ФГБОУ ВО
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА"
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.956

Подольский Александр Вадимович

Усреднение задач для p-Лапласиана в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2015

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета ФГБОУ ВО "Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова".

Научный руководитель: Шапошникова Татьяна Ардолионовна
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: Пастухова Светлана Евгеньевна
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики-2
Московского Государственного Университета
информационных технологий, радиотехники
и электроники (МИРЭА).

Беляев Алексей Юрьевич
кандидат физико-математических наук
старший научный сотрудник
лаборатории гидрогеологических
проблем охраны окружающей среды
Института водных проблем РАН

Ведущая организация: Институт проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН

Защита диссертации состоится 11 декабря 2015 года в 16:45 на заседании диссертационного совета Д. 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО "Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова" по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО "Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова" по адресу: г. Москва, Ломоносовский прсопект, д.27, сектор А и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su

Автореферат разослан 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д .501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук, Власов
профессор Виктор Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Представленная работа является исследованием в области теории усреднения.

Диссертация посвящена изучению асимптотического поведения при $\varepsilon \to 0$ решения u_ε задач для эллиптического и параболического уравнений с p-Лапласианом: $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, в ε-периодически перфорированной области $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $2 < p \leq n$, с нелинейным краевым условием вида $\partial_{\nu_p} u_\varepsilon + \beta(\varepsilon)\sigma(x, u_\varepsilon) = 0$, заданным на границе полостей, где $\partial_{\nu_p} u = |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nu)$, ν — вектор внешней единичной нормали к поверхности полостей. Предполагается, что полости диффеоморфны замкнутому шару, диаметр которого есть $O(a_\varepsilon)$, где $a_\varepsilon \ll \varepsilon$. Таким образом, исследуемая задача имеет четыре параметра: n — размерность пространства, p — показатель оператора, a_ε — характеризует размер перфораций; и так называемый коэффициент адсорбции $\beta(\varepsilon)$, который характеризует процессы, происходящие на границе перфораций.

Рассматриваемая в работе задача возникает при изучении нелинейной диффузии[1,2] веществ в пористой среде[3], при этом подразумевается, что на границе включений имеет место нелинейная адсорбция. Математические модели, в которых участвует p-Лапласиан, появляются также при изучении неньютоновских жидкостей[4], задач ползучести[5,6], в климатологии[7], в гляциологии[4,8] . Необходимость исследования уравнений с p-Лапласианом появляется и при восстановлении изображения, поврежденного вследствие его некачественной передачи по каналам связи[9].

---

[1] Philip J.R. // N-diffusion, Austral. J. Phys., V.14, 1961, pp.1-13

[2] Guan M., Zheng L., Zhang, X. The similarity solution to a generalized diffusion equation with convection. // Advances in dynamical systems and applications, V.1, N.2, 2006, 183-189

[3] Showalter R.E., Walkington, N.J. Diffusion of fluid in a fissured medium with microstructure. // SIAM J. Math. Anal., V.2, 1991, pp. 1702 - 1722

[4] Antontsev S.N., Diaz J.I., Oliveira H.B. Mathematical models in dynamics of non-newtonian fluids and in glaciology, Proceedings of the CMNE/CILAMCE Congress, 2007

[5] Phillippin G.A. A minimum principle for the problem of torsional creep. // J. Math. Anal. Appl., V.68, 1979,pp. 526-535

[6] Kawohl B. On a family of torsional creep problems.// J.reine angew. Math., V.410, 1990, pp.1-22

[7] Diaz J.I., Hernandez, Tello L. On the multiplicity of equilibrium solutions to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in climatology. // Journal of mathematical analysis and applications, V.216, 1997, pp.593-613

[8] Glowinski R., Rappaz J. Approximation of a nonlinear elliptic problem arising in a non-Newtonian fluid model in glaciology. // M2AN Math. Model. Numer. Anal., V.37, N.1, 2003, pp. 175-186.

[9] Gomathi R., Vincent Antony Kumar A. Shearlet domain color image inpainting based on p-laplacian operator. // European journal of scientific research, V.67, N.3, 2012, pp.413-420

При изучении задач в перфорированных областях, когда число полостей велико, нахождение решений приближенными или точными методами становится невозможным. Поэтому, возникает проблема замены исходной задачи усредненной (эффективной) задачей, которая, как правило, задана в области, имеющей более простую структуру, что дает возможность изучения свойств исследуемого процесса. Второй проблемой является обоснование правильности построенной усредненной модели, что приводит к доказательству теорем о близости решения исходной задачи к решению усредненной. Данными проблемами занимается теория усреднения, которая получила первоначальное развитие в работах О.А. Олейник[10], В.В. Жикова[10], С.М. Козлова[10], В.А. Марченко[11], Е.Я.Хруслова[11], Т.А. Шапошниковой, С.Е. Пастуховой, А.С. Шамаева, Г.А. Иосифьяна, Г.П. Панасенко, А.Л. Пятницкого, Н.С. Бахвалова Г.А. Чечкина, А.Ю. Беляева, J.-L. Lions, E. De Giorgi, L. Tartar, F. Murat, G. Papanicolau, E. Sanchez-Palencia, D. Cioranescu и многих других выдающихся математиков.

