1+\overline{M}x}\nu(dx).$$

При подсчете значений этих выражений пользуемся правилами: $0 \cdot \infty = 0$, $1/\infty = 0$, $1/0 = \infty$. Нетрудно заметить, что все интегралы определены, так как подынтегральные выражения имеют постоянный знак в $supp(\nu)$.

Теперь сформулируем основной результат. Все используемые неравенства допускают сравнение и бесконечных значений в одной из своих частей.

Теорема 2.1. *В экспоненциальной модели Леви на конечном интервале времени $[0, T]$ для процесса $Y^* = 1/X^*$, где X^* — эталонный портфель, справедливо следующее.*

1. *Y^* задает EMM при выполнении любого из трех нижеследующих условий:*

   (i)

$$\begin{aligned} &b + \int_{x>1} x\nu(dx) > 0 \text{ и} \\ &F_1 \geq 0, \textit{при}\, \overline{N} < +\infty, \\ &F_1 > 0, \textit{при}\, \overline{N} = +\infty; \end{aligned}$$

   (ii)

$$b + \int_{x>1} x\nu(dx) = 0;$$

   (iii)

$$\begin{aligned} &b + \int_{x>1} x\nu(dx) < 0 \text{ и} \\ &F_2 \leq 0, \textit{при}\, \overline{M} > -\infty, \\ &F_2 < 0, \textit{при}\, \overline{M} = -\infty. \end{aligned}$$

2. *Y^* является мартингалом, но не $E\sigma$ MD (и, следовательно, не задает $E\sigma$ MM), когда выполнено*

$$b + \int_{x>1} x\nu(dx) < 0,$$
$$\overline{M} = 0.$$

3. *Y^* есть супермартингал, но не локальный мартингал, когда имеет место одно из двух нижеследующих условий:*

   (i)

$$b + \int_{x>1} x\nu(dx) > 0,$$
$$F_1 < 0 \text{ и } \overline{N} < +\infty;$$

   (ii)

$$b + \int_{x>1} x\nu(dx) < 0,$$
$$F_2 > 0 \text{ и } -\infty < \overline{M} < 0.$$

Отметим, что во всех случаях, не покрытых в теореме, процесс L будет монотонным и эталонного портфеля не существует.

2.3 Доказательство теоремы

Наша основная задача заключается в нахождении кандидата на роль эталонного портфеля X^* и проверке того, что X/X^* есть супермартингал $\forall X \in \mathcal{X}$. При этом достаточно ограничиться случаем, когда $X > 0$ и $X_- > 0$. Действительно, если $X = 1 + H \cdot S$, то можно взять последовательность $X^n = 1 + H^n \cdot S$, где $H^n = \frac{n-1}{n}H$. Поскольку $X^n \geq \frac{1}{n}$ и X^n_t сходятся по вероятности к X_t для всех t, то из того, что для каждого n X^n/X^* есть супермартингал, следует, что X/X^* является супермартингалом.

Начиная с этого момента считаем, что $X > 0, X_- > 0$. Для такого X удобнее пользоваться другим представлением. А именно, так как $X = 1 + \widetilde{H} \cdot S$, то, полагая $H = (\widetilde{H} S_-)/X_-$, получим

$$1 + X_- H \cdot L = 1 + \widetilde{H} S_- \cdot L = 1 + \widetilde{H} \cdot S = X.$$

Значит, X представим в виде

$$X = \mathcal{E}(H \cdot L). \tag{2.3}$$

Верно и обратное: если X представим в виде (2.3), и $X > 0, X_- > 0$, то $X \in \mathcal{X}$. В частности, мы будем искать эталонный портфель в виде $\mathcal{E}(H^* \cdot L)$.

Лемма 2.1. *Если* $X = \mathcal{E}(H \cdot L)$, *где* $X > 0, X_- > 0$, *то* $H_t \in \mathfrak{C}$ $dPdt$ *п.в.*

Доказательство. Из (2.3) следует, что для п.в. ω

$$X_t = X_{t-} + X_{t-} H_t \Delta L_t = X_{t-}(1 + H_t \Delta L_t),$$

для всех t, откуда $1 + H_t \Delta L_t > 0$. Значит,

$$E \int \mathbb{1}_{[1+H_t(\omega)x<0]} \mu_L(\omega, dt, dx) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$E \int \int \mathbb{1}_{[1+H_t(\omega)x<0]} \nu(dx) dt = 0,$$

поэтому $\nu(x : 1 + H_t(\omega)x < 0) = 0$ $dPdt$ п.в. Значит, по определению $H \in \mathfrak{C}$ $dPdt$ п.в. □

Определим для $y \in \mathfrak{C}$ функцию

$$F(y) = cy - b + \int_{|x| \le 1} \frac{yx^2}{1 + yx} \nu(dx) - \int_{x > 1} \frac{x}{1 + yx} \nu(dx). \tag{2.4}$$

В лемме 2.2 будет, в частности, показано, что F корректно определена и может принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ только в граничных точках $\mathfrak{C}$.

Лемма 2.2. *Функция $F(y)$ обладает следующими свойствами:*

1. *Конечна в $(\overline{M}, \overline{N})$.*

2. *Непрерывна и монотонно возрастает в $\mathfrak{C}$.*

3. $\lim_{y\to\overline{N}-} F(y) = F_1,\ \lim_{y\to\overline{M}+} F(y) = F_2$.

4. *Если F конечна, то интегралы, входящие в F, также конечны.*

Доказательство. Посмотрим на (2.4). Слагаемое $cy - b$ непрерывно и монотонно. Третье и четвертое слагаемое обозначим через $I_3(y)$ и $I_4(y)$:

$$I_3(y) = \int_{|x|\le 1} \frac{yx^2}{1+yx}\nu(dx),$$

$$I_4(y) = \int_{x>1} \frac{x}{1+yx}\nu(dx).$$

По определению процесса Леви

$$\nu\{0\} = 0, \quad \int_{|x|\le 1} x^2\nu(dx) < \infty \quad \text{и} \quad \int_{x>1} \nu(dx) < \infty. \tag{2.5}$$

Рассмотрим $I_3(y)$. Из определения $\mathfrak{C}, \overline{M}, \overline{N}$ следует, что для $\forall y \in (\overline{M}, \overline{N})$ и $\forall x \in supp(\nu)$ выполнено $1 + xy \ge \epsilon_0(y) > 0$. То есть при $x \in supp(\nu)$ знаменатель подынтегрального выражения ограничен снизу, что означает вместе с (2.5), что $I_3(y) < \infty$ для любого $y \in (\overline{M}, \overline{N})$.

Теперь покажем, что $I_4(y) < \infty$ для любого $y \in (\overline{M}, \overline{N})$. Если $y > 0$, то из (2.5)

$$I_4(y) = \frac{1}{y}\int_{x>1} \frac{x}{\frac{1}{y}+x}\nu(dx) \le \frac{1}{y}\int_{x>1} \nu(dx) < \infty.$$

Если же $\overline{M} < 0$, то числитель подынтегрального выражения в $I_4(y)$ будет ограничен $\gamma < +\infty$. Знаменатель ограничен снизу в силу рассуждений, что были проведены для $I_3(y)$. Значит, $I_4(y) \le C(y)\int_{x>1}\nu(dx) < \infty$, где $C(y)$ — константа. Таким образом мы показали, что $I_3(y)$ и $I_4(y)$ определены и конечны для $\forall y \in (\overline{M}, \overline{N})$. При возрастании y подынтегральное выражение I_3

не убывает, а в I_4 не возрастает. Поэтому по теореме о монотонной сходимости интегралы I_3 и I_4 будут непрерывны и монотонны по y на интервале $(\overline{M}, \overline{N})$. Отсюда заключаем, что $F(y)$ конечна, непрерывна и монотонно возрастает по y в $(\overline{M}, \overline{N})$. Из теоремы о монотонной сходимости также вытекает свойство 3, что, в свою очередь, влечет свойство 2.

В граничных точках F может принять бесконечное значение в том случае, когда у точки, являющейся нижней или верхней границей $supp(\nu)$, есть ненулевая мера, либо когда плотность меры ν недостаточно быстро убывает при подходе к ней. Предположим, $1 \le \overline{N} < +\infty$. Тогда подынтегральное выражение I_4 для $y = \overline{N}$ ограничено при $x > 1$, значит $I_4(\overline{N}) < \infty$. Пусть $-\infty < \overline{M} \le 0$, рассмотрим случаи в зависимости от значения $\overline{M}$. Если $\overline{M} \le -1$, то $I_4(\overline{M}) \equiv 0$ так как $\nu(1, +\infty) = 0$. При $-1 < \overline{M} \le 0$ знаменатель подынтегрального выражения $I_3(\overline{M})$ будет ограничен снизу $1 + \overline{M}$, значит $|I_3(\overline{M})| < \infty$. Из наших рассуждений вытекает, что во всех случаях хотя бы один из интегралов I_3, I_4 конечен. Значит, если F конечна, то и эти оба интеграла конечны, это доказывает свойство 4. $\square$

Опишем кратко идею, лежащую в основе выбора эталонного портфеля. С помощью формулы Йора $\mathcal{E}(Y)\mathcal{E}(Z) = \mathcal{E}(Y + Z + [Y, Z])$ можно записать в случае существования отношение двух стохастических экспонент в виде $\mathcal{E}(X)/\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(Z)$, где

$$Z = X - Y - [X^c - Y^c, Y^c] - \sum_{s \le \cdot} \Delta(X_s - Y_s) \frac{\Delta Y_s}{1 + \Delta Y_s}. \tag{2.6}$$

Применим ее к X, X^*, получим, что соответствующий процесс Z имеет вид $Z = (H - H^*) \cdot L'(H^*), L'(H^*) = L - \int cH^* dt - \left[\frac{H^* x}{1+H^* x} x\right] * \mu$. В предположении, что члены, входящие в Z, являются специальными семимартингалами, предсказуемый процесс ограниченной вариации из канонического разложения специального семимартингала Z будет представим в виде $\int (H^* - H) F(H^*) ds$. Если F обращается в 0 в $\mathfrak{C}$, то естественно положить H^* равным ее корню. Иначе, она будет либо отрицательна, тогда мы берем $H^* = \overline{N}$, либо положительна, тогда берем $H^*=\overline{M}$. В силу леммы 2.1 $(H-H^*)$ будет одного знака. Во всех случаях $F(H^*)(H^*-H)\le 0$ и Z есть локальный супермартингал.

Теперь проведем более подробные рассуждения. Найдем случаи, когда у F есть корень. При $b+\int_{x>1}x\nu(dx)=0$ очевидно выполнено $F(0)=0$. При $b+\int_{x>1}x\nu(dx)>0$ или $+\infty$ либо $F(0)<0$, либо $F(0)=-\infty$ и для всех достаточно малых $x_0>0$ $F(x_0)<0$. F монотонна и непрерывна. Поэтому уравнение $F(y)=0$ имеет корень в $\mathfrak{C}$ в том и только том случае, когда

$$\lim_{y\to\overline{N}-}F(y)=F_1\ge 0, \text{при } \overline{N}<+\infty,$$
$$\lim_{y\to\overline{N}-}F(y)=F_1>0, \text{при } \overline{N}=+\infty.$$

Остался случай $b+\int_{x>1}x\nu(dx)<0$. Тогда $F(0)>0$, и опять в силу монотонности и непрерывности корень в $\mathfrak{C}$ есть в том и только том случае, когда

$$\lim_{y\to\overline{M}+}F(y)=F_2\le 0, \text{при } \overline{M}>-\infty,$$
$$\lim_{y\to\overline{M}+}F(y)=F_2<0, \text{при } \overline{M}=-\infty.$$

Ни в каком другом случае корня быть не может.

При наличии корня положим H^* равным его значению и покажем, что $1/\mathcal{E}(H^*\cdot L)$ задает ЕММ. По лемме 2.2

$$\int_{|x|\le 1}\frac{H^*x^2}{1+xH^*}d\nu<\infty, \qquad \int_{x>1}\frac{x}{1+H^*x}d\nu<\infty. \tag{2.7}$$

Также $1+H^*\Delta L>0$ п.н. Из этого следует, что определено выражение $1/\mathcal{E}(H^*\cdot L)$, и мы можем записать по формуле Йора

$$\frac{1}{\mathcal{E}(H^*\cdot L)}=\mathcal{E}(-H^*L+H^{*2}[L^c,L^c]+\sum_{s\le\cdot}\frac{(H^*\Delta L)^2}{1+H^*\Delta L}).$$

Преобразуем выражение под экспонентой в правой части этого равенства, добавив и вычтя интегралы из (2.7), умноженные на tH^*:

$$L'_t := -H^*L_t + H^{*2}ct + H^{*2}\frac{x^2}{1+H^*x} * (\mu_L)_t = -H^*bt - H^*L^c_t$$
$$+ H^{*2}ct - H^*h * (\mu_L - \nu_L)_t - H^*(x-h) * (\mu_L)_t + H^{*2}\frac{x^2}{1+H^*x} * (\mu_L)_t$$
$$= H^*F(H^*)t - H^*L^c_t - \frac{H^*h}{1+H^*x} * (\mu_L - \nu_L)_t - \frac{H^*(x-h)}{1+H^*x} * (\mu_L - \nu_L)_t$$
$$= -H^*L^c_t - \frac{H^*x}{1+H^*x} * (\mu_L - \nu_L)_t.$$

Нетрудно убедиться, что процесс L' имеет детерминированный однородный триплет, тогда по предложению 1.2 он является процессом Леви. К тому же по (1.1) он является локальным мартингалом. Из предложения 1.6 получаем, что $\mathcal{E}(L')$ является мартингалом, значит, задает вероятностную меру. С помощью предложения 1.5 нетрудно найти триплет L по этой новой мере. Из его вида следует, что L вновь является процессом Леви и, более того, мартингалом по новой мере. Из этого получаем, что $\mathcal{E}(L')$ задает EMM и $\mathcal{E}(H^* \cdot L)$ есть эталонный портфель.

Теперь предположим, что F не имеет корня. Пусть $b + \int_{x>1} x\nu(dx) > 0$ или равно $+\infty$. Если у L есть отрицательные скачки ($\nu[-1,0] \neq 0$), то $\overline{N} < +\infty$ и $F_1 = F(\overline{N}) < 0$. То есть, мы находимся в случае 3(i) теоремы. В рассматриваемой ситуации положим $H^* = \overline{N}$. Ниже будет показано, что при таком выборе H^* $\mathcal{E}(H^* \cdot L)$ будет эталонным портфелем.

Если отрицательных скачков у L нет ($\nu[-1,0] = 0$), то $\overline{N} = +\infty$. Условие отсутствия корня у F, равносильное в данной ситуации тому, что $F_1 \leq 0$, запишется как $c = 0$ и $b - \int_{|x|\leq 1} x\nu(dx) \geq 0$, то есть процесс L является монотонным.

Проведем аналогичные рассуждения, когда $b + \int_{x>1} x\nu(dx) < 0$. Если $\nu(0,+\infty) \neq 0$, то $\overline{M} > -\infty$ и $F_2 = F(\overline{M}) > 0$. При этих предположениях положим $H^* = \overline{M}$. Ниже будет показано, что при таком выборе H^* $\mathcal{E}(H^* \cdot L)$ будет эталонным портфелем. Если же $\nu(0,+\infty) = 0$, то есть $\overline{M} = -\infty$, то условие $F_2 \geq 0$ эквивалентно тому, что $c = 0$ и $b - \int_{|x|\leq 1} x\nu(dx) \leq 0$, что означает монотонность L по предложению 1.3.

