Отзыв

официального оппонента на диссертацию Чечкиной Александры Григорьевны «О сингулярных возмущениях спектральной задачи Стеклова», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Тема диссертации относится к построению и всестороннему исследованию свойств решений краевых и спектральных задач для эллиптического оператора Лапласа с переменным типом краевых условий на границе двумерной области. В работе рассматривается ситуация, когда смена типа краевых условий – Дирихле и Неймана – происходит на мелких, но густо расположенных участках границы области. Возникающая асимптотическая задача о предельном поведении решений и/или спектра является естественным распространением задач теории усреднения дифференциальных операторов в областях с мелкомасштабной структурой на псевдодифференциальные операторы, к которым относится оператор Ляпунова, отображающий след гармонической функции на границе области в след ее нормальной производной. В практических приложениях стационарные, нестационарные и спектральные задачи для эллиптических операторов с переменным типом граничных условий возникают, например, в теории фильтрации при описании движения поверхности грунтовых вод в линеаризованной постановке, а также в при решении некоторых инженерных проблем акустики и электродинамики.

В последние 10-15 лет разнообразным проблемам усреднения задач с мелкомасштабной структурой граничных условий уделяется много внимания, и интерес специалистов к математическому анализу этих проблем не ослабевает. Работа соискателя хорошо вписывается в круг этих интересов. Таким образом, **актуальность** темы не вызывает никаких сомнений.

Основной **целью** рецензируемой работы является разработка методов асимптотического анализа эллиптической задачи с мелкомасштабной периодической и непериодической структурой граничных множеств, на которых происходит смена типа краевых условий. Рассматриваются задачи как с заданной правой частью в краевом условии Неймана, так и спектральная, в которой спектральный параметр входит в граничное условие. А именно, на некоторой последовательности замкнутых подмножеств Γ_D^{ε} границы двумерной области Ω для гармонической в области функции u задано нулевое условие Дирихле $u = 0$, а на оставшейся части границы – условие Неймана $\partial u / \partial n = g$ или, в спектральной задаче, соотношение $\partial u / \partial n = \lambda u$ для определения собственных значений $\lambda = \lambda_i$. и соответствующих собственных функций. Распределение множества Γ_D^ε на границе области при $\varepsilon \to 0$ имеет мелкомасштабную структуру. Канонический пример такой последовательности Γ_D^ε – это система отрезков малого зависящего от ε размера, распределенных на границе области с периодом $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$. В работе выводятся предельные задачи для главных членов асимптотики решений, собственных функций и собственных чисел задачи и строятся для них оценки погрешностей. Для классификации получающихся задач введен зависящий от структуры множества Γ_D^ε параметр θ_ε, который определяется через решение $V^\varepsilon(\cdot)$ некоторой вспомогательной краевой спектральной задачи для гармонической в нижней полуплоскости функции. В случае, когда множество Γ_D^ε состоит из отрезков длины $\varepsilon\delta$, распределенных с периодом δ по одномерной границе области, этот параметр имеет порядок $\theta_\varepsilon \sim |\ln \varepsilon|^{-1}$. Предельные задачи получаются разными при разных соотношениях между θ_ε и $\delta(\varepsilon)$. Наиболее простыми являются случаи $\theta_\varepsilon << \delta(\varepsilon)$ и $\theta_\varepsilon >> \delta(\varepsilon)$. Для них в предельных задачах, как неоднородной так и спектральной, из краевых условий пропадает условие Дирихле или условие Неймана соответственно. (В последнем случае спектр убегает на бесконечность, а решение неоднородной задачи стремится к нулю.) В работе дано обоснование сходимости с оценками погрешности для решений, собственных функций и собственных значений. При этом в указанных крайних случаях для доказательств можно отказаться от периодичности структуры граничных множеств Γ_D^ε, что и сделано во второй главе диссертации. Промежуточный же случай, т.е. $\theta_\varepsilon \sim \delta(\varepsilon)$, потребовал более сложных построений и, соответственно, периодической структуры Γ_D^ε в качестве дополнительного ограничения. В этом случае краевое условие на границе области для неоднородной задачи в пределе превращается в условие 3-го типа $\partial u / \partial n + pu = g$, а для спектральной задачи – в соотношение $\partial u / \partial n + pu = \lambda u$, где $p = \lim \theta_\varepsilon / \delta(\varepsilon)$. Вид предельной задачи и слабая в $W^{1,2}(\Omega)$ сходимость решений к пределу были известны ранее, по крайней мере для неоднородной задачи и для достаточно регулярных периодических граничных множеств Γ_D^ε. В диссертации предложен метод доказательства, в котором регулярность не требуется, а погрешности для решений неоднородной задачи и для собственных функций оцениваются через степени θ_ε и $|p - \theta_\varepsilon / \delta(\varepsilon)|$ в сильной топологии $W^{1,2}(\Omega)$. Кроме того, в этих же терминах даны оценки погрешностей собственных значений спектральной задачи. В этом заключается **новизна** результатов соискателя. Поскольку решения в рассматриваемом случае содержат пограничные слои, локализующиеся при $\varepsilon \to 0$ вблизи $\partial\Omega$, то для доказательства сильной в $W^{1,2}(\Omega)$ сходимости требуется добавлять к предельному решению корректор, который строится с помощью вышеупомянутой вспомогательной функции $V^{\varepsilon}(\cdot)$ и является в некотором смысле, например, в топологии $L_2(\Omega)$, следующим членом разложения решений и собственных функций по малому параметру.

