ФГБОУ ВО
“МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА”

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи
УДК 517.956.227 & 517.984.5

Чечкина Александра Григорьевна

О сингулярных возмущениях спектральной задачи Стеклова

Специальность 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор
В.А.Садовничий

Москва 2015

Оглавление

Введение

1 Обзор литературы.

Моделирование поверхностных волн приводит к задачам со спектральным параметром в граничных условиях, так называемым, задачам Стеклова. Спектральные задачи такого типа привлекают внимание математиков с момента выхода работы [69] (см. также статью [134]) и исследуются на протяжении многих лет. В настоящей работе изучаются некоторые асимптотические вопросы поведения спектра в сингулярно возмущённых задачах типа Стеклова в областях с нетривиальной микроструктурой. Асимптотический анализ таких задач уже проводился в существующей литературе. Приведём некоторые из результатов, связанных с тематикой данной работы: [69], [36], [90], [130], [113], [52] [82], см. также близкую работу [62].

В статье [36] строятся ведущие члены асимптотического разложения собственных значений спектральной задачи типа Стеклова в тонкой области с негладкой границей.

Работа [90] посвящена изучению связи первого собственного значения задачи типа Стеклова в области с отверстиями и константы в неравенстве Соболева для следов.

В [130] изучается асимптотическое поведение собственных значений и соответствующих им собственных функций спектральной задачи типа Стеклова, зависящей от малого параметра ε, при $\varepsilon \to 0$. Предполагается, что условие Стеклова поставлено на малых периодически чередующихся участках границы длины порядка ε. На остальной части границы — условие Дирихле. В работе описано асимптотическое поведение низкочастотных колебаний усреднённой задачи.

В [113] изучается влияние параметров в граничном условии на положительность оператора, обратного к бигармоническому, при выставлении условия типа Стеклова на границе. Доказана связь положительности этого оператора с положительностью оператора задачи с краевыми условиями типа Дирихле и Навье.

В [52] исследуется спектральная задача Стеклова в области с пиком (вырожденной угловой точкой) на границе. Установлено, что спектр на вещественной неотрицательной полуоси может быть и дискретным, и непрерывным, в зависимости от показателя заострения.

В работе [1] рассматривалась задача Стеклова, возмущённая на малом участке границы, и исследовалось асимптотическое поведение решений и собственных значений задачи при уменьшении участка возмущения.

Отметим также работу по усреднению задачи типа Стеклова в перфорированной области [103].

В работе [82] автор исследовал задачу усреднения с быстро меняющимся типом граничных условий в случае, когда спектральное условие типа Стеклова в пределе "вытесняет" условие Дирихле. Таким образом, усреднённая задача имеет классическое условие типа Стеклова без быстрого чередования с условием Дирихле.

Задачи с быстро меняющимся типом граничных условий появляются во многих приложениях. Описываемые ими модели характерны для современного материаловедения (сотовые конструкции, композиционные материалы), теории наноструктур, современной радиофизики (фазированные антенные решётки, резонаторы типа Гельмгольца), биохимии и биоинженерии (метаболизм в клетках и тканях, проницаемость клеточных мембран). Интерес к таким задачам также обусловлен их приложениями в таких областях, как экономное закрепление панелей на жёстком каркасе, вопросы нефтеразработки и исследования запасов нефти, производство фотоматериалов и магнитных носителей, исследование физико-химических свойств коллоидных растворов и т.п.

Исследователи стали подробно изучать эти задачи с середины 80–х годов XX века.

В них рассматривается область с кусочно гладкой границей, разделённой на две части, на которых выставлены разные граничные условия. Кроме того, предполагается, что эти части имеют микронеоднородную структуру, т.е. являются объединением большого количества непересекающихся малых криволинейных отрезков, длины которых стремятся к нулю при стремлении к нулю некоторого малого параметра. Изучается асимптотическое поведение решений и собственных элементов краевой задачи в этой области с такими краевыми условиями при стремлении малого параметра к нулю. Различные задачи теории граничного усреднения с быстрой сменой типа граничного условия детально изучались такими математиками, как A.Damlamian, Li Ta-Tsien, M.Lobo, M.E.Pérez, Г.А.Чечкин, О.А.Олейник, Т.Уличевич, Р.Р.Гадыльшин, Д.И.Борисов, Е.И.Доронина, А.Л.Пятницкий, А.С.Шамаев, Т.П.Чечкина (см., например, [106], [107], [123], [72], [73], [74], [124], [76], [55], [56], [5], [110], [99], [77], [70], [21], [28], [23], [6], [16], [89], [95], [24], [108], [91], [9], [12], [11], [10], [15], [96], [60], [81]). Основные результаты, полученные в первых работах, посвящённых таким задачам (см., например, [123], [72], [124], [76], [28], [6], [108] и [96]), могут быть сформулированы следующим образом: решение краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий стремится к решению задачи с так называемыми эффективными граничными условиями, не зависящими от малого параметра, который характеризует микроструктуру границы. Эти эффективные условия определяются соотношениями между размерами частей границы с разными граничными условиями в исходной задаче.

В статьях [76], [28], [95] и [55] рассмотрено чередование краевых условий Дирихле и Неймана или Фурье (краевые условия смешанного типа). В предположении периодичности чередования участков границы были получены некоторые оценки скорости сходимости.

В [76] автор рассматривает краевые задачи с различными типами граничных условий, заданными на чередующихся маленьких участках границы. Приводится полная классификация возникающих случаев в зависимости от соотношения длин участков границы в исходной задаче. Для каждого из этих случаев строится предельная задача и доказывается сходимость решений, также получены оценки скорости сходимости. В работе получены оценки разности между решениями исходных задач и соответствующей им предельной задачи. Кроме того, автор изучил спектральные свойства этих задач.

В статьях [99] и [6] изучались задачи с непериодической сменой типа граничного условия. В [99] рассматривалась задача с детерминированной сменой типа граничного условия, а в [6] исследовалась случайная (стохастическая) микронеоднородная структура.

Работы [28] и [89] посвящены краевым задачам для оператора Лапласа с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерных областях. В них было доказано, что структура усреднённой задачи зависит от асимптотики первого собственного значения соответствующей спектральной задачи на ячейке периодичности, геометрия которой зависит от малого параметра. Эта асимптотика была построена авторами и применена для оценки скорости сходимости решений исходных задач к соответствующему решению усреднённой задачи при стремлении малого параметра к нулю.

В [96] были рассмотрены краевые задачи с быстро меняющимся граничным условием для Лапласиана во всём пространстве $\mathbb{R}^3$ в двух модельных случаях. Предполагается, что в пространстве задана фиксированная ограниченная поверхность, разделяющая его на две непересекающихся подобласти. Эта поверхность состоит из двух частей, одна из которых принадлежит некоторой плоскости и имеет чисто периодическую микроструктуру. В первой модели это периодически расположенные пятна, а во второй — периодическая перфорация. В первом случае рассматривается задача в ограниченной области с микронеоднородной структурой границы, а во втором — задача в неограниченной области, состоящей из двух подобластей, разделённых перфорированной перегородкой. Во втором случае авторы получают две предельные задачи (в каждой из двух подобластей, причём внешняя задача имеет то же условие на бесконечности, что и исходная задача). Как в первом, так и во втором случае авторами представлена полная классификация усреднённых задач в зависимости от размера малых параметров, характеризующих частоту периодического изменения граничных условий. Кроме того, рассмотрены соответствующие спектральные задачи, для которых доказаны теоремы о сходимости собственных значений и собственных функций.

Асимптотика решений некоторых задач с быстро меняющимися граничными условиями была построена в [77], [21], [24], [11], [91], [16], [23], [12], [10] и [15]. В частности, работах [9], [11], [16], [21], [23] и [24] рассмотрены двумерные краевые задачи.

В [77] построено полное асимптотическое разложение для решения уравнения Пуассона в многомерном слое в случае, когда краевые условия периодически быстро чередуются. Кроме того, полное разложение собственных значений оператора Лапласа в цилиндре с быстро меняющимися граничными условиями Дирихле и Неймана на границе было построено в [12] и [10].

В [12] изучен случай предельных задач со вторым (Неймана) или третьим (Фурье) краевыми условиями. В [10] рассмотрена и решена специальная задача с условием Дирихле на боковой поверхности. Предполагалось, что участки границы с условием Дирихле имеют тот же порядок малости, что и участки с условием Неймана. В этих статьях автор доказал, что собственные значения исходной задачи могут иметь кратность только один или два (простые или двукратные). Кроме того, в [12] построены первые члены асимптотических разложений собственных чисел и собственных функций в случае, когда краевая задача имеет второе или третье краевое условие на боковой поверхности цилиндра в более общем случае. Также было показано, что эти собственные значения сходятся к соответствующим предельным простым собственным значениям.

В [15] изучена сингулярно возмущенная спектральная задача для Лапласиана в цилиндре с быстро меняющимися граничными условиями на боковой поверхности, которая поделена на большое количество полос, на которых чередуются краевые условия Неймана и Дирихле. Рассмотрен случай, когда усредненная задача имеет краевое условие Дирихле на боковой поверхности. Построены первые члены асимптотических разложений собственных чисел в случае медленного изменения ширины полос. Кроме того, для случая, когда ширина полос меняется быстро, были построены некоторые оценки для скорости сходимости. Результаты, полученные в [15], обобщают результаты работы [91].

Работы [79] и [80] посвящены построению полных асимптотических разложений собственных функций и собственных значений в задаче с периодической частой сменой граничных условий при наличии сингулярно возмущённой плотности около границы области.

2 Структура и объём работы.

Диссертация занимает 121 страницу текста и состоит из введения, двух глав, разбитых на 7 параграфов, заключения и списка литературы, включающего 139 наименований. Нумерация формул, теорем и лемм тройная — номер главы, номер параграфа и собственный номер, например, лемма 3.2.1 — лемма 1 второго параграфа третьей главы.

Первая глава посвящена изучению сингулярно возмущённой спектральной задачи типа Стеклова в двумерной ограниченной области, причём чередование на границе спектрального условия типа Стеклова и однородного условия Дирихле является локально периодическим.

В **первом параграфе** определяется область, в которой ставится краевая задача, выписывается усреднённая (предельная) задача. Определяется ячейка периодичности, и ставится вспомогательная спектральная задача на ячейке. А также доказываются вспомогательные леммы, и делаются предварительные замечания.

Во **втором параграфе** доказаны важные утверждения первой главы: теоремы о сходимости решений и об оценках решений в соболевских нормах.

В **третьем параграфе** рассматривается задача с правой частью, не удовлетворяющей условию разрешимости предельной задачи. При этом выписывается асимптотика решения исходной задачи в этом случае.

В **четвёртом параграфе** даётся оценка вспомогательной величины, описывающей граничные условия усреднённых задач.

В **пятом параграфе** рассматривается задача на собственные значения. Доказывается основная теорема данной главы о сходимости спектров и собственных функций.

Вторая глава посвящена изучению непериодического случая. Рассматривается аналогичная спектральная задача в области с непериодической микроструктурой на границе. Доказываются теоремы усреднения для собственных значений и собственных функций.

В **первом параграфе** второй главы рассматривается задача с быстрой сменой краевого условия, для которой в пределе получается задача с классическим условием Стеклова на всей границе.

Во **втором параграфе** второй главы рассматривается случай, когда спектр исходной задачи вырождается в пределе.

Я выражаю самую искреннюю благодарность своему научному руководителю академику РАН В.А.Садовничему за поддержку и внимание к работе над диссертацией, за постоянное и неформальное участие в моей судьбе. И особенно за вкус к настоящей науке, который прививается только влюблёнными в дело истинными педагогами и учёными. Хочу также поблагодарить профессора В.Е.Подольского за неоценимую профессиональную поддержку и помощь, а также за ценные советы и замечания.

Глава 1

Периодические возмущения

§ 1.1 Вспомогательные сведения из теории усреднения краевых задач.

1.1.1 Постановка краевой задачи и предварительные замечания

В этом параграфе рассматривается краевая задача для оператора Лапласа в ограниченной области с быстро меняющимся типом граничных условий.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что $\partial\Omega$ состоит из простого замкнутого гладкого контура единичной длины. В малой окрестности $\partial\Omega$ введём координаты (s, τ), где τ — расстояние от точки до $\partial\Omega$, измеренное в направлении внешней нормали, проходящей через эту точку, s — длина дуги от фиксированной точки до точки пересечения этого направления с $\partial\Omega$ (см. рис. 1.1.1).

Пусть Γ^ε — произвольное одномерное непустое замкнутое множество, зависящее от параметра $\varepsilon \in (0, 1]$ и лежащее на отрезке $\Sigma = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 < \xi_1 < 1, \xi_2 = 0\}$.

Рассматриваем случай $mes\, \Gamma^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим через Γ_1^ε множество, образованное всевозможными целочисленными сдвигами Γ^ε вдоль оси $\xi_2 = 0$, а через Γ_D^ε — образ Γ_1^ε при отображении $s = \delta\xi_1, \tau = \delta\xi_2$. $\Gamma_N^\varepsilon = \partial\Omega \setminus \Gamma_D^\varepsilon$, $\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}$ при малых ε; в дальнейшем δ зависит от параметра ε, более того, $\delta(\varepsilon) \to 0$ при

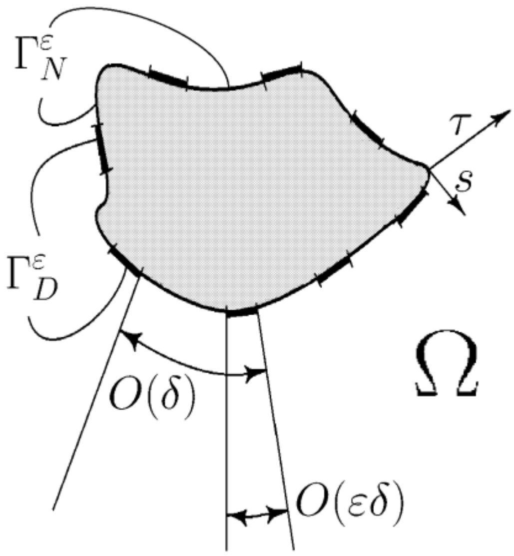

Рис. 1.1.1: Область Ω.

$\varepsilon \to 0$.

Если не оговорено особо, все функции, заданные и неизвестные, предполагаются вещественнозначными.

Далее исследуется асимптотика при $\varepsilon \to 0$ решения следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon = 0 \quad \text{в области} \quad \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D^\varepsilon, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau} = g \quad \text{на} \quad \Gamma_N^\varepsilon. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Предполагается, что функция $g \in L_2(\partial\Omega)$. Определим пространство $H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$ как пополнение множества функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, обращающихся в ноль в окрестности Γ_D^ε, по норме $H^1(\Omega)$. Функция $u^\varepsilon(x)$ — решение задачи (1.1.1), если $u^\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$ и

$$\iint\limits_{\Omega} \nabla_x u^\varepsilon \nabla_x v dx = \int\limits_{\Gamma_N^\varepsilon} g v ds \tag{1.1.2}$$

для любой $v \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$.

Обозначим $B = \{\xi \in \mathbb{R}^2 | \, \xi_1 \in \Sigma = (0,1), \xi_2 < 0\}$, $B_\rho = \{\xi \in B \,|\, \xi_2 < -\rho\}$, $B_{\rho_1\rho_2} = B_{\rho_2} \setminus B_{\rho_1}, \rho_1 > \rho_2 > 0$, $\Sigma_\rho = \{\xi \in B \,|\, \xi_2 + \rho = 0\}$, $\rho = \mathrm{const} > 0$ (см. рис. 1.1.2).

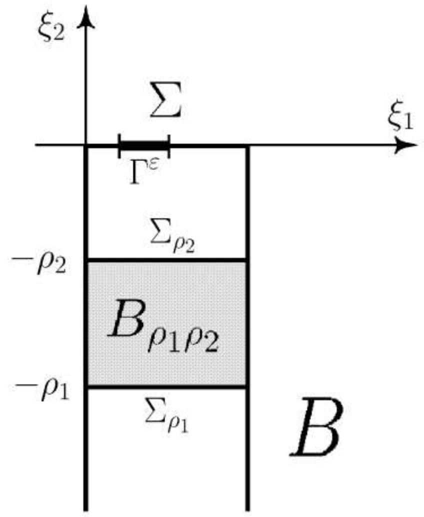

Рис. 1.1.2: Область B.

Пусть пространство $H(B, \Gamma^\varepsilon)$ — пополнение по норме

$$\|v\|_1 = \Big(\iint\limits_B |\nabla_\xi v|^2 d\xi + \int\limits_\Sigma v^2 d\xi_1 \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1.3}$$

множества функций из $C^\infty(\overline{B})$, обращающихся в ноль в окрестности Γ^ε и обладающих конечным интегралом Дирихле по области B.

Пусть пространство $H_{1\text{-per}}(B, \Gamma^\varepsilon)$ — пополнение по норме (1.1.3) множества 1-периодических по ξ_1 функций из $C^\infty(\overline{B})$, сохраняющих гладкость при 1-периодическом продолжении по ξ_1, обращающихся в ноль в окрестности Γ^ε и обладающих конечным интегралом Дирихле по области B.

Пусть

$$\theta_\varepsilon = \inf_{v\in H_{1\text{-per}}(B,\Gamma^\varepsilon)\setminus\{0\}} \frac{\iint\limits_B |\nabla_\xi v|^2 d\xi}{\int\limits_\Sigma v^2 d\xi_1}, \tag{1.1.4}$$

и пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\theta_\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} = p \in [0, +\infty], \tag{1.1.5}$$

и, кроме того,

$$\theta_\varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.1.6}$$

Далее будет показано, что следующая задача является предельной для задачи (1.1.1) при $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} \Delta u^0 = 0 \quad \text{в области} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u^0}{\partial \tau} + pu^0 = g \quad \text{на} \quad \partial\Omega \end{cases} & \text{при} \quad 0 \leqslant p < +\infty, \\ u^0 \equiv 0 & \text{при} \quad p = +\infty. \end{array} \tag{1.1.7}$$

В случае $p = 0$ для разрешимости задачи (1.1.7) должно выполняться условие согласования $\int\limits_{\partial\Omega} g ds = 0$. В дальнейшем при рассмотрении этого случая мы будем предполагать выполнение условие согласования, а также $\iint\limits_\Omega u^0 dx = 0$.

Такой вид предельной задачи диктуется следующим наблюдением. Пусть $V_\varepsilon(\xi)$ — функция из $H_{1\text{-per}}(B, \Gamma^\varepsilon)$, на которой достигается нижняя грань в (1.1.4) (вопрос о существовании такой функции и её свойства будут исследованы ниже). Будет показано, что в обобщённом смысле $\frac{\partial V_\varepsilon(\xi)}{\partial \xi_2} = \theta_\varepsilon V_\varepsilon(\xi)$ на $\Sigma \setminus \Gamma^\varepsilon$. Положим $V_\varepsilon^\delta(x) = V_\varepsilon(\frac{s}{\delta}, \frac{\tau}{\delta})$, функция

$V_\varepsilon^\delta(x)$ определена в окрестности $\partial\Omega$. Вблизи $\partial\Omega$ будем искать асимптотику функции $u^\varepsilon(x)$ в виде $u^\varepsilon \sim u^0 V_\varepsilon^\delta$. Поскольку на Γ_N^ε выполняется

$$g \approx \frac{\partial}{\partial\tau}(u^0 V_\varepsilon^\delta) = \frac{\partial u^0}{\partial\tau} V_\varepsilon^\delta + \frac{1}{\delta} u^0 \frac{\partial V_\varepsilon^\delta}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi\in(\Sigma\setminus\Gamma^\varepsilon)} = (\frac{\partial u^0}{\partial\tau} + \frac{\theta_\varepsilon}{\delta} u^0) V_\varepsilon^\delta,$$

естественно ожидать, что при определённых условиях получим для

$$u^0 = \lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon$$

граничные условия на $\partial\Omega$ вида

$$\frac{\partial u^0}{\partial\tau} + p u^0 = g.$$

1.1.2 Вспомогательные утверждения

В следующих трёх леммах доказываются некоторые свойства решений вариационной задачи (1.1.4) в полуполосе B. В первом утверждении исследуем свойства минимизации в формуле (1.1.4).

Лемма 1.1.1. *Существует такая гармоническая в B функция*

$$V_\varepsilon(\xi) \in H_{1\text{-}per}(B, \Gamma^\varepsilon),$$

что на ней достигается нижняя грань в (1.1.4)*, и при этом*

$$\iint\limits_B |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 d\xi = \theta_\varepsilon, \qquad \|V_\varepsilon\|_{L_2(\Sigma)} = 1,$$

причём граничное условие

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial\xi_2} = \theta_\varepsilon V_\varepsilon \quad \text{на} \quad \Sigma\setminus\Gamma^\varepsilon \tag{1.1.8}$$

выполняется в обобщённом смысле. То есть при $\rho\to 0$ для любой $v \in H_{1\text{-}per}(B, \Gamma^\varepsilon)$ выполняется

$$\int\limits_{\Sigma_\rho} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial\xi_2} v\, d\xi_1 \to \theta_\varepsilon \int\limits_\Sigma V_\varepsilon v\, d\xi_1. \tag{1.1.9}$$

Доказательство. Пусть $v^{(k)}$ — минимизирующая последовательность для (1.1.4), т.е.

$$v^{(k)} \in H_{1\text{-per}}(B, \Gamma^\varepsilon), \quad \|v^{(k)}\|_{L_2(\Sigma)} = 1, \quad \iint\limits_B |\nabla_\xi v^{(k)}|^2 d\xi \to \theta_\varepsilon \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Последовательность $\{v^{(k)}\}$ ограничена в $H_{1\text{-per}}(B, \Gamma^\varepsilon)$, следовательно, из $\{v^{(k)}\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $H_{1\text{-per}}(B, \Gamma^\varepsilon)$ и, в силу теоремы о следах (см. [49], с.155), сильно сходящуюся в $L_2(\Sigma)$. Эта подпоследовательность также является минимизирующей. Будем поэтому с самого начала считать, что $\{v^{(k)}\}$ обладает указанными выше свойствами.

Далее, для любого $\eta > 0$ существует номер $n(\eta)$ такой, что

$$\|v^{(k)} - v^{(l)}\|^2_{L_2(\Sigma)} < \eta \quad \text{при} \quad k, l > n(\eta).$$

Так как $\|v^{(k)}\|_{L_2(\Sigma)} = \|v^{(l)}\|_{L_2(\Sigma)} = 1$, то из очевидного равенства

$$\left\|\frac{v^{(k)} + v^{(l)}}{2}\right\|^2_{L_2(\Sigma)} = \frac{1}{2}\left\|v^{(k)}\right\|^2_{L_2(\Sigma)} + \frac{1}{2}\left\|v^{(l)}\right\|^2_{L_2(\Sigma)} - \left\|\frac{v^{(k)} - v^{(l)}}{2}\right\|^2_{L_2(\Sigma)}$$

получим, что

$$\left\|\frac{v^{(k)} + v^{(l)}}{2}\right\|^2_{L_2(\Sigma)} > 1 - \frac{\eta}{4}.$$

Поскольку

$$\iint\limits_B |\nabla_\xi v|^2 d\xi \geqslant \theta_\varepsilon \|v\|^2_{L_2(\Sigma)} \quad \text{для любой} \quad v \in H_{1\text{-per}}(B, \Gamma^\varepsilon),$$

то

$$\iint\limits_B \left|\nabla_\xi \left(\frac{v^{(k)} + v^{(l)}}{2}\right)\right|^2 d\xi > \theta_\varepsilon(1 - \frac{\eta}{4}) \quad \text{при} \quad k, l > n(\eta).$$

Пусть k и l настолько велики, что

$$\iint\limits_B |\nabla_\xi v^{(k)}|^2 d\xi < \theta_\varepsilon + \eta, \quad \iint\limits_B |\nabla_\xi v^{(l)}|^2 d\xi < \theta_\varepsilon + \eta,$$

тогда

$$\iint\limits_B \left|\nabla_\xi\left(\frac{v^{(k)}-v^{(l)}}{2}\right)\right|^2 d\xi = \frac{1}{2}\iint\limits_B \left|\nabla_\xi v^{(k)}\right|^2 d\xi + \frac{1}{2}\iint\limits_B \left|\nabla_\xi v^{(l)}\right|^2 d\xi -$$

$$-\iint\limits_B \left|\nabla_\xi\left(\frac{v^{(k)}+v^{(l)}}{2}\right)\right|^2 d\xi \leqslant \frac{\theta_\varepsilon+\eta}{2} + \frac{\theta_\varepsilon+\eta}{2} - \theta_\varepsilon(1-\frac{\eta}{4}) = \eta(1+\frac{\theta_\varepsilon}{4}).$$

Следовательно, в силу критерия Коши, последовательность $\{v^{(k)}\}$ сходится в $H_{1\text{-per}}(B,\Gamma^\varepsilon)$ к некоторой функции $v^* \in H_{1\text{-per}}(B,\Gamma^\varepsilon)$, причём

$$\iint\limits_B |\nabla_\xi v^*|^2 d\xi = \theta_\varepsilon, \|v^*\|_{L_2(\Sigma)} = 1.$$

Пусть теперь $v \in H_{1\text{-per}}(B,\Gamma^\varepsilon)$ — некоторая функция. Рассмотрим отношение

$$h(t) = \frac{\iint\limits_B |\nabla_\xi(v^*+tv)|^2 d\xi}{\left\|v^*+tv\right\|^2_{L_2(\Sigma)}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Оно является непрерывно дифференцируемой функцией от t в некоторой окрестности точки $t = 0$. Это отношение имеет минимум, равный θ_ε, и на основании теоремы Ферма имеем

$$h'(t)\Big|_{t=0} = \frac{2\iint\limits_B (\nabla_\xi v^*, \nabla_\xi v) d\xi \|v^*\|^2_{L_2(\Sigma)} - 2\int\limits_\Sigma v^* v d\xi_1 \iint\limits_B |\nabla_\xi v^*|^2 d\xi}{\|v^*\|^4_{L_2(\Sigma)}} = 0.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_B (\nabla_\xi v^*, \nabla_\xi v) d\xi = \theta_\varepsilon \int\limits_\Sigma v^* v d\xi_1. \tag{1.1.10}$$

Подставляя в тождество (1.1.10) произвольную функцию $v \in C_0^\infty(B)$, получаем, что функция v^* является гармонической в B, и в силу теоремы о гладкости обобщённых решений эллиптических уравнений $v^* \in C^\infty(\overline{B}_\rho), \rho > 0$. Применим формулу Грина к функциям v^* и v в области $B_{\rho_1\rho_2}, \rho_1 > \rho_2 > 0$ и, учитывая периодичность по ξ_1, получим

$$\iint\limits_{B_{\rho_1\rho_2}} (\nabla_\xi v^*, \nabla_\xi v) d\xi = \int\limits_{\Sigma_{\rho_2}} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_2} v d\xi_1 - \int\limits_{\Sigma_{\rho_1}} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_2} v d\xi_1 - \iint\limits_{B_{\rho_1\rho_2}} \Delta v^* v d\xi. \quad (1.1.11)$$

Последний интеграл в правой части (1.1.11) равен нулю ввиду гармоничности v^*. Интегралы

$$\int\limits_{\Sigma_{\rho_2}} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_2} v d\xi_1 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\Sigma_{\rho_1}} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_2} v d\xi_1$$

имеют смысл из-за гладкости v^* в области $\overline{B}_{\rho_1\rho_2}$.

Покажем, что для некоторой последовательности ρ^N такой, что $\rho^N \to +\infty$ выполняется условие

$$\int\limits_{\Sigma_{\rho^N}} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_2} v d\xi_1 \to 0 \quad (1.1.12)$$

Известно, что из-за гармоничности и периодичности v^* в B справедливо равенство

$$\int\limits_{\Sigma_\rho} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_2} d\xi_1 = 0.$$

Теперь предположим, что (1.1.12) не выполняется, т.е. существует такая положительная постоянная C_1, что при $\rho > 0$

$$C_1 \leqslant \left| \int\limits_{\Sigma_\rho} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_2} v d\xi_1 \right| = \left| \int\limits_{\Sigma_\rho} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_2} (v - \overline{v}) d\xi_1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Sigma_\rho} |\nabla_\xi v^*|^2 d\xi_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Sigma_\rho} (v - \overline{v})^2 d\xi_1 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\Sigma_\rho} |\nabla_\xi v^*|^2 d\xi_1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\Sigma_\rho} |\nabla_\xi v|^2 d\xi_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

где $\overline{v} = \int\limits_{\Sigma_\rho} v d\xi_1$. Для вывода этого неравенства использовались неравенство Коши–Буняковского и неравенство Пуанкаре (см., например, [60]).

Обозначим символом Υ множество таких ρ, для которых

$$\int\limits_{\Sigma_\rho} |\nabla_\xi v|^2 d\xi_1 > 1.$$

Поскольку $\nabla_\xi v \in L_2(B)$, множество Υ имеет конечную меру Лебега. На дополнении к этому множеству выполнено неравенство

$$C_1^2 \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\Sigma_\rho} |\nabla_\xi v^*|^2 d\xi_1$$

Интегрируя это неравенство по множеству $B \setminus (0,1)\times\Upsilon$, приходим к противоречию с тем, что $v^* \in H_{1\text{-per}}(B,\Gamma^\varepsilon)$

Таким образом, существует такая последовательность ρ^N, стремящаяся к $+\infty$, что для неё выполняется условие (1.1.12).

Перейдём к пределу в (1.1.11) при $\rho_1 = \rho^N \to +\infty$. Имеем

$$\iint\limits_{B_\rho} (\nabla_\xi v^*, \nabla_\xi v) d\xi = \int\limits_{\Sigma_\rho} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_2} v d\xi_1.$$

Из формулы (1.1.10) следует, что $\iint\limits_{B_\rho} (\nabla_\xi v^*, \nabla_\xi v) d\xi$ стремится к $\theta_\varepsilon \int\limits_{\Sigma} v^* v d\xi_1$ при $\rho \to 0$, т.е.

$$\int\limits_{\Sigma_\rho} \frac{\partial v^*}{\partial \xi_2} v d\xi_1 \to \theta_\varepsilon \int\limits_{\Sigma} v^* v d\xi_1 \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

Остаётся положить $V_\varepsilon(\xi) = v^*(\xi)$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.1.2. *Существуют такие положительные постоянные* γ, C_2, C_3*, не зависящие от* ε*, что для любой функции* $u \in H_{1\text{-}per}(B, \Gamma^\varepsilon)$*, гармонической в* B*, имеем*

$$\iint\limits_B e^{-\gamma\xi_2}|u - M|^2 d\xi \leqslant C_2 \iint\limits_B e^{-\gamma\xi_2}|\nabla_\xi u|^2 d\xi \leqslant C_3 \iint\limits_B |\nabla_\xi u|^2 d\xi, \tag{1.1.13}$$

где $M = \text{const}$ *зависит от функции* $u(\xi)$.