Таким образом, при отсутствии корня у F мы определили значение H^* в тех оставшихся случаях, которые отвечают безарбитражному рынку. Покажем, что именно $X^* = \mathcal{E}(H^* \cdot L)$ будет эталонным портфелем. Рассмотрим произвольный строго положительный $X \in \mathcal{X}$. Предположим сначала, что процесс H — ограниченный. Тогда он интегрируем по любому семимартингалу. В силу выбора H^* имеем $F(H^*) < \infty$, что влечет (2.7) в силу леммы 2.2. Помимо этого, $1 + H^*\Delta L > 0$ п.н., поэтому определено отношение $\mathcal{E}(H \cdot L)/\mathcal{E}(H^* \cdot L)$, и мы можем записать его с помощью (2.6):

$$\frac{\mathcal{E}(H \cdot L)}{\mathcal{E}(H^* \cdot L)} = \mathcal{E}(H \cdot L - H^* \cdot L - [H \cdot L^c - H^* \cdot L^c, H^* \cdot L^c] - \sum_{s \le \cdot} \frac{(H - H^*)H^*(\Delta L)^2}{1 + H^*\Delta L}).$$

Обозначим через Z процесс, стоящий под знаком стохастической экспоненты в правой части последнего равенства. Тогда

$$\begin{aligned} Z = &\int (H - H^*)bds + \int H^*(H^* - H)cds + (H - H^*) \cdot L^c \\ &+ (H - H^*)(x - h) * \mu_L + (H - H^*)h * (\mu_L - \nu_L) + \frac{(H^* - H)H^*x^2}{1 + H^*x} * \mu_L \\ &= \int (H^* - H)(cH^* - b)ds + (H - H^*) \cdot L^c + \frac{(H - H^*)(x - h)}{1 + H^*x} * \mu_L \\ &+ (H - H^*)h * (\mu_L - \nu_L) + \frac{(H^* - H)H^*h^2}{1 + H^*x} * \mu_L. \end{aligned}$$

Добавим и вычтем интегралы из (2.7), умноженные на $(H^* - H)$ и проинтегрированные от 0 до t.

$$\begin{aligned} Z = &\int (H^* - H)(cH^* - b)ds - (H^* - H) \cdot L^c + \frac{(H - H^*)x}{1 + H^*x} * (\mu_L - \nu_L) \\ &+ \int (H^* - H)(\int_{|x| \le 1} \frac{H^*x^2}{1 + xH^*}d\nu - \int_{x > 1} \frac{x}{1 + H^*x}d\nu)ds \\ &= -(H^* - H) \cdot L^c - \frac{(H^* - H)x}{1 + H^*x} * (\mu_L - \nu_L) + \int (H^* - H)F(H^*)ds. \end{aligned}$$

Обозначим $N = -(H^* - H) \cdot L^c - \dfrac{(H^* - H)x}{1 + H^*x} * (\mu_L - \nu_L)$, $B = \int (H^* - H)F(H^*)ds$, тогда $Z = N + B$. Из ограниченности H^* и H следует, что

N является локальным мартингалом, в то время как $(H^* - H)F(H^*) \leq 0$ в силу выбора H^* и леммы 2.1. Поэтому B представляет собой убывающий процесс. Значит, Z есть локальный супермартингал, откуда получаем, что и $\mathcal{E}(Z)$ есть локальный супермартингал. Ввиду своей неотрицательности, $\mathcal{E}(Z)$ будет просто супермартингалом.

Для произвольного H рассмотрим последовательность $H^n = H\mathbb{1}_{|H| \leq n}$. Так как $\Delta(H^n \cdot L) = H^n \Delta L = \mathbb{1}_{|H| \leq n} \Delta(H \cdot L) > -1$, то в силу доказанного $\mathcal{E}(H^n \cdot L)/\mathcal{E}(H^* \cdot L)$ — супермартингал. Поскольку $H^n \cdot L = \mathbb{1}_{|H| \leq n} \cdot (H \cdot L)$ сходится по вероятности к $H \cdot L$ равномерно по t (см. теорему I.4.31 в [39]), то из явного вида стохастической экспоненты нетрудно получить, что $\forall t \;\; \mathcal{E}(H^n \cdot L)_t \xrightarrow{P} \mathcal{E}(H \cdot L)_t$. Таким образом $\mathcal{E}(H \cdot L)/\mathcal{E}(H^* \cdot L)$ есть супермартингал как предел неотрицательных супермартингалов. Это и показывает, что H^* задает эталонный портфель.

Для того, чтоб убедиться в справедливости теоремы 2.1, осталось выяснить, когда при отсутствии корня у F процесс Y^* будет локальным мартингалом и показать, что тогда он не будет $\mathrm{E}\,\sigma\,\mathrm{MD}$. Рассмотрим введенный выше процесс Z при $H = 0$. Тогда $Y^* = \mathcal{E}(Z)$ и $Z_t = N_t + tH^*F(H^*)$, откуда $Y_t = \mathcal{E}(N_t)e^{kt}, k = H^*F(H^*) \leq 0$. Так как $\mathcal{E}(N)$ — строго положительный локальный мартингал, то Y будет локальным мартингалом только в случае $k = 0$. То есть, когда $H^* = \overline{M} = 0$. Покажем, что тогда $Y^* = 1$ не является $\mathrm{E}\,\sigma\,\mathrm{MD}$. Для этого нужно проверить, что процесс цены S не является σ-мартингалом. Поскольку в рассматриваемом случае $b + \int_{x<1} x\nu dx < 0$, то L является супермартингалом, но не мартингалом. Значит, $S = \mathcal{E}(L)$ не является локальным мартингалом и в силу неотрицательности σ-мартингалом.

Сформулируем два утверждения, дополняющие теорему 2.1, которые вытекают из полученных результатов. Первое из них непосредственно следует из доказательства теоремы.

Утверждение 2.1. *Капитал эталонного портфеля имеет вид* $X^* = \mathcal{E}(\alpha L)$, *где* α *либо является корнем уравнения* $F(\alpha) = 0$, *либо равно* $\overline{N}$ *или*

$\overline{M}$.

Отметим, что из вида функции F нетрудно понять, в какой именно ситуации мы находимся и какая константа задает оптимальный портфель. Если есть такое $\alpha \in \mathfrak{C}$, что $F(\alpha) = 0$, то α задает X^*. Если это не выполнено, то остаются две возможных взаимоисключающих ситуации. При $\overline{M} > -\infty$, $F(\overline{M}) > 0$ $\alpha = \overline{M}$, при $\overline{N} < +\infty$, $F(\overline{N}) < 0$ $\alpha = \overline{N}$.

Утверждение 2.2. *Для логарифмической функции полезности log-оптимальный портфель существует тогда и только тогда, когда существует эталонный портфель X^* и $E \ln X_T^* < \infty$. В этом случае log-оптимальный портфель совпадает с эталонным. Если эталонный портфель существует, то условие $E \ln X_T^* = +\infty$ эквивалентно тому, что $\int (\ln x \mathbb{1}_{x>1}) d\nu = \infty$, $\overline{M} = 0$ и $b + \int_{x>1} x\nu(dx) > 0$.*

Доказательство. Пусть эталонный портфель существует. Для всех $X \in \mathcal{X}$ выполнено соотношение $0 \leq E(X_T/X_T^*) \leq 1$. Применим неравенство Йенсена: $E \ln(X_T/X_T^*) \leq 0$. Полагая $X = 1$, получим, что $E \ln X_T^* \geq 0$. Предположим сначала, что $E \ln X_T^* < +\infty$. Тогда $E \ln X_T^*$ конечно и $\forall X \in \mathcal{X}$ $E \ln X_T \leq E \ln X_T^*$ и X^* есть log-оптимальный портфель. Если $E \ln X_T^* = +\infty$, то, очевидно, log-оптимального портфеля не существует, более того, существует бесконечно много портфелей с бесконечной логарифмической полезностью. Действительно, X^* представим как $X^* = 1 + \widetilde{H}^* \cdot S$, где $\widetilde{H}^* \neq 0$, отсюда видно, что $\forall\ \theta \in (0,1)$ процесс $H^\theta = \theta \widetilde{H}^*$ определяет портфель X^θ, у которого $E \ln X_T^\theta = +\infty$.

Далее, предположим, что эталонного портфеля не существует. Как уже было замечено, это равносильно тому, что L монотонно не возрастает, либо не убывает, что будет верно и для S, кроме того, $L \not\equiv 0$. Если S возрастает, то для $X^n = 1 + n(S-1) \in \mathcal{X}$ $E \ln X_T^n \to \infty$. Значит, log-оптимального портфеля нет. Для убывающего случая все аналогично.

Пусть $X^* = \mathcal{E}(H^* \cdot L)$ есть эталонный портфель. Из следствия II.8.16 в [39] вытекает, что $\widetilde{L} = \ln X^*$ есть процесс Леви с мерой Леви $\widetilde{\nu}$, которая является образом ν при отображении $x \to \ln(1 + H^*x)$. Как мы показали ранее, $E\widetilde{L_T} \geq 0$, поэтому конечность $E\widetilde{L_T}$ эквивалентна сходимости интегралов

$$\int x \mathbb{1}_{x>1} \widetilde{\nu}(dx) = \int \ln(1 + H^*x) \mathbb{1}_{\{\ln(1+H^*x)>1\}} \nu(dx). \tag{2.8}$$

Если $H^* \leq 0$, то $1 + H^*x \leq 1 - H^*$, откуда следует конечность правого интеграла в (2.8). Пусть $H^* > 0$, что, как следует из доказательства теоремы, имеет место тогда и только тогда, когда $b + \int_{x>1} x\nu(dx) > 0$. Если скачки L ограничены сверху, то интеграл, очевидно, тоже конечен. Если же $\gamma = +\infty$, то $\overline{M} = 0$, и сходимость правого интеграла в (2.8), очевидно, эквивалентна сходимости интеграла $\int (\ln x \mathbb{1}_{x>1}) d\nu$. □

Данная связь между эталонным и log-оптимального портфелем помогает по-другому взглянуть на результат теоремы 2.1. По предложению 1.8 решение двойственной задачи имеет вид $1/X^*$, поэтому приведенную классификацию в полной мере можно применить к решению двойственной задачи.

В заключение приведем два примера.

Пример 2.1. Рассмотрим случай, когда у процесса Леви L нет скачков, тогда $L_t = bt + \sqrt{c}B_t$ и

$$F(y) = cy - b.$$

В случае $c = 0$ L является монотонным, а при $c \neq 0$ для $H^* = b/c$ выполнено $F(b/c) = 0$.

Оптимальный портфель совпадает с эталонным и имеет вид

$$X_t^* = \mathcal{E}(\frac{b}{c} L_t).$$

Обратная к нему величина

$$Y_t^* = \frac{1}{X_t^*} = \frac{1}{\mathcal{E}(\frac{b}{c} L_t)}$$

есть процесс плотности EMM.

Следующий пример реализует ситуацию п.2 теоремы 2.1.

Пример 2.2. Теперь предположим, что скачки у процесса Леви только положительного знака и плотность меры Леви задается функцией $1 \wedge 1/x^3, x > 0$. Это возможно, так как

$$\int_0^{+\infty} (1 \wedge x^2)(1 \wedge \frac{1}{x^3})dx < \infty.$$

Константу b выберем так, чтобы $b + \int_{x>1} x\nu(dx) < 0$, достаточно положить $b = -1$. Значение c неважно, гауссовская компонента может и отсутствовать. В итоге построенный нами процесс Леви имеет триплет $(-1, c, 1 \wedge x^3), c \geq 0$.

Нетрудно убедиться, что $\overline{M} = 0$, так как у нас присутствуют бесконечно большие скачки. Это вместе с условием $b + \int_{x>1} x\nu(dx) < 0$ гарантирует нам, что для данного процесса Леви L выполнены условия п.2 теоремы 2.1. При этом у F нет корня, а $\overline{N} = +\infty$, то есть по утверждению 2.1 оптимальное решение достигается на $\overline{M} = 0$, значит

$$X^* = 1.$$

Отсюда нетрудно определить $Y^* = 1/X^* = 1$. Проверим справедливость утверждений в теореме. Y^* есть константа, а значит, мартингал. Так как $b + \int_{x>1} x\nu(dx) < 0$, то по исходной мере P процесс цены S есть супермартингал. $Y^* = 1$ задает процесс плотности перехода к той же самой мере P, по которой S не является мартингалом, а это значит, что Y^* не задает EMM. Подобная ситуация имеет определенную и экономическую интерпретацию. Действительно, когда у нас процесс цены актива есть строгий супермартингал, как в нашем примере, то его математическое ожидание убывает, то есть он теряет в стоимости. Вкладываться в подобный актив невыгодно и при оптимальной стратегии мы не покупаем его, сохраняя начальный капитал.

Глава 3

Связь между задачами максимизации степенной полезности и логарифмической

3.1 Введение и основные результаты

В данной главе мы рассмотрим случай степенной полезности.

На нашем рынке присутствует агент, цель которого — максимизировать ожидаемую полезность актива в конечный момент времени для степенной функции $U(x) = x^p/p$, $p < 1$, $p \neq 0$:

$$u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} E\,U(X_T). \tag{3.1}$$

В дальнейшем мы будем выделять два случая для p: $p < 0$ и $0 < p < 1$. Последний случай является более сложным, многие соотношения и выкладки для $0 < p < 1$ будут очевидным образом выполняться для $p < 0$. Так же отметим тот момент, что для $p < 0$ $U(x)$ отрицательна и, как следствие, всегда ограничена сверху. $\mathcal{X}(x)$ имеет вид (2.1), $\mathcal{X}(x) = x\mathcal{X}$, поэтому задачу достаточно решить для $x = 1$. В наших рассуждениях мы будем исходить из предположения, что $u(x) < \infty$, равносильное тому, что решение (3.1) X^* удовлетворяет $EX_T^{*p} < \infty$. Двойственная задача к (3.1) имеет вид

$$v(y) = \inf_{Y \in \mathcal{Y}(y)} E\, V(Y_T), \tag{3.2}$$

где $V(y) = \sup_{x>0}(U(x) - xy)$, $y > 0$, а $\mathcal{Y}(y) = \{Y > 0, Y_0 = y, (X_t Y_t)$ есть супермартингал $\forall X \in \mathcal{X}$, $0 \le t \le T\}$. Отметим, что для функции $U(x) = x^p/p$, $0 < p < 1$, $V(y) = \frac{1-p}{p} y^{\frac{p}{p-1}}$. Поскольку $\mathcal{Y}(y) = y\mathcal{Y}(1)$, то двойственную задачу (1.3) достаточно решить для $y = 1$ в рассматриваемом случае.

В данной главе мы также работаем в экспоненциальной модели Леви и предполагаем, что цена актива есть стохастическая экспонента процесса Леви L.

$$S = \mathcal{E}(L), \text{ где } \Delta L > -1.$$

Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда $L = 0$.

Напомним, что процесс L является монотонным тогда и только тогда, когда выполнено либо $c = 0, \nu[x < 0] = 0, b - \int x \mathbb{1}_{|x|\le 1} \nu(dx) \ge 0$, либо $c = 0, \nu[x > 0] = 0, b - \int x \mathbb{1}_{|x|\le 1} \nu(dx) \le 0$, см. предложение 1.3. Если процесс L является монотонным (и ненулевым), то $u(x) \equiv +\infty$, как для логарифмической полезности, так и для степенной при $0 < p < 1$, а при $p < 0$ $u(x) \equiv 0$. Поэтому мы также исключаем этот случай из дальнейшего рассмотрения.