Таким образом, полученные соискателем результаты основаны на высококвалифицированных теоретических подходах. **Достоверность** получаемых этими методами результатов представляется в достаточной мере обоснованной. Работа прошла апробацию в форме публикаций в печати и обсуждений на семинарах и конференциях.

Диссертация выполнена весьма качественно, и принципиальных претензий по ее содержанию у меня нет. Имеющиеся отдельные **замечания** можно отнести не к изложению основной темы, а к ряду пояснений или их отсутствию. Ниже приведен перечень замеченных неточностей.

1. В обзорной части Введения результаты некоторых работ, близких по постановкам задач к рецензируемой работе, например [130] или [28], сформулированы в слишком общих терминах без четкого указания принципиальных особенностей подхода соискателя. Было бы целесообразно давать к этим ссылкам более подробные пояснения, если не во Введении, то непосредственно по тексту. В частности, на стр.14 хорошо было бы отметить, что предельный вид задачи (1.1.7) для некоторых случаев обосновывался ранее.
2. Стр. 11. Описка: должно быть $\delta^{-1} \in N$ вместо $\varepsilon^{-1} \in N$.
3. На стр. 15 вверху на справедливость утверждения влияет способ нормировки собственной функции вспомогательной задачи $V_{\varepsilon}^{\delta}(\cdot)$, который не указан.

4. На странице 23 используется асимптотическая эквивалентность величин θ_{ε} и $\tilde{\theta}_{\varepsilon}$, относительно которой не ясно, предполагается она или утверждается.
5. На стр. 25 не указана нормировка собственной функции $V_{\varepsilon}(\xi)$.

6. Стр. 38 в предпоследней строчке выкладок пропущен сомножитель $\delta^{-1/2}$.
7. Стр. 41. В лемме 1.1.9 условие $p = \infty$ лишнее.
8. В автореферате при формулировке логарифмических оценок величины θ_{ε} не указаны достаточные условия на множество Γ_{ε}. В тексте диссертации на стр. 63 указано условие, достаточное для оценки сверху (Γ_{ε} содержится в отрезке длины порядка ε), а для оценки

снизу – нет. По контексту доказательства можно предположить, что имеется ввиду требование, чтобы Γ_ε содержало отрезок длины порядка ε, но явно это не указано.

9.. На стр. 64 текста диссертации и в автореферате собственные числа задачи Ляпунова нумеруются в порядке возрастания с учетом кратности $\lambda_1 \le \lambda_2 \le,,,$. В действительности должно быть $\lambda_1 < \lambda_2 \le,,,$, так как первое собственное число задачи Ляпунова простое.

10. На стр. 72 в т. 2.1.2 и на стр. 81 в лемме 2.1.3, утверждающих сходимость собственных функций, имеется неточность в формулировках: не указано, что u_0 не любая собственная функция предельной задачи, а одна из них.

11. Стр. 74. Непонятна формулировка леммы 2.1.1.

12. На стр. 80 описка: вместо $v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$ должно быть $v_\varepsilon = v\Psi_\varepsilon, v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}, \Gamma_2)$.

13. На стр. 96 в формулировке т. 2.2.2 о предельном поведении собственной функции не указан способ нормировки этой функции.

Сделанные замечания не умаляют ни значения выводов, ни хорошего впечатления от всей работы. Диссертация представляет высококвалифицированное научное исследование, имеющее большую практическую значимость и перспективы развития. Автор продемонстрировал хорошее владение предметом, позволяющее формулировать и решать новые проблемы. Решение поставленной в диссертации задачи является существенным вкладом в развитие методов теории усреднения операторов. Автореферат диссертации полностью соответствует содержанию диссертации и правильно отражает суть защищаемых положений. Основываясь на вышесказанном, можно с уверенностью заявить, что работа соответствует требованиям, предъявляемым ВАК РФ к кандидатским диссертациям, а ее автор Чечкина Александра Григорьевна заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент
ст.н.с. Института водных проблем РАН /к.ф.-м.н. А.Ю.Беляев/
Дата 12.11.2015

Подпись старшего научного сотрудника
Института водных проблем РАН Беляева Алексея Юрьевича заверяю.
Референт Института водных проблем РАН
Федорченко В.С.

Сведения об официальном оппоненте:

Беляев Алексей Юрьевич

к.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Институт водных проблем РАН

119333 г.Москва, у.Губкина, 3

Тел. +7-499-783-37-57

e-mail beliaev@iwp.ru