ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе Иванова Михаила Юрьевича
«Максимизация ожидаемой полезности в экспоненциальной модели Леви»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация посвящена исследованию свойств оптимальных инвестиционных стратегий на рынке с одним рисковым активом, цена которого описывается экспоненциальной моделью Леви. Популярность данной модели связана с тем, что в ее рамках удается дать адекватное описание ряда эффектов, присутствующих на реальном рынке: скачков цен, негауссовских распределений возвратов, улыбки волатильности. В то же время, экспоненциальная модель Леви является естественным обобщением геометрического броуновского движения, сохраняя свойства однородности и независимости возвратов, а мощный аппарат стохастического анализа делает возможным построение явных решений.

Задача оптимального инвестирования представляет интерес не только с точки зрения отдельного игрока, но и для анализа процесса формирования цен на рынке. Дело в том, что на неполных рынках задача определения цен платежных обязательств не может быть однозначно решена на основе лишь соображений безарбитражности. Одна из основных парадигм состоит в том, что выбор ценообразующего функционала должен осуществляться на основе анализа предпочтений инвесторов. В моделях Леви в ряде случаев удается довести вычисления до конца и выразить оптимальные стратегии инвесторов в терминах триплета Леви–Хинчина. Связи между оптимальными стратегиями инвесторов и ценообразующими функционалами устанавливаются при помощи выпуклой теории двойственности.

В случае многомерной экспоненциальной модели Леви задача максимизации ожидаемой полезности для логарифмической, степенной и экспоненциальной функций полезности исследовалась Каллсеном (2000). Во всех случаях были получены явные формулы для оптимальных стратегий в терминах триплета Леви–Хинчина. В работе Кардараса (2009) показано, что ряд известных условий безарбитражности рынка в рамках данной модели эквивалентны и допускают описание в терминах триплета (ссылки на предшествующие работы, посвященные одномерному случаю, имеются в диссертации). Оказывается, в частности, что обычное условие отсутствия арбитража равносильно как существованию эквивалентной мартингальной меры, так и существованию эталонного портфеля (“numéraire portflolio”). Портфель называется эталонным, если его капитал, выбранный в качестве единицы измерения, превращает капитал любого допустимого портфеля в супермартингал.

В работе М.Ю. Иванова рассматриваются задачи максимизации логарифмической, степенной и экспоненциальной функций полезности в одномерной экспоненциальной модели Леви. В такой модели цена S рискового актива является стохастической экспонентой $S = \mathscr{E}(L)$ процесса Леви L с $\Delta L > -1$. Подход, используемый в работе, основан на явных конструкциях и прямых вычислениях с использованием техники стохастического анализа: формулы Ито для разрывных семимартингалов, канонического представления процессов Леви, теоремы Гирсанова для семимартингалов, конструкции стохастической экспоненты. При рассмотрении логарифмической и степенной функций полезности особое внимание уделяется той роли, которую играет в этих задачах эталонный портфель.

Основные результаты работы состоят в следующем. (1) Получена явная формула для эталонного портфеля в терминах триплета Леви-Хинчина процесса L при единственном предположении об отсутствии арбитража. Решение задачи о максимизации логарифмической полезности, по существу, совпадает с эталонным портфелем. (2) Задача максимизации степенной полезности сведена к задаче построения эталонного портфеля для другой экспоненциальной модели Леви. Данный результат представляется наиболее интересным. (3) В задаче максимизации экспоненциальной полезности выделен класс стратегий, в котором задача разрешима, и получена явная формула для ее решения. Как и в двух предыдущих случаях, предполагается лишь, что выполняется условие отсутствия арбитража.

В целом, работа существенно дополняет известные результаты. Актуальность данной проблематики связана с уже отмеченной популярностью экспоненциальных моделей Леви.

Работа состоит из четырех глав. В первой главе приводятся необходимые сведения и известные вспомогательные утверждения, используемые в дальнейшем. Во второй главе получены явные формулы для эталонного портфеля и проанализированы его мартингальные свойства (теорема 2.1). Оказывается, что возможны три ситуации. (i) Эталонный портфель (точнее его капитал) X^* задает плотность $Y^* = 1/X^*$ эквивалентной мартингальной меры, относительно которой L является процессом Леви. Это наиболее естественный случай. (ii) Y^* является мартингалом, но не задает не только эквивалентную мартингальную меру, но и эквивалентную σ-мартингальную плотность. (iii) Y^* не является локальным мартингалом (но является супермартингалом). Заметим, что случаях (ii), (iii) эквивалентная мартингальная мера существует, но не описывается эталонным портфелем. Полное описание указанных случаев представляется достаточно интересным и позволяет дать точное описание решения задачи максимизации логарифмической полезности (теорема 2.2). Доказательства основаны на анализе стохастических экспонент. В частности, эталонный портфель имеет вид стохастической экспоненты: $X^* = \mathscr{E}(\alpha L)$, где α — константа, определяемая триплетом Леви-Хинчина процесса L. Следует отметить, что в известной работе Goll, Kallsen (2003) решение задачи максимизации логарифмической полезности получено для общей семимартингальной модели. Однако, оно представлено в менее явном виде по сравнению с теоремами 2.1, 2.2.