Как видно из результатов главы 2, задача максимизации логарифмической полезности тесно связана с задачей поиска эталонного портфеля. Мы убедились, что портфель, максимизирующий логарифмическую полезность, всегда является эталонным, но возможна ситуация, когда эталонный портфель существует, а ожидаемая логарифмическая полезность равна $+\infty$, необходимые и достаточные условия для этого приводятся в утверждении 2.2. Поэтому в данной главе мы будем рассматривать именно задачу поиска эталонного портфеля.

В общей конечномерной семимартингальной модели рынка достаточно часто портфель, максимизирующий ожидаемую полезность для функции полезности U общего вида, является эталонным по некоторой эквивалентной мере. К примеру, из рассуждений работы [61] следует, что если выполнено условие отсутствия неограниченной прибыли с ограниченным риском (NUPBR) и терминальное значение капитала портфеля строго положительно и является максимальным элементом среди терминальных значений процессов из класса $\mathcal{X}$, то этот портфель является эталонным по некоторой эквивалентной мере.

Если предположить, что в задаче максимизации полезности для функции U выполнены условия предложения 1.8, то можно указать явный вид меры Q (относительно P), по которой портфель $X^*(x)$ для U будет эталонным:

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{X^*_T(x)U'(X^*_T(x))}{xu'(x)} = \frac{Y^*_T(u'(x))I(Y^*_T(u'(x)))}{xu'(x)}, \ I = -V'. \tag{3.3}$$

Действительно, по этой теореме между терминальными значениями решений прямой и двойственной задачи X^* и Y^* выполнены соотношения $X^*_T(x) = I(Y^*_T(u'(x)))$, $Y^*_T(u'(x)) = U'(X^*_T(x))$, I есть обратная функция к U', а процесс $X^*(x)Y^*(u'(x))$ является равномерно интегрируемым мартингалом на $[0,T]$. Это означает, что мы можем по формуле (3.3) корректно задать меру Q, для которой $Z = \dfrac{X^*(x)Y^*(u'(x))}{xu'(x)}$ есть процесс плотности. По определению Y^* для любого $X \in \mathcal{X}$ процесс XY^* является супермартингалом, тогда $(X/X^*)Z$ также есть супермартингал по P, а X/X^* — по Q. Значит X^* является эталонным портфелем по Q, что и требовалось показать.

Из формулы (3.3) следует, что для нахождения Z необходимо знать решение либо прямой, либо двойственной задачи. В данной работе для экспоненциальной модели Леви и степенной полезности мы укажем явный вид Z и Q в терминах триплета (b,c,ν). Оказывается, по мере Q процесс L также является процессом Леви.Таким образом, задача максимизации степенной полезности сводится к задаче нахождения эталонного портфеля в экспоненциальной модели Леви. Также отметим, что для степенной полезности выполнены условия вышеупомянутой теоремы, процесс плотности Z не зависит от x, так как $\mathcal{X}(x) = x\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}(y) = y\mathcal{Y}(1)$, а формула (3.3) приобретает вид:

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{(X_T^*(1))^p}{u'(1)} = \frac{(Y_T^*(u'(1)))^{\frac{p}{p-1}}}{u'(1)}.$$

Задача максимизации степенной полезности рассматривалась в различных статьях. К примеру, в [44] она была решена в многомерном случае при наличии некоторых предположений, одно из которых по сути означало, что для некоторой другой меры, однозначно определенной L, решение двойственной задачи есть эквивалентная мартингальная мера. В работе [41] авторы исследовали двойственную задачу в этом же предположении. У нас же в статье задача решается без этого предположения. В статье [52] основная задача была решена при помощи двойственной, при этом предполагалось отсутствие скачков у процесса цены акций. В [56] данная проблема исследовалась при наличии процесса потребления и многомерном процессе цены акций. Был найден определенный вид решения основной задачи, потом делался переход к двойственной задаче, для которой в свою очередь также находился некоторый вид решения в предположении его существования.

В данной главе мы рассматриваем максимально общую ситуацию в одномерном случае. Никаких ограничений на L не накладывается, кроме необходимого предположения об отсутствии арбитража. Основная наша цель – показать, что оптимальный портфель в задаче степенной полезности всегда является эталонным портфелем относительно некоторой эквивалентной меры, по которой процесс L также является процессом Леви. При этом и искомый портфель, и эта мера полностью определяются триплетом Леви процесса L. Помимо этого, подобная связь оказывается справедлива и для решения двойственных задач. С ее помощью нетрудно записать аналог теоремы 2.1, то есть классифицировать в терминах процесса L случаи, характеризующие мартингальные свойства решения двойственной задачи.

Следующая теорема показывает связь между решениями задач максимизации степенной полезности и логарифмической.

Теорема 3.1. *Пусть дана задача максимизации степенной полезности (3.1) для меры* P*, относительно которой* L *является немонотонным процессом Леви. Тогда условие* $E(X_T^*)^p < \infty$ *эквивалентно* $\int_{x>1} x^p d\nu < \infty$*. В этом предположении существует единственная константа* y^**, которая задает такую меру* Q *с параметрами Гирсанова* $(\beta, Y) = (py^*, (1+y^*x)^p)$*, что по ней* $\mathcal{E}(y^*L)$ *есть эталонный портфель. При этом* $\mathcal{E}(y^*L)$ *есть оптимальный портфель и по исходной мере* P *для задачи степенной полезности.*

Решение, когда оно существует, в степенном и логарифмическом случае всегда имеет вид $\mathcal{E}(y^*L)$, где y^* есть константа, полностью определяющаяся триплетом L. В дальнейшем под решением иногда будем подразумевать именно эту константу. Также отметим, что для случая $p < 0$ условие $E(X_T^*)^p < \infty$ выполнено ввиду того, что в этом случае в (3.1) $U(x) < 0$, и при $p < 0$ выполнено условие $\int_{x>1} x^p d\nu < \infty$ по определению процесса Леви.

С помощью предложения 1.4 для процесса L нетрудно посчитать триплет характеристик (B', C', ν'_L) относительно меры Q из теоремы 3.1. Он имеет вид

$$B'_t = b't,\ C'_t = c't,\ \nu'_L(\omega, dt, dx) = dt\nu'(dx), \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} b' &= b + cpy^* + h(x)((1+y^*x)^p - 1) * \nu, \\ c' &= c, \\ \nu' &= Y\nu = (1+y^*x)^p\nu, \end{aligned} \tag{3.5}$$

то есть является детерминированным и однородным. Таким образом L остается процессом Леви по новой мере Q.

Теорема 3.1 ставит в соответствие каждой задаче максимизации степенной полезности в экспоненциальной модели Леви задачу нахождения эталонного портфеля в другой экспоненциальной модели Леви. Результат теоремы 3.1 дополняет следующее утверждение, говорящее о том, что это соответствие взаимно-однозначное. Для формулировки результата введем следующие обозначения. Пусть $\mathcal{Q}$ есть множество триплетов, задающих немонотонный процесс Леви, а $\mathcal{Q}_p$ есть такое подмножество $\mathcal{Q}$, что для триплета выполнено $\int_{x>1} x^p d\nu < \infty$. Разумеется, $\mathcal{Q}_p = \mathcal{Q}$ при $p < 0$.

Теорема 3.2. *Отображение из теоремы 3.1, которое триплету* (b, c, ν) *из* $\mathcal{Q}_p$ *по формулам (3.5) ставит в соответствие триплет* (b', c', ν') *из* $\mathcal{Q}$, *является взаимно-однозначным между* $\mathcal{Q}_p$ *и* $\mathcal{Q}$.

Напомним (теорема 2.1), что для процесса $1/\mathcal{E}(y^*L)$ по мере Q существуют 3 возможности:

1. $1/\mathcal{E}(y^*L)$ есть процесс плотности эквивалентной мартингальной меры относительно Q.

2. $1/\mathcal{E}(y^*L)$ является мартингалом, но не является эквивалентной σ-мартингальной плотностью.

3. $1/\mathcal{E}(y^*L)$ есть супермартингал, но не локальный мартингал по мере Q.

Классификация этих трех случае в терминах триплета (b', c', ν') имеется в указанной теореме.

Напомним также, что если лог-оптимальный портфель по мере Q существует, то $1/\mathcal{E}(y^*L)$ есть решение двойственной задачи к задаче максимизации логарифмической полезности по мере Q.

С помощью формулы (3.3) из теоремы 3.1 вытекает следующий результат.

Следствие 3.1. *При* $y = 1$ *решение* Y^* *задачи (1.3), двойственной к задаче максимизации степенной полезности (3.1), имеет вид*

$$Y^* = \frac{Z}{\mathcal{E}(y^*L)},$$

где Z - процесс плотности меры Q из теоремы 3.1 относительно меры P. В частности, если процесс $1/\mathcal{E}(y^*L)$ является мартингалом по мере Q и, следовательно, процессом плотности некой меры относительно Q, то Y^* есть процесс плотности этой же меры относительно P.

3.2 Доказательства

Очертим план основной части доказательства теоремы 3.1.

1. Из конечности $E(X_T^*)^p$ следует конечность $\int_{x>1} x^p d\nu$. Далее будем использовать именно это предположение. Для $p<0$ $E(X_T^*)^p$ конечно всегда.

2. Построение константы y^*. Доказательство того, что она однозначно определяется из триплета L.

3. Параметры Гирсанова $\beta = py^*, Y = (1+y^*x)^p$ корректно определяют меру Q. Помимо этого, мы покажем, что по мере Q L является процессом Леви и задает эталонный портфель $\mathcal{E}(y^*L)$ по этой мере. Он же решает задачу степенной полезности относительно исходной меры P.

Сначала введем некоторые обозначения и отметим важные моменты общего характера. Как и в предыдущей главе, зададим множество $\mathfrak{C} = \{p : \nu\{x : (1+px) < 0\} = 0\}$. Когда у L нет скачков, то $\mathfrak{C}$ есть вся прямая. Когда скачки ограничены, обозначим через $[\lambda, \gamma]$ минимальный отрезок (либо точку), содержащий $supp(\nu)$. В случае наличия неограниченных скачков это будет полупрямая $[\lambda, \gamma)$, $\gamma = +\infty$.

По предложению 1.7 немонотонность процесса L эквивалентна всем стандартным условиям отсутствия арбитража в рассматриваемой экспоненциальной модели Леви, поэтому для задачи (3.1) о максимизации степенной полезности применимо предложение 1.8 , согласно которому решение X^* этой задачи существует и единственно. Более того, из него следует, что

$X_T^* > 0$ п.н., откуда $P(\inf_{t\le T} X_t^* > 0) = 1$ ввиду отсутствия арбитража. Значит, в задаче (3.1) достаточно рассматривать процессы X, удовлетворяющие $P(\inf_{t\le T} X_t > 0) = 1$. Для таких X удобнее пользоваться другим представлением. А именно, так как $X = 1 + \widetilde{H}\cdot S$, то, полагая $H = (\widetilde{H}S_-)/X_-$, получим

$$1 + X_-H\cdot L = 1 + \widetilde{H}S_-\cdot L = 1 + \widetilde{H}\cdot S = X.$$

Значит, X представим в виде

$$X = \mathcal{E}(H\cdot L). \tag{3.6}$$

Верно и обратное: если X представим в виде (3.6) и $X > 0, X_- > 0$, то $X \in \mathcal{X}$. При этом $H_t \in \mathfrak{C}$ $dPdt$ п.в. Доказательство этого факта проведено в лемме 2.1.

Следующая лемма включает в себя пункт 1 из плана доказательства.

Лемма 3.1. *Для случая $0 < p < 1$ справедливо следующее:*

1. *Из условия $E(X_T^*)^p < \infty$ следует*

$$\int_{x>1} x^p d\nu < \infty. \tag{3.7}$$

2. *Если выполнено (3.7) и $X = \mathcal{E}(yL)$, где $y \in \mathfrak{C}$, то $EX_T^p < \infty$.*

Доказательство. Докажем первую часть леммы. Если у нас скачки ограничены сверху, то конечность интеграла в (3.7) следует по определению меры Леви. В случае наличия неограниченных сверху скачков возьмем произвольное $y > 0$ из $\mathfrak{C}$. Пусть процесс времени задается как $G_t = t$, а через μ_L обозначим меру скачков процесса L. Преобразуем $\mathcal{E}(yL)^p$ с помощью формулы Ито для $0 \le t \le T$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(yL)^p &= \mathcal{E}(pyL + \frac{p(p-1)}{2}y^2c\cdot G + [(1+yx)^p - 1 - pyx] * (\mu_L)) \\
&= \mathcal{E}(pyb\cdot G + py\cdot B + \frac{p(p-1)}{2}y^2c\cdot G + pyh * (\mu_L - \nu_L) \\
&+ [(1+yx)^p - 1 - pyh]\mathbb{1}_{|x|\le 1} * (\mu_L) + [(1+yx)^p - 1]\mathbb{1}_{x>1} * (\mu_L)). \\
&= \mathcal{E}(D + A) = \mathcal{E}(D)\mathcal{E}(A),
\end{aligned}$$

где $A_t = [(1+yx)^p - 1]\mathbb{1}_{x>1} * (\mu_L)_t$, а D_t есть сумма остальных слагаемых. Более того, процессы A и D независимы. Так как по предположению $E(X_T^*)^p < \infty$, то $E\mathcal{E}(A_T) < \infty$. Но $E\mathcal{E}(A)_T = E(1+\mathcal{E}(A_-)\cdot A_T) \geq E(1+A_T)$, откуда $EA_T < \infty$. Таким образом, процесс $[(1+yx)^p - 1]\mathbb{1}_{x>1} * (\mu_L)$ интегрируем и имеет компенсатор $[(1+yx)^p - 1]\mathbb{1}_{x>1} * (\nu_L)$. Отсюда следует сходимость $\int_{x>1}[(1+yx)^p - 1]d\nu$, что эквивалентно конечности $\int_{x>1} x^p d\nu$.

Докажем вторую часть, пускай конечен интеграл (3.7). Опять сделаем разложение по формуле Ито. В силу предположения, процесс A интегрируем. Так как мера Леви интегрирует x^2 в окрестности 0, то процесс $[(1+yx)^p - 1 - pyh]\mathbb{1}_{|x|\leq 1} * (\mu_L)_t$ также интегрируем. Добавляя и вычитая компенсаторы этих двух слагаемых, получаем:

$$\mathcal{E}(yL)^p = \mathcal{E}(py\cdot B + ((1+yx)^p - 1) * (\mu_L - \nu_L) + \varphi_p(y)\cdot G) = Z\exp(\varphi_p(y)\cdot G),$$

где $\varphi_p(y) = pyb + \frac{p(p-1)}{2}y^2c + [(1+yx)^p - 1 - pyh] * \nu$. Нетрудно видеть, что согласно предложению 1.6 процесс $Z_t = \mathcal{E}(py\cdot B + ((1+yx)^p - 1) * (\mu_L - \nu_L))_t$ является равномерно интегрируемым мартингалом, следовательно, задает процесс плотности некоторой эквивалентной меры. Параметры Гирсанова при этом имеют вид $\beta = py, Y(x) = (1+yx)^p$. Отсюда получаем $E\mathcal{E}(yL)_T^p = \exp(T\varphi_p(y)) < \infty$, что и требовалось показать. □

Разложение Ито, которое мы сделали в лемме для некоторой константы $y \in \mathfrak{C}$, можно точно так же провести и для случая $p < 0$ с лишь той оговоркой, что yL не должно иметь скачков величины -1 с положительной вероятностью. Это может случиться лишь в граничных точках $\mathfrak{C}$, и тогда $EU(\mathcal{E}(yL)_T) = -\infty$, а значит y заведомо не определяет эталонный портфель.