Доказательство. Докажем сначала второе неравенство в (1.1.13). Из доказательства леммы 1 можно заключить, что существует последовательность ρ_N, стремящаяся к $+\infty$ при $N \to \infty$, такая, что $\int\limits_{\Sigma_{\rho_N}} \dfrac{\partial u}{\partial \xi_2} u d\xi_1 \to 0$ при $\rho_N \to +\infty$.

Поскольку при $0 < \rho < \rho_N$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{-\rho_N}^{-\rho} |\nabla_\xi u|^2 d\xi = \int\limits_{\Sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} u d\xi_1 - \int\limits_{\Sigma_{\rho_N}} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} u d\xi_1,$$

то устремляя $\rho_N \to +\infty$, получаем

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{-\rho} |\nabla_\xi u|^2 d\xi = \int\limits_{\Sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} u d\xi_1 = \int\limits_{\Sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} (u - \overline{u}) d\xi_1 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Sigma_\rho} |\nabla_\xi u|^2 d\xi_1.$$

Положим

$$I(\rho) = \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{-\rho} |\nabla_\xi u|^2 d\xi.$$

Тогда для $\rho > 0$

$$\frac{dI(\rho)}{d\rho} = -\int\limits_{\Sigma_\rho} |\nabla_\xi u|^2 d\xi_1.$$

и $\dfrac{d}{d\rho}(\ln I(\rho)) \leqslant -2\pi$, т.е. $I(\rho) \leqslant I(0)e^{-2\pi\rho}$.

Отсюда получаем

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{-2^{k+1}}^{-2^k} |\nabla_\xi u|^2 e^{-\frac{\pi}{2}\xi_2} d\xi \leqslant e^{\frac{\pi}{2}2^{k+1}} \int\limits_0^1 \int\limits_{-2^{k+1}}^{-2^k} |\nabla u|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant e^{2^k\pi} I(2^k) \leqslant e^{2^k\pi} I(0) e^{-2\pi 2^k} = e^{-2^k\pi} I(0).$$

Просуммируем по k от 0 до $+\infty$.

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{-1} |\nabla_\xi u|^2 e^{-\gamma\xi_2} d\xi \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2^k\pi}\right) \iint\limits_B |\nabla_\xi u|^2 d\xi, \qquad (1.1.14)$$

где $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Обозначим $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-2^k\pi} = C_3^1$. Также имеем

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^{0} |\nabla_\xi u|^2 e^{-\gamma\xi_2} d\xi \leqslant C_3^2 \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^{0} |\nabla_\xi u|^2 d\xi \leqslant C_3^2 \iint\limits_B |\nabla_\xi u|^2 d\xi.$$

И, следовательно, обозначив $C_3^* := C_3^1 + C_3^2$, получим

$$\iint\limits_B |\nabla_\xi u|^2 e^{-\gamma\xi_2} d\xi \leqslant C_3^* \iint\limits_B |\nabla_\xi u|^2 d\xi.$$

Второе неравенство в (1.1.13) доказано.

Докажем первое неравенство в (1.1.13) методом, приведённым в [39]. Обозначим $\widehat{u}(\xi_2) = \int\limits_0^1 u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1$ среднее u по сечению Σ_{ξ_2}. Поскольку u — гармоническая функция и к тому же периодическая по ξ_1, то, интегрируя по частям в прямоугольнике $B_{\rho_1\rho_2}$, находим

$$\frac{d}{d\xi_2}\widehat{u}(\rho_2) = \frac{d}{d\xi_2}\widehat{u}(\rho_1),$$

при всех $\rho_1, \rho_2 < 0$, т.е. производная $\widehat{u}$ равна константе. Поскольку $u \in H^1(B)$, эта константа равна нулю. Отсюда следует, что $\widehat{u}$ равна константе. Обозначим её M. В силу неравенства Пуанкаре,

$$\int\limits_{\Sigma_\rho} |u(\xi_1, \rho) - M|^2 d\xi_1 \leqslant C \int\limits_{\Sigma_\rho} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_1} u(\xi_1, \rho) \right|^2 d\xi_1. \tag{1.1.15}$$

Используя (1.1.14), для некоторого $\gamma > 0$ (например, $\gamma = \frac{\pi}{4}$), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{\Sigma_\rho} e^{-\gamma\rho} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_1} u(\xi_1, \rho) \right|^2 d\xi_1 d\rho < \infty$$

Умножая (1.1.15) на $e^{-\gamma\rho}$ и интегрируя по ρ на $(-\infty, 0)$, найдём

$$\iint\limits_{B} e^{-\gamma\xi_2} |u(\xi) - M|^2 d\xi \leqslant C \iint\limits_{B} e^{-\gamma\xi_2} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_1} u(\xi) \right|^2 d\xi \leqslant C \iint\limits_{B} e^{-\gamma\xi_2} |\nabla u(\xi)|^2 d\xi.$$

Лемма доказана. □

В следующей лемме даётся оценка минимума в (1.1.4).

Лемма 1.1.3. *Пусть выполнено условие* (1.1.6). *Тогда для достаточно малого* ε *существует гармоническая в* B *функция* $V_\varepsilon(\xi) \in H_{1\text{-}per}(B, \Gamma^\varepsilon)$, *на которой достигается минимум в* (1.1.4), *и такая, что для неё выполняется* (1.1.13) *с* $M = 1$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для функции $V_\varepsilon(\xi)$, определённой в лемме 1, выполняется (1.1.13) с $M \neq 0$. Предположим противное, тогда имея в виду очевидное неравенство $\iint\limits_{B} |V_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \leqslant \iint\limits_{B} |V_\varepsilon(\xi)|^2 e^{-\gamma\xi_2} d\xi$, получаем

$$\iint\limits_{B} |V_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \leqslant C_4 \iint\limits_{B} |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 d\xi = C_4 \theta_\varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

$$1 = \|V_\varepsilon\|^2_{L_2(\Sigma)} \leqslant \mathrm{const}\Big(\|V_\varepsilon\|^2_{L_2(B)} + \|\nabla_\xi V_\varepsilon\|^2_{L_2(B)}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}(1 + C_4)\theta_\varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Пришли к противоречию. Лемма доказана. □

Пусть $\chi(x)$ — гладкая функция, $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\chi \equiv 1$ в окрестности $\partial\Omega$, на $\operatorname{supp}\chi$ координаты (s, τ) регулярны. Будем считать, что функция $\chi(x)$ зависит только от τ, т.е. $\chi = \chi(\tau)$. Положим

$$W^\delta_\varepsilon(x) = 1 + \chi\big(\tau(x)\big)\left(V_\varepsilon\Big(\frac{s(x)}{\delta}, \frac{\tau(x)}{\delta}\Big) - 1\right), \tag{1.1.16}$$

продолжив по периодичности.

Заметим, что на Γ^ε_N, ввиду (1.1.8) (в указанном там смысле), имеем

$$\frac{\partial W^\delta_\varepsilon}{\partial \tau} = \frac{\theta_\varepsilon}{\delta} W^\delta_\varepsilon. \tag{1.1.17}$$

В дальнейшем будут использоваться следующие факты:

1) $g \in C(\partial\Omega)$. Если $u^0 \in H^1(\Omega)$ — обобщённое решение задачи (1.1.7), то в силу теории регулярности решений эллиптических уравнений [2] $u^0 \in W^2_r(\Omega)$ для любого $r > 1$. В силу теорем вложения Соболева [67], отсюда следует, что u^0, $\nabla_x u^0 \in C(\overline{\Omega})$; из первого уравнения задачи (1.1.7) следует, что $\Delta u^0 \in C(\overline{\Omega})$, причём

$$\|u^0\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\nabla_x u^0\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\Delta u^0\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant \mathrm{const}\|g\|_{C(\partial\Omega)} \tag{1.1.18}$$

2) Величина θ_ε имеет тот же порядок по ε, что и $\widetilde{\theta}_\varepsilon$ при малых ε, где

$$\widetilde{\theta}_\varepsilon = \inf_{v \in H(B, \Gamma^\varepsilon) \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\iint\limits_B |\nabla_\xi v|^2 d\xi}{\displaystyle\int\limits_\Sigma v^2 d\xi_1} \tag{1.1.19}$$

В дальнейшем через V_ε будем обозначать функцию, полученную в лемме 1.1.3.

В следующей лемме приведена асимптотическая оценка минимума в (1.1.4).

Лемма 1.1.4. *Предположим, что выполнено условие* (1.1.6), *т.е.* $\theta_\varepsilon \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Тогда существуют такие постоянные* C_5 *и* C_6, *не зависящие от* ε, *что для достаточно малого* ε *имеем*

$$\|V_\varepsilon(\xi) - 1\|_{L_2(B)} \leqslant C_5(\theta_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.20}$$

$$\|\nabla_\xi V_\varepsilon\|_{L_2(B)} \leqslant C_6(\theta_\varepsilon)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.21}$$

Доказательство. Напишем формулу Грина для функций $V_\varepsilon(\xi)$ и $v(\xi) = \xi_2 V_\varepsilon(\xi)$ в области $B_{\rho_1\rho_2},\ \rho_1 > \rho_2 > 0:$

$$\iint\limits_{B_{\rho_1\rho_2}} |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 \xi_2 d\xi + \iint\limits_{B_{\rho_1\rho_2}} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2} V_\varepsilon d\xi = \rho_1 \int\limits_{\Sigma_{\rho_1}} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2} V_\varepsilon d\xi_1 - \rho_2 \int\limits_{\Sigma_{\rho_2}} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2} V_\varepsilon d\xi_1. \tag{1.1.22}$$

Преобразуем второй интеграл в левой части равенства

$$\iint\limits_{B_{\rho_1\rho_2}} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2} V_\varepsilon d\xi = \frac{1}{2} \iint\limits_{B_{\rho_1\rho_2}} \frac{\partial (V_\varepsilon)^2}{\partial \xi_2} d\xi$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_{\rho_2}} |V_\varepsilon|^2 d\xi_1 - \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_{\rho_1}} |V_\varepsilon|^2 d\xi_1. \tag{1.1.23}$$

Подставим (1.1.23) в (1.1.22), получим

$$\iint\limits_{B_{\rho_1\rho_2}} |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 \xi_2 d\xi = \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_{\rho_1}} |V_\varepsilon|^2 d\xi_1 - \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_{\rho_2}} |V_\varepsilon|^2 d\xi_1 +$$
$$+ \rho_1 \int\limits_{\Sigma_{\rho_1}} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2} V_\varepsilon d\xi_1 - \rho_2 \int\limits_{\Sigma_{\rho_2}} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2} V_\varepsilon d\xi_1. \tag{1.1.24}$$

Покажем сначала, что

$$\rho_2 \int\limits_{\Sigma_{\rho_2}} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2} V_\varepsilon d\xi_1 \to 0 \quad \text{при } \rho_2 \to 0.$$

Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{B_{\rho^*0}} \left|\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2}\right|^2 d\xi \leqslant \|\nabla_\xi V_\varepsilon\|^2_{L_2(B)} \leqslant K, \qquad (1.1.25)$$

где K — константа, не зависящая от ε.

Заметим, что существует $\rho^{'}$ такое, что $0 < \rho^{'} < \rho^*$ и

$$\int\limits_{\Sigma_{\rho^{'}}} \left|\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2}\right|^2 d\xi_1 \leqslant \frac{K}{\rho^{'}}.$$

Иначе, для любого $\varkappa$ такого, что $0 < \varkappa < \rho^*$

$$\int\limits_{\Sigma_{\varkappa}} \left|\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2}\right|^2 d\xi_1 > \frac{K}{\varkappa}.$$

Используя это неравенство и теорему о среднем, получаем, что существует $\varkappa_0$ такое, что $0 < \varkappa_0 < \rho^*$, и

$$\iint\limits_{B_{\rho^*0}} \left|\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2}\right|^2 d\xi = \rho^* \int\limits_{\Sigma_{\varkappa_0}} \left|\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2}\right|^2 d\xi_1 > \rho^* \frac{K}{\varkappa_0} > K,$$

что противоречит (1.1.25).

Теперь рассмотрим последовательность $\rho_N \to 0$ и построим по ней соответствующую последовательность $\{\rho^{'}_N\}$ с указанными свойствами. Чтобы показать, что интеграл

$$\rho_2 \int\limits_{\Sigma_{\rho_2}} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2} V_\varepsilon d\xi_1$$

стремится к нулю, оценим его следующим образом, воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского и теоремой о следах из [49]:

$$\left|\rho_N^{'}\int\limits_{\Sigma_{\rho_N^{'}}}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial\xi_2}V_\varepsilon d\xi_1\right|\leqslant\rho_N^{'}\left(\int\limits_{\Sigma_{\rho_N^{'}}}\left|\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial\xi_2}\right|^2 d\xi_1\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\Sigma_{\rho_N^{'}}}|V_\varepsilon|^2 d\xi_1\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\rho_N^{'}\left(\frac{K}{\rho_N^{'}}\right)^{\frac{1}{2}}C\|V_\varepsilon\|_{H_{1\text{-per}}(B,\Gamma^\varepsilon)}=$$

$$=C(K\rho_N^{'})^{\frac{1}{2}}\|V_\varepsilon\|_{H_{1\text{-per}}(B,\Gamma^\varepsilon)}\to 0\quad\text{при }\rho_N^{'}\to 0.$$

Перейдем к пределу по $\rho_N^{'}\to 0$ в (1.1.24). Имеем

$$\iint\limits_{B_{\rho 0}}|\nabla_\xi V_\varepsilon|^2\xi_2 d\xi=-\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma}|V_\varepsilon|^2 d\xi_1+\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_\rho}|V_\varepsilon|^2 d\xi_1+\rho\int\limits_{\Sigma_\rho}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial\xi_2}V_\varepsilon d\xi_1.\qquad(1.1.26)$$

Покажем, что для некоторой последовательности $\rho_N\to+\infty$ справедлива сходимость

$$\rho_N\int\limits_{\Sigma_{\rho_N}}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial\xi_2}V_\varepsilon d\xi_1\to 0.$$

Действительно, иначе существовала бы такая положительная постоянная C_7, что для больших ρ

$$C_7 \leqslant \rho \left| \int\limits_{\Sigma_\rho} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2} V_\varepsilon d\xi_1 \right| = \rho \left| \int\limits_{\Sigma_\rho} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2} (V_\varepsilon - \overline{V}_\varepsilon) d\xi_1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \rho \left(\int\limits_{\Sigma_\rho} |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 d\xi_1 \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Sigma_\rho} (V_\varepsilon - \overline{V}_\varepsilon)^2 d\xi_1 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho}{2\pi} \int\limits_{\Sigma_\rho} |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 d\xi_1,$$

в силу неравенства Коши-Буняковского и Пуанкаре, где

$$\overline{V}_\varepsilon(\xi_2) = \int\limits_{\Sigma_\rho} V_\varepsilon(\xi) d\xi_1,$$

$$\int\limits_{\Sigma_\rho} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2} d\xi_1 = 0$$

для любого $\rho > 0$ (см. доказательство леммы 1.1.1). Следовательно,

$$\int\limits_{\Sigma_\rho} |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 d\xi_1 \geqslant \frac{2\pi C_7}{\rho}.$$

Интегрируя это неравенство по ρ от 0 до $+\infty$, приходим к противоречию с предположением конечности интеграла Дирихле для функции $V_\varepsilon(\xi)$.

Покажем, что

$$\int\limits_{\Sigma_\rho} |V_\varepsilon|^2 d\xi_1 \to 1 \quad \text{при } \rho \to +\infty.$$

Действительно, из (1.1.13) следует, что

$$\iint\limits_{B} \left(e^{\frac{\gamma}{2}|\xi_2|}|V_\varepsilon - 1|\right)^2 d\xi \leqslant C_8,$$

$$\iint\limits_{B} e^{\gamma|\xi_2|}\,|\nabla_\xi(V_\varepsilon - 1)|^2\, d\xi \leqslant C_9.$$

Оценим следующий интеграл

$$\begin{aligned}\iint\limits_{B} \left|\nabla_\xi\left(e^{\frac{\gamma}{2}|\xi_2|}(V_\varepsilon - 1)\right)\right|^2 d\xi \leqslant 2\iint\limits_{B}\left(e^{\frac{\gamma}{2}|\xi_2|}|\nabla_\xi V_\varepsilon|\right)^2 d\xi + \\ + \iint\limits_{B}\left(\gamma e^{\frac{\gamma}{2}|\xi_2|}(V_\varepsilon - 1)\right)^2 d\xi \leqslant \\ \leqslant 2C_9 + \gamma^2 C_8 = C_{10}.\end{aligned}$$

Следовательно, $(V_\varepsilon - 1)e^{\frac{\gamma}{2}|\xi_2|} \in H^1(B)$.
По теореме о следах [49] имеем

$$e^{\gamma\rho}\int\limits_{\Sigma_\rho}|V_\varepsilon - 1|^2 d\xi_1 < C_{10},$$

$$\int\limits_{\Sigma_\rho}|V_\varepsilon - 1|^2 d\xi_1 < \frac{C_{10}}{e^{\gamma\rho}},$$

$$\int\limits_{\Sigma_\rho}|V_\varepsilon - 1|^2 d\xi_1 \to 0 \quad \text{при } \rho \to \infty.$$

Из свойств нормы имеем

$$\begin{aligned}\|1\|_{L_2(\Sigma_\rho)} - \|V_\varepsilon - 1\|_{L_2(\Sigma_\rho)} \leqslant & \|V_\varepsilon - 1 + 1\|_{L_2(\Sigma_\rho)} \\ \leqslant & \|1\|_{L_2(\Sigma_\rho)} + \|V_\varepsilon - 1\|_{L_2(\Sigma_\rho)}.\end{aligned}$$

Устремляя ρ к ∞ , получаем

$$1 \leqslant \lim_{\rho\to\infty} \left(\int\limits_{\Sigma_\rho} |V_\varepsilon - 1 + 1|^2 d\xi_1 \right)^{1/2} \leqslant 1,$$

т.е.

$$\int\limits_{\Sigma_\rho} |V_\varepsilon|^2 d\xi_1 \to 1 \quad \text{при } \rho \to \infty.$$

Теперь переходим к пределу в (1.1.26) при $\rho_N \to \infty$, имеем

$$\iint\limits_B |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 \xi_2 d\xi = -\frac{1}{2} \int\limits_\Sigma |V_\varepsilon|^2 d\xi_1 + \frac{1}{2}. \tag{1.1.27}$$

С другой стороны, согласно (1.1.10)

$$\iint\limits_B |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 d\xi = \theta_\varepsilon \int\limits_\Sigma |V_\varepsilon|^2 d\xi_1. \tag{1.1.28}$$

В силу (1.1.13) заключаем

$$\begin{aligned} -\iint\limits_B |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 \xi_2 \, d\xi &\leqslant \frac{1}{\gamma} \iint\limits_B |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 e^{-\gamma\xi_2} \, d\xi \\ &\leqslant \frac{C_4}{C_3\gamma} \iint\limits_B |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 \, d\xi. \end{aligned} \tag{1.1.29}$$

Следовательно, из (1.1.27)-(1.1.29) имеем

$$\frac{2C_4}{C_3\gamma} \iint\limits_B |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 \, d\xi \geqslant \frac{1}{\theta_\varepsilon} \iint\limits_B |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 \, d\xi - 1,$$

$$\iint\limits_B |\nabla_\xi V_\varepsilon|^2 \, d\xi \leqslant \left(\frac{1}{\theta_\varepsilon} - \frac{2C_4}{C_3\gamma} \right)^{-1} \leqslant C_6^* \theta_\varepsilon.$$

Так как $\theta_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ оценка (1.1.21) доказана. Для доказательства оценки (1.1.20) достаточно применить (1.1.13) с $u(\xi) = V_\varepsilon(\xi)$, $M = 1$. Лемма 1.1.4 доказана.

□

При доказательстве лемм 1.1.2 и 1.1.4 использовалась техника, разработанная в [39]. Следующая лемма раскрывает асимптотику погранслойной функции.

Лемма 1.1.5. *Пусть выполнено условие* (1.1.6), *функция* $W_\varepsilon^\delta(x)$ *определена соотношением* (1.1.16). *Тогда для достаточно малого* ε *существуют такие постоянные* C_{11}, C_{12}, C_{13}, *не зависящие от* ε *и* δ, *что*

$$\|W_\varepsilon^\delta - 1\|_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant C_{11}\theta_\varepsilon^{1/2}, \tag{1.1.30}$$

$$\|W_\varepsilon^\delta - 1\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{12}(\delta\theta_\varepsilon)^{1/2}, \tag{1.1.31}$$

$$\|e^{-\frac{\gamma\tau}{2\delta}}\nabla_x W_\varepsilon^\delta\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{13}\left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}\right)^{1/2}. \tag{1.1.32}$$

Доказательство. Заметим, что $W_\varepsilon^\delta(x) - 1 = V_\varepsilon\left(\frac{s}{\delta}, 0\right) - 1$ на $\partial\Omega$, и в силу (1.1.20) и (1.1.21) имеем:

$$\begin{aligned}
\|W_\varepsilon^\delta - 1\|^2_{L_2(\partial\Omega)} &= \left\|V_\varepsilon\left(\frac{s}{\delta}, 0\right) - 1\right\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant \\
&\leqslant C_{14}\|V_\varepsilon(\xi) - 1\|^2_{L_2(\Sigma)} \leqslant \\
&\leqslant C'_{14}\left(\|V_\varepsilon - 1\|^2_{L_2(B)} + \|\nabla_\xi V_\varepsilon\|^2_{L_2(B)}\right) \leqslant \\
&\leqslant C'_{14}(C_5^2 + C_6^2)\theta_\varepsilon,
\end{aligned}$$

где постоянные C_{14}, C'_{14} не зависят от ε и δ. Оценка (1.1.30) доказана.

Разрежем $\Omega \cap \operatorname{supp}\chi$ на $\delta^{-1} \in \mathbb{N}$ ячеек периодичности и в интегралах по этим ячейкам периодичности произведем замену переменных $(x_1, x_2) \to (s, \tau) \to (\xi_1 - k, \xi_2)$. Тогда в силу (1.1.20)

$$\begin{aligned}
\|W_\varepsilon^\delta - 1\|^2_{L_2(\Omega)} &\leqslant C_{15}\delta\|V_\varepsilon(\xi) - 1\|^2_{L_2(B)} \\
&\leqslant C_{15}C_5^2\delta\theta_\varepsilon,
\end{aligned}$$

где постоянная C_{15} не зависит от ε и δ. Оценка (1.1.31) доказана. Аналогично предыдущему

$$\begin{aligned}\left\|e^{-\frac{\gamma\tau}{2\delta}}\nabla_x W_\varepsilon^\delta\right\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant & 2\left\|e^{-\frac{\gamma\tau}{2\delta}}\left[\nabla_x\chi(\tau)\left(V_\varepsilon\left(\frac{s}{\delta},\frac{\tau}{\delta}\right)-1\right)\right]\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\\ &+2\left\|e^{-\frac{\gamma\tau}{2\delta}}\chi(\tau)\nabla_x V_\varepsilon\left(\frac{s}{\delta},\frac{\tau}{\delta}\right)\right\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\\ \leqslant & C_{16}\delta\left\|e^{-\frac{\gamma}{2}\xi_2}\left(V_\varepsilon(\xi)-1\right)\right\|^2_{L_2(B)}+\\ &+\frac{C_{17}}{\delta}\left\|e^{-\frac{\gamma}{2}\xi_2}\nabla_\xi V_\varepsilon+\varepsilon\right\|^2_{L_2(B)},\end{aligned}$$

где $\tau<0, \xi_2<0$, постоянные C_{16}, C_{17} не зависят от ε и δ.

Учитывая теперь (1.1.13) и (1.1.21), получаем оценку (1.1.32). Лемма 1.1.5 доказана. $\square$

Следующее утверждение посвящено неравенству для функции $v\in H^1(\Omega)$ в окрестности границы $\partial\Omega$.

Лемма 1.1.6. *Пусть* $\alpha=\text{const}>0$. *Существует такая постоянная* C_{18}, *не зависящая от* δ, *что для любой* $v\in H^1(\Omega)$

$$\left\|ve^{\alpha\frac{\tau}{\delta}}\right\|_{L_2(\Omega\cap\operatorname{supp}\chi)}\leqslant C_{18}\delta^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \qquad (1.1.33)$$

Доказательство. Пусть $v\in H^1(\Omega)$, и v_N — последовательность функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$ такая, что $v_N \to v$ в $H^1(\Omega)$ при $N \to \infty$. Имеем

$$\int\limits_{-1}^{0} v_N^2(\tau,s)e^{2\alpha\frac{\tau}{\delta}}d\tau = \frac{\delta}{2\alpha}\int\limits_{-1}^{0} v_N^2(\tau,s)d\left(e^{2\alpha\frac{\tau}{\delta}}\right) =$$

$$= \frac{\delta}{2\alpha}v_N^2(\tau,s)e^{2\alpha\frac{\tau}{\delta}}\Bigg|_{\tau=-1}^{\tau=0} - \frac{\delta}{\alpha}\int\limits_{-1}^{0} v_N(\tau,s)\frac{\partial v_N(\tau,s)}{\partial\tau}e^{2\alpha\frac{\tau}{\delta}}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{2\alpha}\left(v_N^2(0,s) - v_N^2(-1,s)e^{-2\frac{\alpha}{\delta}}\right) +$$

$$+ \frac{\delta}{\alpha}\left(\int\limits_{-1}^{0} v_N^2(\tau,s)d\tau\right)^{1/2}\left(\int\limits_{-1}^{0}\left(\frac{\partial v_N(\tau,s)}{\partial\tau}\right)^2 d\tau\right)^{1/2} C'_{18} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{2\alpha}\left(v_N^2(0,s) - 0 + 4C'_{18}\left(\int\limits_{-1}^{0} v_N^2(\tau,s)d\tau + \int\limits_{-1}^{0}|\nabla_x v_N|^2 d\tau\right)\right).$$

Проинтегрируем по s от 0 до 1:

$$\left\|v_N(\tau,s)e^{\alpha\frac{\tau}{\delta}}\right\|^2_{L_2(\Omega\cap\operatorname{supp}\chi)} \leqslant \delta C''_{18}\Big[\|v_N(0,s)\|^2_{L_2(\partial\Omega)} +$$
$$+ \|v_N(\tau,s)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla_x v_N(\tau,s)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big].$$

Применяем теорему о следах [49] и получаем нужную оценку для v_N, затем переходим к пределу при $N \to \infty$. Лемма 1.1.6 доказана. $\square$

Лемма 1.1.7. *Пусть выполнено условие* (1.1.6). *Для достаточно малого ε существует такая постоянная C_{19}, не зависящая от δ и ε, что*

$$\|\Delta W_\varepsilon^\delta\|_{(H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon))^*} \leqslant C_{19}\theta_\varepsilon^{1/2},$$

где $\left(H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon)\right)^*$ — пространство, сопряженное относительно спаривания в $L_2(\Omega)$ к пространству $H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon)$.

Доказательство. Надо показать, что для любой $v \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$,

$$\left| \iint\limits_{\Omega} \Delta W_\varepsilon^\delta v\, dx \right| \leqslant C_{19} \theta_\varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)}. \tag{1.1.34}$$

Так как $W_\varepsilon^\delta(x) = 1 + \chi(\tau) \left[V_\varepsilon \left(\frac{s}{\delta}, \frac{\tau}{\delta} \right) - 1 \right]$, то

$$\Delta_x W_\varepsilon^\delta = \Delta_x \chi(\tau) \left[V_\varepsilon \left(\frac{s}{\delta}, \frac{\tau}{\delta} \right) - 1 \right] + 2 \nabla_x \chi(\tau) \nabla_x V_\varepsilon \left(\frac{s}{\delta}, \frac{\tau}{\delta} \right) + \\ + \chi(\tau) \Delta_x V_\varepsilon \left(\frac{s}{\delta}, \frac{\tau}{\delta} \right), \quad x \in \Omega.$$

Легко видеть, что в силу (1.1.20)

$$\left| \iint\limits_{\Omega} \Delta_x \chi(\tau) \left[V_\varepsilon \left(\frac{s}{\delta}, \frac{\tau}{\delta} \right) - 1 \right] v\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\iint\limits_{\Omega} \left(\Delta_x \chi(\tau) \left[V_\varepsilon \left(\frac{s}{\delta}, \frac{\tau}{\delta} \right) - 1 \right] \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\iint\limits_{\Omega} v^2\, dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_{20} \left(\sum_{1}^{\delta^{-1}} \delta^2 \iint\limits_{B} (V_\varepsilon(\xi) - 1)^2 d\xi \right)^{1/2} \|v\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$= C_{20} \delta^{1/2} \|V_\varepsilon(\xi) - 1\|_{L_2(B)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{21} (\delta \theta_\varepsilon)^{1/2} \|v\|_{L_2(\Omega)}$$

с постоянными C_{20}, C_{21}, не зависящими от ε и δ. Используя (1.1.13),(1.1.21) и (1.1.33), получим следующее неравенство

$$\left|\iint\limits_{\Omega} \nabla_x \chi(\tau) \nabla_x V_\varepsilon \left(\frac{s}{\delta}, \frac{\tau}{\delta}\right) v\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x \chi(\tau) e^{-\frac{\gamma\tau}{2\delta}} \nabla_x V_\varepsilon \left(\frac{s}{\delta}, \frac{\tau}{\delta}\right)\right)^2 dx\right)^{1/2} \left(\iint\limits_{\Omega\cap \operatorname{supp}\chi} \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2\delta}} v\right)^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= C_{22} \left(\sum_1^{\delta^{-1}} \delta^2 \frac{1}{\delta^2} \iint\limits_{B} \left(e^{-\gamma\frac{\xi_2}{2}} \nabla_\xi V_\varepsilon\right)^2 d\xi\right)^{1/2} \left(\iint\limits_{\Omega\cap \operatorname{supp}\chi} \left(e^{\frac{\gamma\tau}{2\delta}} v\right)^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= C_{22} \delta^{-1/2} \left\| e^{-\gamma\frac{\xi_2}{2}} \nabla_\xi V_\varepsilon \right\|_{L_2(B)} \left\| e^{\frac{\gamma\tau}{2\delta}} v \right\|_{L_2(\Omega\cap \operatorname{supp}\chi)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{C_4}{C_3}\right)^{1/2} C_{22} \delta^{-1/2} \left\| \nabla_\xi V_\varepsilon \right\|_{L_2(B)} \left\| e^{\frac{\gamma\tau}{2\delta}} v \right\|_{L_2(\Omega\cap \operatorname{supp}\chi)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{C_4}{C_3}\right)^{1/2} C_6 C_{22} \left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}\right)^{1/2} \left\| e^{\frac{\gamma\tau}{2\delta}} v \right\|_{L_2(\Omega\cap \operatorname{supp}\chi)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{C_4}{C_3}\right)^{1/2} C_6 C_{22} \left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}\right)^{1/2} \widetilde{C}_{18} \delta^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)} =$$

$$= C_{23} \theta_\varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

с постоянными C_{22}, C_{23}, не зависящими от ε и δ.