Усреднение краевых задач в перфорированных областях с третьим краевым условием на границе полостей изучалось во многих работах. Такого рода задачам были посвящены работы В.И. Сукретного[12], С.Е. Пастуховой[13]. Краевая задача в частично перфорированной области для уравнения Пуассона, в которой $\sigma(x,u) = \varepsilon^{-\gamma} a(x/\varepsilon)u$ и $\gamma \in \mathbb{R}^1$, была рассмотрена в работе [14]. Линейная задача с третьим краевым условием в частично перфорированной области с произвольной плотностью перфораций для уравнения Пуассона была изучена

[10]В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник. Усреднение дифференциальных операторов. Изд. "Физико-математическая литература Москва, 1993, 464 с.

[11]Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка. 1974.

[12]Сукретный В.И. Асимптотическое разложение решений третьей краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях // Успехи мат. н., т. 39, №4, 1984. – с. 120 - 121

[13]Пастухова С.Е. Метод компенсированной компактности Тартара в усреднении спектра смешанной задачи для эллиптического уравнения в перфорированной области с третьим краевым условием // Мат. сб., т. 186, №5, 1995. – с. 127 - 144.

[14]Олейник О.А., Шапошникова Т.А. О задаче усреднения в частично перфорированной области с граничным условием смешанного типа на границе полостей, содержащим малый параметр.// Дифференциальные уравнения, т. 31, N. 7, 1995. – с. 1140-1150.

в работе [15]. Усреднение задач для уравнения Пуассона с краевым условием третьего рода было исследовано в работах [16,17].

Задача для эллиптического уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами и нелинейным краевым условием на границе полостей при $a_\varepsilon = \varepsilon$ изучалась в работах Гончаренко М.В.[18], Иосифьяна Г.А.[19,20,21], Мельника Т.А.[22], Сивак О.А.[22], Пятницкого А.Л.[23].

Усреднение задачи Дирихле для уравнения $-\Delta_p u_\varepsilon = f_\varepsilon(x)$ при $a_\varepsilon = \varepsilon$ и $1 < p < 2$ было изучено в [24]. В работе [25] исследуется усреднение указанного уравнения при $1 < p \leq n$ в задаче с препятствиями в области перфорированной множествами случайного размера, при этом, $a_\varepsilon = \varepsilon^{n/(n-p)}$, если $1 < p < n$.

Для параболического уравнения начально-краевая задача при $a_\varepsilon = \varepsilon$ была изучена в [26]. Усреднению параболического квазилинейного уравнения посвящена работа [27].

[15] Oleinik O.A., Shaposhnikova T.A. On homogenization of the Poisson equation in partially perforated domains with arbitrary density of cavities and mixed type conditions on their boundary// Rend. Mat. Acc. Lincei, V.7, S.9, 1996, pp.129-146

[16] Беляев Г.А., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием// Мат.Сб., т.193, N.7, 2001, стр.3-20.

[17] Егер В., Олейник О.А., Шамаев А.С. Об усреднении краевой задачи для уравнения Лапласа в частично перфорированной области с краевым условием третьего рода на границе полостей // Труды Моск. Матем. Об-ва., 1997, т.58, стр.187-223

[18] Berlyand L.V., Goncharenko M.V. The averaging of the diffusion equation in a porous medium with weak absorption // Journal of soviet mathematics, v.52, N.5, 1990, pp.3428-3435

[19] Yosifian G.A. On homogenization problems in perforated domains with nonlinear boundary conditions // Applicable Analysis, v.65, 1997, pp.257-288

[20] Yosifian G.A. Some homogenization problems for the system of elasticity with nonlinear boundary conditions in perforated domains // Applicable Analysis, v.71, 1999, pp.379-411

[21] Yosifian G.A. Homogenization of some contact problems for the system of elasticity in perforated domains // Rend.Sem.Mat.Univ.Padova, v.105, 2001, pp.37-64

[22] Mel'nik T.A., Sivak O.A. Asymptotic analysis of a boundary-value problem with the nonlinear boundary multiphase interations in a perforated domain // Ukr.Math., v.61, 2009, pp.494-512.

[23] Piatnitski A.L., Chiado Piat V. Gamma-convergence approach to variational problems in perforated domains with Fourier boundary conditions // ESAIM COCV, 2008.

[24] Boukrim L., Hakim A., Mekkaoui T. Quasilinear dirichlet problem in a periodically perforated domain // GLASNIK MATEMATICKI, v.42, N.62, 2007, pp. 375-388.