Начиная с этого момента предполагаем, что выполнено условие (3.7).

Теперь проведем некоторые наводящие рассуждения, объясняющие выбор меры Q и построение константы y^*. Основная часть этих выкладок будет использована в пункте 3 доказательства.

Запишем известное неравенство для вогнутых функций, примененное к $U(x) = x^p/p$ и случайным величинам X_T^*, X_T, где $X, X^* \in \mathcal{X}$ строго положительны:

$$U(X_T) \leq U(X_T^*) + (X_T - X_T^*)U'(X_T^*). \tag{3.8}$$

Из этой формулы видно, что если для любого $X \in \mathcal{X}$ $E_P(X - X^*)U'(X^*) \leq 0$, то тогда X^* будет являться оптимальным портфелем для меры P. Преобразуем данное слагаемое, предполагая, что $X^* = \mathcal{E}(y^*L)$ для некоторой константы y^*:

$$(X_T - X_T^*)U'(X_T^*) = (X_T - X_T^*)(X_T^*)^{p-1} = (\frac{X_T}{X_T^*} - 1)\mathcal{E}(y^*L)_T^p. \tag{3.9}$$

Как мы убедились во второй части леммы 3.1, $\mathcal{E}(y^*L)_t^p = Z_t\mathcal{E}(t\varphi_p(y^*))$, где Z_t задает процесс плотности перехода к новой мере с параметрами Гирсанова $\beta = py^*, Y = (1 + y^*x)^p$. Если $\mathcal{E}(y^*L)$ задает эталонный портфель относительно меры Q, то тогда

$$E_P(\frac{X_T}{X_T^*} - 1)Z_T \exp(T\varphi_p(y^*)) = \exp(T\varphi_p(y^*))E_Q(\frac{X_T}{X_T^*} - 1) \leq 0. \tag{3.10}$$

Таким образом, если константа y^* такова, что $\mathcal{E}(y^*L)$ есть эталонный портфель относительно меры Q, задаваемой указанными параметрами Гирсанова (зависящими от y^*), то этот же портфель будет оптимальным в исходной задаче по максимизации степенной полезности.

Теперь займемся пунктом 2 доказательства - поиском требуемой константы y^*. Триплет (b', c', ν') по предполагаемой мере Q пересчитывается через исходный триплет по формулам (3.5). Это позволяет записать функцию F из главы 2, определенную на $\mathfrak{C}$, чьи свойства использовались для решения задачи (3.1) в логарифмическом случае:

$$F(y) = -b - cpy^* + cy + \int (h(x) - \frac{x(1 + y^*x)^p}{(1 + yx)})\nu(dx)$$

Для нее в полной мере применимы полученные результаты. Однако пользоваться ею сложно, так как она зависит от y и y^*. Нас главным образом интересует поведение F в точке y^*, поэтому объединим эти переменные и введем функцию

$$F_p(y) = -b + c(1-p)y + \int (h(x) - \frac{x}{(1+yx)^{1-p}})\nu(dx) \qquad (3.11)$$

Как и F, F_p определена в $\mathfrak{C}$. В следующей лемме мы покажем, что F_p корректно определена и может принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ только в граничных точках $\mathfrak{C}$.

Лемма 3.2. *Функция $F_p(y)$ корректна определена, непрерывна и монотонно возрастает на $\mathfrak{C}$, а также конечна в $(\overline{M}, \overline{N})$.*

Доказательство. Доказательство во многом аналогично логарифмическому случаю, с той лишь оговоркой, что надо использовать условие (3.7).

Понятно, что слагаемое $-b + c(1-p)y$ непрерывно и строго монотонно возрастает на $(\overline{M}, \overline{N})$. Оставшийся интеграл разобьем на разность двух составляющих:

$$I_1(y) = \int_{|x|\leq 1} x\left(1 - \frac{1}{(1+yx)^{1-p}}\right)\nu(dx) = \int_{|x|\leq 1} \frac{x((1+yx)^{1-p}-1)}{(1+yx)^{1-p}}\nu(dx),$$
$$I_2(y) = \int_{x>1} \frac{x}{(1+yx)^{1-p}}\nu(dx).$$

Напомним, что из определения процесса Леви следует, что выполнено

$$\nu\{0\} = 0, \qquad \int (x^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty. \qquad (3.12)$$

Рассмотрим интеграл I_1. Из определения $\mathfrak{C}, \overline{M}, \overline{N}$ следует, что для любого $y \in (\overline{M}, \overline{N})$ и $\forall x \in supp(\nu)$ выполнено $(1+xy)^{1-p} \geq \epsilon_0(y) > 0$. То есть при $x \in supp(\nu)$ знаменатель подынтегрального выражения ограничен снизу. Числитель же ограничен по модулю функцией $K(y)x^2$, где $K(y) > 0$ есть некоторая константа. Отсюда и из (3.12) следует конечность I_1 для любого $y \in (\overline{M}, \overline{N})$.

Теперь покажем конечность I_2. Если $y > 0$, то для достаточно больших x подынтегральное выражение будет эквивалентно $y^{p-1}x^p$. Из (3.7) следует сходимость этого выражения. Пусть $y \le 0$. При $\overline{M} < 0$ числитель подынтегрального выражения в I_2 ограничен $\gamma < \infty$. Знаменатель ограничен в силу рассуждений, проведенных для I_1. Если $\overline{M} = 0$, то y не лежит в $(\overline{M}, \overline{N})$. Таким образом мы показали, что I_1 и I_2 определены и конечны для любого $y \in (\overline{M}, \overline{N})$. Нетрудно убедиться в том, что при возрастании y подынтегральное выражение I_1 не убывает, а в I_2 не возрастает. Поэтому по теореме о монотонной сходимости интегралы I_1 и I_2 будут непрерывны и монотонны по y на интервале $(\overline{M}, \overline{N})$. Отсюда заключаем, что $F_p(y)$ конечна, непрерывна и монотонно возрастает по y в $(\overline{M}, \overline{N})$. Более того, F_p строго возрастает в $(\overline{M}, \overline{N})$, так как в противном случае получаем, что $\nu = 0$ и $c = 0$, откуда $b = 0$, но тождественно нулевой процесс L мы исключили из рассмотрения. Из теоремы о монотонной сходимости также вытекает существование пределов, возможно и бесконечных, в $\overline{M}$ и $\overline{N}$.

Покажем, что F_p корректна определена в граничных точках. Действительно, в силу возрастания каждый из интегралов I_1 и $-I_2$ в точке $\overline{N}$ либо конечен, либо расходится к $+\infty$, а в $\overline{M}$ либо конечен, либо расходится к $-\infty$. Отсюда следует требуемое. Лемма доказана. □

С помощью этой леммы легко проверить, что для триплета, отвечающему немонотонному процессу Леви и удовлетворяющему (3.7), существует единственное y^*, для которого выполнено ровно одно из соотношений

- y^* есть корень уравнения $F_p = 0$,
- $y^* = \overline{M}$, $\overline{M} > -\infty$ и $+\infty > F_p(y^*) > 0$,
- $y^* = \overline{N}$, $\overline{N} < +\infty$ и $-\infty < F_p(y^*) < 0$.

Действительно, при отсутствии скачков или конечности $\overline{M}$ и $\overline{N}$ это следует из строгой монотонности F_p. Пусть $\overline{M} = -\infty, \overline{N} < +\infty$. Если упомянутые выше соотношения не выполнены, то $F_p > 0$ в $\mathfrak{C}$. Заметим, что $\overline{M} = -\infty$ означает отсутствие положительных скачков, и тогда предел интеграла в (3.11) при $y \to -\infty$ равен $\int x \mathbb{1}_{x<0} \nu(dx)$. Поэтому положительность функции F_p на $\mathfrak{C}$ влечет $c=0$ и $-b+\int x\mathbb{1}_{x<0}\nu(dx)\geq 0$. Последнее означает, что процесс L монотонный. Случай $\overline{M}>-\infty,\overline{N}=+\infty$ разбирается аналогично.

Покажем, что предложенный вариант константы y^* есть именно то, что требуется в пункте 3 доказательства. Проведя рассуждения, аналогичные выкладкам во второй части леммы 3.1, мы получим, что параметры Гирсанова $\beta=py^*,Y(x)=(1+y^*x)^p$ задают меру Q и $E\mathcal{E}(X^*)_t^p=\exp(t\varphi_p(y^*))EZ_t<\infty$, где φ_p есть детерминированная функция. Отметим, что мера Q эквивалентна P, для чего достаточно проверить, что $\nu\{1+y^*x=0\}=0$. Если y^* лежит внутри $\mathfrak{C}$, то это очевидно. Если же $y^*=\overline{M}$ или $y^*=\overline{N}$, то предположение $\nu\{1+y^*x=0\}>0$ ведет к расходимости интеграла в определении F_p. Новый триплет (3.5) является детерминированным, откуда следует, что L по мере Q останется процессом Леви. Поскольку меры P и Q эквивалентны, то L относительно Q будет также немонотонным. Это, впрочем, легко проверить из вида триплета (3.5). Нетрудно понять, что если F_p в точке y^* удовлетворяет какому-то из трех вышеупомянутых условий, то для функции F оно также выполнено, отсюда по результатам главы 2 следует, что данный y^* определит решение для задачи логарифмической полезности в мере Q. Осталось показать, что $\mathcal{E}(y^*L)$ решает и исходную задачу степенной полезности. Для построенной меры Q мы снова можем записать соотношения (3.8), (3.9), (3.10). Так как $E\mathcal{E}(X^*)_T^p=\exp(T\varphi_p(y^*))EZ_T<\infty$, то математические ожидания обоих слагаемых в правой части (3.8) конечны. Это означает, что в (3.8) и (3.9) мы можем добавить знаки математического ожидания. Применим (3.10) к (3.8), отсюда и следует требуемое. Пункт 3 доказательства завершен.

Из наших рассуждений с учетом леммы 3.1 следует эквивалентность условий (3.7) и $E(X_T^*)^p<\infty$. Это завершает доказательство теоремы 3.1.

Отметим, что условие, которое предполагалось при решении задачи максимизации степенной полезности в [44] и других работах для экспоненциальной модели Леви, состоит в том, что у F есть корень. Как мы видим, при нашем подходе данное условие не требуется.

Доказательство теоремы 3.2. Рассмотрим отображение, которое триплету (b, c, ν) из $\mathcal{Q}_p$ ставит в соответствие триплет (b', c', ν') из $\mathcal{Q}$ по формулам (3.5) с константой y^*, определяемой в теореме 3.1. Нам требуется показать, что у каждого элемента из $\mathcal{Q}$ есть ровно один прообраз из $\mathcal{Q}_p$.

Пусть у нас есть триплет (b', c', ν') из $\mathcal{Q}$. В главе 2 было доказано, что существует единственная константа z^*, для которой $\mathcal{E}(z^*L)$ есть эталонный портфель по мере Q. Рассмотрим меру P, которая получается из Q преобразованием с параметрами Гирсанова $(\beta', Y') = (-pz^*, (1+xz^*)^{-p})$. В силу предложения 1.6 она существует и по ней триплет характеристик процесса L является детерминированным и однородным, т.е. имеет вид (3.4) с некоторыми (b, c, ν). Пользуясь явным видом для выражения (b, c, ν) из предложения 1.6, нетрудно убедиться, что $(b, c, \nu) \in \mathcal{Q}_p$ и для него константа y^* из теоремы 3.1 совпадает с z^*. Значит, образом меры P при рассматриваемом отображении является Q. Если для произвольной меры P мы построим меру Q как в теореме 3.1, то для нее y^* определяет эталонный портфель, то есть совпадает с z^*. Отсюда следует единственность прообраза. $\square$

В дополнение к двум теоремам приведем классификацию решений двойственной задачи в случае степенной полезности, аналогичную тому, что было сделано в теореме 2.1. Для этого введем параметры P_1 и P_2, аналогичные F_1 и F_2:

$$P_1 = \begin{cases} c(1-p)\overline{N} - b + \int (h(x) - \frac{x}{(1+\overline{N}x)^{1-p}})\nu(dx), & \overline{N} < \infty, \\ \lim\limits_{y\to+\infty} c(1-p)y - b + \int (h(x) - \frac{x}{(1+yx)^{1-p}})\nu(dx), & \overline{N} = +\infty; \end{cases}$$

$$P_2 = \begin{cases} c(1-p)\overline{M} - b + \int (h(x) - \frac{x}{(1+\overline{M}x)^{1-p}})\nu(dx), & \overline{M} > -\infty, \\ \lim\limits_{y\to-\infty} c(1-p)y - b + \int (h(x) - \frac{x}{(1+yx)^{1-p}})\nu(dx), & \overline{M} = -\infty; \end{cases}$$

При подсчете значений этих выражений пользуемся правилами: $0 \cdot \infty = 0$, $1/\infty = 0$, $1/0 = \infty$.

Теорема 3.3. *В экспоненциальной модели Леви на конечном интервале времени $[0, T]$ для решения двойственной задачи к (3.1) Y^* справедливо следующее.*

1. *Y^* задает EMM при выполнении одного из условий*

   (i)

$$b + \int_{x>1} x\nu(dx) > 0 \text{ и}$$
$$P_1 \geq 0, \text{при } \overline{N} < +\infty,$$
$$P_1 > 0, \text{при } \overline{N} = +\infty;$$

   (ii)

$$b + \int_{x>1} x\nu(dx) = 0;$$

   (iii)

$$b + \int_{x>1} x\nu(dx) < 0 \text{ и}$$
$$P_2 \leq 0, \text{при } \overline{M} > -\infty,$$
$$P_2 < 0, \text{при } \overline{M} = -\infty.$$

2. *Y^* есть мартингал, но не процесс плотности EMM, когда выполнено*

$$b + \int_{x>1} x\nu(dx) < 0,$$
$$\overline{M} = 0.$$

3. *Y^* есть супермартингал, но не мартингал, когда имеет место одно из двух нижеследующих условий:*

   (i)

$$b + \int_{x>1} x\nu(dx) > 0,$$
$$P_1 < 0 \text{ и } \overline{N} < +\infty;$$

(ii)

$$b + \int_{x>1} x\nu(dx) < 0,$$
$$P_2 > 0 \text{ и } -\infty < \overline{M} < 0.$$

Рассмотрим пример, аналогичный примеру 2.1 для логарифмического случая.

Пример 3.1. Рассмотрим пример, когда у процесса Леви L нет скачков, тогда $L_t = bt + \sqrt{c}B_t$. В случае $c = 0$ L будет монотонным, а при $c \neq 0$ уравнение

$$F_p(y) = c(1-p)y - b = 0$$

имеет корень $y^* = b/(c(1-p))$. Поэтому оптимальный портфель имеет вид

$$X_t^* = \mathcal{E}(\frac{b}{c(1-p)}L_t).$$

Из следствия 3.1 и формулы для Z в лемме 3.1 получаем, что решение двойственной задачи для $Y_0 = 1$ есть

$$Y_t^* = y_0 \frac{\mathcal{E}(\frac{bp}{c(1-p)}B_t)}{\mathcal{E}(\frac{b}{c(1-p)}L_t)},$$

и оно является процессом плотности EMM. Напомним, что в логарифмическом случае решения основной и двойственной задач для такого же L имели вид $X^* = \mathcal{E}(\frac{b}{c}L_t),\ Y^* = 1/\mathcal{E}(\frac{b}{c}L_t)$.