Для доказательства (1.1.34) осталось показать, что

$$\left|\iint\limits_{\Omega} \chi(\tau) \Delta_x \left(V_\varepsilon \left(\frac{s}{\delta}, \frac{\tau}{\delta}\right)\right) v\, dx\right| \leqslant C_{24} \theta_\varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{1.1.35}$$

с постоянной C_{24}, не зависящей от ε и δ.

Напомним некоторые факты, необходимые в дальнейшем [29].

На $\operatorname{supp}\chi$ координаты (s, τ) регулярны. Пусть кривая $\partial\Omega$ задается вектор-функцией $r(s)$. Положим $l(s) = \frac{\partial r(s)}{\partial s}$, $\nu(s)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Точки из окрестности $\partial\Omega$ будем задавать вектор-функцией $x(s, \tau) = r(s) + \tau\nu(s)$. Тогда, согласно формуле

Френе,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial s} + \tau \frac{\partial \nu}{\partial s} = l(s)(1 - \tau k(s)), \quad \frac{\partial x}{\partial \tau} = \nu(s),$$

где $k(s)$ — кривизна контура $\partial\Omega$. Матрица Якоби отображения $(s, \tau) \to (x_1, x_2)$ в базисе $\{l(s), \nu(s)\}$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - \tau k(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ее якобиан $H(s, \tau)$ равен $1 - \tau k(s)$. В координатах (s, τ) оператор Лапласа $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta_x &= \mathcal{L}\left(s, \tau, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \\ &= \frac{1}{H(s,\tau)} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} H(s,\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{H(s,\tau)} \frac{\partial}{\partial s}\right].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta_x = \frac{1}{\delta^2}\Delta_\xi + \tau \mathfrak{H}(s,\tau) \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \mathcal{L}_1\left(s, \tau, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right),$$

где

$$\mathfrak{H}(s,\tau) = \frac{k(s)(2 - k(s)\tau)}{H(s,\tau)^2}.$$

Коэффициенты оператора $\mathcal{L}_1$ равны $-k(s)H(s,\tau)^{-1}$ и $\tau k'(s) H(s,\tau)^{-3}$ и равномерно ограничены. Аналогично предыдущему

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_{\Omega} \chi(\tau)\mathcal{L}_1\left[V_\varepsilon\left(\frac{s}{\delta}, \frac{\tau}{\delta}\right)\right] v\, dx\right| &\leqslant C_{25}\delta^{-1/2} \left\|e^{-\gamma\frac{\xi_2}{2}} \nabla_\xi V_\varepsilon\right\|_{L_2(B)} \left\|e^{\frac{\gamma\tau}{2\delta}} v\right\|_{L_2(\Omega \cap \operatorname{supp}\chi)} \leqslant \\ &\leqslant C_{26}\theta_\varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

согласно (1.1.13), (1.1.21) и (1.1.33), с постоянными C_{25} и C_{26}, не зависящими от ε и δ.

Поскольку функция $V_\varepsilon(\xi)$ гармонична в B, для доказательства (1.1.35) теперь достаточно показать, что

$$\left|\iint\limits_{\Omega} \chi(\tau)\mathfrak{H}(s,\tau)\tau\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[V_\varepsilon\left(\frac{s}{\delta},\frac{\tau}{\delta}\right)\right] v\, dx\right| \leqslant C_{27}\theta_\varepsilon^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \qquad (1.1.36)$$

где постоянная не зависит от ε и δ.

Разрежем $\Omega\cap\operatorname{supp}\chi$ на $\delta^{-1}\in\mathbb{N}$ ячеек периодичности и в интегралах по этим ячейкам периодичности произведем замену переменных $(x_1,x_2)\to(s,\tau)\to(\xi_1-k,\xi_2)$ для k-й ячейки. Тогда

$$\left|\iint\limits_{\Omega} \chi(\tau)\mathfrak{H}(s,\tau)\tau\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[V_\varepsilon\left(\frac{s}{\delta},\frac{\tau}{\delta}\right)\right] v\, dx\right| = \delta\left|\sum_{j=1}^{\delta^{-1}}\iint\limits_{B}\xi_2\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial\xi_1^2}v_j\, d\xi\right|,$$

где якобианы от замены переменных, функции $\chi(\tau),\mathfrak{H}(s,\tau)$ учитываются в функциях $v_j(\xi)$, $v_j\in H(B,\Gamma^\varepsilon)$. Применим формулу Грина к функциям $V_\varepsilon(\xi)$ и $\xi_2 v_j(\xi)$, имея в виду, что

$$\iint\limits_{B_{\rho_1\rho_2}}\xi_2\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial\xi_1^2}v_j d\xi = -\iint\limits_{B_{\rho_1\rho_2}}\xi_2\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial\xi_2^2}v_j d\xi,$$

так как $\Delta_\xi V_\varepsilon(\xi)=0$ в $B_{\rho_1\rho_2}$. Для любого $\rho_1>\rho_2>0$

$$-\iint\limits_{B_{\rho_1\rho_2}}\xi_2\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial\xi_2^2}v_j\, d\xi = \iint\limits_{B_{\rho_1\rho_2}}\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial\xi_2}\frac{\partial(\xi_2 v_j)}{\partial\xi_2}\, d\xi + \\ + \rho_2\int\limits_{\Sigma_{\rho_2}}\frac{\partial V_\varepsilon(\xi)}{\partial\xi_2}v_j\, d\xi_1 - \rho_1\int\limits_{\Sigma_{\rho_1}}\frac{\partial V_\varepsilon(\xi)}{\partial\xi_2}v_j\, d\xi_1.$$

Легко показать, используя доказательство леммы 1.1.4, что

$$\rho_2\int\limits_{\Sigma_{\rho_2}}\frac{\partial V_\varepsilon(\xi)}{\partial\xi_2}v_j\, d\xi_1\to 0 \quad \text{при } \rho_2\to 0.$$

Имея в виду тот факт, что $v_j\Big|_{\Sigma_{\rho_1}} = 0$ при достаточно большом ρ_1 (поскольку v_j содержит срезку χ), легко получить также

$$\rho_1 \int\limits_{\Sigma_{\rho_1}} \frac{\partial V_\varepsilon(\xi)}{\partial \xi_2} v_j \, d\xi_1 \to 0 \quad \text{при } \rho_1 \to \infty.$$

Устремив ρ_2 к 0, а ρ_1 к ∞, окончательно имеем формулу вида

$$\begin{aligned}\iint\limits_B \xi_2 \frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial \xi_1^2} v_j \, d\xi = &\iint\limits_B \frac{\partial V_\varepsilon(\xi)}{\partial \xi_2} \frac{\partial(\xi_2 v_j)}{\partial \xi_2} \, d\xi = \\ = &\iint\limits_B \frac{\partial V_\varepsilon(\xi)}{\partial \xi_2} v_j \, d\xi + \iint\limits_B \frac{\partial V_\varepsilon(\xi)}{\partial \xi_2} \xi_2 \frac{\partial v_j(\xi)}{\partial \xi_2} \, d\xi = \\ = &I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Произведя обратную замену переменных в I_1 и просуммировав по всем ячейкам периодичности, имеем

$$\begin{aligned}\delta \left| \sum_{j=1}^{\delta^{-1}} \iint\limits_B \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2} v_j \, d\xi \right| = &\left| \iint\limits_\Omega \chi(\tau) \mathfrak{H}(s,\tau) \frac{\partial V_\varepsilon\left(\frac{s}{\delta}, \frac{\tau}{\delta}\right)}{\partial \tau} v \, dx \right| \leqslant \\ \leqslant &C_{28} \delta^{-1/2} \left\| e^{-\gamma \frac{\xi_2}{2}} \nabla_\xi V_\varepsilon \right\|_{L_2(B)} \left\| e^{\frac{\gamma\tau}{2\delta}} v \right\|_{L_2(\Omega \cap \operatorname{supp} \chi)} \leqslant \\ \leqslant &C_{29} \theta_\varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)},\end{aligned}$$

ввиду (1.1.13), (1.1.21) и (1.1.33).

Оценим теперь оставшуюся сумму:

$$
\begin{aligned}
&\delta\left|\sum_{j=1}^{\delta^{-1}} \iint\limits_{B} \xi_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \xi_2}\frac{\partial v_j}{\partial \xi_2}\, d\xi\right| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \left\|\xi_2 e^{-\gamma\frac{\xi_2}{4}} \nabla_\xi V_\varepsilon\right\|_{L_2(B)} \delta \left(\sum_{j=1}^{\delta^{-1}} \left\|e^{\gamma\frac{\xi_2}{4}} \nabla_\xi v_j\right\|_{L_2(B)}\right) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \|\nabla_\xi V_\varepsilon\|_{L_2(B)}\, \delta \left(\sum_{j=1}^{\delta^{-1}} \left\|e^{\gamma\frac{\xi_2}{4}} \nabla_\xi v_j\right\|_{L_2(B)}\right) \leqslant \\
&\qquad \leqslant C_{30}\theta_\varepsilon^{1/2}\delta^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\delta^{-1}} \left\|e^{\gamma\frac{\xi_2}{4}} \nabla_\xi v_j\right\|^2_{L_2(B)}\right)^{1/2} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \widetilde{C}_{30}(\theta_\varepsilon\delta)^{1/2} \left(\left\|e^{\frac{\gamma\tau}{4\delta}} \nabla_x v\right\|_{L_2(\Omega\cap \operatorname{supp}\chi)} + \left\|e^{\frac{\gamma\tau}{4\delta}} v\right\|_{L_2(\Omega\cap \operatorname{supp}\chi)}\right) \leqslant \\
&\qquad \leqslant C_{31}\theta_\varepsilon^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

где постоянные C_{30}, C_{31} не зависит от ε и δ.

Получили оценку (1.1.36). Лемма 1.1.7 доказана. □

Следующее утверждение о сходимости сответствующих интегральных тождеств будет использоваться для исследования спектров.

Лемма 1.1.8. *Пусть* $p < +\infty$. *Предположим, что для некоторой последовательности* $\varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$ *существует такая функция* $\varphi^* \in H^1(\Omega)$, *что* $\varphi^\varepsilon \rightharpoonup \varphi^*$ *слабо в* $H^1(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$. *Тогда для любой* $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$

$$
\iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x\varphi^\varepsilon, \nabla_x(vW_\varepsilon^\delta)\right)\, dx \to \iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x\varphi^*, \nabla_x v\right)\, dx + p\int\limits_{\partial\Omega} \varphi^* v\, ds
$$

при $\varepsilon \to 0$, *где* W_ε^δ *определена соотношением* (1.1.16).

Доказательство. Легко видеть, что $vW_\varepsilon^\delta \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$, так как $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Напишем формулу Грина в области $\Omega_\mu = \{x \in \Omega \,|\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geqslant \mu\}$ для функций φ^ε и vW_ε^δ:

$$\iint\limits_{\Omega_\mu} \left(\nabla_x \varphi^\varepsilon, \nabla_x (vW_\varepsilon^\delta)\right) dx =$$

$$= - \iint\limits_{\Omega_\mu} \Delta(vW_\varepsilon^\delta)\varphi^\varepsilon \, dx + \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial(vW_\varepsilon^\delta)}{\partial\tau} \varphi^\varepsilon \, ds =$$

$$= - \iint\limits_{\Omega_\mu} \Delta v W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon \, dx - \iint\limits_{\Omega_\mu} \left(2(\nabla_x v, \nabla_x W_\varepsilon^\delta) + v\Delta W_\varepsilon^\delta\right) \varphi^\varepsilon \, dx +$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial v}{\partial\tau} W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon \, ds + \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial W_\varepsilon^\delta}{\partial\tau} v\varphi^\varepsilon \, ds. \tag{1.1.37}$$

Легко увидеть, что

$$- \iint\limits_{\Omega_\mu} \Delta v W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon \, dx \to - \iint\limits_{\Omega} \Delta v W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon \, dx \quad \text{при } \mu \to 0.$$

Также легко проверить, что при $\mu \to 0$ имеем

$$- \iint\limits_{\Omega_\mu} 2(\nabla_x v, \nabla_x W_\varepsilon^\delta)\varphi^\varepsilon \, dx \to - \iint\limits_{\Omega} 2(\nabla_x v, \nabla_x W_\varepsilon^\delta)\varphi^\varepsilon \, dx,$$

$$\int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial v}{\partial\tau} W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon \, ds \to \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial\tau} W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon \, ds,$$

$$- \iint\limits_{\Omega_\mu} v\Delta W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon \, dx \to - \iint\limits_{\Omega} v\Delta W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon \, dx.$$

Из условия (1.1.9) и свойств функции W_ε^δ (см. (1.1.16) и (1.1.17)) следует, что

$$\int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial W_\varepsilon^\delta}{\partial\tau} v\varphi^\varepsilon \, ds \to \frac{\theta_\varepsilon}{\delta} \int\limits_{\partial\Omega} W_\varepsilon^\delta v\varphi^\varepsilon \, ds \quad \text{при } \mu \to 0,$$

так как $v\varphi^\varepsilon \in H(B,\Gamma^\varepsilon)$.

Устремим $\mu \to 0$ в (1.1.37), получим следующее равенство

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x\varphi^\varepsilon, \nabla_x(vW_\varepsilon^\delta)\right)\, dx =$$
$$= -\iint\limits_{\Omega} \Delta v W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon\, dx - \iint\limits_{\Omega} 2(\nabla_x v, \nabla_x W_\varepsilon^\delta)\varphi^\varepsilon\, dx -$$
$$- \iint\limits_{\Omega} v\Delta W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \tau} W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon\, ds + \frac{\theta_\varepsilon}{\delta}\int\limits_{\partial\Omega} W_\varepsilon^\delta v\varphi^\varepsilon\, ds. \qquad (1.1.38)$$

Перейдем к пределу в (1.1.38) при $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$-\iint\limits_{\Omega} \Delta v W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon\, dx \to -\iint\limits_{\Omega} \Delta v\varphi^*\, dx \quad \text{при } \varepsilon \to 0,$$

так как в силу (1.1.31) $W_\varepsilon^\delta \to 1$ при $\varepsilon \to 0$ сильно в $L_2(\Omega)$.

Далее,

$$-\iint\limits_{\Omega} 2\left(\nabla_x v, \nabla_x W_\varepsilon^\delta\right)\varphi^\varepsilon\, dx = -\iint\limits_{\Omega} 2\left(\nabla_x v, \nabla_x(W_\varepsilon^\delta - 1)\right)\varphi^\varepsilon\, dx =$$
$$= \iint\limits_{\Omega} (W_\varepsilon^\delta - 1)2\left[(\nabla_x\varphi^\varepsilon, \nabla_x v) + \varphi^\varepsilon \Delta v\right]\, dx -$$
$$- \int\limits_{\partial\Omega} (W_\varepsilon^\delta - 1)2\varphi^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \tau}\, ds$$

и стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$ в силу неравенств (1.1.30) и (1.1.31). Интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} v\Delta W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon\, dx$$

в силу неравенства (1.1.34) стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. Так как $W_\varepsilon^\delta \to 1$

при $\varepsilon \to 0$ сильно в $L_2(\partial\Omega)$ в силу (1.1.30) и $\frac{\theta_\varepsilon}{\delta} \to p$ при $\varepsilon \to 0$, то

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \tau} W_\varepsilon^\delta \varphi^\varepsilon \, ds \to \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \tau} \varphi^* \, ds,$$

а

$$\frac{\theta_\varepsilon}{\delta} \int\limits_{\partial\Omega} W_\varepsilon^\delta v \varphi^\varepsilon \, ds \to p \int\limits_{\partial\Omega} \varphi^* v \, ds \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x \varphi^\varepsilon, \nabla_x (v W_\varepsilon^\delta)\right) \, dx \to \\ \to - \iint\limits_{\Omega} \Delta v \varphi^* \, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \tau} \varphi^* \, ds + p \int\limits_{\partial\Omega} \varphi^* v \, ds = \\ = \iint\limits_{\Omega} (\nabla_x \varphi^*, \nabla_x v) \, dx + p \int\limits_{\partial\Omega} \varphi^* v \, ds \quad \text{при } \varepsilon \to 0.\end{aligned}$$

Лемма 1.1.8 доказана. □

Лемма 1.1.9. *Пусть выполнены условия* (1.1.5) *и* (1.1.6) *с* $p = +\infty$. *Тогда для достаточно малого* ε *существует такая постоянная* C_{33}, *не зависящая от* ε *и* δ, *что*

$$\|v\|_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant C_{33} \left(\frac{\delta}{\theta_\varepsilon}\right)^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{1.1.39}$$

для любой $v \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$.

Доказательство. Согласно (1.1.19) для любой $w \in H_{1\text{-per}}(B, \Gamma^\varepsilon)$

$$\|w\|^2_{L_2(\Sigma)} \leqslant \frac{1}{\widetilde{\theta}_\varepsilon} \|\nabla_\xi w\|^2_{L_2(B)}.$$

Разрежем $\Omega \cap \operatorname{supp} \chi$ на $\delta^{-1} \in \mathbb{N}$ ячеек периодичности и в каждой k-й ячейке произведем замену переменных в окрестности $\partial\Omega$: $(x_1, x_2) \to$

$(s,\tau)\to(\xi_1-k,\xi_2)$, тогда для $v\in H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\|v\|^2_{L_2(\Sigma)}=\|v\chi\|^2_{L_2(\Sigma)}\leqslant\frac{1}{\widetilde{\theta}_\varepsilon}\|\nabla_\xi(v\chi)\|^2_{L_2(B)}.$$

Произведя теперь обратную замену переменных, суммируя по всем ячейкам периодичности, получаем (1.1.39). Лемма 1.1.9 доказана. □

Лемма 1.1.10. *Пусть выполнены условия* (1.1.5), (1.1.6) *с* $p=+\infty$. *Предположим, что для некоторой последовательности* $\varphi^\varepsilon\in H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon)$ *существует такая функция* $\varphi^*\in H^1(\Omega)$, *что* $\varphi^\varepsilon\rightharpoonup\varphi^*$ *слабо в* $H^1(\Omega)$ *при* $\varepsilon\to 0$. *Тогда* $\varphi^*\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ *и для любой* $v\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\iint\limits_\Omega\left(\nabla_x\varphi^\varepsilon,\nabla_x(vW_\varepsilon^\delta)\right)\,dx\to\iint\limits_\Omega(\nabla_x\varphi^*,\nabla_x v)\,dx$$

при $\varepsilon\to 0$, *где* W_ε^δ *определена соотношением* (1.1.16).

Доказательство. В силу условий леммы и оценки (1.1.39) $\varphi^*\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Аналогично доказательству леммы 1.1.8 имеем, учитывая, что $v\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_\Omega\left(\nabla_x\varphi^\varepsilon,\nabla_x(vW_\varepsilon^\delta)\right)\,dx=\\
&\quad=-\iint\limits_\Omega\Delta(vW_\varepsilon^\delta)\varphi^\varepsilon\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial(vW_\varepsilon^\delta)}{\partial\tau}\varphi^\varepsilon\,ds=\\
&\quad=-\iint\limits_\Omega\Delta vW_\varepsilon^\delta\varphi^\varepsilon\,dx-2\iint\limits_\Omega\left(\nabla_x v,\nabla_x(W_\varepsilon^\delta-1)\right)\varphi^\varepsilon\,dx-\\
&\quad\quad-\iint\limits_\Omega v\Delta W_\varepsilon^\delta\varphi^\varepsilon\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial\tau}W_\varepsilon^\delta\varphi^\varepsilon\,ds=\\
&\quad=-\iint\limits_\Omega\Delta vW_\varepsilon^\delta\varphi^\varepsilon\,dx+2\iint\limits_\Omega(W_\varepsilon^\delta-1)\left((\nabla_x v,\nabla_x\varphi^\varepsilon)+\Delta v\varphi^\varepsilon\right)\,dx-\\
&\quad\quad-\iint\limits_\Omega v\Delta W_\varepsilon^\delta\varphi^\varepsilon\,dx-2\int\limits_{\partial\Omega}(W_\varepsilon^\delta-1)\frac{\partial v}{\partial\tau}\varphi^\varepsilon\,ds+\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial\tau}W_\varepsilon^\delta\varphi^\varepsilon\,ds.
\end{aligned}$$

Ввиду оценки (1.1.31) при $\varepsilon \to 0$ интеграл

$$-\iint\limits_{\Omega} \Delta v W_{\varepsilon}^{\delta} \varphi^{\varepsilon}\, dx \to -\iint\limits_{\Omega} \varphi^{*} \Delta v\, dx,$$

а

$$2\iint\limits_{\Omega} (W_{\varepsilon}^{\delta} - 1)\left((\nabla_x v, \nabla_x \varphi^{\varepsilon}) + \Delta v \varphi^{\varepsilon}\right) dx \to 0.$$

Используя оценку (1.1.34), выводим предельное соотношение

$$\iint\limits_{\Omega} v \Delta W_{\varepsilon}^{\delta} \varphi^{\varepsilon}\, dx \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Из-за того, что $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$,

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \tau} W_{\varepsilon}^{\delta} \varphi^{\varepsilon}\, ds = \int\limits_{\partial\Omega} \left(W_{\varepsilon}^{\delta} - 1\right) \frac{\partial v}{\partial \tau} \varphi^{\varepsilon}\, ds = 0.$$

Следовательно, для $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x \varphi^{\varepsilon}, \nabla_x (v W_{\varepsilon}^{\delta})\right) dx \to -\iint\limits_{\Omega} \Delta v \varphi^{*}\, dx = \iint\limits_{\Omega} (\nabla_x \varphi^{*}, \nabla_x v)\, dx.$$

Лемма 1.1.10 доказана. $\square$

Следующее неравенство типа Фридрихса из предложения 1 [63] необходимо для получения равномерных оценок (см. также [45], [98]).

Лемма 1.1.11. *Пусть $0 < p \leqslant \infty$. Тогда существует такая положительная постоянная M_1, не зависящая от ε и δ, что*

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla_x u|^2\, dx \geqslant M_1 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{1.1.40}$$

для любой $u \in H^1(\Omega, \Gamma_D^{\varepsilon})$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $u \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$

$$\iint\limits_\Omega |\nabla_x u|^2\, dx \geqslant M_2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

с постоянной M_2, не зависящей от ε, δ и u.

Предположим противное. Тогда для любого m существуют такие ε_m, $\delta_m = \delta(\varepsilon_m)$, стремящиеся к 0 при $m \to \infty$, и $u_m \in H^1(\Omega, \Gamma_D^{\varepsilon_m})$, что

$$\iint\limits_\Omega |\nabla_x u_m|^2\, dx < \frac{\|u_m\|^2_{L_2(\Omega)}}{m}. \tag{1.1.41}$$

Пусть

$$\mu_m = \inf_{v \in H^1(\Omega, \Gamma_D^{\varepsilon_m})} \frac{\iint\limits_\Omega |\nabla_x v|^2\, dx}{\|v\|^2_{L_2(\Omega)}}. \tag{1.1.42}$$

Аналогично лемме 1.1.1 легко показать, что существует функция $v_m \in H^1(\Omega, \Gamma_D^{\varepsilon_m})$, $\|v_m\|^2_{L_2(\Omega)} = 1$, на которой достигается минимум в (1.1.42).

Из (1.1.41) следует, что $\mu_m < \frac{1}{m}$, т.е. $\mu_m \to 0$ при $m \to +\infty$.

Из вышеописанного следует, что

$$\iint\limits_\Omega |\nabla_x v_m|^2\, dx \to 0 \quad \text{при } m \to +\infty. \tag{1.1.43}$$

Рассмотрим выражение

$$h_1(t) = \frac{\iint\limits_\Omega |\nabla_x (v_m + tu)|^2\, dx}{\|v_m + tu\|^2_{L_2(\Omega)}},\ t \in \mathbb{R}.$$

Оно является непрерывно дифференцируемой функцией от t в некоторой окрестности $t = 0$. Это отношение имеет минимум, равный μ_m, и на основании теоремы Ферма имеем

$$0 = h_1'(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{\|v_m\|^4_{L_2(\Omega)}} \left\{ 2 \left(\iint\limits_\Omega (\nabla v_m, \nabla u)\, dx \right) \|v_m\|^2_{L_2(\Omega)} - \right.$$

$$\left. -2 \iint\limits_\Omega v_m u \, dx \left(\iint\limits_\Omega |\nabla v_m|^2 \, dx \right) \right\}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_\Omega (\nabla_x v_m, \nabla_x u)\, dx = \mu_m \iint\limits_\Omega v_m u \, dx.$$

А значит, для любой функции $u \in H^1(\Omega, \Gamma^\varepsilon_D)$ при $m \to +\infty$

$$\left| \iint\limits_\Omega (\nabla_x v_m, \nabla_x u)\, dx \right| \leqslant \mu_m \mathcal{M} \to 0, \tag{1.1.44}$$

где константа $\mathcal{M} = \sqrt{\iint\limits_\Omega u^2\, dx}$ не зависит от m.

Из того, что $\|v_m\|^2_{L_2(\Omega)} = 1$ и (1.1.43) следует, что $\|v_m\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_{32}$ для любого m, где C_{32} не зависит от m, т.е. из $\{v_m\}$ можно выбрать подпоследовательность (обозначаемую для удобства по-прежнему $\{v_m\}$) такую, что $v_m \rightharpoonup v^* \in H^1(\Omega)$ слабо в $H^1(\Omega)$.

В случае, когда $p < \infty$, согласно лемме 1.1.8 для $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ имеем

$$\iint\limits_\Omega \left(\nabla_x v_m, \nabla_x (v W^{\delta_m}_{\varepsilon_m})\right)\, dx \to \iint\limits_\Omega (\nabla_x v^*, \nabla_x v)\, dx + p \int\limits_{\partial\Omega} v^* v \, ds$$

при $m \to \infty$.

С другой стороны, подставив $u = v W^{\delta_m}_{\varepsilon_m}$ в (1.1.44), получим, что при $m \to +\infty$ имеет место сходимость

$$\iint\limits_\Omega \left(\nabla_x v_m, \nabla_x (v W^{\delta_m}_{\varepsilon_m})\right)\, dx \to 0.$$

Итак,

$$\iint\limits_{\Omega} (\nabla_x v^*, \nabla_x v)\, dx + p \int\limits_{\partial\Omega} v^* v\, ds = 0$$

для любой $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, следовательно, из-за существования и единственности решения соответствующей краевой задачи, $v^* = 0$, но $\|v^*\|_{L_2(\Omega)} = 1$ в силу того, что $\|v_m\|_{L_2(\Omega)} = 1$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие доказывает лемму 1.1.11 для $0 < p < \infty$. Доказательство для случая $p = \infty$ проводится аналогично, с использованием леммы 1.1.10. $\square$

§ 1.2 Основные результаты

Теорема 1.2.1. *Предположим, что выполнено условие* (1.1.5) *с* $0 < p < +\infty$. *Пусть* $g \in L_2(\partial\Omega)$, u^ε *и* u^0 *— обобщенные решения задачи* (1.1.1) *и* (1.1.7) *соответственно. Тогда* $u^\varepsilon \rightharpoonup u^0$ *слабо в* $H^1(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. В силу оценки (1.1.40) последовательность u^ε равномерно ограничена в $H^1(\Omega)$, следовательно, выделением подпоследовательности получим, что $u^\varepsilon \rightharpoonup u^*$ слабо в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $u^* = u^0$.