[25] Lan Tang. Random homogenization of p-laplacian with obstacles in perforated domain. // Communications in partial differential equations, v.37, N.3, 2012, pp.538-559.

[26] Мельник Т.А., Сивак О.А. Асимптотический анализ параболической задачи с нелинейными граничными многофазовыми взаимодействиями в перфорированной области // Проблемы Мат. Анализа, т.43, 2009, стр.107-128.

[27] Abdulle A., Huber M.E., Vilmart G. Linearized numerical homogenization method for nonlinear monotone parabolic multiscale problems // Multiscale modeling and simulation, 2014

Наиболее близкими являются работы [28] и [29], в которых рассматривается аналогичная "геометрия" перфораций. В [28] изучается усреднение краевой задачи для уравнения $-\Delta u_\varepsilon = f(x)$ с краевым условием третьего рода $\partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma}\sigma(x, u_\varepsilon) = g(x)\varepsilon^{-\gamma}$, заданным на границе полостей. Работа [29] посвящена исследованию асимптотического поведения решения начально-краевой задачи для параболического уравнения $\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f(x,t)$ с аналогичным краевым условием. В указанных работах построены усредненные задачи и доказаны теоремы о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной. Таким образом, настоящая работа обобщает результаты, полученные в [28] и [29], на случай задач, содержащих нелинейные уравнения с оператором p-Лапласа.

Асимптотическое поведение решения вариационного неравенства для оператора Лапласа в перфорированной области с нелинейными ограничениями вида: $u_\varepsilon \geq 0$, $\partial_\nu u_\varepsilon \geq -\varepsilon^{-\gamma}\sigma(x, u_\varepsilon)$, $u_\varepsilon(\partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma}\sigma(x, u_\varepsilon)) = 0$, заданными на границе перфораций, было исследовано в работе [30].

Работа [31] посвящена изучению краевой задачи для оператора Лапласа в области, перфорированной мелкими изопериметрическими полостями (см. (24)), с нелинейным краевым условием третьего рода. В приведенной работе рассматривается критический случай соотношения между параметрами a_ε и $\beta(\varepsilon)$ при $n = 2$. Настоящая работа обобщает результаты, полученные в [31], на случай уравнения с p-Лапласианом ($p = n \geq 3$).

В работах [28,29,30,31] при критическом соотношении между параметрами a_ε, $\beta(\varepsilon)$ наблюдается следующий эффект: усредненная задача содержит новое нелинейное слагаемое, определяемое как решение функционального уравнения. Данный эффект впервые был замечен в работе [32], в которой была рассмотрена краевая задача для уравнения Пуассона при $n = 3$ и $a_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$, где $\alpha \in (2, 3]$.

[28] Зубова М.Н., Шапошникова Т.А. Об усреднении краевых задач в перфорированных областях с третьим граничным условием и об изменении характера нелинейности задачи в результате усреднения.// Дифференциальные уравнения, 2010.

[29] Егер В., Нойс-Раду М., Шапошникова Т.А. Об усреднении уравнения диффузии в перфорированной области с нелинейным условием на поток на границе полостей и масштабами задачи, приводящими к новому нелинейному соотношению между краевыми условиями и эффективным распределением источников/стоков. // Тр. сем. им. И.Г.Петровского, т.28, 2011, 161-181.

[30] Jaeger W., Neuss-Radu M., Shaposhnikova T.A. Homogenization of a variational inequality for the Laplace operator with nonlinear restriction for the flux on the interior boundary of a perforated domain. // Nonlinear Analysis: Real World Applications, v. 15, N.1, pp. 367-380

[31] Перес Е., Зубова М.Н., Шапошникова Т.А. Задача усреднения в области, перфорированной мелкими изопериметрическими полостями с нелинейным краевым условием третьего типа на их границе. // Доклады Академии Наук, т.457, N.5, 2014, с. 520-525

[32] Goncharenko M. The asymptotic behaviour of the third boundary-value problem solutions in domains with fine-grained boundaries // Homogenization and applications to the material sciences, v.9, 1997, pp.203-213.

Стоит отметить, что в настоящей работе наблюдается аналогичная особенность (см. Теоремы 3, 9, 12).

Цель работы. Основной целью настоящей работы является исследование асимптотического поведения решений задач для эллиптического и параболического уравнений с оператором p-Лапласа в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа, заданным на границе полостей, при стремлении диаметра полостей и периода, с которым расположены эти множества, к нулю.

Методы исследования. В работе используются методы теории усреднения дифференциальных операторов, общей теории уравнений в частных производных, функционального анализа и теории пространств Соболева. Также строятся пробные функции, учитывающие нелинейный характер оператора p-Лапласа.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. Основные из них следующие:

- Дана полная классификация асимптотического поведения решения рассматриваемой задачи для случая $2 < p < n$. Выделены 6 различных видов асимптотического поведения решения, каждому из которых соответствует определенное соотношение между параметрами a_ε и $\beta(\varepsilon)$. Для каждого из этих случаев был разработан метод, позволяющий построить усредненную задачу и доказать теоремы о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.