3.3 Сравнение логарифмической полезности и степенной полезности при различных p для одного процесса Леви L

В нашей основной задаче (1.2) рассмотрим два случая: $U(x) = \ln x$ и $U(x) = x^p,\ p < 1, p \neq 0$.

Основной вопрос, который мы хотим решить — для каких функций полезности U решение двойственной задачи соответствует ЕММ, а для каких — нет. В предыдущих рассуждениях мы вывели, что в логарифмическом случае это эквивалентно тому, что есть корень у функции

$$F(y) = cy - b + \int (h(x) - \frac{x}{(1+yx)})\nu(dx).$$

Степенной случай, как мы убедились, можно свести к логарифмическому, и соответствующая функция F_p имеет похожий вид:

$$F_p(y) = -b + c(1-p)y + \int (h(x) - \frac{x}{(1+yx)^{1-p}})\nu(dx). \qquad (3.13)$$

Выделим общие свойства этих функций:

Функции F и $F_p(y)$ корректно определены, непрерывны и монотонно возрастают на $\mathfrak{C}$, а также конечны в $(\overline{M}, \overline{N})$.

Несмотря на то, что мы рассматриваем только $p < 1, p \neq 0$, для $p = 0$ $F_0(y) = F(y)$, и в дальнейшем считаем $F_0 = F$. При этом для p-полезности еще требуется условие

$$\int_{x>1} x^p d\nu < \infty.$$

Как мы видим, если для какого-то p этот интеграл сходится, то он сходится и для любого меньшего p. Значит, справедливо

Утверждение 3.1. *Если для какого-то процесса Леви L и $p_1 < 1$ существует единственное решение y соответствующей задачи максимизации степенной полезности, то для любого $p < p_1$ задача степенной полезности с p также имеет единственное решение.*

Посмотрим теперь на характер функций $F_p(y)$ в зависимости от p. Если $p_1 < p_2$, то для любого $y \in \mathfrak{C}$ выполнено

$$c(1-p_1)y \geq c(1-p_2)y, \ y > 0,$$
$$-\frac{x}{(1+yx)^{1-p_1}} \geq -\frac{x}{(1+yx)^{1-p_2}}, \ y > 0.$$

Аналогично мы можем записать

$$c(1-p_1)y \le c(1-p_2)y,\ y<0$$
$$-\frac{x}{(1+yx)^{1-p_1}} \le -\frac{x}{(1+yx)^{1-p_2}},\ y<0.$$

Отсюда для $p_1 < p_2$

$$F_{p_1}(y) \ge F_{p_2}(y),\ y>0.$$
$$F_{p_1}(y) \le F_{p_2}(y),\ y<0.$$

За исключением тривиального случая $c=0$ и $\nu\{\mathbb{R}\}=0$ данные неравенства являются строгими. Помимо этого всегда верно

$$F_{p_1}(0) = F_{p_2}(0).$$

Это позволяет понять вид функций $F_p(y)$ в зависимости от p.

Нетрудно видеть, что для $p_1 < p_2$ всегда выполнено

$$F_{p_1}(\overline{N}) \ge F_{p_2}(\overline{N}),$$
$$F_{p_1}(\overline{M}) \le F_{p_2}(\overline{M}).$$

Это иначе можно записать как

$$F_{p_1}(\overline{M}) \le F_{p_2}(\overline{M}) \le F_{p_2}(\overline{N}) \le F_{p_1}(\overline{N}).$$

Диапазон принимаемых значений в $\mathfrak{C}$ у F_{p_1} больше, чем у F_{p_2}. Если в $\mathfrak{C}$ есть корень у F_{p_2}, то у F_{p_1} также есть корень. Если же в $\mathfrak{C}$ корня у F_{p_1} нет, то у F_{p_2} также нет корней в $\mathfrak{C}$.

Отсюда нетрудно получить следующие утверждения.

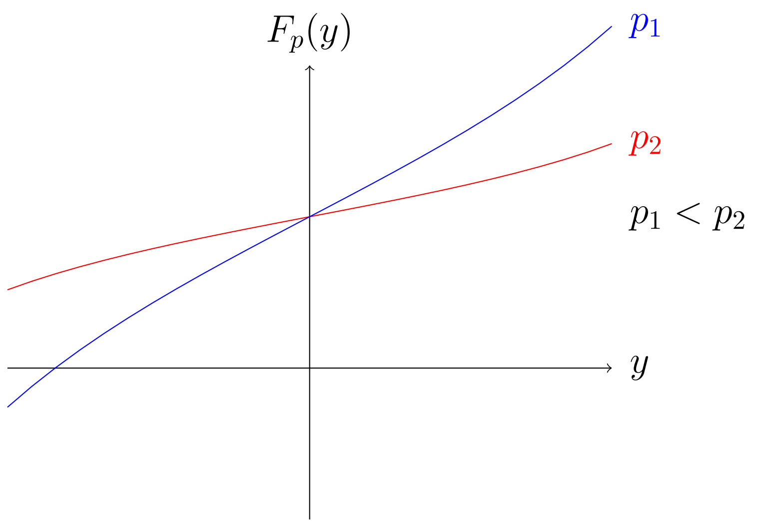
Утверждение 3.2. *Если для какого-то процесса Леви L и $p_1 < 1$ решение двойственной задачи является EMM, то для любого $p < p_1$ решение двойственной задачи также является EMM.*

Утверждение 3.3. *Если для какого-то процесса Леви L и $p_1 < 1$ решение двойственной задачи не является EMM, то для любого $p > p_1$ решение двойственной задачи также не является EMM.*

Аналогичным образом, используя монотонность функций, можно записать следующее утверждение.

Утверждение 3.4. *Если для какого-то процесса Леви L и $p_1 < 1$ решение задачи максимизации степенной полезности достигается на $\overline{M}$ или $\overline{N}$, то для любого $p > p_1$ решение задачи максимизации степенной полезности для p также достигается соответственно на $\overline{M}$ или $\overline{N}$.*

Следующий график демонстрирует вид функции F_p для различных p.



Посмотрим, при каких p у функции F_p отсутствует корень в $\mathfrak{C}$, в этом случае решение двойственной задачи не задает EMM. Нетрудно видеть, что для любого y функция $F_y(p) = F_p(y)$ монотонна по p.

Чтобы понять, когда для любого $p < 1$ и любого $y \in \mathfrak{C}$ $F_p(y) \neq 0$, нам удобно разбить все возможные случаи на две группы: $F_p(0) > 0$ и $F_p(0) < 0$. Значение p не важно, так как для любых $p_1 < 1, p_2 < 1$ $F_{p1}(0) = F_{p2}(0)$. Если же $F_p(0) = 0$, то понятно, что решение соответствующей двойственной задачи задает EMM.

Для начала рассмотрим случай $F_p(0) < 0$. Из свойств функции F следует, что если $\overline{N} < \infty$ и значение $F(\overline{N}) \geq 0$, либо $\overline{N} = +\infty$ и $\lim_{y \to \overline{N}} F(y) >$

0, то тогда у функции F в силу непрерывности и монотонности есть корень в $\mathfrak{C}$. Когда же ни одно из указанных условий не выполнено, то корня в $\mathfrak{C}$ нет и мы получаем две возможные ситуации:

$$\begin{aligned} &\overline{N} < \infty, \text{ и } F(\overline{N}) < 0; \\ &\overline{N} = +\infty, \text{ и } \lim_{y \to \overline{N}} F(y) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Выясним, когда одно из этих двух соотношений выполнено для функции F_p при любом $p < 1$.

Из формулы (3.13) следует, что при $c \neq 0$ выражение $c(1-p)y \to +\infty$ при $p \to -\infty$ для $y > 0$, а $\mathfrak{C}$ заведомо содержит интервал $(0,1)$. Интеграл в (3.13) конечен и не убывает по p. Значит, если $c > 0$, то для некоторого $y \in (0,1)$ и p значение F_p в y окажется больше нуля, и тогда (3.14) не будет выполнено. Следовательно, в случае (3.14) $c = 0$.

Покажем, что отрицательных скачков быть не может. Предположим противное — $\nu(-1,0) \neq 0$. Тогда $\overline{N} < \infty$ и мы можем рассматривать значение $F_p(\overline{N})$. В силу монотонности F_p оно может либо принимать значение $+\infty$, либо быть конечным. Если для какого-то p оно равно $+\infty$, то корень внутри $\mathfrak{C}$ есть. Если же для любого p оно конечно, то тогда рассмотрим подынтегральное выражение $-\dfrac{x}{(1+yx)^{1-p}}$ в (3.13) и его интеграл от -1 до 0. Нетрудно видеть, что при $y > 0$ в рассматриваемом интеграле $0 < 1+yx < 1$ п.н., а значение $-\dfrac{x}{(1+yx)^{1-p}} \to +\infty, p \to -\infty$. Соответствующий интеграл также расходится к $+\infty$, значит $F_p(\overline{N}) \to +\infty,\ p \to -\infty$ и для какого-то p у F_p будет корень внутри $\mathfrak{C}$. Получаем, что отрицательных скачков быть не может.

Отсутствие отрицательных скачков влечет $\overline{N} = +\infty$. Нетрудно видеть, что при $y > 0$ интеграл $\int_{x>0} -\dfrac{x}{(1+yx)^{1-p}} dx \to 0, p \to -\infty$. Тогда для любого $y > 0$ $F(y) \to -b + \int_{0<x\leq 1} h(x)\nu(dx), p \to +\infty$. Таким образом, условие (3.14) принимает вид

$$c = 0,\ \nu(-1,0) = 0,\ -b + \int_{0<x\leq 1} h(x)\nu(dx) \leq 0.$$

Это есть условие монотонного неубывания процесса L. Рассматривая аналогичным образом случай $F_p(0) > 0$, мы получим условие на монотонное невозрастание процесса L. Отсюда следует

Утверждение 3.5. *Среди рассматриваемых процессов Леви L, что являются немонотонными, всегда существует такое $p_1 < 1$, что для любого $p < p_1$ в соответствующей задаче максимизации полезности решение задается корнем функции F_p, а решение двойственной задачи есть EMM.*

Глава 4

Экспоненциальная полезность в модели Леви

В этой главе мы рассматриваем задачу о максимизации экспоненциальной полезности. Логарифмическая, степенная и экспоненциальная функции образуют класс так называемых HARA-полезностей, который характеризуется тем, что $-U''(x)/U'(x) = 1/(ax+b)$, где $U(x)$ есть функция полезности, а a и b являются константами. Для этих трех случаев возможно применение схожих подходов к решению.

Проблематика максимизации полезности существенно разнится в зависимости от того, когда функция $U(x)$ конечна на положительной полупрямой, или конечна на всей прямой. В первом случае есть естественное ограничение на класс стратегий с целью исключить слишком рискованные — процесс капитала должен быть неотрицательным, иначе ожидаемая полезность равна $-\infty$. Во втором случае, когда функция полезности конечна на всей прямой, такого естественного ограничения, исключающего слишком рискованные стратегии, нет. Если рассмотреть класс стратегий, процесс капитала которых ограничен снизу, то, как правило, оптимальной стратегии в этом классе не существует. Если же предположить, что ограничений совсем нет, то в подавляющем большинстве случаев задача становится вырожденной и полезность становится равной $\sup_{x\in\mathbb{R}} U(x)$. Для экспоненциальной функции полезности мы эту ситуацию подробно рассмотрим. Для того, чтобы получить более содержательный ответ, нужно каким-то образом расширить класс стратегий так, чтобы он включал в себя оптимальную и при этом задача не становилась бы вырожденной. Этому вопросу посвящена значительная литература [18, 23, 42, 59, 60].

В модели Леви основная задача исследовалась в [44], где предполагалось ограниченность капиталов снизу. Двойственная задача, которая в этом случае по сути совпадает с задачей минимизации энтропии по множеству мартингальных мер, изучалась в работах [27, 34]. Оптимальное решение основной задачи в одномерной модели состоит в том, чтобы держать определенное количество капитала в рисковом активе. Но процессы капиталов таких стратегий не всегда ограничены снизу, и даже не всегда могут быть приближены процессами капиталов, ограниченных снизу. Ввиду этого в [44] задача решается не для всех немонотонных процессов Леви. В данной главе мы выберем такой класс стратегий, что его определение будет едино для всех немонотонных процессов Леви. В этом классе стратегий задача имеет решение. Процессы Леви предполагаются только немонотонными, других ограничений нет. Рассуждения удается проводить аналогично тому, как это было сделано в предыдущих главах. Потом мы приведем решение двойственной задачи, соответствующее результатам [27, 34].

Как в логарифмическом и степенном случае, мы предполагаем, что процесс цены акции есть стохастическая экспонента процесса Леви:

$$S = \mathcal{E}(L)\,, \text{ где } \Delta L > -1, L \not\equiv 0.$$

Процесс капитала инвестора имеет вид

$$X_t = x + \int_0^t H_u dS_u,\ 0 \le t \le T,$$

где H есть некоторый предсказуемый процесс, интегрируемый по S, а x есть начальный капитал инвестора. Так как $dS = S_- dL$, то процесс капитала можно рассматривать как

$$X_t = x + \int_0^t H_s dL_s,\ 0 \le t \le T.$$

Множество процессов капитала при отсутствии каких-либо ограничений имеет вид

$$\mathcal{X}(x) = \{X : X = x + H \cdot L,\ H \text{ предсказуем и интегрируем по } L\}. \tag{4.1}$$

Задача инвестора — в зависимости от начального капитала x максимизировать ожидаемую экспоненциальную полезность в конечный момент времени T:

$$u(x) = \sup_{X \in \mathcal{X}(x)} E[1 - \exp(-X_T)]. \tag{4.2}$$

4.1 Случай всевозможных капиталов

Сначала рассмотрим эту задачу в общем случае, не предполагая каких-либо дополнительных ограничений на $\mathcal{X}(x)$. Ответ будет зависеть от того, какой вид имеет процесс Леви. В случае $0 < \int_{|x|\le 1} x d\nu < \infty$ будем считать сносом L величину $b - \int_{|x|\le 1} x d\nu$. Поделим все случаи для L на 3 категории, ими исчерпываются все возможные виды процессов Леви:

1. Процесс L имеет бесконечное число скачков из интервала $(-1, 1)$ (то есть, $\int_{x\ge -1} d\nu = \infty$), либо имеется гауссовская составляющая.

2. Процесс не принадлежит к предыдущей категории, но имеет ненулевой снос (то есть $\int_{x\ge -1} d\nu < \infty,\ c = 0, b - \int_{|x|\le 1} x d\nu \ne 0$).

3. Все оставшиеся виды процессов, то есть составные пуассоновские процессы. При этом L имеет конечное число скачков на $[0, T]$, броуновская составляющая и снос отсутствуют ($\int_{x\ge -1} d\nu < \infty,\ c = 0, b - \int_{|x|\le 1} x d\nu = 0$).

Случай 1.

Без ограничения общности можно положить $T = 1$. Разобьем интервал $[0, T]$ с помощью точек $t_1 = 1-1 = 0$, $t_2 = 1-1/2 = 1/2$, $t_3 = 1-1/2^2, \ldots$ Тогда для t_n выполнено $t_{n+1} - t_n = 1/2^n$. Обозначим $T_n = [t_n, t_{n+1})$ и положим $H = K_n$ на этих интервалах, где K_n являются некоторыми константами, которые мы определим позднее. Пусть $Y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} H_s dL_s = K_n(L_{t_{n+1}} - L_{t_n}) \overset{d}{=} K_n L_{t_{n+1}-t_n} = K_n L^n$. Из теоремы 27.4 [57] следует, что для процессов Леви, которые мы рассматриваем в данном случае, распределение L^n является непрерывным и иметь атомов не может. Зафиксируем $c_0 = 1$ и для любого n подберем такое $K_n \geq 2^n$, что $P(|Y_n| \geq c_0) \geq 1/2$. Так как ряд $\sum P(|Y_n| \geq c_0)$ расходится, то из теоремы Колмогорова о трех рядах следует расходимость ряда $\sum Y_n$. По закону 0-1 он расходится п.н.