Возьмем $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, тогда в силу утверждения леммы 1.1.8

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x (v W_\varepsilon^\delta)\right) dx \to \iint\limits_{\Omega} (\nabla_x u^*, \nabla_x v)\ dx + p \int\limits_{\partial\Omega} u^* v\, ds \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

С другой стороны, ввиду оценки (1.1.30)

$$\int\limits_{\partial\Omega} g v W_\varepsilon^\delta\, ds \to \int\limits_{\partial\Omega} g v\, ds \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Подставим в интегральное тождество (1.1.2) произведение vW_ε^δ в качестве пробной функции. Получим, что u^* удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint\limits_{\Omega} (\nabla_x u^*, \nabla_x v)\, dx + p \int\limits_{\partial\Omega} u^* v\, ds = \int\limits_{\partial\Omega} gv\, ds$$

для любой $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

В силу единственности решения задачи (1.1.7) $u^* = u^0$. Теорема 1.2.1 доказана. $\square$

Теорема 1.2.2. *Предположим, что выполнено условие* (1.1.5) *с* $0 < p < +\infty$. *Пусть* $g \in C(\partial\Omega)$, u^ε *и* u^0 *— обобщенные решения задачи* (1.1.1) *и* (1.1.7) *соответственно. Тогда существует такая постоянная* C_{34}, *не зависящая от* ε, δ *и* g, *что для достаточно малого* ε *имеем*

$$\|u^0 W_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_{34} \|g\|_{C(\partial\Omega)} \left(\theta_\varepsilon^{1/2} + \left| \frac{\theta_\varepsilon}{\delta} - p \right| \right). \qquad (1.2.1)$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное выражение в области Ω_μ, определённой в лемме 1.1.8

$$\iint\limits_{\Omega_\mu} \left(\nabla_x (u^0 W_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon), \nabla_x v \right)\, dx.$$

Интегрируя по частям, помня, что $\Delta u_0 = 0$, получаем для $v \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$

$$\iint\limits_{\Omega_\mu} \left(\nabla_x(u^0 W_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon), \nabla_x v\right)\, dx =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_\mu} \left(\nabla_x(u^0 W_\varepsilon^\delta), \nabla_x v\right)\, dx - \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\tau} v\, ds =$$

$$= - \iint\limits_{\Omega_\mu} \Delta(u^0 W_\varepsilon^\delta) v\, dx + \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial(u^0 W_\varepsilon^\delta)}{\partial\tau} v\, ds - \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\tau} v\, ds =$$

$$= - \iint\limits_{\Omega_\mu} \left(2\left(\nabla_x u^0, \nabla_x(W_\varepsilon^\delta - 1)\right) + u^0 \Delta W_\varepsilon^\delta\right) v\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial u^0}{\partial\tau} W_\varepsilon^\delta v\, ds + \int\limits_{\partial\Omega_\mu} u^0 \frac{\partial W_\varepsilon^\delta}{\partial\tau} v\, ds - \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\tau} v\, ds =$$

$$= 2 \iint\limits_{\Omega_\mu} \left(W_\varepsilon^\delta - 1\right)\left(\nabla_x v, \nabla_x u^0\right)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial u^0}{\partial\tau} W_\varepsilon^\delta v\, ds + \int\limits_{\partial\Omega_\mu} u^0 \frac{\partial W_\varepsilon^\delta}{\partial\tau} v\, ds -$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\tau} v\, ds - 2 \int\limits_{\partial\Omega_\mu} (W_\varepsilon^\delta - 1) \frac{\partial u^0}{\partial\tau} v\, ds - \iint\limits_{\Omega_\mu} u^0 \Delta W_\varepsilon^\delta v\, dx. \tag{1.2.2}$$

Легко увидеть, что при $\mu \to 0$

$$\iint\limits_{\Omega_\mu} \left(W_\varepsilon^\delta - 1\right)\left(\nabla_x v, \nabla_x u^0\right)\, dx \to \iint\limits_{\Omega} \left(W_\varepsilon^\delta - 1\right)\left(\nabla_x v, \nabla_x u^0\right)\, dx,$$

$$\int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial u^0}{\partial \tau} W_\varepsilon^\delta v\, ds \to \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u^0}{\partial \tau} W_\varepsilon^\delta v\, ds,$$

$$\int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau} v\, ds \to \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau} v\, ds = \int\limits_{\partial\Omega} gv\, ds,$$

$$\iint\limits_{\Omega_\mu} u^0 \Delta W_\varepsilon^\delta v\, dx \to \iint\limits_{\Omega} u^0 \Delta W_\varepsilon^\delta v\, dx,$$

а

$$\int\limits_{\partial\Omega_\mu} (W_\varepsilon^\delta - 1) \frac{\partial u^0}{\partial \tau} v\, ds \to \int\limits_{\partial\Omega} (W_\varepsilon^\delta - 1) \frac{\partial u^0}{\partial \tau} v\, ds.$$

В силу (1.1.9) и свойств W_ε^δ, заданных формулой (1.1.16),

$$\int\limits_{\partial\Omega_\mu} u^0 \frac{\partial W_\varepsilon^\delta}{\partial \tau} v\, ds \to \frac{\theta_\varepsilon}{\delta} \int\limits_{\partial\Omega} u^0 W_\varepsilon^\delta v\, ds \quad \text{при } \mu \to 0.$$

Перейдем в (1.2.2) к пределу при $\mu \to 0$. Имея в виду граничное условие (1.1.7), т.е. $\frac{\partial u^0}{\partial \tau} = -pu^0 + g$ на $\partial\Omega$, получаем

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x (u^0 W_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon), \nabla_x v\right)\, dx = \\ &\quad = \iint\limits_{\Omega} (W_\varepsilon^\delta - 1) 2 \left(\nabla_x v, \nabla_x u^0\right)\, dx + \\ &\quad + \left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta} - p\right) \int\limits_{\partial\Omega} u^0 W_\varepsilon^\delta v\, ds - \int\limits_{\partial\Omega} (W_\varepsilon^\delta - 1) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau} v ds + \\ &\quad + 2 \int\limits_{\partial\Omega} (W_\varepsilon^\delta - 1) p\, u^0 v\, ds - \iint\limits_{\Omega} u^0 \Delta W_\varepsilon^\delta v\, dx. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части равенства (1.2.3). Имеем

$$\left|\iint\limits_{\Omega}(W_\varepsilon^\delta-1)(\nabla_x v,\nabla_x u^0)\,dx\right| = \|W_\varepsilon^\delta-1\|_{L_2(\Omega)}\left(\iint\limits_{\Omega}(\nabla_x u^0,\nabla_x v)^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C_{12}(\theta_\varepsilon\delta)^{1/2}C_{35}\|g\|_{C(\partial\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon)},$$

ввиду оценок (1.1.18) и (1.1.31). Используя (1.1.18) и (1.1.34), получаем оценку последнего интеграла из (1.2.3)

$$\left|\iint\limits_{\Omega} u^0\Delta W_\varepsilon^\delta v\,dx\right| \leqslant C_{19}\theta_\varepsilon^{1/2}\|u^0 v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{19}'\theta_\varepsilon^{1/2}\|u^0\|_{C^1(\overline{\Omega})}\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_{19}''\theta_\varepsilon^{1/2}\|g\|_{C(\partial\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Далее, благодаря (1.1.18) и (1.1.30), получаем, что второй интеграл оценивается следующим образом:

$$\left|\left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}-p\right)\int\limits_{\partial\Omega}u^0(W_\varepsilon^\delta-1)v\,ds+\left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}-p\right)\int\limits_{\partial\Omega}u^0 v\,ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}-p\right|C_{11}'\theta_\varepsilon^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon)}\|g\|_{C(\partial\Omega)}+C_{11}''\left|\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}-p\right|\|v\|_{H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon)}\|g\|_{C(\partial\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant\widetilde{C}_{11}\left|\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}-p\right|\|v\|_{H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon)}\|g\|_{C(\partial\Omega)}.$$

Оставшиеся интегралы имеют следующую оценку:

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega}(W_\varepsilon^\delta-1)p\,u^0 v\,ds\right|\leqslant C_{11}\theta_\varepsilon^{1/2}C_{36}\|v\|_{H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon)}\|g\|_{C(\partial\Omega)},$$

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega}(W_\varepsilon^\delta-1)gvds\right|\leqslant \check{C}\theta_\varepsilon^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon)}\|g\|_{C(\partial\Omega)},$$

ввиду (1.1.18) и (1.1.30). Окончательно имеем

$$\left| \iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x(u^0 W_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon), \nabla_x v\right) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{34}' \|g\|_{C(\partial\Omega)} \left(\theta_\varepsilon^{1/2} + \left|\frac{\theta_\varepsilon}{\delta} - p\right|\right) \|v\|_{H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)} \qquad (1.2.4)$$

для любой $v \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$.

Положим $v = u^0 W_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon$. На основании (1.1.40) и (1.2.4) получаем искомую оценку. Теорема 1.2.2 доказана. □

Теорема 1.2.3. *Предположим, что выполнены условия* (1.1.5) *и* (1.1.6) *с* $p = +\infty$. *Пусть* $g \in L_2(\partial\Omega)$, u^ε *— обобщенное решение задачи* (1.1.1). *Тогда* $u^\varepsilon \rightharpoonup 0$ *слабо в* $H^1(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство теоремы 1.2.3 проводится аналогично доказательству теоремы 1.2.1.

Теорема 1.2.4. *Предположим, что выполнены условия* (1.1.5) *и* (1.1.6) *с* $p = +\infty$. *Пусть* $g \in C(\partial\Omega)$, u^ε *— обобщенное решение задачи* (1.1.1). *Тогда существует такая постоянная* K_2, *не зависящая от* ε, δ *и* g, *что для достаточно малого* ε *имеем*

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant K_2 \|g\|_{C(\partial\Omega)} \left(\frac{\delta}{\theta_\varepsilon}\right)^{1/2}. \qquad (1.2.5)$$

Доказательство. Для любого $v \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} g v ds. \qquad (1.2.6)$$

Тогда с учётом леммы 1.1.9

$$\left| \int\limits_{\Omega} (\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v)\, dx \right| = \left| \int\limits_{\partial\Omega} g v ds \right| \leqslant \|g\|_{C(\partial\Omega)} \|v\|_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{33} \delta^{1/2} \theta_\varepsilon^{-1/2} \|g\|_{C(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (1.2.7)$$

Подставим $v = u^\varepsilon$ и учтём (1.1.40). Получим искомую оценку (1.2.5). Теорема 1.2.4 доказана. $\square$

Теорема 1.2.5. *Предположим, что выполнено условие* (1.1.5) *с* $p = 0$. *Пусть* $g \in L_2(\partial\Omega)$, $\int\limits_{\partial\Omega} g(x)ds = 0$, u^ε *и* u^0 — *обобщенные решения задач* (1.1.1) *и* (1.1.7) *соответственно. Положим*

$$\langle u^\varepsilon \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \iint\limits_\Omega u^\varepsilon\, dx.$$

Тогда $u^\varepsilon - \langle u^\varepsilon \rangle \rightharpoonup u^0$ *слабо в* $H^1(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Согласно (1.1.2) функция u^ε удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint\limits_\Omega (\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v)\; dx = \int\limits_{\partial\Omega} gvds$$

для любой $v \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$.

Поскольку $\int\limits_{\partial\Omega} g(x)\, ds = 0$ по условию, то

$$\begin{aligned}\iint\limits_\Omega |\nabla_x (u^\varepsilon - \langle u^\varepsilon \rangle)|^2\, dx &= \int\limits_{\partial\Omega} g(u^\varepsilon - \langle u^\varepsilon \rangle)\, ds \\ &\leqslant C_{37} \|g\|_{L_2(\partial\Omega)} \|\nabla_x (u^\varepsilon - \langle u^\varepsilon \rangle)\|_{L_2(\Omega)}\end{aligned}$$

с постоянной C_{37}, не зависящей от ε, δ и u^ε, в силу неравенства Пуанкаре. Следовательно, семейство $v^\varepsilon = u^\varepsilon - \langle u^\varepsilon \rangle$ равномерно ограничено в $H^1(\Omega)$. Выделением подпоследовательности (обозначаемой по-прежнему) получаем

$$v^\varepsilon \rightharpoonup u^* \quad \text{слабо в } H^1(\Omega) \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{1.2.8}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $u^* = u^0$. Из (1.2.8) следует, что $\iint\limits_\Omega u^*\, dx = 0$. Возьмем $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Тогда

$vW_\varepsilon^\delta \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$ и

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x (vW_\varepsilon^\delta)\right) \, dx = \iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x v^\varepsilon, \nabla_x (vW_\varepsilon^\delta)\right) \, dx = \\ = \int\limits_{\partial\Omega} g v W_\varepsilon^\delta \, ds.$$

Заметим, что

$$\iint\limits_{\Omega} (vW_\varepsilon^\delta - v)^2 \, dx = \iint\limits_{\Omega} v^2 |W_\varepsilon^\delta - 1|^2 \, dx \leqslant \\ \leqslant C_{38} \|W_\varepsilon^\delta - 1\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant C_{39} \delta \theta_\varepsilon \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Причём, согласно (1.1.31), $C_{39} = C_{38} C_{12}^2$.

Покажем теперь, что $vW_\varepsilon^\delta \to v$ сильно в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Действительно,

$$\iint\limits_{\Omega} \left|\nabla_x (vW_\varepsilon^\delta) - \nabla_x v\right|^2 \, dx = \\ = \iint\limits_{\Omega} \left|\nabla_x v (W_\varepsilon^\delta - 1) + v \nabla_x W_\varepsilon^\delta\right|^2 \, dx = \\ = \iint\limits_{\Omega} |\nabla_x v|^2 (W_\varepsilon^\delta - 1)^2 \, dx + \\ + 2 \iint\limits_{\Omega} (W_\varepsilon^\delta - 1) v (\nabla_x v, \nabla_x W_\varepsilon^\delta) \, dx + \iint\limits_{\Omega} v^2 |\nabla_x W_\varepsilon^\delta|^2 \, dx \leqslant \\ \leqslant C_{40} \left[\|W_\varepsilon^\delta - 1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|W_\varepsilon^\delta - 1\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla_x W_\varepsilon^\delta\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla_x W_\varepsilon^\delta\|^2_{L_2(\Omega)} \right] \leqslant \\ \leqslant C_{40} \left[C_{12}^2 \delta \theta_\varepsilon + C_{12} (\theta_\varepsilon \delta)^{1/2} C_{13} \left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}\right)^{1/2} + C_{13}^2 \frac{\theta_\varepsilon}{\delta} \right] \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

согласно (1.1.31) и (1.1.32), так как $\frac{\theta_\varepsilon}{\delta} \to 0$ по условию при $\varepsilon \to 0$.

Следовательно,

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x (v W_\varepsilon^\delta)\right) dx \to \iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x u^*, \nabla_x v\right) dx,$$

а

$$\int\limits_{\partial\Omega} g v W_\varepsilon^\delta \, ds \to \int\limits_{\partial\Omega} g v \, ds \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

благодаря (1.1.30).

Таким образом, функция u^* удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\nabla_x u^*, \nabla_x v\right) dx = \int\limits_{\partial\Omega} g v \, ds \quad \text{для любой } v \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Поскольку $\iint\limits_{\Omega} u^* \, dx = 0$, из последнего интегрального тождества следует, что $u^* = u^0$. Теорема 1.2.5 доказана. □

Теорема 1.2.6. *Предположим, что выполнено условие* (1.1.5) *с* $p = 0$. *Пусть* $g \in C(\partial\Omega)$, $\int\limits_{\partial\Omega} g(x) \, ds = 0$, u^ε *и* u^0 *— обобщенные решения задач* (1.1.1) *и* (1.1.7) *соответственно. Положим*

$$\langle u^\varepsilon \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \iint\limits_{\Omega} u^\varepsilon \, dx.$$

Тогда существует такая постоянна K_3, *не зависящая от* ε, δ *и* g, *что для достаточно малого* ε *имеем*

$$\left| u^0 W_\varepsilon^\delta - (u^\varepsilon - \langle u^\varepsilon \rangle) \right|_{H^1(\Omega)} \leqslant K_3 \|g\|_{C(\partial\Omega)} \left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta} \right)^{1/2}. \tag{1.2.9}$$

Доказательство. Для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ такой, что $v + C \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$, где C — некоторая константа, в силу того, что среднее от

g по границе равно 0, имеем

$$\iint\limits_{\Omega} \big(\nabla_x(u^0 W_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon), \nabla_x(v + C)\big)\, dx =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \big(\nabla_x(u^0 W_\varepsilon^\delta), \nabla_x v\big)\, dx - \int\limits_{\partial\Omega} gv\, ds =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} (\nabla_x u^0, \nabla_x v) W_\varepsilon^\delta\, dx + \iint\limits_{\Omega} u^0 (\nabla_x W_\varepsilon^\delta, \nabla_x v)\, dx - \int\limits_{\partial\Omega} gv\, ds =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} (\nabla_x u^0, \nabla_x v)(W_\varepsilon^\delta - 1)\, dx + \iint\limits_{\Omega} u^0 (\nabla_x W_\varepsilon^\delta, \nabla_x v)\, dx.$$

Следовательно, в силу (1.1.18), (1.1.31) и (1.1.32), оцениваем

$$\left| \iint\limits_{\Omega} \big(\nabla_x(u^0 W_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon), \nabla_x v\big)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla_x u^0|^2 |W_\varepsilon^\delta - 1|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla_x v|^2\, dx \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\iint\limits_{\Omega} (u^0)^2 |\nabla_x W_\varepsilon^\delta|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\iint\limits_{\Omega} |\nabla_x v|^2\, dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_{41} \|g\|_{C(\partial\Omega)} \|\nabla_x v\|_{L_2(\Omega)} \left(C_{12} (\theta_\varepsilon \delta)^{1/2} + C_{13} \left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta} \right)^{1/2} \right) \leqslant$$

$$\leqslant K_3^{'} \|g\|_{C(\partial\Omega)} \|\nabla_x v\|_{L_2(\Omega)} \left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta} \right)^{1/2}$$

с постоянной $K_3^{'}$, не зависящей от $\varepsilon, \delta, g, v$.

Положим $v = (u^0 W_\varepsilon^\delta - \langle u^0 W_\varepsilon^\delta \rangle) - (u^\varepsilon - \langle u^\varepsilon \rangle)$, где

$$\langle u^0 W_\varepsilon^\delta \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \iint\limits_{\Omega} u^0 W_\varepsilon^\delta\, dx.$$

Имея в виду, что $\iint\limits_{\Omega} u^0\,dx = 0$, выводим

$$|\langle u^0 W_\varepsilon^\delta\rangle| \leqslant \left|\frac{1}{|\Omega|}\iint\limits_{\Omega} u^0(W_\varepsilon^\delta - 1)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Omega|}\left(\iint\limits_{\Omega} |u^0|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\iint\limits_{\Omega} |W_\varepsilon^\delta - 1|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_{42}(\theta_\varepsilon\delta)^{1/2}\|g\|_{C(\partial\Omega)}, \qquad (1.2.10)$$

с постоянной C_{42}, не зависящей от ε, δ, g.

Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla_x v|^2\,dx = \iint\limits_{\Omega} \big(\nabla_x(u^0 W_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon), \nabla_x v\big)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant K_3'\|g\|_{C(\partial\Omega)}\|\nabla_x v\|_{L_2(\Omega)}\left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}\right)^{1/2}.$$

Учитывая, что $\iint\limits_{\Omega} v\,dx = 0$ и применяя неравенство Пуанкаре, получаем

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant K_3''\|g\|_{C(\partial\Omega)}\left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}\right)^{1/2}$$

с постоянной K_3'', не зависящей от ε, δ и g. Теперь, используя неравенство (1.2.10), получаем искомую оценку:

$$\|u^0 W_\varepsilon^\delta - (u^\varepsilon - \langle u^\varepsilon\rangle)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u^0 W_\varepsilon^\delta - (u^\varepsilon - \langle u^\varepsilon\rangle) - \langle u^0 W_\varepsilon^\delta\rangle\|_{H^1(\Omega)} +$$

$$+\|\langle u^0 W_\varepsilon^\delta\rangle\|_{H^1(\Omega)} \leqslant K_3''\|g\|_{C(\partial\Omega)}\left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}\right)^{1/2} +$$

$$+C_{42}|\Omega|^{1/2}(\theta_\varepsilon\delta)^{1/2}\|g\|_{C(\partial\Omega)} \leqslant K_3\|g\|_{C(\partial\Omega)}\left(\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}\right)^{1/2}.$$

Теорема 1.2.6 доказана. □

§ 1.3 Асимптотика решения задачи в случае неразрешимости усреднённой задачи

Рассматривается следующая задача

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon = 0 & \text{в области } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \ \Gamma_D^\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau} = g_\varepsilon(x) & \text{на } \ \Gamma_N^\varepsilon. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Здесь $g_\varepsilon \in L_2(\partial\Omega)$ — заданная функция, зависящая от параметра ε. Функция $u^\varepsilon(x)$ — решение задачи (1.3.1), если $u^\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$ и

$$\iint\limits_{\Omega} \nabla_x u^\varepsilon \nabla_x v \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} g_\varepsilon v \, ds \tag{1.3.2}$$

для любой $v \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$.

Пусть $g_\varepsilon \to g$ в $L_2(\partial\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, а порядок по ε функции $\delta(\varepsilon)$ равен $(\theta_\varepsilon)^\alpha$, где $\alpha \in (\frac{2}{3}, 1)$.

Ясно, что p из (1.1.5) в этом случае равно 0. А значит, следующая задача

$$\begin{cases} \Delta u^0 = 0 & \text{в области } \Omega, \\ \frac{\partial u^0}{\partial \tau} = g(x) & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3.3}$$

является предельной (усреднённой) в случае, когда выполняется условие разрешимости

$$\langle g \rangle_{\partial\Omega} \equiv \frac{1}{|\partial\Omega|} \int\limits_{\partial\Omega} g \, ds = 0.$$

(см. теорему 1.2.5). Легко в этом случае получить и асимптотику решений (см. теорему 1.2.6).

Исследуем асимптотику решения задачи (1.3.1) в случае, когда $\langle g \rangle_{\partial\Omega} \neq 0$.

Теорема 1.3.1. *Пусть*

$$v^\varepsilon = u^\varepsilon - \frac{\delta(\varepsilon)}{\theta_\varepsilon} \langle g \rangle_{\partial\Omega} W_\varepsilon^\delta,$$

тогда $v^\varepsilon - \langle v^\varepsilon\rangle_\Omega \rightharpoonup v^0$ *слабо в* $H^1(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где* v^0 *— решение следующей задачи*

$$\begin{cases} \Delta v^0 = 0 & \text{в области } \Omega, \\ \frac{\partial v^0}{\partial \tau} = g(x) - \langle g\rangle_{\partial\Omega} & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3.4}$$

а

$$\langle v^\varepsilon\rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\iint\limits_\Omega v^\varepsilon(x)\,dx.$$

Доказательство. Следующие неравенства доказывают равномерную ограниченность в $H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$ последовательности $\{v^\varepsilon - \langle v^\varepsilon\rangle_\Omega\}_\varepsilon$.

Для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ выполняется неравенство

$$R\|v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} + \|v\|_{L_2(\partial\Omega)}. \tag{1.3.5}$$

Учитывая гладкость границы $\partial\Omega$, из определений (1.1.4) и (1.1.19) вытекает, что для любой функции $v \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$ имеет место

$$\|v\|_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant R_1 \left(\frac{\delta}{\theta_\varepsilon}\right)^{1/2} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}. \tag{1.3.6}$$

Из неравенств (1.3.5) и (1.3.6) заключаем, что

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant R_2 \left(1 + \left(\frac{\delta}{\theta_\varepsilon}\right)^{1/2}\right) \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}. \tag{1.3.7}$$

Используя (1.3.1), получаем следующее тождество в области Ω_μ

$$\iint\limits_{\Omega_\mu} |\nabla_x v^\varepsilon|^2\, dx = \iint\limits_{\Omega_\mu} \left|\nabla_x \left(u^\varepsilon - \frac{\delta}{\theta_\varepsilon}\langle g_\varepsilon\rangle_{\partial\Omega} W_\varepsilon^\delta\right)\right|^2 dx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\tau} v^\varepsilon\, ds - \frac{\delta}{\theta_\varepsilon}\langle g_\varepsilon\rangle_{\partial\Omega} \iint\limits_{\Omega_\mu} \nabla_x W_\varepsilon^\delta \nabla_x v^\varepsilon\, dx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial\tau} v^\varepsilon\, ds + \frac{\delta}{\theta_\varepsilon}\langle g_\varepsilon\rangle_{\partial\Omega} \iint\limits_{\Omega_\mu} \Delta W_\varepsilon^\delta v^\varepsilon\, dx -$$

$$- \frac{\delta}{\theta_\varepsilon}\langle g_\varepsilon\rangle_{\partial\Omega} \int\limits_{\partial\Omega_\mu} \frac{\partial W_\varepsilon^\delta}{\partial\tau} v^\varepsilon\, ds.$$

Теперь устремим μ к нулю, имея в виду (1.1.17). Имеем

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla_x v^\varepsilon|^2\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} g_\varepsilon v^\varepsilon\, ds + \frac{\delta}{\theta_\varepsilon}\langle g_\varepsilon\rangle_{\partial\Omega} \iint\limits_{\Omega} \Delta W_\varepsilon^\delta v^\varepsilon\, dx -$$

$$- \langle g_\varepsilon\rangle_{\partial\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} W_\varepsilon^\delta v^\varepsilon\, ds =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left(g_\varepsilon - \langle g_\varepsilon\rangle_{\partial\Omega}\right)\left(v^\varepsilon - \langle v^\varepsilon\rangle_\Omega\right)\, ds +$$

$$+ \frac{\delta}{\theta_\varepsilon}\langle g_\varepsilon\rangle_{\partial\Omega} \iint\limits_{\Omega} \Delta W_\varepsilon^\delta v^\varepsilon\, dx + \langle g_\varepsilon\rangle_{\partial\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} \left(1 - W_\varepsilon^\delta\right) v^\varepsilon\, ds.$$

Теперь, используя леммы 1.1.5 и 1.1.7, получаем следующую оценку

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla_x v^\varepsilon|^2\, dx \leqslant \|g_\varepsilon - \langle g^\varepsilon\rangle_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} \|v^\varepsilon - \langle v^\varepsilon\rangle_\Omega\|_{L_2(\partial\Omega)} +$$

$$+ \frac{\delta}{\theta_\varepsilon^{1/2}} R_4 |\langle g_\varepsilon\rangle_{\partial\Omega}| \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + |\langle g_\varepsilon\rangle_{\partial\Omega}| \theta_\varepsilon^{1/2} R_5 \|v^\varepsilon\|_{L_2(\partial\Omega)}.$$

Воспользуемся неравенствами (1.3.6) и (1.3.7) и неравенством Пуанкаре, тогда

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla_x v^\varepsilon|^2\, dx \leqslant R_6 \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} +$$

$$+R_7 \left(\frac{\delta}{\theta_\varepsilon^{1/2}} + \frac{\delta^{3/2}}{\theta_\varepsilon} \right) \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + R_8 \theta_\varepsilon^{1/2} \left(\frac{\delta}{\theta_\varepsilon} \right)^{1/2} \|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}.$$

Если δ имеет порядок по ε $(\theta_\varepsilon)^\alpha$, где $\alpha \in (2/3, 1)$, то имея в виду неравенство Пуанкаре, получаем равномерную оценку

$$\|v^\varepsilon - \langle v^\varepsilon \rangle_\Omega\|_{H^1(\Omega)} \leqslant R_9.$$

Из полученной равномерной оценки следует слабая компактность семейства $\{v^\varepsilon - \langle v^\varepsilon \rangle_\Omega\}$ в пространстве $H^1(\Omega)$, то есть существует v^0 такая, что $v^\varepsilon - \langle v^\varepsilon \rangle_\Omega \rightharpoonup v^0$ слабо в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ по подпоследовательности. Сходимость по всей последовательности следует из единственности предельной задачи.

Осталось показать, что v^0 удовлетворяет краевой задаче (1.3.4), т.е. для любой функции $\varphi \in H^1(\Omega)$ выполняется интегральное тождество в области Ω

$$\iint\limits_{\Omega} \nabla_x v^0 \nabla_x \varphi\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} (g - \langle g \rangle_{\partial\Omega})\, \varphi\, ds. \qquad (1.3.8)$$

Доказательство этого полностью повторяет доказательство из [124]. □

§ 1.4 Оценка θ_ε

Рассмотрим следующий частный случай. Пусть Γ — множество такое, что $\Gamma \subset \Sigma$, где $\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_2 = 0,\, 0 < \xi_1 < 1\}$. Положим $\Gamma^\varepsilon = \{\xi \in \Sigma \mid (\xi - \xi_0)/\varepsilon \in \Gamma,\, \xi_0 \in \Sigma\}$, где ξ_0 — фиксированная точка из Σ, $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Исследуем асимптотику θ_ε при $\varepsilon \to 0$. Пусть D_ρ — круг радиуса ρ с центром в точке ξ_0, к которой гомотетично стягивается Γ^ε при $\varepsilon \to 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\Gamma^\varepsilon \subset D_\varepsilon$ (в силу того, что неравенство $\dfrac{\xi - \xi_0}{\varepsilon} \in \Gamma$ влечёт $0 < \dfrac{\xi - \xi_0}{\varepsilon} < 1$, а тогда $|\xi - \xi_0| < \varepsilon$). Обозначим $D_\rho^- = D_\rho \cap \{\xi \,\big|\, \xi_2 \leqslant 0\}$. Пусть $D_{\varepsilon_0}^- \subset B$ для некоторого $\varepsilon_0 \in (0,1]$, $\varepsilon < \varepsilon_0$. Положим

$$v_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \frac{\ln|\xi-\xi_0| - \ln\varepsilon}{\ln\varepsilon_0 - \ln\varepsilon} & \text{в } D_{\varepsilon_0}^- \backslash D_\varepsilon^-, \\ 0 & \text{в } D_\varepsilon^-, \\ 1 & \text{в } B \backslash D_{\varepsilon_0}^-. \end{cases}$$

Легко видеть, что $v_\varepsilon \in H_{1\text{-per}}(B, \Gamma^\varepsilon)$, $v_\varepsilon = 1$ на $\Sigma_1 = \Sigma \backslash D_{\varepsilon_0}^-$. Далее оцениваем θ_ε. Имеем

$$\theta_\varepsilon \leqslant \frac{\iint\limits_B |\nabla_\xi v_\varepsilon|^2 \, d\xi}{\int\limits_\Sigma v_\varepsilon^2 d\xi_1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{(\ln\varepsilon_0 - \ln\varepsilon)^2} \int\limits_0^\pi \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \left| \frac{\partial}{\partial\rho} \ln\rho \right|^2 \rho \, d\rho d\phi}{\frac{1}{(\ln\varepsilon_0 - \ln\varepsilon)^2} \, 2\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} |\ln\rho - \ln\varepsilon|^2 \, d\rho + 1 - 2(\varepsilon_0 - \varepsilon)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{(\ln\varepsilon_0 - \ln\varepsilon)(1 - 2\varepsilon_0)} < \frac{2\pi}{(\ln\varepsilon_0 - \ln\varepsilon)} \quad \text{при} \quad \varepsilon_0 < \frac{1}{4}. \tag{1.4.1}$$

Получим теперь нижнюю оценку для θ_ε. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1.4.1. *Для любых $v \in H^1(B_{\rho 0})$, $\rho > 0$, $\varkappa > 0$ имеем*

$$\|v\|_{L_2(\Sigma)}^2 \leqslant \frac{1}{\rho}(1 + \varkappa)\|v\|_{L_2(B_{\rho 0})}^2 + \rho\left(1 + \frac{1}{\varkappa}\right)\|\nabla_\xi v\|_{L_2(B_{\rho 0})}^2. \tag{1.4.2}$$

Доказательство. Достаточно доказать (1.4.2) для $v \in C^\infty(\overline{B}_{\rho 0})$. Заметим, что при $\eta \in [-\rho, 0]$ выполнено

$$
\begin{aligned}
|v(\xi_1,0)|^2 &= \left(\int\limits_{\eta}^{0} \frac{\partial v}{\partial \xi_2}\,d\xi_2 + v(\xi_1,\eta)\right)^2 \leqslant \\
&\leqslant \left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)\left|\int\limits_{\eta}^{0} \frac{\partial v}{\partial \xi_2}\,d\xi_2\right|^2 + (1+\varkappa)|v(\xi_1,\eta)|^2 \leqslant \\
&\leqslant \left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)|\eta| \int\limits_{\eta}^{0} \left|\frac{\partial v}{\partial \xi_2}\right|^2 d\xi_2 + (1+\varkappa)|v(\xi_1,\eta)|^2 \leqslant \\
&\leqslant \left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)\rho \int\limits_{-\rho}^{0} \left|\frac{\partial v}{\partial \xi_2}\right|^2 d\xi_2 + (1+\varkappa)|v(\xi_1,\eta)|^2,
\end{aligned}
$$

откуда после интегрирования по $\eta \in [-\rho, 0]$ получаем

$$
\rho|v(\xi_1,0)|^2 \leqslant \left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)\rho^2 \int\limits_{-\rho}^{0} \left|\frac{\partial v}{\partial \xi_2}\right|^2 d\xi_2 + (1+\varkappa)\int\limits_{-\rho}^{0} v^2\,d\xi_2.
$$

Разделив теперь обе части этого неравенства на ρ и проинтегрировав его по ξ_1 вдоль Σ, получим (1.4.2). Лемма 1.4.1 доказана. $\square$

Согласно (1.1.19) и (1.4.2) для любых $\rho > 0$, $\varkappa > 0$

$$
\begin{aligned}
\theta_\varepsilon \geqslant \widetilde{\theta}_\varepsilon &\geqslant \inf_{v \in H(B,\Gamma^\varepsilon)\setminus\{0\}} \left(\frac{\|\nabla_\xi v\|^2_{L_2(B_{\rho 0})}}{\|v\|^2_{L_2(\Sigma)}}\right) \geqslant \\
&\geqslant \inf_{v \in H(B,\Gamma^\varepsilon)\setminus\{0\}} \left(\frac{\|\nabla_\xi v\|^2_{L_2(B_{\rho 0})}}{\frac{1}{\rho}(1+\varkappa)\|v\|^2_{L_2(B_{\rho 0})} + \left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)\rho\|\nabla_\xi v\|^2_{L_2(B_{\rho 0})}}\right).
\end{aligned}
\tag{1.4.3}
$$

Из результатов [18] и [89] (аналогичные результаты см. в [28]) следует, что для любой $v \in H(B, \Gamma^\varepsilon)$

$$\|\nabla_\xi v\|^2_{L_2(B_{\rho 0})} \geqslant \frac{1}{mes_2 B_{\rho 0}} \left(-\frac{\pi}{\ln \varepsilon} + O\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right)\right) \|v\|^2_{L_2(B_{\rho 0})}, \qquad (1.4.4)$$

где $mes_2 B_{\rho 0} = \rho$ — площадь прямоугольника $B_{\rho 0}$.