- Рассмотрено критическое соотношение между параметрами a_ε и $\beta(\varepsilon)$ (см. условия (23)) для случая $p = n$. Разработан метод позволяющий рассматривать перфорации произвольной формы с заданной площадью поверхности. Построена усредненная задача и доказана теорема о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.

- Для начально-краевой задачи рассмотрен случай, когда $2 < p < n$ и когда выполнены условия (39). Выделены 3 различных случая асимптотического поведения решения рассматриваемой задачи, для каждого из которых построена усредненная задача и доказана теорема о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты настоящей работы относятся к теории усреднения краевых и начально-краевых задач для уравнений с p-Лапласианом. Использованные в диссертации методы могут быть применены при исследовании других краевых и начально-краевых задач, вариационных неравенств с ограничениями различного типа.

Апробации работы. Результаты работы неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях семинара Механико-математического факультета МГУ “Асимптотические методы математической физики” под руководством В.В. Жикова, А.С. Шамаева, Т.А. Шапошниковой.

Результаты диссертации были представлены на следующих научных конференциях:

- Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, Россия, Москва, посвященная 110-й годовщине со дня рождения И.Г. Петровского, проходившая с 30 мая по 4 июня 2011 года.

- Международная конференция "Седьмая международная конференция по дифференциальным уравнениям и функционально-дифференциальным уравнениям”, Россия, Москва, РУДН, проходившая с 26 по 28 августа 2014 года.

- Международная конференция "Многомасштабные методы и моделирование: переход от микро- к макромасштабу в механике и медицине”, Россия, Москва, МГТУ им. Баумана, проходившая 25-27 июня 2015 года.

- “Новогодняя мини-конференции кафедры дифференциальных уравнений Механико-математического факультета”, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014.

- Международная научная конференция "Ломоносов-2010”, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 7 печатных работах, 4 из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. Список работ приведен в конце диссертации.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав (первая глава содержит вспомогательные утверждения, в последующих главах приводятся основные результаты), а также из списка цитируемой литературы. Главы разбиты на 14 параграфов и 8 подпараграфов. Параграфы и формулы имеют двойную нумерацию, теоремы и леммы — сквозную. Диссертация содержит 16 теорем и 9 лемм. Список литературы включает 47 наименований, общий объем диссертации 78 страниц.

Краткое содержание диссертации

Введение

Во введении описывается актуальность темы диссертации, история рассматриваемых вопросов, дается общая характеристика работы. Также в нем приводятся предварительные сведения о полученных в диссертации результатах и о их месте в современной теории усреднения.

Глава 1

В данной главе описывается перфорированная область, вводятся функциональные пространства, в которых рассматриваются соответствующие задачи, доказываются вспомогательные леммы.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с гладкой границей $\partial\Omega$ и пусть $Y = (-1/2, 1/2)^n$. Определим множества G_0 в Y следующим образом: G_0 диффеоморфны шару и $\overline{G}_0 \subset Y$. Для $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ положим $\delta B = \{x \,|\, \delta^{-1}x \in B\}$ и $\widetilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega \,|\, \rho(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon\}$.

Пусть $a_\varepsilon \ll \varepsilon$, обозначим

$$G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} (a_\varepsilon G_0 + \varepsilon j) = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j, \tag{1}$$

где $\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^n : \overline{G_\varepsilon^j} \subset Y_\varepsilon^j = \varepsilon Y + \varepsilon j,\ G_\varepsilon^j \bigcap \overline{\widetilde{\Omega}}_\varepsilon \neq \emptyset\}$, и $|\Upsilon_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{-n}$, $d = const > 0$. Заметим, что $\overline{G}_\varepsilon^j \subset \overline{Y}_\varepsilon^j$ и центр шара G_ε^j совпадает с центром куба Y_ε^j. Также определим множества T_r^j — шар радиуса r с центром, совпадающим с центром куба Y_ε^j.

Положим

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon},\ S_\varepsilon = \partial G_\varepsilon,\ \partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon.$$

Через $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ обозначено пространство, полученное замыканием в $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$ множества бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}_\varepsilon$ функций, обращающихся в ноль в окрестности границы $\partial\Omega$.

Определим через $W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ — пространство сопряженное к пространству $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$, и скобки $\langle ., . \rangle$ обозначают отношение двойственности. В введенном пространстве рассматривается норма:

$$\|v\|_{W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)} = \sup_{u \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega), \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)} \leqslant 1} | < u, v > |$$

Далее перечислим **основные результаты** Главы 1.

Справедливы следующие леммы, которые имеют существенное значение при доказательстве теорем усреднения.