Далее покажем, что при $n \to +\infty$ сумма $\widetilde{Y}_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ может принимать сколь угодно большие значения. Так как длины интервалов равны $1/2^n$ и $L \not\equiv 0$, то по определению H дисперсии Y_n не меньше $d_1 = \mathsf{D}\mathsf{L}_1$, где $d_1 > 0$. Рассмотрим событие $A_N = \{\exists m_1, m_2 : |\sum_{i=m_1}^{m_2} Y_i| \geq 2N\}$ для произвольного $N \geq 0$. По сути оно означает, что у сумм $\widetilde{Y}_n$ за определенный период времени произойдет колебание больше, чем $2N$. Так как дисперсии Y_n либо равны $+\infty$, либо не меньше d_1, то нетрудно понять, что данное событие происходит с некоторой положительной вероятностью. Помимо этого, оно является “хвостовым” и по закону 0-1 происходит с вероятностью 1. Из определения A_N мы видим, что для указанных m_1 и m_2 либо $|\widetilde{Y}_{m_1}| \geq N$, либо $|\widetilde{Y}_{m_2}| \geq N$. Так как N произвольное, то получаем, что $\widetilde{Y}_n$ п.н. принимает сколь угодно большие по модулю значения. Рассмотрим также событие $\limsup_{n\to\infty} \widetilde{Y}_n < \infty$. По закону 0-1 оно может происходить либо с вероятностью 1, либо с нулевой вероятностью. Если вероятность 0, то тогда $\widetilde{Y}_n$ п.н. принимает сколь угодно большие значения. Если вероятность 1, то тогда $\widetilde{Y}_n$ п.н. принимает сколь угодно большие по модулю отрицательные значения, и тогда, меняя знак у H, можно добиться того, что $\widetilde{Y}_n$ п.н. принимает сколь угодно большие значения. Остановим последовательность сумм Y_i в момент достижения значения n, для этого введем процесс капитала $X^n = x + H^n \cdot L$, где $H^n_t = H\mathbb{1}(t \leq \tau_n), \tau_n = \inf\{t_m : \widetilde{Y}_m \geq n\}$. Тогда $(X^n)_T \geq n$ п.н. и $E\exp(-(X^n)_T) \to 0, n \to \infty$. Отсюда $u(x) = 1$.

Случай 2.

В этом случае снос имеет вид $b_1 = b - \int_{|x|\leq 1} x d\nu$. Для процесса $L = b_1 t$ капитал имеет вид

$$X_t = x + b_1 \int_0^t H_s ds,\ 0 \leq t \leq T.$$

Здесь достаточно для процесса $H = 1/(T-t) sign(b_1), 0 \leq t < T$ и соответствующего X взять последовательность стратегий $H^n_t = H\mathbb{1}(t \leq \tau_n), \tau_n = \inf\{t : X_t \geq n\}$, тогда при $n \to \infty$ $X^n_T \to +\infty$ п.н. и $EU(X^n_T) \to 1$ п.н. Если же у L имеется составляющая с конечным числом скачков ($0 < \int_{x\geq -1} d\nu < \infty$), то п.н. существует такой момент $t_1 < T$, что после него скачков нет. Но тогда после него интеграл $\int_{t_1 < t < T} H dL_t$ будет расходится в $+\infty$, и при $n \to \infty$ $X^n_T \to +\infty$ п.н. Следовательно, при наличии скачков мы также получаем, что $u(x) = 1$.

Случай 3.

Заметим, что с вероятностью $p_0 = \mathrm{e}^{-\lambda T}$, где $\lambda = \int_{x\geq -1} d\nu$, у L не произойдет ни одного скачка на $[0, T]$, то есть $P(X_T = x) \geq \mathrm{e}^{-\lambda T}$. Значит, значение $u(x)$ не превосходит $1 - \mathrm{e}^{-x-\lambda T}$. Для разных случаев пуассоновских процессов возможны разные оценки, разберем случай, когда скачки одного знака. Подберем такую последовательность H^n и соответствующую ей X^n, чтобы терминальные значения X^n уходили в бесконечность. Обозначим через κ знак скачков ΔL и возьмем $H^n_t = \kappa n \mathbb{1}(L_s = 0, s < t)$. Получим, что каким бы не был скачок, если он произойдет, то каждый из процессов $X^n = x + H^n \cdot L$ в этот момент остановится, и $EX^n_T \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для этих стратегий с вероятностью p_0 значение $U(X^n_T)$ равно $1 - \mathrm{e}^{-x}$, а с вероятностью $1 - p_0$ при $n \to \infty$ $U(X^n_T) \to 1$. В итоге получаем, что

$u(x) = 1 - p_0 + p_0(1 - \mathrm{e}^{-x}) = 1 - p_0\mathrm{e}^{-x} = 1 - \mathrm{e}^{-x-\lambda T}$. Другие случаи требуют своего отдельного анализа.

Таким образом, из анализа всех возможных вариантов процесса L мы можем заключить следующую теорему.

Теорема 4.1. *В задаче максимизации полезности (4.2) значение* $u(x)$ *строго меньше 1 для всех таких процессов* L, *которые являются составными (обобщенными) пуассоновскими процессами с конечным числом скачков на* $[0,T]$, *то есть* $\int_{x\geq -1} d\nu < \infty,\ c = 0, b = 0$. *Если же* L *не имеет подобный вид, то тогда* $u(x) = 1$.

4.2 Случай, когда на множество капиталов наложены ограничения

Теперь рассмотрим случай, когда на множество $\mathcal{X}$ наложены дополнительные ограничения. Определим множество допустимых портфелей следующим образом.

$$\mathcal{X}(x) = \{X:\ X \text{ вида (4.1), } H \text{ ограничен и}$$
$$- X \text{ — экспоненциально специальный}\}.$$

Так как $\mathcal{X}(x) = \mathcal{X}(1) + x - 1$, то нам в дальнейшем достаточно рассматривать только $\mathcal{X}(1) = \mathcal{X}$. Для данной постановки задачи справедлива следующая

Теорема 4.2. *На введенном выше множестве* $\mathcal{X}$ *задача (4.2) для немонотонного процесса Леви* L *всегда имеет решение, которое полностью определяется триплетом* L *и имеет вид* $X^* = 1 + y^*L$, *где*

$$y^* = \min\{y : -b + cy + \int (h(x) - xe^{-yx})\nu(dx) \geq 0\}.$$

Введем функцию F по триплету (b, c, ν) процесса L:

$$F(y) = -b + cy + \int (h(x) - xe^{-yx})\nu(dx).$$

Лемма 4.1. *Для функции F выполнено следующее:*

1. *Функция F монотонно возрастает. Обозначим $y_0 = \sup\{y : \int_{x>1} xe^{-yx}\nu(dx) = \infty\}$ $(\sup\, \emptyset = -\infty)$, тогда $y_0 \in [-\infty, 0]$. $F(y)$ является непрерывной функцией на $y > y_0$, а при $y < y_0$ $F(y) = -\infty$. В самой же точке y_0 функция F может как иметь конечное значение, совпадающее с правым пределом, так и расходиться в $-\infty$.*

2. *Либо F имеет единственный корень, равный y^*, либо $0 < F(y^*) < +\infty$ и $y^* = y_0$. В обоих случаях y^* принимает конечное значение.*

3. *В том случае, когда у F нет корня, в каждой точке $y < y_0$ интегралы $\int_{x>1} xe^{-yx}\nu(dx)$ и $\int_{x>1} e^{-yx}\nu(dx)$ расходятся, а при $y \geq y_0$ — сходятся.*

Доказательство. Слагаемое $-b + cy$ непрерывно и монотонно неубывает на $\mathbb{R}$, строго возрастает при $c > 0$. Оставшийся интеграл разобьем на разность двух составляющих $I_1(y) - I_2(y)$, где

$$I_1(y) = \int_{|x|\leq 1} x\left(1 - e^{-yx}\right)\nu(dx),$$
$$I_2(y) = \int_{x>1} xe^{-yx}\nu(dx).$$

Напомним, что из определения процесса Леви следует, что выполнено

$$\nu\{0\} = 0, \quad \int (x^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty. \tag{4.3}$$

Рассмотрим интеграл I_1. Подынтегральное выражение, как нетрудно заметить, ограничено по модулю функцией $K(y)x^2$, где $K(y) > 0$ есть некоторая константа. Отсюда следует конечность I_1 для любого y. Нетрудно подсчитать для подынтегрального выражения, что при $y_1 \leq y_2$ $x(1 - e^{-y_1 x}) \leq$

$x(1-e^{-y_2 x})$. Поэтому по теореме о монотонной сходимости интеграл I_1 будет непрерывен и монотонен по y на $\mathbb{R}$.

Теперь рассмотрим интеграл I_2, его монотонное невозрастание по y очевидно. Если $y > 0$, то подынтегральное выражение ограничено. Из (4.3) следует сходимость интеграла. Пусть $y \leq 0$. Тогда, если у нас есть неограниченные сверху скачки, то интеграл может и разойтись. В этом случае $y_0 = \sup\{y : I_2(y) = +\infty\}$. Тогда, по свойству монотонности получаем, что для $y < y_0$ интеграл I_2 расходится, а для $y > y_0$ сходится, при этом, если $F(y_0)$ конечно, то $F(y_0)$ совпадает с правым пределом функции F в этой точке. Если же $y_0 = -\infty$, то I_2 сходится на всем $\mathbb{R}$. Отсюда по теореме о монотонной сходимости интеграл I_2 будет непрерывен и монотонен по y на всей прямой, если $y_0 = -\infty$, и при $y > y_0$, если y_0 конечно. Отсюда заключаем, что F конечна, непрерывна, монотонно возрастает по y при $y > y_0$ и равна $-\infty$ при $y < y_0$. Если в точке y_0 F конечна, то значение будет совпадать с правым пределом F в этой точке. Более того, F строго возрастает при $y > y_0$, так как в противном случае нетрудно получить, что L является монотонным, а такие процессы мы не рассматриваем. Первая часть леммы доказана.

Теперь докажем пункт 2. Покажем, что y^* не может принимать значения $-\infty$ и $+\infty$. Рассмотрим сначала случай $y^* = -\infty$. Это означает, что $F(y) \geq 0,\ y \in \mathbb{R}$. Отсюда получаем, что у L нет положительных скачков, $c = 0$ и $-b + \int h(x)\nu(dx) \geq 0$. Это есть условие на то, что процесс L — монотонный. Если же $y^* = +\infty$, то у нас $F(y) < 0, y \in \mathbb{R}$. Значит у L нет отрицательных скачков, $c = 0$ и $-b + \int h(x)\nu(dx) \leq 0$. Аналогично получаем, что L в этом случае также монотонный. Значит, y^* принимает конечное значение. Также отметим следующий факт — если в точке $y_0 > -\infty$ $F(y_0) = -\infty$, то тогда $\lim_{y\to y_0+} F(y) = -\infty$, это следует из теоремы о монотонной сходимости. Аналогично при $F(y_0) > 0$ $\lim_{y\to y_0+} F(y) = F(y_0) > 0$. Следовательно, если у F нет корня при $y \geq y_0$, то тогда F конечна в y_0 и эта точка совпадает с y^* по определению.

Пункт 3 следует из свойств экспоненциальной функции, так как из расходимости при всех $y < y_0$

$$\int_{x>1} xe^{-yx}\nu(dx)$$

следует расходимость

$$\int_{x>1} e^{-yx}\nu(dx)$$

при всех $y < y_0$. Если у F нет корня, то F конечна в y_0 и при $y \geq y_0$ оба эти интеграла конечны. Это и завершает доказательство леммы. $\square$

Обозначим через $\mathfrak{D}$ множество тех y, где $\int_{x>1} e^{-yx}\nu(dx) < \infty$. Оно является определенным аналогом множества $\mathfrak{C}$ в главе 2 и 3. Как следует из леммы 4.1, при $y < y_0$ данный интеграл расходится, а при $y > y_0$ — сходится. Отсюда $\mathfrak{D}$ имеет вид $(-\infty, +\infty)$, если $y_0 = -\infty$, $[y_0, +\infty)$, если $\int_{x>1} e^{-y_0 x}\nu(dx) < \infty$, $(y_0, +\infty)$, если $\int_{x>1} e^{-y_0 x}\nu(dx) = \infty$.

Следующая лемма чем-то напоминает лемму 2.1.

Лемма 4.2. *Из условия о том, что $-X$ есть экспоненциально специальный семимартингал для любого $X \in \mathcal{X}$, следует, что $H_t \in \mathfrak{D}$ $dPdt$ п.в., $0 \leq t \leq T$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.13 в [45], для того, чтобы семимартингал $-X$ был экспоненциально специальным, необходимо и достаточно, чтобы процесс

$$J^{-X} = \mathbb{1}_{x>1} e^x * \nu^{-X}$$

был процессом ограниченной вариации, где ν^{-X} есть компенсатор меры скачков $-X$. Согласно [43], компенсатор меры скачков процесса $-H \cdot L$ задается по формуле

$$\nu^{-X}([0,s] \times G) = \int_0^s dt \int \mathbb{1}_G(-H_t x)\nu(dx), \ 0 \leq s \leq T, \text{ где } G \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Тогда

$$J_s^{-X} = \int_0^s dt(\int \mathbb{1}_{-H_t x>1} \exp(-H_t x)\nu(dx))$$
$$= \int_0^s dt(\int_{-H_t x>1} \exp(-H_t x)\nu(dx)), \ 0 \le s \le T. \tag{4.4}$$

При $H_t \notin \mathfrak{D}$ внутренний интеграл в (4.4) расходится по определению $\mathfrak{D}$. Для того, чтобы J^{-X} был хотя бы конечен, необходимо, чтобы для п.в. ω сходился бы и внешний интеграл, то есть множество тех t, где $H_t(\omega) \notin \mathfrak{D}$, должно иметь меру Лебега 0. Это и означает, что $H_t \in \mathfrak{D}$ $dPdt$ п.в. □

Эквивалентность первых двух пунктов следующей леммы есть частный случай теоремы Круглова (см. [8]), однако мы докажем утверждение полностью, так как некоторые выкладки понадобятся позднее.

Лемма 4.3. *Для функции полезности $U(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ и портфелей вида $X = 1 + yL,\ y \in \mathbb{R}$ следующие три свойства эквивалентны:*

1.
$$\int_{x>1} \mathrm{e}^{-yx} d\nu < \infty. \tag{4.5}$$

2. $EU(X_t) > -\infty, 0 \le t \le T$.