Объединяя (1.4.3) и (1.4.4), при фиксированном $\varkappa > 0$, $\rho > 0$ получаем

$$\widetilde{\theta}_\varepsilon \geqslant \inf_{v \in H(B, \Gamma^\varepsilon) \setminus \{0\}} \left(\frac{\|\nabla_\xi v\|^2_{L_2(B_{\rho 0})}}{\frac{(1+\varkappa)\|\nabla_\xi v\|^2_{L_2(B_{\rho 0})}}{-\frac{\pi}{\ln \varepsilon} + O\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right)} + \left(1 + \frac{1}{\varkappa}\right) \rho \|\nabla_\xi v\|^2_{L_2(B_{\rho 0})}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{1+\varkappa} \cdot \frac{\pi}{\ln \varepsilon} + O\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right) \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, для любого $\varkappa > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ при малом ε, аналогично (1.4.1) получаем:

$$-\frac{\pi}{(1+\varkappa)\ln \varepsilon} + O\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}\right) \leqslant \widetilde{\theta}_\varepsilon \leqslant \theta_\varepsilon \leqslant \frac{2\pi}{\ln \varepsilon_0 - \ln \varepsilon}, \quad \theta_\varepsilon \sim \widetilde{\theta}_\varepsilon.$$

§ 1.5 Спектральные свойства задачи

Исследуем спектральные свойства операторов, соответствующих краевым задачам (1.1.1) и (1.1.7).

Пусть выполнены условия (1.1.5) и (1.1.6). Рассмотрим следующие задачи на собственные значения

$$\begin{cases} \Delta u^k_\varepsilon = 0 & \text{в} \quad \Omega, \\ u^k_\varepsilon = 0 & \text{на} \quad \Gamma^\varepsilon_D, \\ \frac{\partial u^k_\varepsilon}{\partial \tau} = \lambda^k_\varepsilon u^k_\varepsilon & \text{на} \quad \Gamma^\varepsilon_N. \end{cases} \qquad (1.5.1)$$

$$\begin{cases} \Delta u_0^k = 0 & \text{в } \Omega, \\ u_0^k = 0 & \text{на } \partial\Omega, \text{если } p = +\infty \\ \frac{\partial u_0^k}{\partial \tau} + p\, u_0^k = \lambda_0^k u_0^k & \text{на } \partial\Omega, \text{если } p < +\infty. \end{cases} \tag{1.5.2}$$

Здесь $u_\varepsilon^k \in H^1(\Omega, \Gamma_D^\varepsilon)$, $u_0^k \in H^1(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$, образуют ортонормированные системы в $L_2(\Omega)$, собственные значения $\{\lambda_\varepsilon^k\}, \{\lambda_0^k\}, k = 1, 2, \ldots$, занумерованы в порядке неубывания, причём каждое из них повторяется столько раз, какова его кратность

$$\lambda_\varepsilon^1 \leqslant \lambda_\varepsilon^2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_\varepsilon^k \leqslant \ldots, \quad \lambda_0^1 \leqslant \lambda_0^2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_0^k \leqslant \ldots, \text{если } p < +\infty.$$

Если $p = +\infty$, то легко видеть, что в этом случае задача (1.5.2) не является спектральной.

Далее будет использоваться следующий метод, предложенный в монографии О.А.Олейник, Г.А.Иосифьяна, А.С.Шамаева (см. [54]).

Пусть $\mathcal{H}_0$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(u, v)_0$ и нормой $\|u\|_0$, ε — малый параметр, и пусть $A_\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$, $A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ — линейные непрерывные операторы, причём $\mathrm{Im} A_0 \subset V \subset \mathcal{H}_0$; где V — линейное подпространство в $\mathcal{H}_0$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия $C_1 - C_3$.

C_1. Операторы A_ε, A_0 являются положительными, компактными и самосопряженными в $\mathcal{H}_0$, причём

$$\sup_\varepsilon \|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)} < \infty.$$

C_2. Для любой $f \in V$ имеем $\|A_\varepsilon f - A_0 f\|_0 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

C_3. Семейство операторов A_ε равномерно компактно в следующем смысле. Из любой последовательности $f^\varepsilon \in \mathcal{H}_0$ такой, что $\sup_\varepsilon \|f^\varepsilon\|_0 < \infty$, можно выбрать подпоследовательность $f^{\varepsilon'}$ и найти такую функцию $w \in V$, что

$$\|A_{\varepsilon'} f^{\varepsilon'} - w\|_0 \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Рассмотрим спектральные задачи для операторов A_ε, A_0

$$A_\varepsilon u_\varepsilon^k = \mu_\varepsilon^k u_\varepsilon^k, \quad k = 1, 2, \ldots, (u_\varepsilon^l, u_\varepsilon^m)_\varepsilon = \delta_{lm}, \tag{1.5.3}$$

$$A_0 u_0^k = \mu_0^k u_0^k, \quad k = 1, 2, \ldots, (u_0^l, u_0^m)_0 = \delta_{lm}, \tag{1.5.4}$$

где δ_{lm} — символ Кронекера, собственные значения $\mu_\varepsilon^k, \mu_0^k$ занумерованы в порядке невозрастания, причём каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

Теорема 1.5.1. *Пусть выполнены условия $C_1 - C_3$. Тогда*

$$|\mu_\varepsilon^k - \mu_0^k| \leqslant M_\varepsilon \sup_u \|A_\varepsilon u - A_0 u\|_0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.5.5}$$

где $\mu_\varepsilon^k, \mu_0^k$ — k-е собственное значение задач (1.5.3) *и* (1.5.4) *соответственно, верхняя грань берется по всем функциям $u \in N(\mu_0^k, A_0) = \{u \in \mathcal{H}_0 : A_0 u = \mu_0^k u$ таким, что $\|u\|_0 = 1$, постоянная $M_\varepsilon \leqslant M$ при $0 < \varepsilon \leqslant 1$, и $M_\varepsilon \to \mathrm{const}$ при $\varepsilon \to 0$, M не зависит от ε.*

Теорема 1.5.2. *Пусть $k \geqslant 0, m \geqslant 1$ — целые числа, кратность собственного значения μ_0^{k+1} задачи* (1.5.4) *равна m, т.е. $\mu_0^{k+1} = \mu_0^{k+m}$. Тогда для любой $u_0 \in N(\mu_0^{k+1}, A_0)$ существует линейная комбинация $\overline{u}_\varepsilon$, собственных функций $u_\varepsilon^{k+1}, \ldots, u_\varepsilon^{k+m}$ задачи* (1.5.3) *, такая, что*

$$\|\overline{u}_\varepsilon - u_0\|_0 \leqslant M_k \|A_\varepsilon u_0 - A_0 u_0\|_0, \tag{1.5.6}$$

где постоянная M_k не зависит от ε.

Теперь сформулируем основные результаты, касающиеся поведения спектров.

Теорема 1.5.3. *Предположим, что выполнены условия* (1.1.5) *и* (1.1.6).

1. *Существуют такая постоянная $C_1(k)$, не зависящая от ε, что при достаточно малом ε*

$$|\lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k| \leqslant C_1(k) \left(\theta_\varepsilon^{1/2} + \left|\frac{\theta_\varepsilon}{\delta} - p\right|\right), \quad \text{если } p < \infty,$$

$$\lambda_\varepsilon^k \to +\infty, \quad \text{если } p = \infty.$$

2. Пусть кратность собственного значения λ_0^{k+1} задачи (1.5.2) *равна m: $\lambda_0^{k+1} = \cdots = \lambda_0^{k+m}$. Тогда для любой собственной функции задачи* (1.5.2), *отвечающей собственному значению λ_0^{k+1}, существует линейная комбинация $\overline{u}_\varepsilon$ собственных функций $u_\varepsilon^{k+1}, \ldots, u_\varepsilon^{k+m}$ задачи* (1.5.1), *отвечающих собственным значениям $\lambda_\varepsilon^{k+1}, \ldots, \lambda_\varepsilon^{k+m}$ соответственно, такая, что при достаточно малом ε*

$$\|\overline{u}_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_2(k)\left(\theta_\varepsilon^{1/2} + \left|\frac{\theta_\varepsilon}{\delta} - p\right|\right), \quad \text{если } p < \infty,$$

где постоянная $C_2(k)$ не зависит от ε.

Заметим, что если в предельной задаче имеется кратное собственное значение, то коэффициенты линейных комбинаций собственных функций, о которых идёт речь в теоремах 1.5.2 и 1.5.3, могут зависеть от ε. Утверждается только близость подпространств.

Доказательство теоремы 1.5.3. Положим $\mathcal{H}_0 = L_2(\partial\Omega), V = \mathcal{H}_0$. $p < +\infty$. Пусть сначала $p > 0$. Для $g \in \mathcal{H}_0$ положим $A_0 g = u^0\big|_{\partial\Omega}$, где u^0 — обобщенное решение задачи (1.1.7), $A_\varepsilon g = u^\varepsilon\big|_{\partial\Omega}$, где u^ε — обобщенное решение задачи (1.1.1). Тогда $A_\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0), A_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$.

Проверим выполнение условий $C_1 - C_3$.

Проверим выполнение условия C_1. Докажем самосопряженность операторов A_ε, A_0. Предположим, что $A_\varepsilon f = u^\varepsilon$, $A_\varepsilon g = v^\varepsilon$, тогда

$$\begin{aligned}(A_\varepsilon f, g)_{L_2(\partial\Omega)} &= (u^\varepsilon, g)_{L_2(\partial\Omega)} = \\ &= \iint\limits_\Omega (\nabla u^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)\, dx = \\ &= (f, v^\varepsilon)_{L_2(\partial\Omega)} = (f, A_\varepsilon g)_{L_2(\partial\Omega)}.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается самосопряженность A_0. Предположим, что $A_0 f = u^0$, $A_0 g = v^0$, тогда

$$\begin{aligned}(A_0 f, g)_{L_2(\partial\Omega)} &= (u^0, g)_{L_2(\partial\Omega)} = \\ &= \iint\limits_{\Omega} (\nabla u^0, \nabla v^0)\, dx + p \int\limits_{\partial\Omega} u^0 v^0\, ds = \\ &= (f, v^0)_{L_2(\partial\Omega)} = (f, A_0 g)_{L_2(\partial\Omega)}.\end{aligned}$$

Положительность операторов тоже легко проверяется. Имеем

$$(A_\varepsilon f, f)_{L_2(\partial\Omega)} = (u^\varepsilon, f)_{L_2(\partial\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2\, dx \geqslant 0$$

и

$$(A_0 f, f)_{L_2(\partial\Omega)} = (u^0, f)_{L_2(\partial\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} |\nabla u^0|^2\, dx + p \int\limits_{\partial\Omega} (u^0)^2\, ds \geqslant 0.$$

Компактность операторов следует из компактности вложения в $L_2(\partial\Omega)$ множества следов функций из $H^1(\Omega)$. Соотношение в условии C_1 следует из леммы 1.1.11 и равномерной ограниченности решений задач (1.1.1) и (1.1.7). Условия C_2 и C_3 следуют из теорем 1.2.1 и 1.2.3.

Заметим, что $(\mu_\varepsilon^k) = (\lambda_\varepsilon^k)^{-1}$, $(\mu_0^k) = (\lambda_0^k)^{-1}$.

Рассмотрим сначала для определённости случай $0 < p < \infty$. Из теоремы 1.5.1 следует неравенство

$$|(\lambda_\varepsilon^k)^{-1} - (\lambda_0^k)^{-1}| \leqslant M_\varepsilon \sup \|u^\varepsilon - u^0\|_{L_2(\partial\Omega)}, \tag{1.5.7}$$

где $u^\varepsilon = A_\varepsilon g$, $u^0 = A_0 g$, а супремум берётся по всем $g \in L_2(\partial\Omega)$, таким, что $\lambda_0^k A_0 g = g$ и $\|g\|_{L_2(\partial\Omega)} = 1$.

Далее, используя теорему 1.2.2 и (1.1.30), получим оценку

$$\|u^0 - u^\varepsilon\|_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant C\|g\|_{C(\partial\Omega)} \left(\sqrt{\theta_\varepsilon} + \left|\frac{\theta_\varepsilon}{\delta} - p\right|\right).$$

Чтобы из этих соображений получить требуемое неравенство для $|(\lambda_\varepsilon^k)^{-1}-(\lambda_0^k)^{-1}|$, нужно, чтобы функции g, по которым берётся супремум (1.5.7), принадлежали классу $C(\partial\Omega)$ и чтобы их нормы в этом классе были равномерно ограничены. Указанные свойства g следуют из гладкости собственных функций $u_0^{(k)}$.

Пусть теперь $p=0$. Рассмотрим задачи, понимаемые в обобщенном смысле, $v^\varepsilon\in H^1(\Omega,\Gamma_D^\varepsilon)$, $v^0\in H^1(\Omega)$,

$$-\Delta v^\varepsilon=0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad v^\varepsilon=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D^\varepsilon, \quad \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial\tau}+v^\varepsilon=g \quad \text{на} \quad \Gamma_N^\varepsilon;$$
$$-\Delta v^0=0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \frac{\partial v^0}{\partial\tau}+v^0=g \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Здесь $g\in L_2(\partial\Omega)$ — заданная функция.

Легко видеть, что эти задачи однозначно разрешимы. Для функций v^ε и v^0, почти дословно повторяя доказательства теорем 1.2.1 и 1.2.2, получаем:

$$\begin{aligned}&\text{если } g\in L_2(\partial\Omega), \text{ то } v^\varepsilon\rightharpoonup v^0 \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to 0;\\ &\text{если } g\in C(\partial\Omega), \text{ то } \|v^0W_\varepsilon^\delta-v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}\leqslant \mathrm{const}\|g\|_{C(\partial\Omega)}\left(\theta_\varepsilon^{1/2}+\frac{\theta_\varepsilon}{\delta}\right),\end{aligned}$$

с постоянной, не зависящей от ε,δ и g.

Для $g\in\mathcal{H}_0$ положим $B_\varepsilon g=v^\varepsilon$ и $B_0g=v^0$. Тогда $B_\varepsilon\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$, $B_0\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$. Проверка условий C_1-C_3 для операторов B_ε, B_0 проводится аналогично проверке этих условий для операторов A_ε и A_0. Рассмотрим спектральные задачи

$$\begin{aligned}B_\varepsilon g_\varepsilon^k&=\mu_\varepsilon^k g_\varepsilon^k, \quad k=1,2,\ldots, \quad (g_\varepsilon^l,g_\varepsilon^m)=\delta_{lm},\\ B_0g_0^k&=\mu_0^k g_0^k, \quad k=1,2,\ldots, \quad (g_0^l,g_0^m)=\delta_{lm},\end{aligned}$$

собственные значения $\mu_\varepsilon^k,\mu_0^k$ занумерованы в порядке невозрастания, причём каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

Для завершения доказательства теоремы 1.5.3 остается заметить, что

$$(\mu_\varepsilon^k) = (1 + \lambda_\varepsilon^k)^{-1}, \quad (\mu_0^k) = (1 + \lambda_0^k)^{-1}.$$

$\square$

Глава 2

Непериодические возмущения

§ 2.1 Случай предельного условия Стеклова

2.1.1 Постановка задачи и основные утверждения.

Обозначим через Ω (см. рис. 2.1.1),

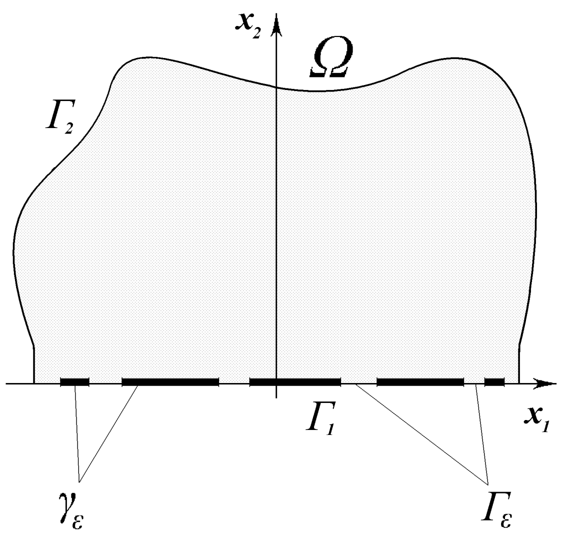

Рис. 2.1.1: Область Ω.

область в $\mathbb{R}^2$, лежащую в верхней полуплоскости, граница которой Γ является кусочно-гладкой и состоит из нескольких частей: $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ на оси абсцисс, часть Γ_2 в окрестности точек $(-\frac{1}{2}, 0)$ и $(\frac{1}{2}, 0)$ совпадает с отрезками прямых $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{1}{2}$ соответственно, Γ_2 — гладкая. Также предполагаем, что Γ_1 состоит из чередующихся участков γ_ε^i и Γ_ε^i, при этом

$$\gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} \gamma_\varepsilon^i, \qquad \Gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} \Gamma_\varepsilon^i, \qquad \Gamma_1 = \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon.$$

Предполагаем, что для любого i выполняются следующие условия: $|\Gamma_\varepsilon^i| = O(\varepsilon), |\gamma_\varepsilon^i| = O(|\ln \varepsilon|^{\delta-1})$, где $\delta = \text{const} \in (0,1)$. Здесь и далее ε — малый параметр.

Пусть $H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ множество функций из $H^1(\Omega)$ с нулевым следом на $\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon$. Аналогично, через $H^1(\Omega, \Gamma_2)$ будем обозначать подмножество функций из $H^1(\Omega)$ с нулевым следом на Γ_2.

Обозначим через $\|u\|_0$ и $\|u\|_1$ нормы функции u, в пространствах $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega, \Gamma_2)$ соответственно, через $\|u\|_{0,\Gamma_1}$ — норму в пространстве $L_2(\Gamma_1)$.

Приведём доказательство следующих двух утверждений.

Теорема 2.1.1. *Пусть $g \in L_2(\Gamma_1)$, Q — произвольный компакт на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не содержащий собственных значений спектральной задачи*

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \lambda_0 u_0 & \text{на } \Gamma_1, \\ u_0 = 0 & \text{на } \Gamma_2. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Тогда:

1) существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ и любом $\lambda \in Q$ решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta U_\varepsilon = 0 & \text{в } \Omega, \\ U_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} = \lambda U_\varepsilon + g & \text{на } \gamma_\varepsilon, \\ U_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_2. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

существует и единственно, а также справедлива равномерная по ε и λ оценка

$$\|U_\varepsilon\|_1 \leqslant C\|g\|_{0,\Gamma_1}; \tag{2.1.3}$$

2) для решения краевой задачи (2.1.2) *имеет место сходимость*

$$\|U_\varepsilon - U_0\|_1 \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{2.1.4}$$

где U_0 — решение предельной (усреднённой) краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta U_0 = 0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial U_0}{\partial \nu} = \lambda U_0 + g & \text{на } \Gamma_1, \\ U_0 = 0 & \text{на } \Gamma_2. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Теорема 2.1.2. *Пусть λ_0 — собственное значение кратности N предельной спектральной задачи* (2.1.1). *Тогда:*

1) к собственному значению λ_0 сходится N собственных значений (с учётом совокупной кратности) возмущённой спектральной задачи

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{в } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{на } \gamma_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_2; \end{cases} \tag{2.1.6}$$

2) если $\lambda_{\varepsilon,1}, \ldots, \lambda_{\varepsilon,N}$ — собственные значения задачи (2.1.6), *которые сходятся к λ_0, а $u_{\varepsilon,1}, \ldots, u_{\varepsilon,N}$ — соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(\Omega)$, то для любой последовательности $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ существует подпоследовательность $\varepsilon_{k'} \to 0$, такая что*

$$\|u_{\varepsilon,j} - u_{0,j}\|_1 \to 0,$$

при $\varepsilon = \varepsilon_{k'} \to 0$, где $u_{0,1}, \ldots, u_{0,N}$ — собственные функции спектральной задачи (2.1.1), *соответствующие λ_0, ортонормированные в $L_2(\Omega)$.*

При доказательстве этих двух теорем будет использован метод сходимости, разработанный в [20], [21], [58], [25], [71], [79], [8] для различных типов сингулярных возмущений.

Всюду далее скалярное произведение векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ обозначается через $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, решения задач (2.1.1), (2.1.2), (2.1.5) и (2.1.6) понимаются в обобщённом смысле (см., например, [67], [42], [49]). А именно, функция $U_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ называется обобщённым решением краевой задачи (2.1.2), если имеет место интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla U_\varepsilon, \nabla \overline{v})\; dx - \lambda \int\limits_{\gamma_\varepsilon} U_\varepsilon \overline{v}\, ds = \int\limits_{\gamma_\varepsilon} g\overline{v}\, ds \tag{2.1.7}$$

для любой $v \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$, функция $U_0 \in H^1(\Omega, \Gamma_2)$ называется обобщённым решением краевой задачи (2.1.5), если имеет место интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla U_0, \nabla \overline{v})\; dx - \lambda \int\limits_{\Gamma_1} U_0 \overline{v}\, ds = \int\limits_{\Gamma_1} g\overline{v}\, ds, \tag{2.1.8}$$

для любой $v \in H^1(\Omega, \Gamma_2)$. Аналогично, функция $u_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ называется обобщённой собственной функцией спектральной задачи (2.1.6), соответствующей λ_ε, если имеет место интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u_\varepsilon, \nabla \overline{v})\; dx = \lambda_\varepsilon \int\limits_{\gamma_\varepsilon} u_\varepsilon \overline{v}\, ds$$

для любой $v \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$, функция $u_0 \in H^1(\Omega, \Gamma_2)$ называется обобщённой собственной функцией спектральной задачи (2.1.1), соответствующей λ_0, если имеет место интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla u_0, \nabla \overline{v})\; dx = \lambda_0 \int\limits_{\Gamma_1} u_0 \overline{v}\, ds$$

для любой $v \in H^1(\Omega, \Gamma_2)$.

Отметим, что с учетом того, что функции U_ε и v обращаются в ноль на Γ_ε, интегральное тождество (2.1.7) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla U_\varepsilon, \nabla \overline{v})\, dx - \lambda \int\limits_{\Gamma_1} U_\varepsilon \overline{v}\, ds = \int\limits_{\Gamma_1} g\overline{v}\, ds. \tag{2.1.9}$$

2.1.2 Доказательство теоремы усреднения для краевой задачи

В этом пункте приводится доказательство теоремы 2.1.1. Будет использоваться следующее утверждение.

Лемма 2.1.1. *Пусть Q — произвольный компакт на комплексной плоскости, $\lambda \in Q$ и для любого нормированного в $L_2(\Omega)$ решения U_ε краевой задачи* (2.1.2) *справедлива равномерная по ε и λ оценка*

$$\|U_\varepsilon\|_1 \leqslant C\|g\|_{0,\Gamma_1}. \tag{2.1.10}$$

Тогда оценка (2.1.10) *справедлива и для любого решения задачи* (2.1.2) *при $\lambda \in Q$.*

Доказательство. Справедливость этого утверждения вытекает из линейности задачи (2.1.2). Действительно, если $\|U_\varepsilon\|_0 \neq 1$, то, обозначив $V_\varepsilon = \frac{U_\varepsilon}{\|U_\varepsilon\|_0}$, получим, что

$$\|V_\varepsilon\|_0 = 1 \tag{2.1.11}$$

и функция V_ε удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{cases} \Delta V_\varepsilon = 0 & \text{в } \Omega, \\ V_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \nu} = \lambda V_\varepsilon + g_\varepsilon & \text{на } \gamma_\varepsilon, \\ V_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_2. \end{cases}$$

где

$$g_\varepsilon = \frac{g}{\|U_\varepsilon\|_0}. \tag{2.1.12}$$

Тогда по условию леммы для функции V_ε справедлива оценка

$$\|V_\varepsilon\|_1 \leqslant C\|g_\varepsilon\|_{0,\Gamma_1}.$$

Домножая последнее неравенство на $\|U_\varepsilon\|_0$, в силу (2.1.11), (2.1.12) получаем справедливость оценки (2.1.10) для произвольной функции U_ε. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.1.1. Вначале покажем справедливость априорной оценки

$$\|U_\varepsilon\|_1 \leqslant C\left(\|U_\varepsilon\|_{0,\Gamma_1} + \|g\|_{0,\Gamma_1}\right), \tag{2.1.13}$$

где C не зависит от ε и λ. Подставив в интегральное тождество (2.1.9) в качестве пробной функции $v = U_\varepsilon$, получаем оценку

$$\|U_\varepsilon\|_1^2 \leqslant \tilde{C}\left(\|U_\varepsilon\|_{0,\Gamma_1}^2 + \|g\|_{0,\Gamma_1}\|U_\varepsilon\|_{0,\Gamma_1}\right) \leqslant C\left(\|g\|_{0,\Gamma_1}\|U_\varepsilon\|_1 + \|U_\varepsilon\|_{0,\Gamma_1}\|U_\varepsilon\|_1\right).$$

Из этой оценки следует (2.1.13).

Докажем справедливость пункта *1)*. Для краевой задачи (2.1.2) справедлива альтернатива Фредгольма (см., например, [49, Гл. IV]), поэтому для доказательства существования и единственности решения этой краевой задачи достаточно показать, что выполнена оценка (2.1.3).

Доказательство этой оценки будем вести методом от противного. Пусть оценка (2.1.3) неверна, то есть существует последовательность $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, $g_k \in L_2(\Gamma_1)$ и λ_k такие, что для решения выполняется обратное неравенство:

$$\|U_{\varepsilon_k}\|_1 > k\|g_k\|_{0,\Gamma_1}. \tag{2.1.14}$$

В силу леммы 2.1.1, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\|U_{\varepsilon_k}\|_0 = 1. \tag{2.1.15}$$

Тогда из (2.1.13), (2.1.14) и (2.1.15) следует, что при $k \to \infty$

$$\|U_{\varepsilon_k}\|_1 \leqslant C_1, \tag{2.1.16}$$

$$\|g_k\|_{0,\Gamma_1} \leqslant \frac{C_1}{k}. \qquad (2.1.17)$$

Поскольку Q компакт, из (2.1.16), компактности вложения $H^1(\Omega, \Gamma_2)$ в $L_2(\Omega)$ и слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовых пространствах следует (см. [38, Гл. II, §7]), что существует подпоследовательность индексов $\{k'\}$, а также существуют λ^* и U^* такие, что на этой подпоследовательности при $k' \to +\infty$ имеет место сходимость

$$\lambda_{k'} \to \lambda^* \in Q, \qquad (2.1.18)$$

$$U_{\varepsilon_{k'}} \to U^* \quad \text{сильно в } L_2(\Omega) \text{ и слабо в } H^1(\Omega, \Gamma_2). \qquad (2.1.19)$$

Из (2.1.15) и (2.1.19) следует, что

$$U^* \neq 0. \qquad (2.1.20)$$

Рассмотрим произвольную фиксированную функцию v из $C_0^\infty(\overline{\Omega}, \Gamma_2)$. Здесь $C_0^\infty(\overline{\Omega}, \Gamma_2)$ — пространство функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, обращающихся в нуль в окрестности Γ_2.

Пусть точка p_i– середина кривой Γ_ε^i. Сделаем замену координат $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$, представляющую собой сдвиг вдоль оси x_1, переводящий точку p_i в начало координат (см. Рис. 2.1.2).