Лемма 1. *Пусть* $u \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$, $2 \leq p \leq n$, $n \geq 2$. *Тогда*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |u|^p dx \leq K\Big\{a_\varepsilon^{1-n}\varepsilon^n \int_{S_\varepsilon} |u|^p ds + a_\varepsilon^{p-n}\varepsilon^n \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^p dx\Big\}, \tag{2}$$

если $2 \le p < n$,

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |u|^n dx \le K\Big\{a_\varepsilon^{1-n}\varepsilon^n \int\limits_{S_\varepsilon} |u|^p ds + \left|\ln\frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}\right|^{n-1} \varepsilon^n \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^p dx\Big\}, \tag{3}$$

елси $p = n$, *где постоянная* K *здесь и далее не зависит от* ε.

Лемма 2. *Пусть* $u \in W^{1,p}(Y_\varepsilon)$, $Y_\varepsilon = \varepsilon Y \setminus a_\varepsilon G_0$, *где* $2 \le p \le n$, $n \ge 2$. *Тогда*

$$\int\limits_{a_\varepsilon S_0} |u|^p dx \le K\Big\{a_\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{-n} \int\limits_{Y_\varepsilon} |u|^p dy + a_\varepsilon^{p-1} \int\limits_{Y_\varepsilon} |\nabla u|^p dy\Big\}, \tag{4}$$

если $2 \le p < n$,

$$\int\limits_{a_\varepsilon S_0} |u|^p dx \le K\Big\{a_\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{-n} \int\limits_{Y_\varepsilon} |u|^p dy + a_\varepsilon^{n-1} \left|\ln\frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}\right|^{n-1} \int\limits_{Y_\varepsilon} |\nabla u|^p dy\Big\}, \tag{5}$$

если $p = n$.

Справедлива теорема о продолжении.

Теорема 1. *Пусть* Ω_ε *— перфорированная область, определенная выше, а* $2 \le p \le n$. *Тогда существует оператор продолжения* $P_\varepsilon : W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ *такой, что* $\forall u \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$

$$\|P_\varepsilon u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)}, \tag{6}$$

$$\|\nabla(P_\varepsilon u)\|_{L_p(\Omega)} \le C_2 \|\nabla u\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}, \tag{7}$$

где константы C_1, C_2 *не зависят от* u *и* ε.

Глава 2

В главе 2 рассматривается краевая задача для уравнения с p-Лапласианом при $2 < p \le n$; приводится доказательство теоремы существования и единственности решения соответствующей задачи, доказываются теоремы усреднения.

В §2.1 ставится краевая задача и делаются предварительные замечания.

Рассмотрим следующую задачу при $2 < p \le n$

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\varepsilon = f(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_{\nu_p} u_\varepsilon + \beta(\varepsilon)\sigma(x, u_\varepsilon) = 0, & x \in S_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

где $\Delta_p u \equiv \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $\partial_{\nu_p} u \equiv |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nu)$, ν — внешняя единичная нормаль к S_ε и предполагается, что $f \in L_q(\Omega)$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Предположим, что $\sigma(x, u)$ — непрерывно дифференцируемая по перменным $x \in \overline{\Omega}$ и $u \in \mathbb{R}$ функция такая, что $\sigma(x, 0) = 0$ и существуют положительные постоянные k_1 и k_2, что выполнены неравенства

$$(\sigma(x, u) - \sigma(x, v))(u - v) \ge k_1 |u - v|^p, \tag{9}$$

$$|\sigma(x,u)| \le k_2 |u|^{p-1}. \tag{10}$$

Под обобщенным решением задачи (8) будем понимать функцию $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla v dx + \beta(\varepsilon) \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u_\varepsilon) v ds = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f v dx, \tag{11}$$

для произвольной функции $v \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$.

В §2.2 доказывается теорема существования и единственности решения задачи (8), а именно

Теорема 2. *Пусть $2 < p \le n$, тогда существует единственное обобщенное решение u_ε задачи* (8) *и для него справедливы оценки:*

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)} \le K, \;\; \beta(\varepsilon) \|u_\varepsilon\|^p_{L_p(S_\varepsilon)} \le K. \tag{12}$$

По теореме 1 существует такое продолжение $\widetilde{u}_\varepsilon$ функции u_ε на множество $\Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$, что $\widetilde{u}_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и для него выполнены оценки:

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C \|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)}, \;\; \|\nabla \widetilde{u}_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \le C \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \tag{13}$$

Благодаря оценке (12), имеем

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C. \tag{14}$$

Следовательно, существует такая подпоследовательность $\widetilde{u_\varepsilon}$ (обозначим ее также как и исходную), что

$$\widetilde{u_\varepsilon} \rightharpoonup u \text{ слабо в } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{15}$$