3. *Процесс $-X$ является экспоненциально специальным семимартингалом.*

Доказательство. Докажем, что из пункта 2 леммы следует пункт 1. Если у нас скачки ограничены сверху, то конечность интеграла в (4.5) следует по определению меры Леви. В случае наличия неограниченных сверху скачков возьмем произвольное $y < 0$ из $\mathbb{R}$. Пусть процесс времени задается как $G_t = t$, а через μ_L обозначим меру скачков процесса L. Преобразуем выражение

$\exp(-yL)$ с помощью формулы Ито для $0 \le t \le T$:

$$\begin{aligned}
\exp(-yL) &= \mathcal{E}(-yL + \frac{1}{2}y^2 c \cdot G + [e^{-yx} - 1 + yx] * (\mu_L)) \\
&= \mathcal{E}(-yb \cdot G - y \cdot B + \frac{1}{2}y^2 c \cdot G - yh * (\mu_L - \nu_L) \\
&+ [e^{-yx} - 1 + yh]\mathbb{1}_{|x|\le 1} * (\mu_L) + [e^{-yx} - 1]\mathbb{1}_{x>1} * (\mu_L)). \\
&= \mathcal{E}(D + A) = \mathcal{E}(D)\mathcal{E}(A),
\end{aligned}$$

где $A_t = [e^{-yx} - 1]\mathbb{1}_{x>1} * (\mu_L)_t$, а D_t есть сумма остальных слагаемых. Более того, процессы A и D независимы. Так как по предположению $E\exp(-X_T) < \infty$, то $E\mathcal{E}(A)_T < \infty$. Но $E\mathcal{E}(A)_T = E(1 + \mathcal{E}(A_-) \cdot A_T) \ge E(1 + A_T)$, откуда $EA_T < \infty$. Таким образом, процесс $[e^{-yx} - 1]\mathbb{1}_{x>1} * (\mu_L)$ интегрируем и имеет компенсатор $[e^{-yx} - 1]\mathbb{1}_{x>1} * (\nu_L)$. Значит, сходится $\int_{x>1}[e^{-yx} - 1]d\nu$, что эквивалентно конечности $\int_{x>1} e^{-yx}d\nu$.

Докажем, что из пункта 1 леммы следует пункт 2, пускай конечен интеграл (4.5). Тогда конечен интеграл $\int_{x>1}(\mathrm{e}^{-yx} - 1)d\nu$. Опять сделаем разложение по формуле Ито. В силу предположения, процесс A интегрируем. Так как мера Леви интегрирует x^2 в окрестности 0, то процесс $[e^{-yx} - 1 - yh]\mathbb{1}_{|x|\le 1} * (\mu_L)$ также интегрируем. Добавляя и вычитая компенсаторы этих двух слагаемых, получаем:

$$\begin{aligned}
\exp(-1 - yL) &= \mathcal{E}(-1 - y \cdot B + (e^{-yx} - 1) * (\mu_L - \nu_L) + \psi(y) \cdot G) \\
&= Z\exp(-1 + \psi(y) \cdot G),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где $\psi(y) = -yb + \frac{1}{2}y^2 c + [e^{-yx} - 1 + yh] * \nu$. Нетрудно видеть, что согласно предложению 1.6 процесс $Z_t = \mathcal{E}(-y \cdot B_t + (e^{-yx} - 1) * (\mu_L - \nu_L)_t)$ является равномерно интегрируемым мартингалом, следовательно, задает процесс плотности эквивалентной мартингальной меры. Параметры Гирсанова при этом имеют вид $\beta = -y, Y(x) = e^{-yx}$. Отсюда получаем $E\exp(-yL)_T = \exp(T\psi(y)) < \infty$, что и требовалось показать.

Теперь докажем, что пункт 3 леммы эквивалентен пункту 1. Рассмотрим формулу (4.4) леммы 4.2, для $H_t = y$, $y \in \mathbb{R}$. Если $y \notin \mathfrak{D}$, то внутренний интеграл в ней расходится для любого t. Если $y \in \mathfrak{D}$, то тогда внутренний интеграл сходится для любого t к одной и той же константе $D_1 < +\infty$, а внешний интеграл от 0 до t равен $D_1 t$ и является процессом ограниченной вариации. Значит, только при $y \in \mathfrak{D}$ X является экспоненциально специальным семимартингалом. Согласно определению $\mathfrak{D}$ и лемме 4.1 это эквивалентно конечности интеграла в (4.5), что и требовалось показать. $\square$

В доказательстве леммы 4.3 был введен процесс плотности Z для некоторой эквивалентной меры, обозначим ее через Q. С помощью предложения 1.4 для процесса L нетрудно посчитать триплет характеристик (B', C', ν'_L) относительно этой меры. Он имеет вид

$$B'_t = b't,\ C'_t = c't,\ \nu'_L(\omega, dt, dx) = dt\nu'(dx),$$

где

$$\begin{aligned} b' &= b - cy + h(x)(e^{-yx} - 1) * \nu, \\ c' &= c, \\ \nu' &= Y\nu = e^{-yx}\nu, \end{aligned} \tag{4.7}$$

то есть является детерминированным и однородным. Таким образом L остается процессом Леви по новой мере Q.

Перейдем к основной части доказательства теоремы.

Запишем неравенство для вогнутых функций, примененное к $U(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ и случайным величинам X_T^*, X_T:

$$U(X_T) \le U(X_T^*) + (X_T - X_T^*)U'(X_T^*). \tag{4.8}$$

Из этой формулы видно, что если $X^* \in \mathcal{X}$ такой, что для любого $X \in \mathcal{X}$ $E(X_T^* - X_T)U'(X_T^*) \ge 0$ и $EU(X_T^*) > -\infty$, то тогда X^* будет являться оптимальным портфелем для меры P. С учетом формулы для U это можно переписать как

$$E(X_T - X_T^*)\exp(-X_T^*) \le 0. \tag{4.9}$$

Преобразуем данное выражение, предполагая, что $X^* = 1+y^*L$ для константы $y^* \in \mathfrak{D}$, определенной в формулировке теоремы. В лемме 4.3 мы вывели, что подобный процесс будет являться экспоненциально специальным семимартингалом, $E(1-\mathrm{e}^{-X_t^*}) > -\infty, 0 \le t \le T$ и $\exp(-X_T^*) = Z_T \exp(\psi(y^*)) = \exp(\psi(y^*))Z_T$, Z_T определяет меру Q. Поэтому

$$E(X_T^* - X_T)U'(X_T^*) = \exp(\psi(y^*))E_Q(X_T^* - X_T).$$

Заметим, что интеграл

$$\int_{x>1} x d\nu' = \int_{x>1} x e^{-y^* x} d\nu$$

конечен ввиду конечности F в y^* (см. лемму 4.1), значит $E_Q X_T^* < \infty$ и из (4.7)

$$E_Q X_T^* = 1 + Ty^*(b' + \int_{x>1} x d\nu') = 1 + Ty^* F(y^*).$$

Подсчитаем математическое ожидание $E_Q X_T$. Так как $X \in \mathcal{X}$, то по лемме 4.2 должно быть выполнено $H_t \in \mathfrak{D}$ $dPdt$ п.в. Процесс $X = H \cdot L$ как интеграл по процессу Леви является семимартингалом. Так как H ограничен и процесс $X^c + h*(\mu-\nu)$ имеет конечный второй момент, то при интегрировании по нему мартингальные свойства сохранятся (см. I.4.2, I.4.40 в [39]), то есть $H\cdot(X^c + h*(\mu-\nu))$ есть мартингал с конечным вторым моментом. Отсюда $E_Q H\cdot(X^c + h*(\mu-\nu')) = 0$.

Значит, в случае своего существования $E_Q X_T$ совпадает с математическим ожиданием интеграла по оставшимся компонентам. Пусть $G_t = t$, тогда $E_Q X_T = E_Q(H\cdot(b'G + (x-h)*\mu))_T$. Так как $(x-h)*\nu'$ есть детерминированный конечный процесс, то это выражение можно записать как $E_Q(H\cdot(b'G + (x-h)*\nu'))_T = \int_0^T L'_t dt$, где

$$\begin{aligned} L'_t &= H_t(b - cy^* + \int h(x)(e^{-y^*x}-1)\nu(dx)) + \int H_t(x-h)e^{-y^*x}\nu(dx) \\ &= H_t(b - cy^* + \int (xe^{-y^*x} - h(x))\nu(dx)) = -H_t F(y^*). \end{aligned}$$

Так как процесс H ограничен, то определено $E_Q \int_0^T L'_t dt$, а значит, и $E_Q X_T$. Поэтому $E_Q(X_T - X_T^*) = -F(y^*)E(\int_0^T (H_t - y^*)dt)$. Если $F(y^*) = 0$, то $E_Q(X_T - X_T^*) = 0$. Если $F(y^*) \neq 0$, то по пункту 2 леммы 4.1 $|y^*| < \infty$ и $0 < F(y^*) < \infty$, значит $y^* \in \mathfrak{D}$. Так как $H_t \geq y^*$ п.в., то $E_Q(X_T - X_T^*) \leq 0$. Отсюда получаем, что для данного X^* соотношение (4.9) всегда выполнено. В (4.8) справа все математические ожидания конечны. Теорема доказана.

Как уже было отмечено, в случае экспоненциальной функции полезности у нас нет естественного ограничения на множество $\mathcal{X}(x)$, в отличие от логарифмического и степенного случаев. Поэтому для определения множества процессов капиталов возможны различные подходы. При этом понятно, что совсем убирать ограничения на $\mathcal{X}(x)$ нельзя, как мы убедились в начале главы. Во многих работах, к примеру [44, 60], рассматривалось множество $\mathcal{X}_b(x)$ процессов капиталов вида $x + H \cdot L$, ограниченных снизу некоторой константой. В [44] задача (4.2) исследовалось для случая, когда $\exists\, y^* \geq 0 : F(y^*) = 0$, и тогда максимальное значение полезности достигалось на последовательности портфелей X^n, где X^n является процессом $x + y^* L$, остановленным в момент достижения нижней границы $-n$. Как мы можем видеть из доказательства теоремы 4.2, наличие корня у F означает, что L является мартингалом по мере Q. Условие $y^* \geq 0$ нужно для того, чтобы решение в случае наличия у L неограниченных сверху скачков приближалось последовательностью ограниченных снизу процессов капитала. В нашей же постановке задачи удается избежать неудобств, что возникают в модели с $\mathcal{X}_b(x)$. Мы используем другое множество $\mathcal{X}(x)$, которое допускает все возможные в исходной модели немонотонные процессы Леви L, не предполагая наличие неотрицательного корня у F. Решение X^*, на котором достигается максимальное значение полезности, принадлежит множеству $\mathcal{X}(x)$, а не достигается на последовательности. Предположения о наличии корня у F и о его неотрицательности в случае существования отсутствуют.

Отметим, что в доказательстве теоремы 4.2 условие $H \in \mathfrak{D}$ мы использовали лишь в том случае, когда у F нет корня, для того, чтобы интеграл $\int_0^T (H_t - y^*)dt$ был неотрицательным. В свою очередь, как видно из леммы 4.2, условие $H \in \mathfrak{D}$ выполнено благодаря тому, что в теореме процесс X предполагается экспоненциально специальным. При наличии же корня у F множество $\mathcal{X}$ для теоремы 4.2 можно задать просто как

$$\mathcal{X}(x) = \{X : X \text{ вида } (4.1),\ H \text{ ограничен}\}.$$

4.3 Двойственная задача

Традиционно в качестве двойственной задачи к (4.2) рассматривается следующая задача:

$$v(y) = \inf_{Y \in \mathcal{Y}(y)} E\, V(Y_T), \tag{4.10}$$

где $V(y) = \sup_{x>0}(U(x) - xy)$, $y > 0$. Для нашей функции $U(x) = 1 - \exp(-x)$ имеем $V(y) = 1 - y + y \ln y$. В соответствии с работой В. Шахермайера [60] и другими множество $\mathcal{Y}(y)$ положим равным множеству $\mathcal{M}(y)$ таких мартингалов Y, что Y_T/y есть абсолютно непрерывная по P мартингальная мера. Также нам необходимо предположить, что у функции F есть корень. Задача примет вид

$$\begin{aligned} v(y) &= \inf_{Y \in \mathcal{M}(y)} E\,(Y_T \ln Y_T - Y_T + 1) && (4.11) \\ &= \inf_{Y \in \mathcal{M}(y)} E\,(Y_T \ln Y_T) - y + 1 && (4.12) \\ &= y \ln y + y v(1) - y + 1. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathcal{M}(y) = y\mathcal{M}(1)$ и $EY_T = y$. Как мы видим, двойственную задачу (4.11) достаточно решить для $y = 1$ или для любого другого положительного y.

Задача (4.12) при $y = 1$ в литературе также именуется задачей о поиске меры, минимизирующей энтропию. Одной из наиболее известных работ по данной теме, связанной также и с процессами Леви, является статья Ф. Эсше и М. Швайцера [27], где авторы минимизируют энтропию на множестве таких мер Q, по которым исходный процесс Леви L является мартингалом. Показано, что на минимальной мартингальной мере процесс L также останется мартингалом. Помимо этого, при наличии корня у функции F решение для $y=1$ имеет вид

$$C_0(t)\exp(-y^*L_t),$$

где $C_0(t)=\exp(-\psi(y^*)t)$ есть детерминированная функция, зависящая только от t (здесь ψ та же, что и в (4.6)). Это будет следовать из дальнейших рассуждений. Помимо данной статьи, упомянем также работу [34], в которой авторы более детально рассматривают данную задачу для процессов Леви, широко используя при анализе преобразования Эсшера, и книгу [55], где представлены многие результаты для мер, минимизирующих энтропию и сохраняющих свойство процесса Леви.

Для выпуклой функции $V(y)=y\ln y$ и случайных величин Y_T, Y_T^* можно применить неравенство $V(y_1)-V(y_2)\geq V'(y_2)(y_1-y_2)$, откуда

$$Y_T(\ln Y_T-1)\geq Y_T^*(\ln Y_T^*-1)+(Y_T-Y_T^*)\ln Y_T^*.$$

Отсюда видно, что если математическое ожидание первого слагаемого в правой части конечно, а второго — неотрицательно, то Y^* определяет искомое решение двойственной задачи. Проверим, что процесс вида $Y^*=C_0(t)\exp(-y^*L)$ действительно задает решение. Нам нужно показать, что $EY_T^*(\ln Y_T^*-1)<\infty$, $Y^*\in\mathcal{M}(1)$ и $E(Y_T-Y_T^*)\ln Y_T^*\geq 0$. Из (4.6) следует, что $E(1+y^*L_T)\exp(-1-y^*L_T)=E\exp(-1+\psi(y^*)T)E_QX_T^*=E\exp(-1+\psi(y^*)T)$, где Q есть абсолютно непрерывная мера с процессом плотности $Z_t=\mathcal{E}(-y^*\cdot B_t+(e^{-y^*x}-1)*(\mu_L-\nu_L)_t)$. Отсюда получаем, что $EY_T^*\ln Y_T^*<\infty$. Более того, из доказательства основной теоремы следует, что, так как F имеет корень, то для новой меры Q выполнено $E_QL_T=0$, то есть L есть мартингал по ней. Значит, $Y^*\in\mathcal{M}(1)$. Осталось проверить, что

$E(Y_T - Y_T^*)\ln Y_T^* \geq 0$. Так как Y^* и Y задают мартингальные меры, то $E(Y_T - Y_T^*)\ln Y_T^* = E(Y_T^* - Y_T)(C_0(T) + 1 - X_T^*) = 0$, что и требовалось показать. Значит, $Y_t^* = C_0(t)\exp(-y^* L_t)$ действительно задает решение двойственной задачи.

Заметим, что при нашей постановке основной и двойственной задач для некоторой константы y_0 выполнено естественное соотношение

$$Y_T^* = y_0 U'(X_T^*),$$

а при $V(y) = 1 - y + y\ln y$ для $v(y)$ из (4.10) и $u(x)$ выполнено

$$v(y) = \sup_{x\geq 0}[u(x) - xy].$$

Эти соотношения всегда выполняются в логарифмическом и степенном случаях.