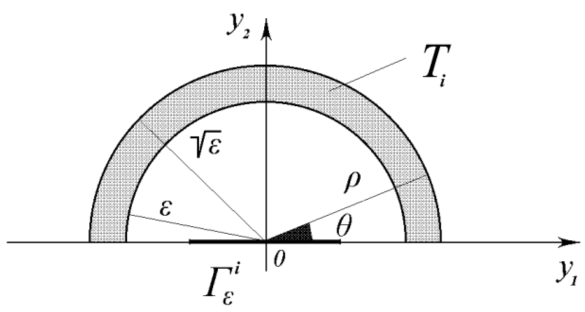

Рис. 2.1.2: Срезка.

Не ограничивая общности, можно считать, что длина образа участка Γ_ε^i равна ε.

Введём полярные координаты (ρ, θ), где $\rho = (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}$. Пусть функция $\psi(s)$ такова, что $\psi(s) = 0$ при $|s| \leqslant 1$, $\psi(s) = 1$ при $|s| > 2$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, при этом $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Обозначим

$$\Psi_\varepsilon = \prod_i \psi_\varepsilon^i, \qquad \psi_\varepsilon^i = \psi\left(\frac{|\ln\varepsilon|}{|\ln\rho|}\right). \tag{2.1.21}$$

Имеет место утверждение.

Лемма 2.1.2. *Функция Ψ_ε стремится к 1 сильно в $L_2(\Omega)$ и сильно в $L_2(\partial\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство.

$$\int\limits_\Omega (\Psi_\varepsilon - 1)^2\, dx = \int\limits_\Omega \left(\Psi_\varepsilon^2 - 2\psi_\varepsilon + 1\right) dx = |\Omega| + \int\limits_\Omega \Psi_\varepsilon^2 dx - 2\int\limits_\Omega \Psi_\varepsilon dx.$$

Поскольку

$$\Psi_\varepsilon^i = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\ln\varepsilon}{\ln\rho_i}\right| > 2,$$

имеем

$$\int\limits_\Omega (\Psi_\varepsilon - 1)^2\, dx \leqslant \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \int\limits_{B_{\sqrt{\varepsilon}}} 1dx \leqslant \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \left(\pi(\sqrt{\varepsilon})^2\right) =$$

$$= N_\varepsilon \pi\varepsilon \sim O\left(\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1-\delta}\right) \to 0 \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0.$$

Из тех же соображений

$$\int\limits_{\partial\Omega} (\Psi_\varepsilon - 1)^2\, dx \leqslant \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \int\limits_{B_{\sqrt{\varepsilon}}\cap\partial\Omega} 1dx \leqslant \sum_{i=1}^{N_\epsilon} \left(2\sqrt{\varepsilon}\right) =$$

$$= 2N_\varepsilon\sqrt{\varepsilon} \sim O\left(\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|^{1-\delta}\right) \to 0 \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0.$$

$\square$

Тогда $v_\varepsilon \equiv v\Psi_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$, где Ψ_ε задана в (2.1.21). Подставим при $\varepsilon = \varepsilon_{k'}$ в интегральное тождество (2.1.9) $\lambda = \lambda_{k'}, g = g_{k'}$ и $v = v_{\varepsilon_{k'}}$ в качестве тестовой функции. Имеем

$$\int\limits_{\Omega} \left(\nabla U_{\varepsilon_{k'}}, \nabla \overline{v_{\varepsilon_{k'}}}\right)\, dx - \lambda_{k'} \int\limits_{\Gamma_1} U_{\varepsilon_{k'}} \overline{v_{\varepsilon_{k'}}}\, ds = \int\limits_{\Gamma_1} g_{k'} \overline{v_{\varepsilon_{k'}}}\, ds. \tag{2.1.22}$$

Учитывая, что $v_\varepsilon = v\Psi_\varepsilon$, представим первый интеграл в левой части равенства (2.1.22) в виде суммы

$$\int\limits_{\Omega} \left(\nabla U_{\varepsilon_{k'}}, \nabla \overline{v_{\varepsilon_{k'}}}\right)\, dx = \int\limits_{\Omega} \left(\nabla U_{\varepsilon_{k'}}, \nabla \overline{v}\right) \overline{\Psi_{\varepsilon_{k'}}}\, dx + \int\limits_{\Omega} \left(\nabla U_{\varepsilon_{k'}}, \nabla \overline{\Psi_{\varepsilon_{k'}}}\right) \overline{v}\, dx.$$

Поскольку, $\psi_\varepsilon \to 1$ в $L_2(\Omega)$, и $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial U^*}{\partial x_i}$ в $L_2(\Omega)$ $(i = 1, 2)$, имеем

$$\int\limits_{\Omega} \left(\nabla U_{\varepsilon_{k'}}, \nabla \overline{v}\right) \overline{\Psi_{\varepsilon_{k'}}}\, dx \to \int\limits_{\Omega} \left(\nabla U^*, \nabla \overline{v}\right)\, dx \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Покажем, что $\int\limits_{\Omega} \left(\nabla U_{\varepsilon_{k'}}, \nabla \overline{\Psi_{\varepsilon_{k'}}}\right) \overline{v}\, dx \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Используя неравенство Коши–Буняковского и (2.1.16), получим

$$\int\limits_{\Omega} \left(\nabla U_{\varepsilon_{k'}}, \nabla \overline{\Psi_{\varepsilon_{k'}}}\right) \overline{v}\, dx \leqslant C \sqrt{\int\limits_{\Omega} |\nabla \Psi_{\varepsilon'_k}|^2 dx}.$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla \Psi_\varepsilon|^2\, dx \leqslant C_1 \sum_i \int\limits_{\mathcal{T}_i} \left(\frac{\partial \psi_\varepsilon^i}{\partial \rho}\right)^2 \rho\, d\rho\, d\theta,$$

$$\int\limits_{\mathcal{T}_i} \left(\frac{\partial \psi_\varepsilon^i}{\partial \rho}\right)^2 \rho\, d\rho\, d\theta = \int\limits_{\mathcal{T}_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)^2 \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \ln^2\varepsilon \int\limits_{\mathcal{T}_i} \left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2 \left(\frac{1}{\ln\rho}\right)^4 \frac{1}{\rho^2}\rho\; d\rho\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \ln^2\varepsilon \int\limits_{\mathcal{T}_i} \left(\frac{1}{\ln\rho}\right)^4 \; d(\ln\rho)\, d\theta \leqslant \frac{C_3}{|\ln\varepsilon|}.$$

Поскольку количество кусков Γ_ε^i имеет порядок $|\ln\varepsilon|^{1-\delta}$, получаем

$$\left|\int\limits_\Omega \left(\nabla U_{\varepsilon_{k'}}, \nabla\overline{\Psi_{\varepsilon_{k'}}}\right) \overline{v}\, dx\right| \leqslant \frac{C_4}{|\ln\varepsilon|^{\frac{\delta}{2}}}$$

и, следовательно, $\int\limits_\Omega \left(\nabla U_{\varepsilon_{k'}}, \nabla\overline{\Psi_{\varepsilon_{k'}}}\right) \overline{v}\, dx$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Итак,

$$\int\limits_\Omega \left(\nabla U_{\varepsilon_{k'}}, \nabla\overline{v_{\varepsilon_{k'}}}\right)\, dx \to \int\limits_\Omega \left(\nabla U^*, \nabla\overline{v}\right)\, dx \quad \text{при} \quad \varepsilon_{k'} \to 0. \tag{2.1.23}$$

Имея в виду (2.1.17), (2.1.18), (2.1.19) и лемму 2.1.2, заключаем, что

$$\lambda_{k'} \int\limits_{\Gamma_1} U_{\varepsilon_{k'}} \overline{v_{\varepsilon_{k'}}}\, ds \to \lambda^* \int\limits_\Omega U^* \overline{v}\, ds \quad \text{при} \quad \varepsilon_{k'} \to 0 \tag{2.1.24}$$

и

$$\int\limits_{\Gamma_1} g_{k'} \overline{v_{\varepsilon_{k'}}}\, ds \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_{k'} \to 0. \tag{2.1.25}$$

Переходя в равенстве (2.1.22) к пределу по этой подпоследовательности и используя (2.1.23), (2.1.24) и (2.1.25), получаем новое интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \left(\nabla U^*, \nabla\overline{v}\right)\, dx = \lambda^* \int\limits_{\Gamma_1} U^* \overline{v}\, ds.$$

Из плотности вложения $C_0^\infty(\overline{\Omega},\Gamma_2)$ в $H^1(\Omega,\Gamma_2)$ следует, что это тождество справедливо и для любой функции $v\in H^1(\Omega,\Gamma_2)$. Поскольку $U^*\neq 0$ в силу (2.1.20), а v произвольная функция из $H^1(\Omega,\Gamma_2)$, то λ^* — собственное значение предельной задачи (2.1.1). С другой стороны, $\lambda^*\in Q$. Однако, по условию доказываемой теоремы Q не содержит собственных значений предельной задачи (2.1.1). Из полученного противоречия следует оценка (2.1.3).

Покажем справедливость пункта *2)*. Пусть $\lambda\in Q$ — произвольное фиксированное число, а $\{\varepsilon_k\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к нулю при $k\to+\infty$. Из (2.1.3), слабой компактности ограниченного множества в $H^1(\Omega,\Gamma_2)$ и компактности вложения $H^1(\Omega,\Gamma_2)$ в $L_2(\Omega)$ следует, что существует такая подпоследовательность индексов k', что выполняется (2.1.19), причем, $U^*\in H^1(\Omega,\Gamma_2)$.

Вновь подставляя в интегральное тождество (2.1.9) в качестве тестовой функции $v\in C_0^\infty(\overline{\Omega},\Gamma_1)$, получаем интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \left(\nabla U_{\varepsilon_{k'}},\nabla\overline{v}\right)\,dx-\lambda\int\limits_{\Gamma_1} U_{\varepsilon_{k'}}\overline{v}\,ds=\int\limits_{\Gamma_1} g\overline{v}\,ds.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, в силу (2.1.19) получаем новое интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \left(\nabla U^*,\nabla\overline{v}\right)\,dx=\lambda\int\limits_{\Gamma_1} U^*\overline{v}\,ds+\int\limits_{\Gamma_1} g\overline{v}\,ds,$$

которое совпадает с интегральным тождеством (2.1.8). Из плотности вложения $C_0^\infty(\overline{\Omega},\Gamma_2)$ в $H^1(\Omega,\Gamma_2)$ и единственности решения предельной задачи (2.1.5) получаем, что $U^*=U_0$, а из произвола в выборе исходной последовательности $\{\varepsilon_k\}$ и сходимости (2.1.19) вытекает следующая сходимость:

$$U_\varepsilon\to U_0 \text{ сильно в } L_2(\Omega) \text{ и слабо в } H^1(\Omega,\Gamma_2) \text{ при } \varepsilon\to 0. \qquad (2.1.26)$$

Осталось усилить сходимость (2.1.26) до сходимости (2.1.4). Подставляя в интегральное тождество (2.1.9) пробную функцию $v=U_\varepsilon$, в тождество (2.1.8) — пробную функцию $v = U_0$, вычитая одно тождество из другого, учитывая (2.1.26), получаем

$$\begin{aligned}\|\nabla U_\varepsilon\|_0^2 - \|\nabla U_0\|_0^2 &= \int\limits_{\Gamma_1} g\overline{U}_\varepsilon \, ds - \int\limits_{\Gamma_1} g\overline{U}_0 \, ds = \\ &= \int\limits_{\Gamma_1} g(\overline{U_\varepsilon - U_0}) \, ds \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

Из (2.1.26) и (2.1.27) следует (2.1.4). Действительно, в силу (2.1.26) и (2.1.27)

$$\|\nabla(U_\varepsilon - U_0)\|_0^2 = \|\nabla U_\varepsilon\|_0^2 + \|\nabla U_0\|_0^2 - 2\mathrm{Re}\int\limits_\Omega (\nabla U_\varepsilon, \nabla \overline{U}_0) dx \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Из этой сходимости и сходимости (2.1.26) вытекает сходимость (2.1.4). Теорема доказана. $\square$

2.1.3 Доказательство теоремы усреднения для спектральной задачи

В этом пункте мы доказываем теорему 2.1.2. Аналогично доказательству пункта *2)* теоремы 2.1.1 доказывается следующее утверждение.

Лемма 2.1.3. *Пусть λ_ε — собственное значение краевой задачи* (2.1.6)*, сходящееся при $\varepsilon \to 0$ к собственному значению λ_0 предельной задачи* (2.1.1)*, а u_ε — нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ_ε. Тогда из любой последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty \to 0$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_m}\}_{m=1}^\infty \to 0$, такую что*

$$\|u_{\varepsilon_{k_m}} - u_0\|_1 \to 0,$$

где u_0 – нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ_0.

Из леммы 2.1.3 и ортогональности собственных функций как предельной задачи (2.1.1), так и возмущенной задачи (2.1.6) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.1.4. *Пусть кратность собственного значения λ_0 краевой задачи* (2.1.1) *равна N. Тогда, если к нему сходятся собственные значения λ_ε краевой задачи* (2.1.6)*, то их совокупная кратность не превышает N.*

Доказательство теоремы 2.1.2. Пусть

$$0 < \lambda_0^1 \leqslant \lambda_0^2 \leqslant \dots \quad -$$

собственные значения предельной задачи (2.1.1),

$$u_0^1, u_0^2, \dots \quad -$$

соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции,

$$0 < \lambda_\varepsilon^1 \leqslant \lambda_\varepsilon^2 \leqslant \dots \quad -$$

собственные значения возмущенной задачи (2.1.6),

$$u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2, \dots \quad -$$

соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ (а следовательно, и в $L_2(\Omega)$) собственные функции и

$$\lambda_0^p < \lambda_0 = \lambda_0^{p+1} = \dots = \lambda_0^{p+N} < \lambda_0^{p+N+1},$$

где $\lambda_0^0 := 0$.

В силу лемм 2.1.3 и 2.1.4 для доказательства теоремы достаточно показать, что совокупная кратность N_ε собственных значений λ_ε^i, сходящихся к λ_0 при $\varepsilon \to 0$, не может быть меньше N — кратности собственного значения λ_0.

Докажем это от противного. Предположим, что существует последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty} \to 0$, такая что $N_{\varepsilon_k} < N$. Не ограничивая общности можно считать $N_{\varepsilon_k} = M < N$, а

$$\lambda_\varepsilon^{p+1}, \ldots, \lambda_\varepsilon^{p+M} \quad — \tag{2.1.28}$$

собственные значения краевой задачи (2.1.6), сходящиеся к λ_0 при $\varepsilon \to 0$. В силу леммы 2.1.3 существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_m}\}_{m=1}^{\infty} \to 0$ такая, что

$$\|u_{\varepsilon_{k_m}}^{p+i} - u_*^{p+i}\|_{0,\Gamma_1} \to 0, \quad i = 1, \ldots, M,$$

где u_*^{p+i} — ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции предельной задачи (2.1.1). Не ограничивая общности, будем считать, что $u_*^{p+i} = u_0^{p+i}$, то есть имеет место сходимость:

$$\|u_{\varepsilon_{k_m}}^{p+i} - u_0^{p+i}\|_{0,\Gamma_1} \to 0, \quad i = 1, \ldots, M, \tag{2.1.29}$$

Обозначим через $(\bullet, \bullet)_{0,\Gamma_1}$ скалярное произведение в $L_2(\partial\Omega)$. Положим

$$\begin{aligned} g &:= u_0^{p+M+1}, \\ G_0(\lambda) &:= (U_0(\cdot, \lambda), u_0^{p+M+1})_{0,\Gamma_1}, \\ G_\varepsilon(\lambda) &:= (U_\varepsilon(\cdot, \lambda), u_0^{p+M+1})_{0,\Gamma_1}, \end{aligned}$$

где U_0 и U_ε – решения краевых задач (2.1.2) и (2.1.5), соответственно.

Пусть $S(t, z)$ — открытый круг на комплексной плоскости радиуса t с центром в точке z. Поскольку собственные значения не имеют конечных точек накопления, то существует $T > 0$, такое, что $\overline{S(T, \lambda_0)}$ не содержит собственных значений краевой задачи (2.1.1), отличных от λ_0. В силу теоремы 2.1.1 и лемм 2.1.3, 2.1.4 для любого $t \leqslant T$ имеет место сходимость

$$G_{\varepsilon_{k_m}}(\lambda) \to G_0(\lambda), \quad \lambda \in \partial S(t, \lambda_0) \tag{2.1.30}$$

при $m \to \infty$.

Известно (см. также раздел 2.1.4), что собственные функции $\{u_0^j\}$ и $\{u_\varepsilon^j\}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\partial\Omega)$, а для решений краевых задач (2.1.2) и (2.1.5) справедливы представления:

$$U_\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g, u_\delta^n)_{0,\Gamma_1}}{\lambda_\delta^n - \lambda} u_\delta^n, \qquad \delta \geqslant 0. \tag{2.1.31}$$

Из представлений (2.1.31) следует, что

$$\begin{aligned} G_0(\lambda) &= \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}, \\ G_\varepsilon(\lambda) &= \sum_{i=1}^{M} \frac{|(u_0^{p+M+1}, u_\varepsilon^{p+i})_{0,\Gamma_1}|^2}{\lambda_\varepsilon^{p+i} - \lambda} + \mathcal{G}_\varepsilon(\lambda), \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

где

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\lambda) = \sum_{s=1}^{p} \frac{|(u_0^{p+M+1}, u_\varepsilon^s)_{0,\Gamma_1}|^2}{\lambda_\varepsilon^s - \lambda} + \sum_{s=p+M+1}^{\infty} \frac{|(u_0^{p+M+1}, u_\varepsilon^s)_{0,\Gamma_1}|^2}{\lambda_\varepsilon^s - \lambda}. \tag{2.1.33}$$

Покажем, что $\mathcal{G}_{\varepsilon_{k_m}}(\lambda)$ голоморфная функция при $\lambda \in S(t, \lambda_0)$ для любого $t < T$. Заметим, что при ε_{k_m} достаточно малых в круге $\overline{S(T, \lambda_0)}$ не содержится других собственных значений, кроме (2.1.28). В противном случае существовала бы еще одна подпоследовательность, на которой эти собственные значения сходились бы к $\lambda_* \in \overline{S(T, \lambda_0)}$, отличному от λ_0, что противоречит нашему предположению о том, что круг $\overline{S(T, \lambda_0)}$ не содержит собственных значений задачи (2.1.1), кроме λ_0. Следовательно, ряд (2.1.33) мажорируется числовым рядом

$$(T - t)^{-1} \sum_{s=1}^{\infty} |(u_0^{p+M+1}, u_{\varepsilon_{k_m}}^s)_{0,\Gamma_1}|^2. \tag{2.1.34}$$

Поскольку система $\{u_{\varepsilon_{k_m}}^s\}_{s=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в $L_2(\partial\Omega)$, то для любой $g \in L_2(\partial\Omega)$ в силу равенства Парсеваля–Стеклова (см., например, [49, Гл. II, §2, П. 7]) имеем:

$$\|g\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |g_i|^2, \quad g_i = (g, u_{\varepsilon_{k_m}}^i)_{0,\Gamma_1}.$$

Из (2.1.34) и равенства Парсеваля–Стеклова следует, что

$$|\mathcal{G}_\varepsilon(\lambda)| \leqslant (T-t)^{-1}\|u_0^{p+M+1}\|_{0,\Gamma_1} = (T-t)^{-1},$$

то есть, ряд (2.1.33) равномерно сходится при $\lambda \in S(t,\lambda_0)$. Следовательно, в силу теоремы Вейерштрасса (см., например, [41, Гл. 1, §5, Теорема 1]) функция $\mathcal{G}_\varepsilon$ является голоморфной при $\lambda \in S(t,\lambda_0)$.

Следовательно, при $t < T$ в силу сходимости (2.1.30), представления G_ε в (2.1.32) и теоремы Лебега получаем

$$\int\limits_{\partial S(t,\lambda_0)} G_{\varepsilon_{km}}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \longrightarrow \int\limits_{\partial S(t,\lambda_0)} G_0(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \quad m\to\infty. \tag{2.1.35}$$

А в силу (2.1.32) и теоремы о вычетах имеем

$$\int\limits_{\partial S(t,\lambda_0)} G_0(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 2\pi i, \tag{2.1.36}$$

$$\int\limits_{\partial S(t,\lambda_0)} G_{\varepsilon_{km}}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 2\pi i \sum_{i=1}^{M} |(u_0^{p+M+1}, u_{\varepsilon_{km}}^{i+p})_{0,\Gamma_1}|^2. \tag{2.1.37}$$

Из (2.1.37), (2.1.29) следует, что при $m\to\infty$:

$$\int\limits_{\partial S(t,\lambda_0)} G_{\varepsilon_{km}}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \to 2\pi i \sum_{i=1}^{M} |(u_0^{p+M+1}, u_0^{i+p})_{0,\Gamma_1}|^2 = 0. \tag{2.1.38}$$

Равенства (2.1.36), (2.1.38) противоречат (2.1.35). Следовательно, $N = M$. Теорема доказана. $\square$

2.1.4 Оценка решения в окрестности собственного значения

Покажем сначала справедливость представлений (2.1.31). Хорошо известно (см., например, [42, Гл. I, §6]), что в пространстве $H^1(\Omega,\Gamma_2)$ выражение

$$(f,g)_{1,0} := \int\limits_\Omega (\nabla f, \nabla \overline{g})dx$$

является скалярным произведением, порождающим норму $\|f\|_{1,0}^2 = (f,f)_{1,0}$ эквивалентную обычной норме в $H^1(\Omega,\Gamma_2)$. Известно (см, например, [49, Гл. IV, §1, П. 3]), что система

$$\frac{u_\delta^1}{\sqrt{\lambda_\delta^1}}, \ldots, \frac{u_\delta^s}{\sqrt{\lambda_\delta^s}}, \ldots, \quad \delta \geqslant 0 \tag{2.1.39}$$

является ортогональным базисом в $H^1(\Omega,\Gamma_2)$ при $\delta = 0$ и в $H^1(\Omega,\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ при $\delta = \varepsilon > 0$. Без ограничения общности считаем, что система (2.1.39) нормирована в $L_2(\Gamma_1)$. Следовательно, имеет место разложение в ряд Фурье по ортонормированному базису (2.1.39):

$$U_\delta = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(U_\delta, u_\delta^s)_{1,\delta}}{\lambda_\delta^s} u_\delta^s = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(U_\delta, u_\delta^s)_{1,0}}{\lambda_\delta^s} u_\delta^s, \quad \delta \geqslant 0 \tag{2.1.40}$$

в $H^1(\Omega,\Gamma_2)$ для любой функции $U_0 \in H^1(\Omega,\Gamma_2)$ при $\delta = 0$ и в $H^1(\Omega,\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ для любой функции $U_\varepsilon \in H^1(\Omega,\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ при $\delta = \varepsilon > 0$. Из интегральных тождеств (2.1.8) и (2.1.9) вытекает равенство:

$$(U_\delta, u_\delta^s)_{1,0} - \lambda (U_\delta, u_\delta^s)_{0,\Gamma_1} = (g, u_\delta^s)_{0,\Gamma_1}.$$

Подставляя в правую часть этого равенства разложение (2.1.40), получаем:

$$(U_\delta, u_\delta^s)_{1,0} - \frac{\lambda}{\lambda_\delta^s} (U_\delta, u_\delta^s)_{1,0} = (g, u_\delta^s)_{0,\Gamma_1}.$$

Отсюда выводим

$$(U_\delta, u_\delta^s)_{1,0} = \frac{\lambda_\delta^s}{\lambda_\delta^s - \lambda} (g, u_\delta^s)_{0,\Gamma_1}.$$

Подставим полученное выражение в (2.1.40), получаем представления (2.1.31).

Лемма 2.1.5. *Пусть* λ_0 *– собственное значение краевой задачи Дирихле* (2.1.1) *кратности* N*:*

$$\lambda_0 = \lambda_0^{p+1} = \ldots = \lambda_0^{p+N} < \lambda_0^{p+1+N}.$$

Тогда при λ*, близких к* λ_0*, для решений краевой задачи* (2.1.2) *имеет место оценка*

$$\|U_\varepsilon\|_1 \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \frac{\|g\|_{0,\Gamma_1}}{\left|\lambda_\varepsilon^{p+j} - \lambda\right|},$$

где $\lambda_\varepsilon^{p+j}, \ldots, \lambda_\varepsilon^{p+N}$ *— собственные значения задачи* (2.1.6)*, сходящиеся к* λ_0*.*

Если, к тому же, решение U_ε *ортогонально в* $L_2(\Omega)$ *собственной функции* u_ε^{p+i} *задачи* (2.1.6)*, соответствующей* $\lambda_\varepsilon^{i+p}$*, то имеет место оценка*

$$\|U_\varepsilon\|_1 \leqslant C \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{\|g\|_{0,\Gamma_1}}{\left|\lambda_\varepsilon^{p+j} - \lambda\right|}.$$

Доказательство. Очевидно, что для доказательства леммы достаточно показать справедливость представления

$$U_\varepsilon = \sum_{s=1}^{N} \frac{(g, u_\varepsilon^{p+s})_{0,\Gamma_1}}{\lambda_\varepsilon^{p+s} - \lambda} u_\varepsilon^{p+s} + \widetilde{u}_\varepsilon,$$

где функция $\widetilde{u}_\varepsilon$ ортогональна в $L_2(\Omega)$ собственным функциям u_ε^{p+s}, $s = 1, \ldots, N$ и для неё справедлива равномерная по ε и λ оценка

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_1 \leqslant C_1 \|g\|_{0,\Gamma_1}. \tag{2.1.41}$$

из представления (2.1.31) следует, что

$$\widetilde{u}_\varepsilon = \sum_{s=1}^{p} \frac{(g, u_\varepsilon^{s})_{0,\Gamma_1}}{\lambda_\varepsilon^{s} - \lambda} u_\varepsilon^{s} + \sum_{s=p+1+N}^{\infty} \frac{(g, u_\varepsilon^{s})_{0,\Gamma_1}}{\lambda_\varepsilon^{s} - \lambda} u_\varepsilon^{s}. \tag{2.1.42}$$

Из (2.1.42) и ортогональности в $L_2(\Omega)$ системы функций u_ε^s, $s = 1, 2, \ldots$ следует, что $\widetilde{u}_\varepsilon$ ортогональна в $L_2(\Omega)$ функциям u_ε^{p+i}, $i = 1, \ldots, N$.

Установим справедливость оценки (2.1.41) для $\widetilde{u}_\varepsilon$. В силу ортогональности в $H^1(\Omega, \Gamma_2)$ относительно скалярного произведения $(\bullet, \bullet)_{1,0}$

и нормировки в $L_2(\Gamma_1)$ системы (2.1.39) из представления (2.1.42) следует

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|^2_{1,0} = \sum_{s=1}^{p} \left|\frac{(g,u^s_\varepsilon)_{0,\Gamma_1}}{\lambda^s_\varepsilon-\lambda}\right|^2 \|u^s_\varepsilon\|^2_{1,0} + \sum_{s=p+1+N}^{\infty} \left|\frac{(g,u^s_\varepsilon)_{0,\Gamma_1}}{\lambda^s_\varepsilon-\lambda}\right|^2 \|u^s_\varepsilon\|^2_{1,0} =$$
$$= \sum_{s=1}^{p} \left|\frac{(g,u^s_\varepsilon)_{0,\Gamma_1}}{\lambda^s_\varepsilon-\lambda}\right|^2 \lambda^s_\varepsilon + \sum_{s=p+1+N}^{\infty} \left|\frac{(g,u^s_\varepsilon)_{0,\Gamma_1}}{\lambda^s_\varepsilon-\lambda}\right|^2 \lambda^s_\varepsilon. \tag{2.1.43}$$

Очевидно, что при λ близких к λ_0 существует число $a>0$ такое, что для любых достаточно малых ε выполнено неравенство

$$|\lambda^s_\varepsilon-\lambda|>a, \quad s\neq p+1,\dots,p+1+N. \tag{2.1.44}$$

В силу (2.1.44) и равенства Парсеваля-Стеклова из (2.1.43) выводим

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|^2_{1,0} \leqslant a^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}|(g,u^s_\varepsilon)_{0,\Gamma_1}|^2 \leqslant C_1\|g\|^2_{0,\Gamma_1}.$$

Отсюда и из эквивалентности норм $\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{1,0}$ и $\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_1$ вытекает оценка (2.1.41). Лемма доказана. $\square$

§ 2.2 Случай предельного вырождения спектра

2.2.1 Постановка задачи

В области Ω (см. рис. 2.1.1) предполагаем, что для участков границы при любом i выполняются следующие условия:

$$C^-\varepsilon \leqslant |\Gamma_\varepsilon^i| \leqslant C^+\varepsilon, \quad C^-\varepsilon \leqslant |\gamma_\varepsilon^i| \leqslant C^+\varepsilon, \quad \text{где} \quad 0 < C^- < C^+ < +\infty.$$

Рассмотрим следующую краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} L[U_\varepsilon] \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{ij}(x)\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad \text{в} \qquad \Omega, \\ U_\varepsilon = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial \gamma} \equiv a^{ij}(x)\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_i}\nu_j = g(x) \qquad \text{на} \qquad \gamma_\varepsilon \end{cases} \tag{2.2.1}$$

(здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 2), $\nu = (\nu_1, \nu_2)^t$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $g \in L_2(\partial\Omega)$. Коэффициенты $a^{ij}(x)$ — ограниченные измеримые функции на Ω, матрица $\left(a^{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{2}$ положительно определена, т.е.

$$\varkappa_2|\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \varkappa_1|\xi|^2, \qquad \text{где} \qquad \varkappa_1 > 0, \varkappa_2 > 0.$$

Решение задачи (2.2.1) ищем в пространстве

$$H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon) = \{v(x) \mid v(x) \in H^1(\Omega), v(x)\big|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon} = 0\}$$

с нормой

$$\|v\|_{H^1(\Omega,\Gamma_2\cup\Gamma_\varepsilon)} = \left(\int\limits_\Omega (v^2 + |\nabla v|^2)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 2.2.1. *Функцию $U_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ будем называть обобщённым решением (см.* [67]*) задачи* (2.2.1)*, если для любого $v \in$*

$H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ *выполняется интегральное тождество*

$$\int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx = \int\limits_{\gamma_\varepsilon} g\, v\, ds. \tag{2.2.2}$$

Будем исследовать поведение решений U_ε при ε, стремящемся к нулю.