В третьей главе рассматривается задача максимизации степенной полезности. В рассуждениях данной главы используется следующее интересное наблюдение: решение задачи максимизации ожидаемой полезности при определенных технических условиях является эталонным портфелем относительно некоторой эквивалентной мартингальной меры (автор ссылается при этом на работу Takaoka, Schweizer (2014), хотя в ней это утверждение не выделено явным образом). В теореме 3.1 такая мартингальная мера Q построена для степенной функции полезности. Данная мера определяется триплетом процесса L, который по-прежнему является процессом Леви относительно Q. Эталонный портфель относительно Q строится с помощью результатов главы 2 и дает решение задачи максимизации степенной полезности. Существенную роль в доказательстве теоремы 3.1 играет теорема Гирсанова для семимартингалов. С моей точки зрения, теорема 3.1 является наиболее интересным результатом диссертационной работы. В заключительном разделе главы 3 рассматривается более специальный вопрос о сравнении решений задачи максимизации степенной полезности x^p, $p < 1$, $p \neq 0$ при различных p.

В главе 4 рассматривается задача максимизации экспоненциальной полезности. В связи с тем, что функция полезности определена на всей оси, здесь возникает известная проблема выбора класса допустимых портфелей. Эту ситуацию иллюстрирует теорема 4.1, показывающая, что если не накладывать на портфели других условий, кроме интегрируемости, то задача может стать вырожденной. Далее в диссертации введен класс допустимых портфелей, в котором задача имеет решение для любого немонотонного процесса Леви. Решение вида $X^* = 1 + y^* L$, где константа y^* определяется триплетом Леви-Хинчина процесса L, указано в теореме 4.1. Далее в работе описано решение двойственной задачи. Как и в предыдущих главах, здесь делаются минимальные предположения о процессе L. Именно эта общность определяет новизну полученных результатов.

Текст работы тщательно выверен и, насколько я могу судить, не содержит математических ошибок. Тем не менее, имеются следующие замечания.

(1) В ряде случаев автором опущены нетривиальные рассуждения, что затрудняет чтение работы.

С.44, 10-12 строки сверху. Читателю предлагается самостоятельно проверить, что L будет мартингалом по мере с плотностью $\mathscr{E}(L')_T$.

С.58, 3 строка сверху. Нет пояснений к неравенству $E\mathscr{E}(A)_- \cdot A_T \geq EA_T$.

С.62. При анализе конструкции эталонного портфеля используется функция F_p. При этом утверждается, что некоторые рассуждения можно провести по аналогии с главой 2, где рассматривается другая функция F.

С.62, 10-12 строки сверху. В случаях $y^* = M$ или $y^* = N$ неясна связь между расходимостью интеграла в определении F_p и эквивалентностью меры Q.

(2) На мой взгляд, следовало явно упомянуть, что функция F, которая определяется формулой (2.4) и играет ключевую роль при описании решений, рассматривалась ранее, по крайней мере, в работе Kallsen (2000).

(3) С.76. Определение класса допустимых процессов $\mathcal{X}$ недостаточно мотивировано с финансовой точки зрения. Ситуацию проясняет лемма 4.2 и пункт 2 леммы 4.3, однако явно этот вопрос не обсуждается.

(4) с.68, 8 строка снизу содержит странное равенство $F_y(p) = F_p(y)$.

(5) Имеется несколько опечаток.

С. 57, 3 строка снизу, с. 81, 3 строка сверху и во всех остальных случаях. Вместо $y \cdot B$ должно быть $y\sqrt{c} \cdot B$.

С. 65, последняя строка. Вместо $U(x) = x^p$ должно быть $U(x) = x^p/p$.

С. 83, 13-14 строки сверху. Вместо $X = H \cdot L$ должно быть $X = 1 + H \cdot L$.

С. 86, 6 строка снизу. Выражение $E\exp(-1+\psi(y^*)T)E_Q X_T^*$ и следующее за ним содержат лишний знак E математического ожидания.

Мера скачков и ее компенсатор обозначаются μ^L, ν^L в главе 1 и μ_L, ν_L в дальнейшем.

(6) Ряд фраз построены неудачно с точки зрения русского языка. С.7, последняя строка: «множество σ-мартингальных мер состоит из одной единственной». С.76, 3-4 строки сверху: «... мы можем заключить следующую теорему». С.76, формулировка теоремы 4.1: «Если же L не имеет подобный вид, то тогда ...»

Сделанные замечания носят технический характер и не умаляют ценности диссертационной работы. В ней детально исследована задача оптимального инвестирования в экспоненциальной модели Леви для логарифмической, степенной и экспоненциальной функций полезности. Решения выражены явным образом через триплет Леви-Хинчина. По сравнению с имеющейся литературой данная задача исследована при более слабых предположениях:

предполагается лишь, что выполняется условие отсутствия арбитража. Работа использует технику стохастического анализа и выполнена на высоком математическом уровне. Сформулированные результаты снабжены строгими доказательствами и представляют интерес для финансовой математики. Автореферат отражает содержание диссертации.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 3-х статьях, 2 из которых — в журналах из перечня ВАК.

Считаю, что диссертационная работа М.Ю. Иванова «Максимизация ожидаемой полезности в экспоненциальной модели Леви» удовлетворяет требованиям п.9 Положения о присуждении ученых степеней ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Иванов Михаил Юрьевич, несомненно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика.

17 ноября 2015 г.

Профессор кафедры высшей математики и
исследования операций Института математики,
механики и компьютерных наук им. И.И.Воровича
Южного федерального университета,
доктор физико-математических наук
(01.01.05 - теория вероятностей и
математическая статистика)
тел. +7 (863) 2975 114, доб. 209
факс: +7 (863) 2975 113,
e-mail: rokhlin@math.rsu.ru

Рохлин
Дмитрий Борисович

Личную подпись Рохлина Д. Б.
удостоверяю
Ученый секретарь Совета
Южного федерального университета
Мирошниченко О.С.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ул. Большая Садовая, 105/42,
г. Ростов-на-Дону, 344006
тел.: +7 (863) 305-19-90,
факс: +7 (863) 263-87-23,
e-mail: rectorat@sfedu.ru