Изначально для двойственной задачи мы предположили, что у F есть корень. При другой постановке двойственной задачи это условие может поменяться. Упомянем работу [29], где двойственная задача формулировалась, вообще говоря, отлично от (4.12) и не на множестве эквивалентных мартингальных мер. В силу этого, она не всегда сводится к задаче (4.12). Но в случае, когда у F есть корень, решение двойственной задачи в [29] лежит в классе эквивалентных мартингальных мер и совпадает с Y^*.

4.4 Связь с задачами о степенной полезности и об эталонном портфеле

Как мы видим, ввиду разных множеств $\mathcal{X}$ задачи степенной полезности и эталонного портфеля сильно отличаются от задачи с экспоненциальной полезностью. Тем не менее, есть и общие моменты. Везде удается получить ответ в терминах триплета процесса Леви L. В каждой основной задаче решение определяется константой y^* и имеет вид $X^* = \mathcal{E}(y^* L)$ для степенной полезности и эталонного портфеля, $X^* = 1 + y^* L$ для экспоненциальной полезности. Во всех трех случаях y^* зависит от функции F и определяется похожим образом. Финансовый же смысл у этих y^* немного отличается. В экспоненциальном случае это есть капитал, вложенный в акции, а в логарифмическом и степенном случае это есть отношение капитала, вложенного в акции, к общему капиталу инвестора. В теореме 3.1 и при доказательстве теоремы 4.2 у нас возникают меры Q с похожим смыслом, для эталонного портфеля в качестве Q можно рассматривать исходную меру P. Функция F во всех случаях помогает анализировать свойства меры Q. Для экспоненциальной полезности с ее помощью можно определить, является ли Q ЕММ. Для степенной полезности она помогает определить, является ли решение двойственной задачи ЕММ по мере Q. Все эти свойства полностью определяется тем, есть ли у F корень в области определения или нет. Заметим, что во всех случаях значения $F(0)$ совпадают. Отсюда при определенных предположениях на L нетрудно вывести некоторые утверждения.

Утверждение 4.1. *Пусть для процесса Леви L выполнено $F(0) \leq 0$. Тогда решение задачи экспоненциальной полезности задает меру Q, являющуюся ЕММ. Если же вдобавок L не имеет отрицательных скачков ($\nu(-1,0) = 0$), то тогда в случае степенной полезности и эталонного портфеля решение двойственной задачи также является ЕММ.*

Утверждение 4.2. *Пусть L имеет сколь угодно большие скачки. Если решение задачи экспоненциальной полезности задает меру Q, не являющуюся ЕММ, то тогда в случае степенной полезности решение двойственной задачи не является ЕММ.*

Утверждение 4.3. *Пусть L не имеет скачков. Тогда решение задачи экспоненциальной полезности и эталонный портфель определяются одинаковой константой $y^* = b/c$, решение степенной полезности для $p < 1$, $p \neq 0$ задается константой $y^* = b/((1-p)c)$, а соответствующая* *мера Q либо есть EMM (в случае экспоненциальной полезности), либо решение двойственной задачи есть EMM (в случае степенной полезности и эталонного портфеля).*

В завершение приведем результаты для задачи поиска оптимального портфеля во всех трех случаях с целью их сравнения. Для всех видов функций полезности мы запишем вид функции F и вид оптимального портфеля при $X_0 = 1$.

$$U(x) = \ln x, \qquad F(y) = cy - b + \int (h(x) - \frac{x}{(1+yx)})\nu(dx),$$

$$X^* = \mathcal{E}(y^*L),$$

$$U(x) = \frac{x^p}{p},\ p < 1,\ p \neq 0, \quad F(y) = c(1-p)y - b + \int (h(x) - \frac{x}{(1+yx)^{1-p}})\nu(dx),$$

$$X^* = \mathcal{E}(y^*L),$$

$$U(x) = 1 - \exp(-x), \qquad F(y) = cy - b + \int (h(x) - xe^{-yx})\nu(dx),$$

$$X^* = 1 + y^*L.$$

F определено на множестве допустимых значений H. Если у F есть корень в этом множестве, то тогда именно этот корень и является константой y^* для X^*. В противном случае y^* также однозначно определяется.

Заключение

В данной работе мы исследовали задачу максимизации ожидаемой полезности в произвольной безарбитражной модели, где процесс цены актива моделируется стохастической экспонентой процесса Леви, для случаев экспоненциальной, логарифмической и степенной функций полезности. Помимо этого, рассматривались также связанные с этой проблемой вопросы поиска эталонного портфеля, решения двойственной задачи, определения связи между решениями для различных функций полезности.

Главные итоги заключаются в следующем. Основные задачи были полностью решены для логарифмического и степенного случаев. Для экспоненциальной полезности предложен класс стратегий, в котором задача максимизации полезности всегда имеет нетривиальное решение, и найдено это решение. Был получен явный вид эталонного портфеля, а также показано, что процесс, обратный к нему, есть либо мартингал и процесс плотности эквивалентной мартингальной меры, либо мартингал, но не процесс плотности эквивалентной мартингальной меры, либо строгий супермартингал. Подобная классификация проведена и для решения двойственной задачи в степенном и логарифмическом случае. Была найдена связь между основной задачей в степенном случае и задачей о поиске эталонного портфеля.

Полученные результаты имеют теоретический характер, но, разумеется, могут быть применены и для анализа некоторых реальных ситуаций на финансовых рынках. Здесь отметим, что определение связи с практическими данными выходит за рамки данной работы, но может быть предметом для дополнительного исследования.

Список литературы

[1] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005.

[2] *Гущин А. А.* Двойственная характеризация цены в задаче максимизации робастной полезности // Теория вероятностей и ее применения, 2010, т. 55, № 4, с. 680–704.

[3] *Иванов М. Ю.* Максимизация логарифмической полезности в экспоненциальной модели Леви // Вестник МГУ, 2014, № 6, с. 16–24.

[4] *Иванов М. Ю.* Максимизация логарифмической полезности для экспоненциальной модели Леви // Тезисы докладов XIX Международной молодежной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2012", Секция "Математика и механика" (электронный ресурс). М.: МАКС Пресс.

[5] *Иванов М. Ю.* Максимизация степенной полезности для экспоненциальной модели Леви // Тезисы докладов XX Международной молодежной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2013", Секция "Математика и механика" (электронный ресурс). М.: МАКС Пресс.

[6] *Иванов М. Ю.* Максимизация экспоненциальной полезности в модели Леви. Сборник "Современные проблемы математики и механики", 2015, т. 10, № 3, с. 83–93.

[7] *Иванов М. Ю.* О связи задач максимизации степенной и логарифмической полезности в экспоненциальной модели Леви // Теория вероятностей и ее применения, 2014, т. 59, № 4, с. 781–790.

[8] *Круглов В. М.* Замечание к теории безгранично делимых распределений // Теория вероятностей и ее применения, 1970, т. 15, № 2, с. 330–336.

[9] *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.

[10] *Маслов В. П., Черный А. С.* О минимизации и максимизации энтропии в различных дисциплинах // Теория вероятностей и ее применения, 2003, т. 48, № 3, с. 466–486.

[11] *Рохлин Д. Б.* О существовании эквивалентной супермартингальной плотности для разветвленно-выпуклого семейства случайных процессов // Математические заметки, 2010, т. 87, № 4, с. 594–603.

[12] *Селиванов А.В.* О мартингальных мерах в экпоненциальных моделях Леви // Теория вероятностей и ее применения, 2004, т. 49, № 2, с. 317–334.

[13] *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС, 1998.

[14] *Ширяев А. Н., Черный А. С.* Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража // Труды МИАН, 2002, т. 237, с. 12–56.

[15] *Becherer D.* The Numéraire Portfolio for Unbounded Semimartingales // Finance and Stochastics, 2001, Vol. 5, № 3, p. 327–341.

[16] *Bellini F., Frittelli M.* On the existence of minimax martingale measures // Mathematical Finance, 2002, Vol. 12, № 1, p. 1–21.

[17] *Biagini S., Frittelli M.* Utility maximization in incomplete markets for unbounded processes // Finance and Stochastics, 2005, Vol. 9, № 4, p. 493–517.

[18] *Biagini S., Sirbu M.* A note on admissibility when the credit line is infinite // Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2012, Vol. 84, № 2-3, p. 157–169.

[19] *Bismut J. M.* Conjugate convex functions in optimal stochastic control // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1973, Vol. 44, № 2, p. 384–404.

[20] *Cherny A. S., Shiryaev A. N.* Change of time and measure for Lévy processes. Lectures at the Summer School "From Lévy processes to semimartingales: Recent theoretical developments and applications in finance", Aarhus, 2002.

[21] *Cox J., Huang C.-F.* Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process // Journal of Economic Theory, 1989, Vol. 49, № 1, p. 33–83.

[22] *Cvitanic J., Karatzas I.* Convex duality in constrained portfolio optimization // Annals of Applied Probability, 1992, Vol. 2, № 4, p. 767–818.

[23] *Delbaen F., Grandits P., Rheinländer T., Samperi D., Schweizer M., Stricker C.* Exponential hedging and entropic penalties // Mathematical finance, 2002, Vol. 12, № 12, p. 99–123.

[24] *Delbaen F., Schachermayer W.* The Fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes // Mathematische Annalen, 1998, Vol. 312, № 2, p. 215–250.

[25] *Delbaen F., Schachermayer W.* A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing // Mathematische Annalen, 1994, Vol. 300, № 1, p. 463–520.

[26] *Eberlein E., Jacod J.* On the Range of Options Prices // Finance and Stochastics, 1997, Vol. 1, № 2, p. 131–140.

[27] *Essche F., Schweizer M.* Minimal entropy preserves the Lévy property: how and why // Stochastic Processes and their Applications, 2005, Vol. 115, № 2, p. 299–327.

[28] *Frittelli M.* The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets // Mathematical Finance, 2000, Vol. 10, № 1, p. 39–52.

[29] *Gushchin A. A., Khasanov R. V., Morozov I. S.* Some functional analytic tools for utility maximization // Modern Stochastics and Applications, 2014, Vol. 90, p. 267–285.

[30] *Goll T., Kallsen J.* Optimal portfolios for logarithmic utility // Stochastic Processes and their Applications, 2000, Vol. 89, № 1, p. 31–48.

[31] *Goll T., Kallsen J.* A complete explicit solution to the log-optimal portfolio problem // The Annals of Applied Probability, 2003, Vol. 13, № 2, p. 774–799.

[32] *Harrison J.M., Kreps D.M.* Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets // Journal of Economic Theory, 1979, Vol. 20, № 3, p. 381–408.

[33] *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales and Stochastic integrals in the theory of continuous trading // Stochastic Processes and their Applications, 1981, Vol. 11, № 3, p. 215–260.

[34] *Hubalek F., Sgarra C.* Esscher transforms and the minimal entropy martingale measure for exponential Lévy models // Quantitative Finance, 2006, Vol. 6, № 2, p. 125–145.

[35] *Hurd T. R.* A note on log-optimal portfolios in exponential Lévy markets // Statistics and Decisions, 2004, Vol. 22, № 3, p. 225–233.

[36] *Ivanov M.* Expected utility maximization in exponential Lèvy model // International conference "Stochastic optimization and optimal stopping". Book of abstracts (Moscow, 24-28 September 2012).

[37] *Ivanov M.* Expected utility maximization in exponential Lèvy models for logarithmic and power utility functions // International conference "Advanced Finance and Stochastic". Book of abstracts (Moscow, 24-28 June 2013).

[38] *Jacod J.* Calcul stochastique et problémes de martingales. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1979.

[39] *Jacod J., Shiryaev A. N.* Limit theorems for stochastic processes. Second edition. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[40] *Jacubénas P.* On Option Pricing in Certain Incomplete Markets // Труды МИАН, 2002, т. 237, с. 123–142.

[41] *Jeanblanc M., Klöppel S., Miyahara Y.* Minimal f^q-martingale measures for exponential Lévy processes // Annals of Applied Probability, 2007, Vol. 17, № 5-6, p. 1615–1638.

[42] *Kabanov Y. M., Stricker C.* On the optimal portfolio for the exponential utility maximization: remarks to the six-author paper // Mathematical Finance, 2002, Vol. 12, № 2, p. 125–134.

[43] *Kallsen J.* A didactic note on affine stochastic volatility models // From stochastic calculus to mathematical finance, Springer, 2006, p. 343–368.

[44] *Kallsen J.* Optimal portfolios for exponential Lévy processes //

Mathematical Methods of Operations Research, 2000, Vol. 51, № 3, p. 357–374.

[45] *Kallsen J., Shiyaev A. N.* The cumulant process and Esscher's change of measure // Finance and Stochastics, 2002, Vol. 6, № 4, p. 397–428.

[46] *Karatzas I., Kardaras C.* The Numéraire Portfolio in Semimartingale Financial Models // Finance and Stochastics, 2007, Vol. 11, № 4, p. 447–493.

[47] *Karatzas I., Lehoczky J. P., Shreve S. E.* Optimal portfolio and consumption decisions for a "small investor" on a finite horizon // SIAM journal on control and optimization, 1987, Vol. 25, № 6, p. 1557–1586.

[48] *Karatzas I., Lehoczky J.P., Shreve S.E., Xu G.L.* Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market // SIAM Journal on Control and Optimization, 1991, Vol. 29, № 3, p. 702–730.

[49] *Kardaras C.* No-free-lunch equivalences for exponential Lévy models under convex constraints on investment // Mathematical Finance, 2009, Vol. 19, p. 161–187.

[50] *Kramkov D., Schachermayer W.* Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets // Annals of Applied Probability, 2003, Vol. 13, № 4, p. 1504–1516.

[51] *Kramkov D., Schachermayer W.* The condition on the asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets // Annals of Applied Probability, 1999, Vol. 9, № 3, p. 904–950.

[52] *Larsen K.* A note on the existence of the power investor's optimizer // Finance and Stochastics, 2011, Vol. 15, № 1, p. 183–190.

[53] *Markowitz H.* Portfolio Selection // Journal of Finance, 1952, Vol. 7, № 1, p. 71–91.

[54] *Merton R. C.* Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case // The Review of Economics and Statistics, 1969, Vol. 51, № 3, p. 247–257.

[55] *Miyahara Y.* Option pricing in incomplete markets: Modeling based on geometric Lévy processes and minimal entropy martingale measures. London: Imperial College Press, 2012.

[56] *Nutz M.* Power utility maximization in constrained exponential Lévy models // Mathematical Finance, 2010, Vol. 22, № 4, p. 690–709.

[57] *Sato K.-I.* Lévy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[58] *Savage L.* The foundations of statistics. New York: Wiley, 1954.

[59] *Schachermayer W.* A super-martingale property of the optimal portfolio process // Finance and Stochastics, 2003, Vol. 7, № 4, p. 433–456.

[60] *Schachermayer W.* Optimal Investment in Incomplete Markets when Wealth may Become Negative // Annals of Applied Probability, 2001, Vol. 11, № 3, p. 694–734.

[61] *Takaoka K., Schweizer M.* A note on the condition of no unbounded profit with bounded risk // Finance and Stochastics, 2014, Vol. 18, № 2, 393–405.

[62] *Tankov P.* Pricing and hedging in exponential Lévy models: review of recent results // Paris-Princeton Lecture Notes in Mathematical Finance, Springer, 2010, p. 319–359.

[63] *Tobin J.* Liquidity preference as behavior towards risk // The review of economic studies, 1958, Vol. 25, № 2, p. 68–85.

[64] *Von Neumann J., Morgenstern O.* Theory of games and economic behavior. Princeton: Princeton University Press, 1944.