В §2.3 рассматривается случай, когда $2 < p < n$. Положим $\beta(\varepsilon) = \varepsilon^{-\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$; $a_\varepsilon = C_0 \varepsilon^\alpha$, где $\alpha > 1$ и C_0 — положительное число. В данном параграфе приводится доказательство теорем усреднения, которые дают асимптотическое описание u_ε при $\varepsilon \to 0$. Выделены 6 различных случаев асимптотического поведения решения рассматриваемой краевой задачи, каждому из которых соответствует определенный набор параметров α и γ:

1. $\alpha = n/(n-p)$, $\gamma = \alpha(n-1) - n = (p-1)n/n-p$;

2. $\alpha \in (1, n/(n-p))$, $\gamma = \alpha(n-1) - n$;

3. $\alpha > n/(n-p)$, γ — произвольно;

4. $\alpha > 1$, $\gamma < \alpha(n-1) - n$;

5. $1 < \alpha < n/(n-p)$, $\gamma > \alpha(n-1) - n$;

6. $\alpha = n/(n-p)$, $\gamma > \alpha(n-1) - n = (p-1)n/(n-p)$.

Данные случаи дают полное описание асимптотического поведения решения. Наиболее интересным и трудным является так называемый критический случай, когда $\alpha = n/(n-p)$, $\gamma = (p-1)n/(n-p)$. В этом случае усредненная задача содержит новое нелинейное слагаемое.

Из-за особенностей используемого метода для набора параметров 1 и 6 мы полагаем, что G_0 в определении (1) — это шар единичного радиуса с центром в начале координат. Таким образом, перфорации — это шары малого радиуса, a_ε, центр которых совпадает с центром соответствующих ячеек.

Основные результаты §2.3 составляют следующие теоремы.

Для критического набора параметров справедлива

Теорема 3. *Пусть* $n \geq 3$, $2 < p < n$, $\alpha = n/(n-p)$, $\gamma = \alpha(p-1)$ *и* u_ε *— обобщенное решение задачи* (11). *Пусть* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *— обобщенное решение следующей задачи*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \mathcal{A}|H(x,u)|^{p-2}H(x,u) = f(x), \text{ в } \Omega; \\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega; \end{cases} \tag{16}$$

Здесь $\mathcal{A} = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{n-p}\omega_n$, ω_n *— площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$, *и* $H(x,\varphi)$ *— это определенное для всех* $(x,\varphi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ *решение функционального уравнения*

$$\mathcal{B}_0|H|^{p-2}H = \sigma(x, \varphi - H) \tag{17}$$

где $\mathcal{B}_0 = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{1-p}$. *Тогда* $\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Для следующего набора параметров имеет место

Теорема 4. *Пусть* $n \geq 3$, $2 < p < n$, $\alpha \in (1, n/(n-p))$, $\gamma = \alpha(n-1) - n$ *и* u_ε *— обощенное решение задачи* (8). *Пусть* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *обощенное решение задачи*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + A\sigma(x,u) = f(x), \text{ в } \Omega; \\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega; \end{cases} \tag{18}$$

где $A = C_0^{n-1}|\partial G_0|$. *Тогда* $\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

В случае 3 размеры перфораций настолько малы, что процессы, происходящие на микроскопическом уровне, не дают вклада в эффективное уравнение.

Теорема 5. *Пусть* $n \geq 3$, $2 < p < n$, $\alpha > n/(n-p)$, γ *произвольно и* u_ε *— обощенное решение задачи* (8). *Пусть* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *есть обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), \text{ в } \Omega; \\ u(x) = 0 \text{ на } \partial\Omega; \end{cases} \tag{19}$$

Тогда $\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Для 4 набора параметров α и γ мы получаем аналогичную усредненную задачу, что и в предыдущем случае, однако, при доказательстве теорем усреднения используются разные методы. В данном случае процессы, происходящие на границе перфораций, слабы и не дают вклада в эффективное уравнение.

Теорема 6. *Пусть* $n \geq 3$, $2 < p < n$, $\alpha > 1$, $\gamma < \alpha(n-1) - n$ *и* u_ε *— обощенное решение задачи* (8). *Пусть* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *— обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), \ \text{в } \Omega; \\ u(x) = 0, \ \text{ на } \partial\Omega; \end{cases} \tag{20}$$

Тогда $\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

В следующем случае справедлива

Теорема 7. *Пусть* $n \geq 3$, $2 < p < n$, $1 < \alpha < \frac{n}{n-p}$, $\gamma > \alpha(n-1) - n$ *и* u_ε *— обощенное решение задачи* (8). *Тогда*

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant K(\varepsilon^{\alpha(1-n)+n+\gamma} + \varepsilon^{\alpha(p-n)+n})^{\frac{1}{p}} \tag{21}$$

следовательно, $\widetilde{u}_\varepsilon \to 0$ *в* $W^{1,p}(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Для последнего набора параметров α и γ имеем

