ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертационную работу
Чечкиной Александры Григорьевны
"О сингулярных возмущениях спектральной задачи Стеклова",
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 – "Вещественный, комплексный и функциональный анализ"

Диссертационная работы А.Г. Чечкиной посвящена изучению задачи Стеклова в ограниченной двумерной области с частым чередованием краевых условий. Работа состоит из двух глав. В первой главе рассматривается задача для уравнения Лапласа в произвольной двумерной области с частым периодическим чередованием краевых условий. Чередуются краевые условия Дирихле и Неймана. При этом первое краевое условие однородное, второе – неоднородное. Чередование описывается в терминах характерного малого параметра ε. Большая часть первой главы посвящена усреднению этой задачи. Основные результаты усреднения представлены в параграфе 1.2 в теоремах 1.2.1–1.2.6 и параграфе 1.3 в теореме 1.3.1. В теоремах параграфа 1.2 дана классификация возможных усреднённых задач. Это вновь задачи для уравнения Лапласа, но чередование заменяется на одно из классических краевых условий. Вид этого условия определяется геометрией чередования в исходной задаче, а именно, соотношением длин участков с разными типами краевых условий. Классификация усреднённого краевого условия выписывается в терминах специальной функции θ_ε, определённой формулой (1.1.4) на странице 14. Эта функция фактически является нижним собственным значением для оператора Лапласа в специальной фиксированной области с определенными краевыми условиями. В параграфе 1.3 рассматривается случай, когда усреднённая краевая задача неразрешима. В этой случае проводится регуляризация (видоизменение) усреднённой задачи и показывается, как описать сходимость исходной задачи в терминах решения регуляризованной усреднённой задачи. Данные результаты, формально будучи новыми, в свете известных работ по этой тематике являются весьма ожидаемыми и по сути получены применением известной техники к поставленной задачи. Основной же результат первой главы содержится в параграфе 1.5. Здесь рассматривается задача, аналогичная описанной выше, но с краевым условием Стеклова вместо неоднородного краевого условия Неймана. На основе описанных выше результатов с применением метода, предложенного О.А. Олейник, Г.А. Иосифьяном, А.С. Шамаевым. Основной полученный результат – теоремы сходимости для собственных значений рассматриваемой задачи и соответствующих собственных функций. Помимо утверждений о сходимости, выписаны и оценки скорости сходимости.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию спектральной задачи Стеклова в двумерной области с непериодическим чередованием краевых условий. Область произвольна, но предполагается, что часть границы области описывается отрезком. На нём и задается чередование краевых условий. Сами отрезки выбираются произвольным образом, налагаются лишь ограничения на их длины: длины отрезков с условием Дирихле должно быть порядка $|\ln\varepsilon|^{\delta-1}$, $\delta\in(0,1)$ – некоторая константа, длины отрезков с условием Стеклова – порядка ε. актически описанные выше предположения на чередование означают, что рассматривается случай, когда усреднение исключает из чередования первое краевое условие. Первая часть основных результатов второй главы содержатся в теоремах 2.1.1 и 2.1.2. В них описываются усреднённые краевые задачи, которые также являются задачами с условием Стеклова на всем куске границы, где ранее задавалось чередование. Доказана сходимость собственных значений и собственных функций исходной задачи к собственным значениям и собственным функциям усреднённой задачи. В разделе 2.2 рассматривается второй возможный случай, когда усреднение исключает из чередования условие Стеклова. Эта задача рассматривается для эллиптического оператора второго порядка дивергентного вида с переменными коэффициентами. Так как при усреднении условие Стеклова исключается, то усреднённая задача уже не является спектральной задачей Стеклова и фактически имеет нулевое решение. Это означает, что усреднённая задача, выписанная по аналогии со случаем чередования условия Дирихле и неоднородного условия Неймана, не описывает предельное поведение спектра. И действительно, согласно теореме 2.2.2, являющейся основным результатом в этой случае, все собственные значения растут как ε^{-1} при $\varepsilon\to+0$.

К работе имеется ряд замечаний:

1. Страница 8, строка 10 сверху. Во предложении “В частности, ...” пропущен предлог “в” перед “работах [9], [11], ...”

2. Страница 9, строка 5 снизу. Лишняя запятая после “вспомогательные леммы”.

3. Страница 15, окончание первой выносной формулы, выражение в скобках перед V_ε^δ. Скобки следовало сделать по размеру дробей внутри.

