



Россия,
 117418, Москва,
 Нахимовский пр., 47

☎ 8 (499) 129 1644
 Факс: 8 (495) 718 9615, (499) 129 1400
 E-mail: director@cemi.rssi.ru http://www.cemi.rssi.ru

47, Nakhimovsky Prospect,
 Moscow, 117418,
 Russia

От 26.11.2015 № 14310/7124

УТВЕРЖДАЮ

Директор ЦЭМИ РАН
 академик РАН
 В.Л. Макаров



"26" ноября 2015 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации ФГБУН Центральный экономико-математический институт Российской академии наук на диссертационную работу **Иванова Михаила Юрьевича** «Максимизация ожидаемой полезности в экспоненциальной модели Леви», представленную к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Актуальность для науки и практики

Проблематика диссертационной работы М.Ю.Иванова относится к числу классических задач финансовой математики. Простейший финансовый рынок состоит из двух активов, один из которых безрисковый (без ограничения общности его цена предполагается постоянной), а цена второго актива описывается семимартингалом, а поэтому при вложении в этот актив можно как выиграть, так и проиграть. Задача инвестора состоит в распределении в каждый момент времени имеющегося у него капитала между этими активами (выбора портфеля), чтобы добиться наилучшего (в том или ином смысле) результата. В частности, как это делается в диссертации, можно изучать задачу максимизации ожидаемой полезности капитала в некоторый конечный момент времени.

Впервые задача максимизации ожидаемой полезности капитала рассматривалась в работах Марковица в начале пятидесятых годов прошлого века. Затем Мертон в 1969 г. рассмотрел модель с непрерывным временем.

Он свёл задачу к решению стохастического дифференциального уравнения и получил решение в некоторых частных случаях.

После работ Харриссона и Крепса (1979), Харриссона и Плиски (1981) стала понятна роль стохастического исчисления при изучении этих задач. Были сформулированы понятия эквивалентной мартингальной меры, эталонного портфеля и разные варианты понятия арбитража.

С тех пор появилось огромное число работ, посвященных этой тематике. Диссертант рассматривает задачу, когда цена рискового актива задается экспоненциальным процессом Леви. Такой процесс наиболее адекватно отражает изменение цен. Рассматриваются три случая, когда функция полезности задается логарифмической, степенной или экспоненциальной функцией. Эти случаи рассматривали до этого многие авторы. Но все они для получения результатов накладывали те или иные условия на процесс Леви. Диссертанту удалось дать полное описание решения как исходной, так и двойственной задачи в терминах триплета характеристик, не накладывая на процесс Леви никаких ограничений (за исключением естественных предположений об отсутствии арбитража и неотрицательности процесса цены, которые тоже формулируются в терминах триплета).

Поэтому задачи, решаемые в диссертации, естественны и актуальны.

Основные научные результаты, их новизна и значимость для науки

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, который включает 64 наименования. Общий объем работы составляет 98 страниц.

Во **Введении** дается достаточно подробный обзор литературы по рассматриваемой тематике, формулируются цели исследования, перечисляются полученные диссертантом новые научные результаты, даётся краткое описание содержания диссертации.

Глава 1 носит вспомогательный характер. Сначала на хорошем математическом языке приведены все необходимые сведения из теории семимартингалов и процессов Леви, даны основные определения и в виде Предложений сформулированы известные результаты, используемые в дальнейшем изложении. Затем формулируется модель финансового рынка, в котором цена задается стохастической экспонентой процесса Леви L . Приводятся определения эталонного портфеля, эквивалентной мартингальной меры, эквивалентной σ -мартингальной плотности, эквивалентной супермартингальной плотности, и связь этих понятий с различными опре-

делениями отсутствия арбитража. В конце главы формулируется основная и двойственная задача, а также известные результаты, описывающие связь этих задач.

В главе 2 рассматривается случай экспоненциальной полезности. Диссертант рассматривает функцию $F(y)$ (формула (2.4) на стр. 40). Он определяет её естественную область определения (интервал). Затем он доказывает, что эта функция возрастает, а, значит, имеется три возможности. Она либо меняет знак, либо всюду положительна, либо всюду отрицательна. При этом принадлежность процесса Леви к определенному типу явно записывается через триплет. После этого показывается, что перемена знака $F(y)$ в точке H^* отвечает ситуации существования эквивалентной мартингальной меры, и эталонный портфель X^* является стохастической экспонентой процесса H^*L . В случае положительности, либо присутствует арбитраж, либо в качестве H^* берётся правый конец интервала, а эталонный портфель задаётся той же формулой, но ему соответствует σ -мартингальная плотность. В случае отрицательности опять либо присутствует арбитраж, либо в качестве H^* берётся левый конец и ему соответствует супермартингальная плотность. Показывается также, что оптимальный портфель существует тогда и только тогда, когда математическое ожидание величины $\ln X^*_T$ конечно. В этом случае оптимальный портфель для логарифмической полезности совпадает с эталонным. Случай бесконечного значения соответствует бесконечному значению функционала и σ -мартингальной плотности.

В главе 3 рассматривается случай степенной полезности с показателем степени $p < 1$, $p \neq 0$. Хорошо известно, что для гораздо более общей модели справедливо утверждение: если оптимальный портфель в задаче оптимизации ожидаемой полезности существует, то он совпадает с эталонным портфелем, но не по исходной мере P , а по некоторой эквивалентной мере Q . Тем самым с учетом результатов предыдущей главы задача сводится к нахождению меры Q_p .