Теорема 8. *Пусть* $n \geq 3$, $2 < p < n$, $\alpha = \frac{n}{n-p}$, $\gamma > \alpha(n-1) - n = \frac{n}{n-p}(p-1)$ *и* u_ε *— обобщенное решение задачи* (8). *Пусть* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *— обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \mathcal{A}|u|^{p-2}u = f(x), \ \text{в } \Omega; \\ u = 0 \ \text{ на } \partial\Omega; \end{cases} \tag{22}$$

где $\mathcal{A} = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{n-p}\omega_n$, ω_n *— площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда* $\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

§2.4

В параграфе 2.4 рассматривается случай, когда $p = n$, и изучается асимптотическое поведение решения u_ε задачи (8) для критического соотношения между параметрами a_ε и $\beta(\varepsilon)$ (см. (23)). Также предполагается, что перфорации являются изопериметрическими областями (см. (24)). Параграф разбит на два подпараграфа.

Далее приводятся основные определения.

Рассматриваются a_ε и $\beta(\varepsilon)$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} \beta^{\frac{1}{n-1}}(\varepsilon) a_\varepsilon \varepsilon^{-\frac{n}{n-1}} \to C^2 \text{ при } \varepsilon \to 0, \\ \frac{1}{\beta^{\frac{1}{n-1}}(\varepsilon) a_\varepsilon \ln \frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}} \to -C_1^2 \text{ при } \varepsilon \to 0, \end{cases} \tag{23}$$

где $C,\ C_1 \neq 0$.

В данном случае допускается определенное непериодическое распределение перфораций. Так, для $j \in \mathbb{M}$, где $\mathbb{M}$ — конечное подмножество из $\mathbb{Z}^n$, определим множества D^j в Y следующим образом: D^j диффеоморфны шару, и $\overline{D^j} \subset T_{1/4} = \big\{y: \ |y| < \frac{1}{4}\big\}$. Также предполагается, что

$$\left|\partial D^j\right| = l, \quad \text{для всех } j \in \mathbb{M} \tag{24}$$

Обозначим

$$G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} (a_\varepsilon G^j + \varepsilon j) = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G^j_\varepsilon, \tag{25}$$

где G^j совпадает с некоторым множеством $D^i,\ i \in \mathbb{M},\ \Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^n : \overline{G^j_\varepsilon} \subset Y^j_\varepsilon = \varepsilon Y + \varepsilon j,\ G^j_\varepsilon \bigcap \overline{\overline{\Omega}}_\varepsilon \neq \emptyset\}$, и $|\Upsilon_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{-n},\ d = const > 0$. Заметим, что $\overline{G}^j_\varepsilon \subset T^j_{a_\varepsilon} \subset T^j_{\frac{\varepsilon}{4}} \subset \overline{Y}^j_\varepsilon$, где T^j_r — шар радиуса r с центром, совпадающим с центром куба Y^j_ε.

Положим

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon},\ S_\varepsilon = \partial G_\varepsilon,\ \partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon.$$

В доказательстве теоремы усреднения задачи (8) при $p = n$ ключевую роль играют следующие вспомогательные функции. Введем в рассмотрение q^j_ε как решение задачи:

$$\begin{cases} \Delta_n q^j_\varepsilon = 0, \quad x \in T^j_\varepsilon \setminus \overline{G^j_\varepsilon}; \\ q^j_\varepsilon = 1, \quad x \in \partial G^j_\varepsilon; \quad q^j_\varepsilon = 0,\ x \in \partial T^j_{\varepsilon/4}. \end{cases} \tag{26}$$

Определим функцию $q_\varepsilon \in W^{1,n}_0(\Omega)$ полагая

$$q_\varepsilon = \begin{cases} q^j_\varepsilon, \quad x \in T^j_{\varepsilon/4} \setminus \overline{G^j_\varepsilon},\ j = 1, \ldots, N(\varepsilon) = |\Upsilon_\varepsilon|; \\ 1, \qquad x \in G_\varepsilon, \\ 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{N(\varepsilon)} \overline{T^j_{\varepsilon/4}}. \end{cases} \tag{27}$$

Для введенной функции справедливо следующее:

$$q_\varepsilon \rightharpoonup 0 \text{ в } W^{1,n}_0(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{28}$$

Введем функцию $w^j_\varepsilon\,(j = 1, \ldots, N(\varepsilon))$ как решение краевой задач

$$\begin{cases} \Delta_n w^j_\varepsilon = 0, \quad x \in T^j_{\varepsilon/4} \setminus \overline{T^j_{a_\varepsilon}}; \\ w^j_\varepsilon = 1, \quad x \in \partial T^j_{a_\varepsilon}; \quad w^j_\varepsilon = 0,\ x \in \partial T^j_{\varepsilon/4}. \end{cases} \tag{29}$$

Решение задачи (29) может быть найдено в явном виде:

$$w^j_\varepsilon = \frac{\ln\big(\frac{4|x - P^j_\varepsilon|}{\varepsilon}\big)}{\ln\big(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\big)}. \tag{30}$$