4. Страница 17, вторая выносная формула. Два равенства расположены слишком близко, между ними следовало бы поставить более широкий пробел.

5. Страницы 20-22, доказательство леммы 1.1.2. Почему нельзя было провести доказательство методом разделения переменных? Достаточно рассмотреть u как решение задачи с краевым условием Дирихле на основании полосы, использовав в качестве правой части условия след самой функции. После выписывания функции с помощью разделения переменных утверждение леммы становится прозрачным и очевидным. В частности, константа M – это коэффициент при первой поперечной моде.

6. Страница 35, описание формул Френе. В качестве функции $k(s)$ следует брать не саму кривизну, а так называемую знаковую кривизну. Стандартная кривизна положительна, так как определяется как модуль второй производной

по натуральному параметру вектора, описывающего кривую, а нормаль – это сама вторая производная. Здесь же в качестве нормали берётся внешняя к границе области. Поэтому на участках вогнутости границы эти два векторы противоположно направлены и функция $k(s)$ должна быть отрицательна.

7. Страница 71, строка 6 сверху. В формулах $|\Gamma_\varepsilon^i| = O(\varepsilon)$, $|\gamma_\varepsilon^i| = O(|\ln\varepsilon|^{\delta-1})$ следовало бы уточнить, что понимается под O. Этот символ может определяться по-разному и одно из стандартных определений означает только верхнюю оценку, то есть, $|\Gamma_\varepsilon^i| \leqslant C\varepsilon$ и $|\Gamma_\varepsilon^i| = \varepsilon^2$ удовлетворяет предположению. Поэтому следовало пояснить что именно здесь имеется ввиду: только верхняя оценка или все-таки двусторонняя $C_1\varepsilon \leqslant |\Gamma_\varepsilon^i| \leqslant C_2\varepsilon$, $C_1, C_2 > 0$.

8. Страница 82, доказательство леммы 2.1.4. При введении собственных значений и собственных функций тире следует ставить перед текстом, а не в конце выносных формул.

9. Станица 95, теорема 2.2.1. Задача (2.2.7) имеет единственное тривиальное решение. Для чего эта задача приводится в утверждении теоремы? Ведь можно было бы явно сказать, что последовательность решений u_ε сходится к нулю.

10. Страница 2.2.1, лемма 2.2.1. Формула (2.2.10) по сути является вариантом принципа минимакса. Почему нельзя было подходящим образом ввести квадратичную форму и гильбертово пространство для обоснования этой формулы, а вместо этого приводится доказательство леммы 2.2.1?

11. Страница 118, ссылка [102]. При оформлении ссылки на статью не следует указывать название издательства, достаточно лишь указать название журнала “Asymptotic Analysis”.

Отмеченные недостатки не носят принципиального характера и не влияют на общую выражено положительную оценку работы. Представленная диссертация является самостоятельным законченным фундаментальным исследованием. Поставленные задачи полностью решены, доказательства теорем проведены на строгом математическом уровне. Все основные результаты диссертации являются новыми и интересными. Результаты диссертации опубликованы в трёх печатных работах в ведущих российских научных журналах, входящих в “Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук”, утвержденный ВАК РФ. Результаты работы также докладывались на ряде признанных международных конференций. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Работа удовлетворяет всем критериям, предъявляемым положением “О порядке присуждения ученых степеней” к диссертациям на соискание учёной степени кандидата наук. Представленная диссертация является научно-квалификационой работой, в которой содержится решение задач, имеющих существенное значение для спектральной теории операторов. Содержащиеся в диссертации результаты могут быть использованы специалистами по теории операторов и дифференциальных уравнений работающими в Московском государственном университете, Институте математики им. В.А. Стеклова, Санкт-Петербугском государственном университете, Институте математики с ВЦ УНЦ РАН, Петербургском отделении МИРАН им. В.А. Стеклова и в других университетах и научных институтах.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация А.Г. Чечкиной соответствует всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "Вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений
Института математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра Российской академии наук,
доктор физико-математических наук

Борисов Денис Иванович

Адрес служебный:
450008, Россия, г. Уфа, ул.Чернышевского, 112
Тел.: (347)2725936
E-mail: BorisovDI@yandex.ru

Дата: 06.11.2015

Подпись Борисова Д.И. заверяю:
ученый секретарь ИМВЦ УНЦ РАН
Шайгарданов Ю.З.