Для этого вместо функции $F(y)$ диссертант рассматривает функцию $F_p(y)$, определяемую формулой (3.11) на стр. 60. Для этой функции опять есть аналогичные три случая, а значение y^*_p , соответствующее H^* , определяет параметры Гирсанова для построения меры Q_p . Кроме того, исследуя функцию $F_p(y)$, диссертант проводит сравнение логарифмической и степенной полезности при разных p для одного и того же процесса Леви. Доказывается, что если для какого-то p_1 существует решение максимизации ожидаемой степенной полезности, то оно существует для всех $p < p_1$.

Аналогичная ситуация имеет место для эквивалентной мартингальной меры, т.е. для решения двойственной задачи. А если при каком-то p_1 решение двойственной задачи не является эквивалентной мартингальной мерой, то и для $p > p_1$ это тоже справедливо.

Стоит отметить, что, хотя задачей оптимизации полезности занимались многие исследователи, но такого сравнения никто раньше не проводил, а оно представляет собой несомненный интерес. Не отмечалась ранее также связь между логарифмической и степенной полезностями.

В главе 4 рассматривается случай экспоненциальной полезности. Все процессы Леви делятся на три категории. Показывается, что для первых двух категорий вкладывать в рисковый актив не имеет смысла, и оптимальное значение целевого функционала равно единице, а для третьей категории, состоящей из составных пуассоновских процессов, оптимальное значение целевого функционала меньше единицы. Если же ввести некоторые ограничения на возможные стратегии управления капиталом, то можно получить результат, похожий на тот, который получался в логарифмическом и степенном случаях.

Рекомендации по использованию результатов диссертации

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут найти применения в исследованиях по теории вероятностей, математической статистике и финансовой математике, которые ведутся во многих отечественных математических институтах и университетах, в частности, Математическом институте РАН им. В.А.Стеклова и его С.-Петербургском отделении, Центральном экономико-математическом институте РАН, Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова, С.-Петербургском государственном университете, Южном федеральном университете.

Общие замечания

1) Диссертант справедливо утверждает, что ему удалось решить задачу для произвольной экспоненциальной модели Леви. Он подробно описывает, где ранее рассматривались эта и аналогичные задачи, указывая, что в предшествующих работах на модель всегда накладывались ограничения. Однако диссертант нигде не пишет о том, за счет чего ему удалось рассмотреть общий случай, в чем состоит новизна его метода.

На самом деле, в рассуждениях автора в главах 2 и 3 центральную роль играют функции $F(y)$ и $F_p(y)$. Эти функции рассматривались и ранее, но там просто на модель накладывались условия, гарантирующие существование для каждой функции точки, в которой функция обращается ноль. А диссертант понял, что нужно найти естественную область определения этих функций и изучить их свойства. И именно это сыграло решающую роль в том, что удалось рассмотреть общий случай и дать классификацию различных возможностей. К сожалению, диссертант не выделил этот факт, и понять это удалось только после личной беседы.

2) Иногда в определениях диссертант забывает упомянуть свойства, которые, по-видимому, он считает очевидными. Например, не упоминается согласованность процесса при определении семимартингала на стр. 18 и свойство согласованности при определении случайной меры на стр. 19.

3) При определении экспоненциальной модели Леви диссертант накладывает условие $\Delta L > -1$, но не говорит о том, для чего оно нужно (а оно необходимо и достаточно для неотрицательности процесса цен).

4) На стр. 12 фигурирует H_u , а на стр. 18 – $B(R)$. Из контекста понятно, о чём идёт речь, но стоило бы написать это явно.

5) На стр. 30 нет чёткого описания множества, по которому берётся инфимум в сопряженной задаче.

6) Имеется ряд опечаток и грамматических рассогласований (стр. 18³, 26₁₁, 29₁₁, 32⁷, 51³, 65₉, 65₁).

Заключение

Приведённые замечания никак не влияют на общую положительную оценку диссертации. Диссертант самостоятельно и своевременно получил и опубликовал результаты диссертации. Они представлены в виде строгих математических утверждений и снабжены исчерпывающими доказательствами. Используемые в доказательствах известные факты и утверждения снабжены точными ссылками. Список литературы достаточно полно отражает имеющиеся публикации, связанные с темой диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в изданиях из списка ВАК России. Автореферат соответствует содержанию диссертации и достаточно полно отражает её содержание.

Из сказанного следует, что по своему содержанию, результатам и оформлению диссертационная работа М.Ю.Иванова «Максимизация ожидаемой полезности в экспоненциальной модели Леви» соответствует тре-

бованиям, предъявляемым ВАК России к кандидатским диссертациям. Её автор, Иванов Михаил Юрьевич, заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика.

Отзыв рассмотрен и одобрен на заседании лаборатории Стохастических моделей экономики ЦЭМИ РАН 17 ноября 2015 года.

Составитель отзыва

главный научный сотрудник лаборатории
Стохастических моделей экономики ЦЭМИ РАН
доктор физико-математических наук,
117418, Москва, Нахимовский проспект, 47
Тел. +7 (499) 7242456
E-mail: presman@cemi.rssi.ru

Э.Л.Пресман

Заведующий лабораторией
Стохастических моделей экономики ЦЭМИ РАН
кандидат физико-математических наук,
117418, Москва, Нахимовский проспект, 47
Тел. +7 (499) 7242467
E-mail: arkin@cemi.rssi.ru

В.И.Аркин