2.2.2 Сходимость решений краевой задачи

Далее мы используем следующее неравенство типа Фридрихса, доказанное в [45] (см. также [98]).

Предложение 2.2.1. *Пусть* $u \in H^1(\Omega), u = 0$ *на* $\Gamma \subset \partial\Omega$, *где* $mes\,\Gamma > 0$. *Тогда*

$$\int\limits_\Omega u^2(x)\, dx \leqslant C \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \tag{2.2.3}$$

где постоянная C *зависит от* Ω, $mes\,\Gamma$ *и не зависит от функции* u,

$$C \leqslant C_1(\Omega) + \frac{C_2(\Omega)}{mes\,\Gamma}.$$

В силу неравенства (2.2.3) мы можем в пространстве $H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ ввести новое скалярное произведение $[u, \varphi] = \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla\varphi)\, dx$, которому соответствует норма $\|u\| = [u, u]^{\frac{1}{2}}$.

Предложение 2.2.2. *Обобщённое решение* U_ε *задачи* (2.2.1) *существует и единственно.*

Существование и единственность обобщённого решения задачи (2.2.1) доказывается стандартным путём на основе леммы Лакса-Мильграма (см., например, [33], [49]).

Получим теперь оценки для решения U_ε, равномерные по ε. Для решения U_ε задачи (2.2.1) в нашем случае константа C в неравенстве

(2.2.3) не зависит от ε, так как $\operatorname{mes}\Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon \geqslant \mathrm{const}\,|\partial\Omega|$, где const не зависит от ε.

Далее будем использовать неравенство для следов: пусть $v \in H^1(\Omega)$, тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} v^2 ds \leqslant K \int\limits_{\Omega} (v^2 + |\nabla v|^2) dx.$$

Подставляя в интегральное тождество (2.2.2) $v = U_\varepsilon$ в качестве пробной функции, используя неравенство Коши-Буняковского, неравенство для следов, неравенство (2.2.3) и условие эллиптичности оператора L, получим

$$\varkappa_2 \int\limits_{\Omega} |\nabla U_\varepsilon|^2\, dx \leqslant \left| \int\limits_{\Omega} a^{ij}(x) \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_j}\, dx \right| = \left| \int\limits_{\gamma_\varepsilon} g(x)\, U_\varepsilon(x)\, ds \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\partial\Omega} g(x)\, U_\varepsilon(x)\, ds \right| \leqslant \left(\int\limits_{\partial\Omega} g^2(x)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\partial\Omega} U_\varepsilon^2(x)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{K} \left(\int\limits_{\partial\Omega} g^2(x)\, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} U_\varepsilon^2(x) + |\nabla U_\varepsilon(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant M \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla U_\varepsilon(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $M = \sqrt{K}(C+1) \left(\int\limits_{\partial\Omega} g^2(x)\, ds \right)^{\frac{1}{2}}$.

Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla U_\varepsilon|^2\, dx = \|U_\varepsilon\|^2 \leqslant M_1,$$

где M_1 не зависит от ε.

По теореме Реллиха (см., например, [60]) существуют такие функция U и подпоследовательность ε^k, стремящаяся к нулю, что

1. $U_\varepsilon \to U \in H^1(\Omega)$ при $\varepsilon^k \to 0$ в норме $L_2(\Omega)$,
2. $\dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup \dfrac{\partial U}{\partial x_j}$ при $\varepsilon^k \to 0$ слабо в $L_2(\Omega)$, $j = 1, 2$.

Покажем теперь, что $U = 0$ на границе $\partial\Omega$. Сделаем локальное преобразование координат $(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$ в окрестности точки c_i, являющейся концом куска Γ_ε^i такое, что граница $\partial\Omega$ в этой окрестности перейдёт в прямую $y_2 = 0$, а точка c_i в начало координат. Рассмотрим полосу шириной ω в окрестности точки c_i (см. рис. 2.2.3).

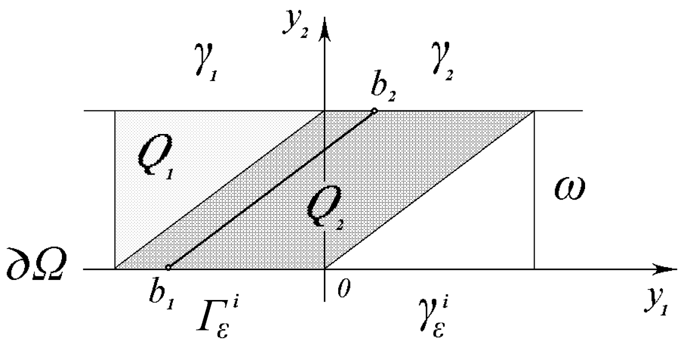

Рис. 2.2.3: Области интегрирования.

Положим

$$\gamma_1 = \{(y_1, y_2)\ :\ y_2 = \omega, k_1\varepsilon < y_1 < 0\},$$

$$\gamma_2 = \{(y_1, y_2)\ :\ y_2 = \omega, 0 < y_1 < k_2\varepsilon\},$$

где k_1, k_2 — некоторые постоянные, не зависящие от ε. Достаточно рассмотреть случай, когда $|\gamma_1| = |\gamma_2|$, так как в случае $|\gamma_1| > |\gamma_2|$ построения аналогичные, а в случае $|\gamma_1| < |\gamma_2|$ мы рассмотрим несколько таких параллелограммов $Q_2^j, j = 1, 2, \ldots, n$ (см. рис. 2.2.4). Заметим, что благодаря условиям, наложенным на размеры частей Γ_1, будет выполняться равномерная оценка $n < N_0$, где N_0 не зависит ни от ε, ни от i.

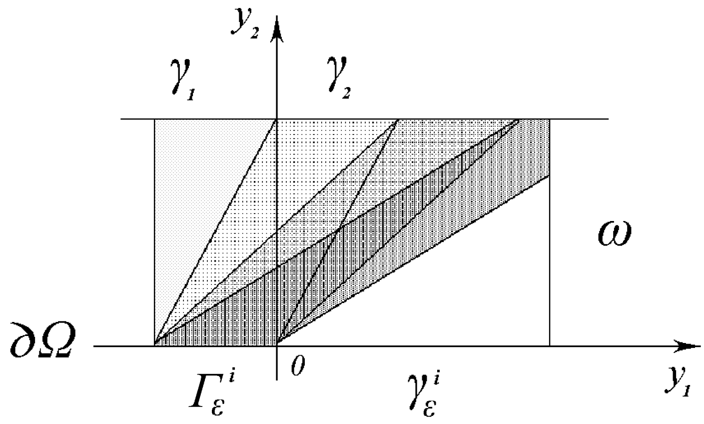

Рис. 2.2.4: Параллелограммы Q_1 и Q_2^j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Имеем

$$U_\varepsilon(y_1, \omega) = \int\limits_0^\omega \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial y_2}\, dy_2,$$

если $y_1 \in \gamma_1$. Поэтому

$$U_\varepsilon^2(y_1, \omega) \leqslant \omega \int\limits_0^\omega \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial y_2}\right)^2\, dy_2, \tag{2.2.4}$$

Проинтегрируем неравенство (2.2.4) по γ_1. Используя формулу Коши–Буняковского, получим

$$\int\limits_{\gamma_1} U_\varepsilon^2(y_1, \omega)\, dy_1 \leqslant \omega \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_0^\omega \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial y_2}\right)^2\, dy_2\, dy_1 \leqslant \omega \int\limits_{Q_1} |\nabla U_\varepsilon|^2\, dy_1\, dy_2.$$

Оценим теперь $U_\varepsilon(y_1, \omega)$, где $y_1 \in \gamma_2$. Имеем

$$U_\varepsilon(y_1, \omega) = \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial l}\, dl,$$

где b_1 и b_2 — точки, лежащие, соответственно, на Γ_ε^i и γ_2 и принадлежащие прямой l, параллельной стороне параллелограмма, вершинами которого являются концы отрезков Γ_ε^i и γ_2. Отсюда получим

$$U_\varepsilon^2(y_1,\omega) \leqslant C'\omega \int\limits_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial l}\right)^2 \, dl.$$

Проинтегрируем это неравенство по γ_2. Получим

$$\int\limits_{\gamma_2} U_\varepsilon^2(y_1,\omega)\, dy_1 \leqslant C'\omega \int\limits_{\gamma_2} \int\limits_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial l}\right)^2 \, dl\, dy_1 \leqslant$$

$$\leqslant C_3\omega \int\limits_{Q_2} \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial l}\right)^2 \, dy_1\, dy_2 \leqslant C_3\omega \int\limits_{Q_2} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dy_1\, dy_2.$$

Сделаем обратное преобразование координат $(y_1, y_2) \to (x_1, x_2)$. Просуммировав по всем окрестностям, образующим покрытие границы $\partial\Omega$, получим

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U_\varepsilon^2(x)\, ds \leqslant \omega C_4 \int\limits_{Q} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dx \leqslant \omega C_4 \int\limits_{\Omega} |\nabla U_\varepsilon|^2 \, dx \leqslant \omega C_4 M_1, \quad (2.2.5)$$

где $\widetilde{\gamma}$ — кривая, все точки которой отстоят от $\partial\Omega$ на расстояние порядка ω, а Q — слой между $\widetilde{\gamma}$ и $\partial\Omega$; постоянные C_4, M_1 не зависят от ε.

Имея в виду компактность вложения $H^1(\Omega)$ в $L_2(\widetilde{\gamma})$ (см. [67]), перейдем к пределу в неравенстве (2.2.5) при ε^k, стремящемся к нулю. Имеем

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} U^2 \, ds \leqslant \omega M_1 C_4. \qquad (2.2.6)$$

В силу того, что ω – произвольно малое положительное число и $U \in H^1(\Omega)$ из (2.2.6) следует, что $U = 0$ на границе $\partial\Omega$. Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 2.2.1. *Последовательность решений u_ε задачи* (2.2.1) *сходится при ε, стремящемся к нулю, в норме $L_2(\Omega)$ и слабо в $H^1(\Omega)$ к решению задачи Дирихле*

$$\begin{cases} L[U] = \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{ij}(x)\frac{\partial U}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad \textit{в} \qquad \Omega, \\ U = 0 \qquad \textit{на} \qquad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Выше это утверждение доказано для последовательности ε^k. Сходимость U_ε при $\varepsilon \to 0$, следует из единственности решения задачи (2.2.7). Из неё же следует, что $U \equiv 0$.

2.2.3 Сходимость собственных значений и собственных функций

Рассмотрим следующую спектральную задачу типа Стеклова, которая соответствует краевой задаче (2.2.1):

$$\begin{cases} L[u_\varepsilon] = 0 & \text{в } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \gamma} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{на } \gamma_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.2.8}$$

Определение 2.2.2. *Функция $u_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon) \setminus \{0\}$ называется собственной функцией задачи* (2.2.8), *соответствующей собственному значению λ_ε, если для любой функции $v \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ справедливо следующее интегральное тождество:*

$$\int\limits_{\Omega} a^{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx = \lambda_\varepsilon \int\limits_{\gamma_\varepsilon} u_\varepsilon\, v\, ds. \tag{2.2.9}$$

Используя общую теорию (см., например, [61]), заключаем, что все собственные значения задачи (2.2.8) — действительные и, кроме того, положительные числа, и для них справедливо:

$$0 \leqslant \lambda_\varepsilon^1 \leqslant \lambda_\varepsilon^2 \leqslant \ldots, \quad \lambda_\varepsilon^k \to \infty \text{ при } k \to \infty.$$

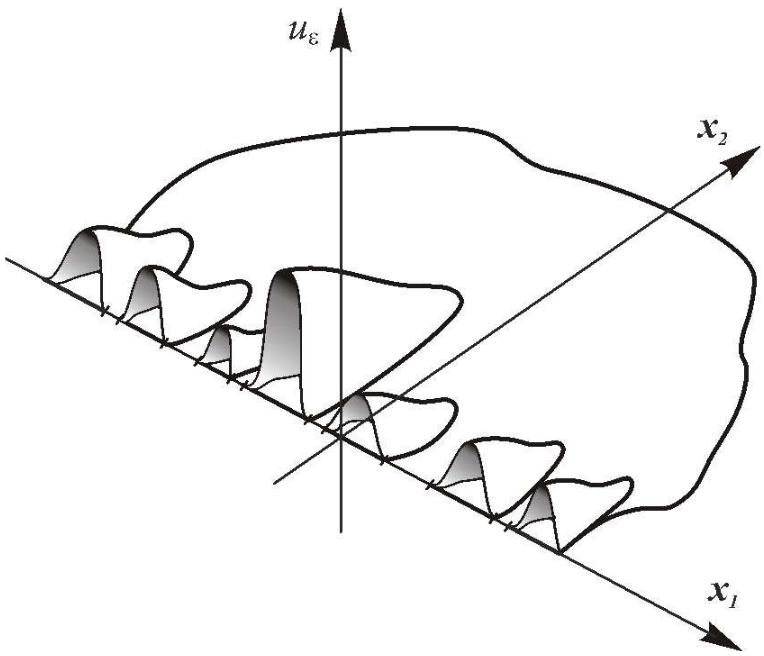

Рис. 2.2.5: Примерный вид нормированной собственной функции.

Здесь мы считаем, что собственные значения λ_ε^k подсчитываются с учётом кратности.

Теорема 2.2.2. *Первое собственное число задачи* (2.2.8) *имеет порядок* $\dfrac{1}{\varepsilon}$*, т.е. удовлетворяет следующему соотношению:*

$$\frac{C_1}{\varepsilon} \leq \lambda_\varepsilon^1 \leq \frac{C_2}{\varepsilon},$$

где C_1 *и* C_2 *— некоторые положительные константы. Более того, первая собственная функция* $u_\varepsilon^1 \to 0$ *сильно в* $L^2(\Omega)$ *и слабо в* $H^1(\Omega)$.

Введём обозначение:

$$\mu_\varepsilon = \inf_{v \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon) \setminus \{0\}} \frac{\int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx}{\int\limits_{\gamma_\varepsilon} v^2\, ds}. \tag{2.2.10}$$

Доказем следующую лемму (аналогичная была доказана в [76]):

Лемма 2.2.1. *Число μ_ε является первым собственным числом λ_ε^1 задачи* (2.2.8).

Доказательство. Достаточно показать, что существует собственная функция u^1 задачи (2.2.8), соответствующая первому собственному значению λ_ε^1, которая удовлетворяет соотношению:

$$\mu_\varepsilon = \frac{\int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial u^1}{\partial x_i} \frac{\partial u^1}{\partial x_j}\, dx}{\int\limits_{\gamma_\varepsilon} (u^1)^2\, ds} = \lambda_\varepsilon^1 .$$

Пусть $\{v^{(n)}\}$ — минимизирующая последовательность для (2.2.10), т.е.

$$v^{(n)} \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon), \ \|v^{(n)}\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)} = 1, \qquad \text{и}$$

$$\int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x_i} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x_j}\, dx \to \mu_\varepsilon, \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Ясно, что $\{v^{(n)}\}$ ограничена в $H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$. Следовательно, по теореме Реллиха существует её подпоследовательность $\{v^{(k)}\}$, слабо сходящаяся в $H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ и сильно в $L_2(\gamma_\varepsilon)$. Поэтому для любого $\eta > 0$ существует такое $K = K(\eta)$, что

$$\|v^{(k)} - v^{(l)}\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)} < \eta \qquad \text{при} \quad k, l > K.$$

Используя следующую формулу

$$\left\|\frac{v^{(k)} + v^{(l)}}{2}\right\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)} = \frac{1}{2}\left\|v^{(k)}\right\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)} + \frac{1}{2}\left\|v^{(l)}\right\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)} - \left\|\frac{v^{(k)} - v^{(l)}}{2}\right\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)},$$

получаем, что

$$\left\|\frac{v^{(k)} + v^{(l)}}{2}\right\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)} > 1 - \frac{\eta}{4}. \tag{2.2.11}$$

Из определения μ_ε заключаем, что для любой функции $v \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$

$$\int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x_i} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x_j}\, dx \geq \mu_\varepsilon \|v\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)}. \tag{2.2.12}$$

Неравенства (2.2.11) и (2.2.12) дают нам следующую оценку:

$$\int\limits_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial \left(\frac{v^{(k)}+v^{(l)}}{2}\right)}{\partial x_i} \frac{\partial \left(\frac{v^{(k)}+v^{(l)}}{2}\right)}{\partial x_j} \, dx > \mu_\varepsilon \left(1 - \frac{\eta}{4}\right).$$

Поскольку $\{v^{(k)}\}$ является минимизирующей последовательностью, для любого η существует $K_1 = K_1(\eta)$ (без ограничения общности полагаем $K_1 = K$) такое, что

$$\int\limits_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_i} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_j} \, dx < \mu_\varepsilon + \eta, \quad \int\limits_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial v^{(l)}}{\partial x_i} \frac{\partial v^{(l)}}{\partial x_j} \, dx < \mu_\varepsilon + \eta \qquad \text{при} \quad k, l > K.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial \left(\frac{v^{(k)}-v^{(l)}}{2}\right)}{\partial x_i} \frac{\partial \left(\frac{v^{(k)}-v^{(l)}}{2}\right)}{\partial x_j} \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_i} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_j} \, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial v^{(l)}}{\partial x_i} \frac{\partial v^{(l)}}{\partial x_j} \, dx - \int\limits_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial \left(\frac{v^{(k)}+v^{(l)}}{2}\right)}{\partial x_i} \frac{\partial \left(\frac{v^{(k)}+v^{(l)}}{2}\right)}{\partial x_j} \, dx \leq$$

$$\leq \frac{\mu_\varepsilon + \eta}{2} + \frac{\mu_\varepsilon + \eta}{2} - \mu_\varepsilon \left(1 - \frac{\eta}{4}\right) = \eta \left(1 + \frac{\mu_\varepsilon}{4}\right) \to 0, \quad \eta \to 0.$$

Наконец, из полноты пространства $H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ по критерию Коши получаем, что существует функция $v^* \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ такая, что последовательность $\{v^{(k)}\}$ сходится к ней в пространстве $H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ и справедливо:

$$\int\limits_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial v^*}{\partial x_i} \frac{\partial v^*}{\partial x_j} \, dx = \mu_\varepsilon, \quad \|v^*\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)} = 1.$$

Полагая, что $v \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon)$ — произвольная, введём функцию:

$$g(t) = \frac{\int\limits_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial (v^* + tv)}{\partial x_i} \frac{\partial (v^* + tv)}{\partial x_j} \, dx}{\|v^* + tv\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)}}.$$

Функция $g(t)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $t = 0$. Это выражение имеет минимум, равный μ_ε при $t = 0$. По теореме Ферма имеем:

$$0 = g'|_{t=0} = \frac{2\|v^*\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon)} \int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial v^*}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx - 2 \int\limits_{\gamma_\varepsilon} v^* v\, ds \int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial v^*}{\partial x_i} \frac{\partial v^*}{\partial x_j}\, dx}{\|v^*\|^4_{L_2(\gamma_\varepsilon)} (= 1\,)} =$$

$$= 2 \int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial v^*}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx - 2\mu_\varepsilon \int\limits_{\gamma_\varepsilon} v^* v\, ds.$$

Итак, мы показали, что

$$\int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial v^*}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx = \mu_\varepsilon \int\limits_{\gamma_\varepsilon} v^* v\, ds$$

для любого $v \in H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$, т.е. v^* удовлетворяет интегральному тождеству задачи (2.2.8), и при этом

$$\frac{\int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial v^*}{\partial x_i} \frac{\partial v^*}{\partial x_j}\, dx}{\int\limits_{\gamma_\varepsilon} v^{*2}\, ds} = \inf_{v \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon) \setminus \{0\}} \frac{\int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx}{\int\limits_{\gamma_\varepsilon} v^2\, ds} = \mu_\varepsilon.$$

Таким образом, $v^* = u^1$ и $\lambda^1_\varepsilon = \mu_\varepsilon$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.2.2. Используя Лемму 2.2.1 и эллиптичность матрицы a^{ij} получаем, что для любого $u \in H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$: $\int\limits_{\Gamma_1} u^2 ds = 1$ имеем:

$$\lambda^1_\varepsilon = \inf_{v \in H^1(\Omega, \Gamma_2 \cup \Gamma_\varepsilon) \setminus \{0\}} \frac{\int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx}{\int\limits_{\gamma_\varepsilon} v^2\, ds} \le \int\limits_\Omega a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx \le \varkappa_1 \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

• Для оценки сверху первого собственного значения λ^1_ε спектральной задачи (2.2.8), имея в виду вариационное определение собственного значения (см., например, [61]), построим специальную функцию u.

Пусть на промежутках γ_ε^i (порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$) в плоскости (x_1, u) построены равнобедренные треугольники высотой 1. Далее вместо гладких "капюшонов" (см. рис. 2.2.5) строим тетраэдры с высотой нижнего основания, равной ε (см. рис. 2.2.6).

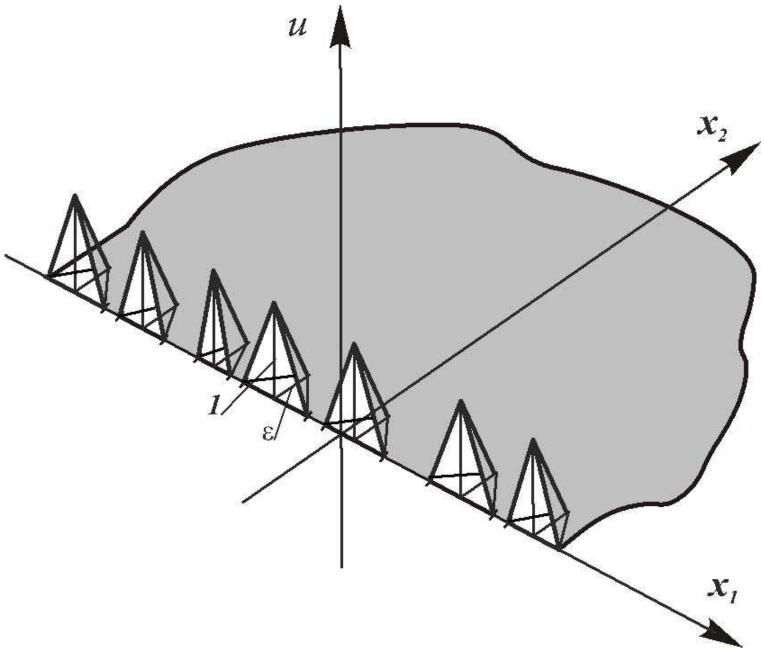

Рис. 2.2.6: Специальная функция.

Оценим теперь $\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx$.

$$|\nabla u|^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \Rightarrow \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \frac{c_1}{\varepsilon^2} \cdot c_2\varepsilon \cdot \frac{1}{2} c_3 \varepsilon \cdot N_\varepsilon \leq \frac{c_4}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\lambda_\varepsilon^1 \leq \varkappa_1 \frac{c_4}{\varepsilon} \leq \frac{C_2}{\varepsilon}.$$

• Теперь будем оценивать λ_ε^1 снизу. Разделим область Ω на полосы Ω_ε^i шириной порядка ε, параллельные оси x_2, с границами, проходящими через точки p_i — середины отрезков Γ_ε^i (см. рис. 2.2.7). Введём обозначения $\Upsilon_\varepsilon^i := \Gamma_\varepsilon \cap \overline{\Omega_\varepsilon^i}$, $H_*^1 := \bigcup\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} H^1(\Omega_\varepsilon^i, \Upsilon_\varepsilon^i)$.

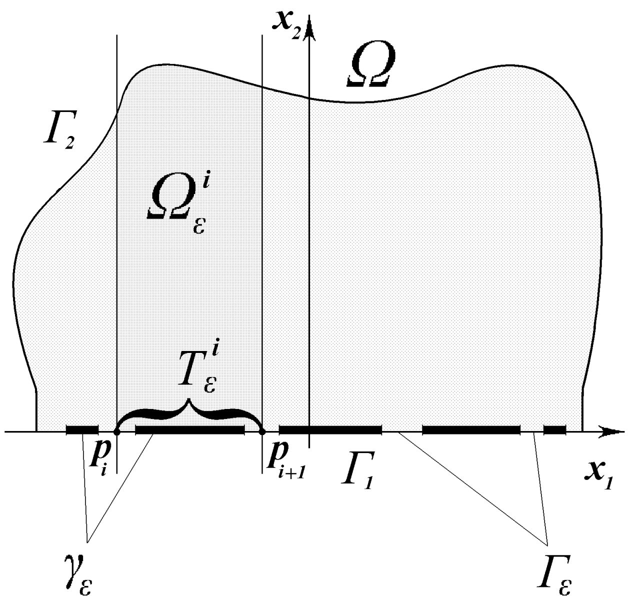

Рис. 2.2.7: Полосы в области.

Рассмотрим полосу Ω_ε^i. Покажем, что

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon^i} a^{ij}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\,dx \geq C_\varepsilon \int\limits_{\gamma_\varepsilon^i} u_\varepsilon^2\,ds. \qquad (2.2.13)$$

Будем считать, что функция u_ε нормирована следующим образом:

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon^i} u_\varepsilon^2\,ds = \varepsilon. \qquad (2.2.14)$$

Обозначим φ — след функции u_ε на γ_ε^i, пусть также $T_\varepsilon^i = \gamma_\varepsilon^i \cup \Upsilon_\varepsilon^i$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta z_\varepsilon = 0 & \text{в} \quad \Omega_\varepsilon^i, \\ z_\varepsilon = 0 & \text{на} \quad \Upsilon_\varepsilon^i, \\ z_\varepsilon = \varphi & \text{на} \quad \gamma_\varepsilon^i, \\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega_\varepsilon^i \setminus T_\varepsilon^i, \\ \|\varphi\|^2_{L_2(\gamma_\varepsilon^i)} = \varepsilon. \end{cases}$$

Растянем область Ω^i_ε с помощью замены координат $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$. Обозначим $v_\varepsilon(\xi) := z_\varepsilon(\varepsilon\xi), \quad \widetilde{\varphi}(\xi) := \varphi(\varepsilon\xi)$, растянутую область через Ω^i, а для соответствующих растянутых участков границы будем использовать исходные обозначения без индекса ε. Задача для v_ε имеет вид

$$\begin{cases} \Delta v_\varepsilon = 0 \qquad \text{в} \qquad \Omega^i, \\ v_\varepsilon = 0 \qquad \text{на} \qquad \Upsilon^i, \\ v_\varepsilon = \widetilde{\varphi} \qquad \text{на} \qquad \gamma^i, \\ \dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{на} \qquad \partial\Omega^i \setminus T^i, \\ \|\widetilde{\varphi}\|^2_{L_2(\gamma^i)} = 1. \end{cases} \tag{2.2.15}$$

Лемма 2.2.2. *Имеет место формула*

$$\int\limits_{T^i} v_\varepsilon(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 = \text{const} = \int\limits_{T^i} \widetilde{\varphi} d\xi_1 =: C^\varepsilon_\infty. \tag{2.2.16}$$

Доказательство. Рассмотрим часть области Ω^i, которую обозначим $\vartheta = \{\xi \in \Omega^i \ : \ \xi_2 > \xi_2^*\}$.

$$0 = \int\limits_\vartheta \Delta v_\varepsilon d\xi = -\int\limits_{\{\xi_2 = \xi_2^*\}} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2^*) d\xi_1, \tag{2.2.17}$$

т.е.

$$\frac{d}{d\xi_2} \int\limits_{\{\xi_2 = \xi_2^*\}} v_\varepsilon(\xi_1, \xi_2^*) d\xi_1 = 0 \qquad \forall \xi_2^*. \tag{2.2.18}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{T^i} v_\varepsilon(\xi_1, 0) d\xi_1 = \text{const} = \int\limits_{T^i} \widetilde{\varphi} d\xi_1. \tag{2.2.19}$$

Лемма доказана. □

Из леммы 2.2.2 и условий задачи (2.2.15) следует, что

$$C^\varepsilon_\infty = \int\limits_{T^i} \widetilde{\varphi} d\xi_1 \leq \sqrt{|\gamma^i|} \|\widetilde{\varphi}\|^2_{L_2(\gamma^i)} = \sqrt{|\gamma^i|}. \tag{2.2.20}$$

По принципу максимума и по лемме Хопфа-Олейник (см., например, [53]) максимум (минимум) функции v_ε может достигаться только на T^i. Легко проверить, что функция $M(\xi_2^*) = \max\limits_{\Omega^i;\xi_2=\xi_2^*} v_\varepsilon(\xi)$ монотонно убывает по ξ_2^*, а функция $m(\xi_2^*) = \min\limits_{\Omega^i;\xi_2=\xi_2^*} v_\varepsilon(\xi)$ монотонно возрастает.

Рассмотрим разность $\mathbf{osc}_{N+1}(v_\varepsilon) = M(N+1) - m(N+1)$. Без ограничения общности считаем, что $m(N) = 0$. Далее будем использовать неравенство Харнака в следующей форме (см. [129]):

$$m(N+1) \geq \alpha M(N+1), \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{2.2.21}$$

Используя неравенство (2.2.21) и монотонность, оцениваем

$$\begin{aligned}\mathbf{osc}_{N+1}(v_\varepsilon) &\leq M(N+1) - \alpha M(N+1) = M(N+1)(1-\alpha) \leq \\ &\leq M(N)(1-\alpha) = (M(N) - m(N))(1-\alpha) = \\ &= (1-\alpha)\ \mathbf{osc}_N(v_\varepsilon) \leq (1-\alpha)^N\ \mathbf{osc}_1(v_\varepsilon) = \\ &= e^{N\ln(1-\alpha)}\ \mathbf{osc}_1(v_\varepsilon) = e^{-\theta N}\ \mathbf{osc}_1(v_\varepsilon), \quad \theta > 0.\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

В силу эллиптических оценок (см., например, [129]) имеем $|\mathbf{osc}_1(v_\varepsilon)| \leq K_0\|\widetilde{\varphi}\|^2_{L_2(\gamma^i)}$. Таким образом,

$$\mathbf{osc}_{N+1}(v_\varepsilon) \leq K_0\|\widetilde{\varphi}\|^2_{L_2(\gamma^i)} e^{-\theta N}, \quad \theta > 0. \tag{2.2.23}$$

Из (2.2.23) следует, что для любого $\delta > 0$ существует N_0 такое, что $\mathbf{osc}_{N_0}(v_\varepsilon) = \delta$.

Запишем следующее очевидное неравенство:

$$(v_\varepsilon(\xi_1, N_0) - \widetilde{\varphi}(\xi_1))^2 = \left(\int\limits_0^{N_0} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \xi_2} d\xi_2\right)^2 \leq N_0 \int\limits_0^{N_0} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \xi_2}\right)^2 d\xi_2. \tag{2.2.24}$$

Интегрируя (2.2.24) по T^i, получаем

$$\int\limits_{T^i}\left(\frac{C^\varepsilon_\infty}{|T^i|}+(v_\varepsilon(\xi_1,N_0)-\frac{C^\varepsilon_\infty}{|T^i|})-\widetilde{\varphi}(\xi_1)\right)^2 d\xi_1=$$
$$=\frac{(C^\varepsilon_\infty)^2}{|T^i|}+\int\limits_{T^i}\left(v_\varepsilon(\xi_1,N_0)-\frac{C^\varepsilon_\infty}{|T^i|}\right)^2 d\xi_1+\int\limits_{T^i}|\widetilde{\varphi}(\xi_1)|^2 d\xi_1+$$
$$+2\frac{C^\varepsilon_\infty}{|T^i|}\int\limits_{T^i}\left(v_\varepsilon(\xi_1,N_0)-\frac{C^\varepsilon_\infty}{|T^i|}\right)d\xi_1-2\frac{C^\varepsilon_\infty}{|T^i|}\int\limits_{T^i}\widetilde{\varphi}(\xi_1)d\xi_1- \tag{2.2.25}$$
$$-2\int\limits_{T^i}\widetilde{\varphi}(\xi_1)\left(v_\varepsilon(\xi_1,N_0)-\frac{C^\varepsilon_\infty}{|T^i|}\right)d\xi_1\le N_0\int\limits_{T^i}\int\limits_0^{N_0}\left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\xi_2}\right)^2 d\xi.$$

Используя (2.2.15) и (2.2.16), переписываем неравенство (2.2.25) в виде

$$\frac{(C^\varepsilon_\infty)^2}{|T^i|}+\delta^2+1+0-2\frac{(C^\varepsilon_\infty)^2}{|T^i|}+\mathcal{O}(\delta)\le N_0\int\limits_{T^i}\int\limits_0^{N_0}|\nabla_\xi v_\varepsilon|^2 d\xi. \tag{2.2.26}$$

Поскольку $\delta^2>0$, можно переписать неравенство (2.2.26), усилив его. Имеем

$$\frac{1-\frac{(C^\varepsilon_\infty)^2}{|T^i|}+\mathcal{O}(\delta)}{N_0}\le\int\limits_{T^i}\int\limits_0^{N_0}|\nabla_\xi v_\varepsilon|^2 d\xi\le\int\limits_{\Omega^i}|\nabla_\xi v_\varepsilon|^2 d\xi.$$

Имея в виду (2.2.15) и (2.2.20), окончательно получаем

$$\frac{1-\frac{(\sqrt{|\gamma^i|})^2}{|T^i|}}{N_0}=\frac{1-\frac{|\gamma^i|}{|T^i|}}{N_0}\int\limits_{\gamma^i}\widetilde{\varphi}^2 d\xi_1\le\int\limits_{\Omega^i}|\nabla_\xi v_\varepsilon|^2 d\xi.$$

Делаем обратную замену переменных

$$\frac{\mathcal{K}}{\varepsilon}\int\limits_{\gamma^i_\varepsilon}\varphi^2 dx_1\le\frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^2\int\limits_{\Omega^i_\varepsilon}|\nabla_x u_\varepsilon|^2 dx.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (2.2.13) с константой $C_\varepsilon = \frac{\mathcal{K}}{\varepsilon}$, и нижняя оценка для λ_ε^1 получена.

Слабая сходимость функции u_ε^1 к нулю в $H^1(\Omega)$ следует непосредственно из интегрального тождества (2.2.9). Сильная сходимость в $L_2(\Omega)$ вытекает из теоремы вложения Соболева (см., например, [67]).

Теорема 2.2.2 доказана полностью. $\square$

Заключение

В работе проведено исследование сингулярно возмущённых спектральных задач типа Стеклова в плоских ограниченных областях с быстрой сменой типа граничного условия. Предполагалось, что на границе области быстро меняются (чередуются) спектральное условие Стеклова и однородное краевое условие Дирихле.

Дана полная классификация случаев предельного поведения собственных значений и собственных функций для локально периодического возмущения спектральной задачи Стеклова. Исследовано предельное поведение собственных значений и собственных функций для непериодического возмущения спектральной задачи типа Стеклова как в случае вырождения спектра, так и в случае предельного классического условия Стеклова. Проведено доказательство теорем усреднения для исследуемых сингулярно возмущённых задач. Изучены асимптотики собственных значений и собственных функций сингулярно возмущённой задачи Стеклова.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [63], [82], [83], [84], [85] и [100].

Интересным остаётся вопрос о поведении собственных значений и собственных функций аналогичных задач в многомерных областях, как ограниченных, так и неограниченных. А также о сходимости полюсов аналитического продолжения решений к собственным значениям усреднённых задач для неограниченных многомерных областей.

Литература

[1] Абдуллазаде Н.Н., Чечкин Г.А. О возмущении задачи Стеклова на малом участке границы // *Проблемы мат. анализа.* Т. **74**. 2013. С. 3–16.

[2] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. *Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.* М.: ИЛ. 1962.

[3] Беляев А.Г. *О сингулярно возмущенных краевых задачах.* Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. Москва: МГУ им. М.В.Ломоносова. 1990.

[4] Беляев А.Г. Усреднение граничной задачи с третьим краевым условием для уравнения Пуассона в области, перфорированной вдоль границы // *Успехи матем. наук.* Т. **45**. № 4. 1990. С. 123.

[5] Беляев А.Г., Чечкин Г.А. Усреднение смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в случае, когда предельная задача неразрешима // *Мат. Сборник.* Т. **186**. № 4. 1995. С. 47–60.

[6] Беляев А.Ю., Чечкин Г.А. Усреднение операторов с мелкомасштабной структурой граничного слоя // *Мат. Заметки.* Т. **65**. № 4. 1999. С. 496–510.

[7] Бикметов А.Р. Асимптотика собственных элементов граничных задач для оператора Шрёдингера с большим потенциалом, локализованном на малом множестве // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. **46**. № 4. 2006. С. 667–682.

[8] Бикметов А.Р. *Асимптотические разложения собственных элементов оператора Шредингера с возмущением, локализованном на малом множетве.* Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. Уфа: БашГПУ. 2008.

[9] Борисов Д.И. Двухпараметрическая асимптотика в граничной задаче для Лапласиана // *Матем. заметки.* Т. **70**. № 4. 2001. С. 520–534.

[10] Борисов Д.И. О сингулярно возмущённой краевой задаче для Лапласиана в цилиндре // *Дифф. Уравн.* Т. **38**. № 8. 2002. С. 1071–1078.

[11] Борисов Д.И. О Лапласиане с быстро непериодически меняющимися граничными условиями // *Доклады АН.* Т. **383**. № 4. 2002. С. 443–445.

[12] Борисов Д.И. О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий // *Мат. сборник.* Т. **193**. № 7. 2002. С. 37–68.

[13] Борисов Д.И. Двупараметрические асимптотики собственных чисел Лапласиана с частым чередованием граничных условий // *Вестник молодых ученых. Серия прикладная математика и механика.* № 1. 2002. С. 36–52.

[14] Борисов Д.И. Асимптотики и оценки собственных элементов лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий // *Изв. РАН. Сер. матем.* Т. **67**. № 6. 2003. С. 23–70.

[15] Борисов Д.И. Асимптотики и оценки скорости сходимости в трёхмерной краевой задаче с быстро меняющимися граничными условиями // *Сиб. Мат. Журнал.* Т. **45**. № 2. 2004. С. 247–294.

[16] Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р. О спектре Лапласиана с быстро меняющимися граничными условиями // *Теор. Мат. Физ.* Т. **118**. № 3. 1999. С. 347–353.

[17] Владимиров В.С. *Уравнения Математической Физики.* М: Наука. 1976.

[18] Гадыльшин Р.Р. Асимптотика собственного значения с ингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметорм в граничном условии // *Дифференц. уравнения.* Т. **22**. № 4. 1986. С. 640–652.

[19] Гадыльшин Р.Р. Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // *Матем. заметки.* Т. **52**. № 4. 1992. С. 42–55.

[20] Гадыльшин Р.Р. О собственных частотах тел с тонкими отростками. I. Сходимость и оценки // *Матем. заметки.* Т. **54**. № 6. 1993. С. 10–21.

[21] Гадыльшин Р.Р. Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны // *Алгебра и анализ.* Т.**10**. № 1. 1998. С. 3–19.

[22] Гадыльшин Р.Р. О краевой задаче для лапласиана с быстро осциллирующими граничными условиями // *Докл. РАН.* Т. **362**. № 4. 1998. С. 456–459.

[23] Гадыльшин Р.Р. Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстроосциллирующими граничными условиями // *Дифференц. уравнения.* Т. **35**. № 4. 1999. С. 540–551.

[24] Гадыльшин Р.Р. Усреднение и асимптотики для мембраны с близко расположенными точками закрепления // *ЖВМ и МФ.* Т. **41**. № 12. 2001. С. 1857–1869.

[25] Гадыльшин Р.Р. Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задаче для оператора Лапласа // *Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прилож. Тематические обзоры.* Т. **5**. 2003. С. 3–32.

[26] Гадыльшин Р.Р. Метод сходимости асимптотических разложений в сингулярно–возмущенной граничной задаче для оператора Лапласа // *Ж. Мат.Наук.* Т. **125**. № 5. 2005. С. 579–609.

[27] Гадыльшин Р.Р., Королева Ю.О., Чечкин Г.А. О собственном значении лапласиана в области, перфорированной вдоль границы // *Доклады РАН.* Т. **432**. № 1. 2010. С. 1–5.

[28] Гадыльшин Р.Р., Чечкин Г.А. Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерой области // *Сиб. Мат. Журнал.* Т. **40**. № 2. 1999. С. 271–287.

[29] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия. Методы и приложения.* М.: Наука. 1986.

[30] Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. *Усреднение дифференциальных операторов.* Москва: ФизМатЛит. 1993.

[31] Ильин А.М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай // *Матем. Сб.* Т. **99(141)**. № 4. 1976. С. 514–537.

[32] Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука. 1989.

[33] Иосида К. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1967.

[34] Иосифьян Г.А., Олейник О.А., Шамаев А.С. Асимптотические разложения решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений и систем теории упругости в перфорированной области // *Доклады АН СССР.* Т. **284**. № 5. 1985. С. 1062–1066.

[35] Иосифьян Г.А., Олейник О.А., Шамаев А.С. О предельном поведении спектра последовательности операторов, определенных в различных гильбертовых пространствах // *Успехи мат.наук.* Т. **44**. № 3. 1989. С. 157–158.

[36] Исаков Р.В. Асимптотика спектральной серии задачи Стеклова для уравнения Лапласа в "тонкой" области с негладкой границей // *Мат. Заметки.* Т. **44**. № 5. 1988. С. 694–696.

[37] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* М: Мир. 1972.

[38] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука. 1989.

[39] Кондратьев В.А., Олейник О.А. О периодических по времени решениях параболического уравнения второго порядка во внешних областях // *Вестник МГУ. Матем., механ.* Т. **4**. 1985. С. 38–47.

[40] Королева Ю.О. О неравенстве Фридрихса в трехмерной области, непериодически перфорированной вдоль части границы // *Успехи мат.наук.* Т. **65**. № 2. 2010. С. 181–183.

[41] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* М.: Наука. 1987.

[42] Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука. 1973.

[43] Ламонов С.А. Сходимость решений первой граничной задачи для квазилинейных эллиптических уравнений в областях с мелкозернистой границей // *Мат. Физ. Нелин. Мех.* Т. **36**. № 2. 1984. С. 60–63.

[44] Ларин Д.В. Вырожденная квазилинейная задача Дирихле для областей с мелкозернистой границей. Случай поверхностного распределения "зёрен" // *Моделирование непрерывных и дискретных систем. Труды института прикладной математики и механики.* Т. **2**. 1998. С. 104–115.

[45] Мазья В.Г. *Пространства С.Л.Соболева.* Ленинград: Изд-во ЛГУ. 1985.

[46] Марченко В.А., Хруслов Е.Я. *Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.* Киев: Наукова думка. 1974.

[47] Марченко В.А., Хруслов Е.Я. *Усреднённые модели микронеоднородных сред.* Киев: Наукова думка. 2005.

[48] Михайленко В.Г. Краевые задачи с мелко-зернистой границей для эллиптического дифференциального оператора второго порядка. I, II // *Теория функций, функциональный анализ и приложения.* № 6. 1968. С. 93–110, № 9. 1969. С. 75–84.

[49] Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука. 1983.

[50] Назаров С.А. Соединение сингулярно-вырождающихся областей различных предельных размерностей // *Тр. семинара им. И. Г. Петровского.* Т. **18**. М.: Изд-во Моск. Университета. 1995. С. 3–78.

[51] Назаров С.А., Пламеневский Б.А. *Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей.* М.: Наука. 1991.

[52] Назаров С.А., Таскинен Я. О спектре задачи Стеклова в области с пиком // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1.* № 1. 2008. С. 56–65.

[53] Олейник О.А. *Лекции об уравнениях с частными производными. Классический университетский учебник.* Москва: Изд. БИНОМ. Лаборатория знаний. 2005.

[54] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред.* М.: Изд-во Моск. ун-та. 1990.

[55] Олейник О.А., Чечкин Г.А. О краевых задачах для эллиптических уравнений с быстро меняющимся типом граничных условий // *Успехи мат. наук.* Т. **48**. № 6. 1993. С. 163–164.

[56] Олейник О.А., Чечкин Г.А. Об одной задаче граничного усреднения для системы теории упругости // *Успехи мат. наук.* Т. **49**. № 4. 1994. С. 114.

[57] Перез М.-Е., Чечкин Г.А., Яблокова Е.И. О собственных колебаниях тела с "лёгкими" концентрированными массами на поверхности // *Успехи мат. наук.* Т. **57**. № 6(348). 2002. С. 195–196.

[58] Планида М.Ю. О сходимости решений сингулярно возмущённых краевых задач для лапласиана // *Матем. заметки.* Т. **71**. № 6. 2002. С. 867–877.

[59] Планида М.Ю. Об асимптотике собственных значений лапласиана в области с граничным условием Неймана на вырезанной тонкой трубке // *Ж. Выч. мат. и мат. физики.* Т. **44**. № 4. 2004. С. 745–758.

[60] Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С. *Усреднение. Методы и приложения. Белая серия в математике и физике.* Новосибирск: Независимый издатель Тамара Рожковская. 2007.

[61] Садовничий В.А. *Теория операторов. 5-е изд. Классический университетский учебник.* Москва: Изд-во Мос. ун-та, "Дрофа". 2004.

[62] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Гугина Е.М Новый подход к обоснованию метода Фурье в смешанной задаче для одного сингулярного дифференциального уравнения в частных производных // *Доклады РАН.* Т. **384**. № 5. 2002. С. 598–600.

[63] Садовничий В.А., Чечкина А.Г. Об оценке собственных функций задачи типа Стеклова с малым параметром в случае предельного вырождения спектра // *Уфимский математический журнал.* Т. **3**. № 3. 2011. С. 127–139.

[64] Скрыпник И.В. *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач.* М.: Наука. 1990.

[65] Скрыпник И.В. Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических задач в областях с отверстиями // *Мат. Сб.* Т. **184**. № 10. 1993. С. 67–90.

[66] Скрыпник И.В. Новые условия для усреднения нелинейных задач Дирихле в областях с отверстиями // *Укр. Мат. Ж.* Т. **48**. № 5. 1996. С. 675–694.

[67] Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука. 1988.

[68] Соболев С.Л. *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщённых функций.* М: Наука. 1989.

[69] Стеклов В. А. *Общие методы решения основных задач математической физики.* Диссертация на соискание учёной степени д.ф.-м.н. Харьков: Харьковский Императорский университет. 1901.

[70] Уличевич Т. Об асимптотическом поведении решений в полуцилиндре с краевыми условиями смешанного типа для нелинейного эллиптического уравнения // *Вестник Мос. Ун-та. Серия 1. Мат. и Мех.* № 2. 1996. С. 94–98.

[71] Черданцев М.И. Асимптотика собственного значения оператора Лапласа в области с сингулярно возмущенной границей // *Матем. заметки.* Т. **78**. № 2. 2005. С. 299–307.

[72] Чечкин Г.А. О краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка с осциллирующими граничными условиями // *Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных.* Новосибирск: ИМ СОАН СССР. 1988. С. 95–104.

[73] Чечкин Г.А. О частично закрепленной мембране // *Бюллетень СМО.* Новосибирск. 1989. С. 30–32.

[74] Чечкин Г.А. Спектральные свойства эллиптической задачи с быстро осциллирующими граничными условиями // *Краевые задачи для неклассических уравнений в частных производных.* Новосибирск: ИМ СОАН СССР. 1989. С. 197–200.

[75] Чечкин Г.А. *Эллиптические граничные задачи с часто меняющимся типом граничных условий.* Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. Москва: МГУ им.М.В.Ломоносова. 1992.

[76] Чечкин Г.А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // *Мат. сборник.* Т. **184**. № 6. 1993. С. 99–150.

[77] Чечкин Г.А. Асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий // *Труды семинара им. И.Г.Петровского.* Т. **19**. 1996. С. 323–337.

[78] Чечкин Г.А. Оценка решений граничных задач в областях с концентрированными массами, расположенными периодически вдоль границы: случай легких масс // *Мат. заметки.* Т. **76**. № 6. 2004. С. 928–944.

[79] Чечкин Г.А. Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе "лёгких" концентрированных масс. Двумерный случай // *Известия РАН. Серия математическая.* Т. **69**. № 4. 2005. С. 161–204.

[80] Чечкин Г.А. Асимптотическое разложение собственных элементов оператора Лапласа в области с большим количеством "лёгких" концентрированных масс, редко расположенных на границе. Двумерный случай // *Труды Моск. Мат. Об-ва.* Т. **70**. 2009. С. 102–182.

[81] Чечкин Г.А., Чечкина Т.П. Плоский скалярный аналог линейной вырождающейся гидродинамической задачи с непериоди-

ческой микроструктурой на свободной поверхности // *Проблемы математического анализа.* Т. **78**. 2015. С. 201–213.

[82] Чечкина А.Г. О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи типа Стеклова с быстро меняющимся типом граничных условий // *Проблемы Мат. Анализа.* Т. **42**. 2009. С. 129–143.

[83] Чечкина А.Г. Теорема усреднения для эллиптического уравнения второго порядка с быстрой непериодической сменой типа граничных условий // *Математические методы решения инженерных задач.* Москва: Изд-во МО. 2010. С. 88–108.

[84] Чечкина А.Г. О сингулярном возмущении задачи типа Стеклова с вырождающимся спектром // *Доклады РАН.* Т. **440**. № 5. 2011. С. 603–606.

[85] Чечкина А.Г. Вырождающиеся задачи Стеклова с микронеоднородной структурой // В *Сборнике тезисов Международной конференции "Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений", посвящённой 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Россия, Новосибирск, 2013, 18–24 августа).* Новосибирск: Изд. Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН. 2013. С. 289. (ISBN 978-586134-139-4).

[86] Чечкина Т.П. Скалярная гидродинамическая задача с непериодически расположенными концентрированными массами на поверхности // *Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ".* Т. **4**. № 1. 2015. С. 25–34.

[87] Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl'shin R.R. Asymptotics of simple eigenvalues and eigenfunctions for the Laplace operator in a domain with oscillating boundary // *J. Comp. Math. Math. Ph.* V. **46**. № 1. 2006. P.102–115.

[88] Arató N.M. Limit Boundary Value Problems in Regions with Random Fine Grained Boundaries // *Appl. Math. Lett.* V. **8**. № 4. 1995. P. 1–6.

[89] Belyaev A.G., Chechkin G.A., Gadyl'shin R.R. Effective membrane permeability: estimates and low concentration asymptotics // *SIAM J. Appl. Math.* V. **60**. № 1. 2000. P. 84–108.

[90] Bonder J.F., Groisman P., Rossi J.D. Optimization of the first Steklov eigenvalue in domains with holes: a shape derivative approach //*Ann. Math. Pura Appl.* V. **4(186)**. № 2. 2007. P. 341–358.

[91] Borisov D.I. The asymptotics of the eigenelements of the Laplacian in a cylinder with frequently oscillating boundary conditions // *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. IIb.* V. **329**. № 10. 2001. P. 717–721.

[92] Borisov D.I. On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition // *Asymptotic Analysis.* V. **35**. № 1. 2003. P. 1–26.

[93] Brennen S.C., Wang K., Zhao J. Poincare–Friedrichs Inequalities for Piecewise H^2 Functions // *Numer. Funct. Anal. Optimization.* V. **25**. № 5–6. 2004. P. 463–478.

[94] Chechkin G.A., Chechkina T.P., D'Apice C., De Maio U. Homogenization in Domains Randomly Perforated Along the Boundary // *Descrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. B (DCDS-B).* V. **4**. № 12. 2009. P. 713–730.

[95] Chechkin G.A., Doronina E.I. On the Asymptotics of the Spectrum of a Boundary Value Problem with Nonperiodic Rapidly Alternating Boundary Conditions // *Funct. Differ. Equ. (Eds. E. Mitidieri, S. Pohozaev, A. Skubachevskii).* New York: Marcel Dekker. V. **8**. № 1–2. 2001. P. 111–122.

[96] Chechkin G.A., Gadylshin R.R. On boundary-value problems for the Laplacian in bounded domains with micro inhomogeneous structure of the boundaries // *Acta Math. Sin. Engl. Ser.* V. **23**. № 2. 2007. P. 237–248.

[97] Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Meidell A., Persson L.-E. On the Friedrichs inequality in a domain perforated nonperiodically along the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics in parabolic problems // *Russ. J. Math. Phys.* V. **16**. № 1. 2009. P. 1–16.

[98] Chechkin G.A., Koroleva Yu.O., Persson, L.-E. On the Precise Asymptotics of the Constant in the Friedrichs Inequality for Functions Vanishing on the Part of the Boundary with Microinhomogeneous Structure // *Journal of Inequalities and Applications.* V. **2007**. Article ID 34138. 13 pages.

[99] Chechkin G.A., Oleinik O.A. On Asymptotics of Solutions and Eigenvalues of the Boundary Value Problems with Rapidly Alternating Boundary Conditions for the System of Elasticity // *Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni. Serie IX.* V. **7**. № 1. 1996. P. 5–15.

[100] Chechkina A.G. Homogenization problems for the second order elliptic equation with aperiodic rapidly alternating inhomogeneous boundary conditions // *Narvik University College R&D Report.* № 1. 2010. 17 pages.

[101] Chechkina A., Pankratova I., Pettersson K. Spectral asymptotics for a singularly perturbed fourth order locally periodic self-adjoint elliptic operator // *ArXiv e-prints.* V. **1**. № 1408.3627. 18 pages.

[102] Chechkina A., Pankratova I., Pettersson K. Spectral asymptotics for a singularly perturbed fourth order locally periodic

elliptic operator // *Asymptotic Analysis. I O S press (Netherlands).* V. **93**. № 1–2. P. 141–160

[103] Chiado Piat V., Nazarov S., Piatnitski A. Steklov problems in perforated domains with coefficient of indefinite sign // *Networks Heter. Media.* V. **7**. № 1. 2012. P. 151–178.

[104] Cioranescu D., Murat F. Un terme etrange venu d'ailleurs I, II. // In: *Nonlinear partial differential equations and their applications. College de France Seminar, Res. Notes Math.* V. **60**. № 2. 1982. P. 98–138, V. **70**. № 3. 1982. P. 154–178.

[105] Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics.* New York: Wiley. 1989.

[106] Damlamian, A., Li Ta-Tsien. Homogénéisation sur le bord pour des problèmes elliptiques // *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math.* V. **299**. № 17. 1984. P. 859–862. [in French]

[107] Damlamian A., Li Ta-Tsien. Boundary homogenization for elliptic problems // *J. Math. Pures Appl.* V. **66**. № 4. 1987. P. 351–361.

[108] Dàvila J. A nonlinear elliptic equation with rapidly oscillating alternating boundary conditions // *Asymptotic. Anal.* V. **28**. № 3–4. 2001. P. 279–307.

[109] Del Vecchio T. The thick Neumann's Sieve // *Ann. Mat. Pura Appl.* V. **147**. № 4. 1987. P. 363–402.

[110] Friedman A., Huang Chao Cheng, Yong Jiong Min. Effective permeability of the boundary of a domain // *Comm. Partial Differential Equations.* V. **20**. № 1–2. 1995. P. 59–102.

[111] Friedrichs K. Spectraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spectralzlegung von Differentialoperatoren. I, II // *Math. Anal.* V. **109**. 1934. P. 463–487, 685–713.

[112] Gadyl'shin R.R. Asymptotics of the minimum egenvalue for a circle with fast oscillating boundary conditions // *C. R. Acad. Sei. Paris. Ser. I.* V. **323**. № 3. 1996. P. 319–323.

[113] Gazzola F., Sweers G. On positivity for the biharmonic operator under Sleklov boundary conditions // *Arch. Ration. Mach. Anal.* V. **188**. № 3. 2008. P. 399–427.

[114] Hardy G. H. Notes on some points in the integral calculus, LX, An inequality between integrals // *Messenger of Math.* V. **54**. 1925. P. 150–156.

[115] Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. *Inequalities. 2nd ed.* Cambridge: Cambridge University Press. 1952.

[116] Kacimi H., Murat F. Estimation de l'erreur dans des problems de Dirichlet ou apparait un terme etrange // In: *Progress in Non-linear Differential Equations and Their Applications. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations. Volume II. Essays in Honor of Ennio De Giorgi. Birkhäuser.* Boston. Basel. Berlin. 1989. P. 661–696.

[117] Kokilashvili V., Meskhi A., Persson L.-E. *Weighted Norm Inequalities for Integral Transforms with Product Kernels.* Nova Science Publishers, Inc. 2009.

[118] Kufner A. *Weighed Sobolev Spaces.* John Wiley and Sons. 1985.

[119] Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. *The Hardy Inequality. About its History and some Related Results.* Pilsen: Vydavetelsky Servis Publishing House. 2007.

[120] Kufner A., Persson L.-E. *Weighed Inequalities of Hardy Type.* New Jersey-London-Singapore-Hong Kong: World Scientific. 2003.

[121] Landkof N.S. *Foundations of Modern Potential Theory.* Berlin–New York: Springer-Verlag. 1972.

[122] Lobo M., Oleinik O.A., Pérez M.E., Shaposhnikova T.A. On Homogenization of Solutions of Boundary Value Problems in Domains, Perforated Along Manifolds // *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. IV Ser.* V. **25**. № 3–4. 1997. P. 611–629.

[123] Lobo M., Pérez M.E. Asymptotic Behavior of an Elastic Body With a Surface Having Small Stuck Regions // *Math Modelling Numerical Anal.* V. **22**. № 4. 1988. P. 609–624.

[124] Lobo M., Pérez, M.E. Boundary Homogenization of certain elliptical problems for cylindrical bodies // *Bull. Soc. Math. Ser. 2.* V. **116**. № 3. 1992. P. 399–426.

[125] Nazarov A.I. The one-dimentional character of an extremum point of the Friedrichs inequality in spherical and plane layers // *J. Math. Sci.* V. **102**. № 5. 2000. P. 4473–4486.

[126] Nečas J. Sur une méthode pour résourde les équations aux dérivées partielle du type elliptique, voisine de la variationelle // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.* V. **16**. 1962. P. 305–362.

[127] Opic B., Kufner A. *Hardy-Type Inequalities.* Harlow: Longman. 1990.

[128] Ozawa S. Approximation of Green's Function in a Region with Many Obstacles. Geometry and Analysis of Manifolds (Katata/Kyoto, 1987) // *Lect. notes in Math.* V. **1339**. Berlin: Springer Verlag. 1988. P. 212–225.

[129] Pankratova I., Piatnitski A. On the behavior at infinity of solutions to stacionary convection–diffusion equation in a cylinder // *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B.* V. **11**. № 4. 2009. P. 935–970.

[130] Pérez, M.E. On periodic Steklov type eigenvalue problems on half-bands and the spectral homogenization problem // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.* V. **7**. № 4. 2007. P. 859–883.

[131] PÓLYA G., SZEGÖ G. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Princeton: Princeton Univ. Press. 1951.

[132] SÁNCHEZ–PALENCIA E. Boundary value problems in domains containing perforated walls. // *Nonlinear partial differential equations and their applications. Coll. de France Semin., Res. Notes Math.* V. **70** № 3. 1982. P. 309–325.

[133] SKRYPNIK I.V., NAMLEEVA YU.V. Convergence of Eigenvalues and Eigenfunctions of Nonlinear Dirichlet Problems in Domains with Fine–Grain Boundary // *Ukrainian Math. J.* V. **55**. № 6. 2003. P. 993–1011.

[134] STEKLOFF, W. Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. (French) Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 19 (1902), 191–259, 455–490.

[135] TEMAM R. *On the Theory and Numerical Analysis of the Navier-Stokes Equations.* College Park, MD: University of Maryland. 1974.

[136] THOMAS J.-M. *Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybtides et mixtes.* Ph.D. Dissertation. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6). 1977.

[137] VOHRALIK M. On the Discrete Poincare–Friedrichs Inequalities for Nonconforming Approximations of the Sobolev Space H^1 // *Numer. Funct. Anal. Optimization.* V. **26**. № 7–8. 2005. P. 925–952.

[138] WANNEBO A. Hardy Inequalities and Imbedding in Domains Generalizing $C^{0,\lambda}$ Domains // *Proc. Amer. Math. Soc.* V. **122**. 1994. P. 1181–1190.

[139] ZHENG W., QI H. On Friedrichs–Poincare–type Inequalities // *J. Math. Anal. Appl.* V. **304**. 2005. P. 542–551.