Определим функцию $\omega_\varepsilon \in W_0^{1,n}(\Omega)$ полагая

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} w_\varepsilon^j, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{T_{a_\varepsilon}^j}, \; j = 1, \ldots, N(\varepsilon) = |\Upsilon_\varepsilon|; \\ 1, \qquad\qquad x \in \bigcup T_{a_\varepsilon}^j = G'_\varepsilon, \\ 0, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{N(\varepsilon)} \overline{T_{\varepsilon/4}^j}. \end{cases} \tag{31}$$

Имеем

$$\omega_\varepsilon \rightharpoonup 0 \text{ в } W_0^{1,n}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{32}$$

Следующие леммы имеют **определяющее** значение при доказательстве Теоремы 9.

Лемма 3. *Пусть $n \geq 3$, тогда для определенных выше функций q_ε и w_ε справедлива оценка*

$$\|w_\varepsilon - q_\varepsilon\|_{W^{1,n}(\Omega)} \leq K\varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \tag{33}$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу, где $j \in \Upsilon_\varepsilon$:

$$\begin{cases} \Delta_n m^j(y) = 0, & y \in T_1 \setminus \overline{G^j}, \\ \partial_{\nu_n} m^j(y) = \frac{|\partial G^j|}{\omega_n}, & y \in \partial T_1, \\ \partial_{\nu_n} m^j(y) = -1, & y \in \partial G^j. \end{cases} \tag{34}$$

Легко видеть, что данная задача имеет единственное, с точностью до аддитивной константы, решение. Определим функцию $m_\varepsilon^j(x)$, полагая $m_\varepsilon^j(x) = \varepsilon^{\frac{n}{n-1}} m^j(\frac{x}{a_\varepsilon})$. С использованием полученных вспомогательных функций m_ε^j доказывается следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть $n \geq 2$ и $h \in W_0^{1,n}(\Omega)$, тогда имеет место оценка*

$$\left| \frac{\varepsilon^n}{a_\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{S_\varepsilon} h ds - \frac{|\partial G_\varepsilon^j| \varepsilon^n}{\omega_n a_\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{\bigcup \partial T_{a_\varepsilon}^j} h ds \right| \leq K\varepsilon \tag{35}$$

Основной результат §2.4 составляет следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть $n \geq 3$, a_ε и $\beta(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям* (23) *и u_ε — обобщенное решение задачи* (8). *Введем функцию $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ как обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} -\Delta_n u + \mathcal{A}|H(x,u)|^{n-2}H(x,u) = f(x), \quad \text{в } \Omega; \\ u = 0, \quad \text{на } \partial\Omega; \end{cases} \tag{36}$$

где $\mathcal{A} = \omega_n C^{2(n-1)} C_1^{2(n-1)}$, ω_n — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $H(x,u)$ — решение уравнения

$$\mathcal{B}_0|H|^{n-2}H = \sigma(x, u - H), \tag{37}$$

где $\mathcal{B}_0 = \omega_n C_1^{2(n-1)} |\partial G^j|^{-1}$. Тогда $\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W_0^{1,n}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

Глава 3

В данной главе рассматривается задача для параболического уравнения с p-Лапласианом в перфорированной области с третьим нелинейным краевым условием, заданным на границе полостей.

В §3.1 ставится исследуемая задача. В цилиндре $Q_\varepsilon^T = \Omega_\varepsilon \times (0,T)$ рассматриваем следующую начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta_p u_\varepsilon = f(x,t), & (x,t) \in Q_\varepsilon^T, \\ \partial_{\nu_p} u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma}\sigma(x,u_\varepsilon) = 0, & (x,t) \in S_\varepsilon^T = S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{38}$$

где $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p \in [2,n)$, $\partial_{\nu_p} u \equiv |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nu)$, ν — внешняя единичная нормаль к S_ε^T, $a_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$, $\alpha > 1$ и предполагается, что $f \in L_2(Q^T)$. Также полагаем, что параметры α и γ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} 1 < \alpha \le n/(n-p), \\ \gamma \le \alpha(n-1) - n. \end{gathered} \tag{39}$$

Пусть $\sigma(x,u)$ — непрерывно дифференцируемая по переменным $x \in \overline{\Omega}$ и $u \in \mathbb{R}$ функция, такая, что $\sigma(x,0) = 0$ и существуют положительные постоянные k_1 и k_2, что выполнены неравенства

$$(\sigma(x,u) - \sigma(x,v))(u-v) \ge k_1|u-v|^p, \tag{40}$$

$$|\sigma(x,u)| \le k_2|u|^{p-1}. \tag{41}$$

Обобщенным решением задачи (38) назовем функцию $u_\varepsilon \in L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $\partial_t u_\varepsilon \in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $u_\varepsilon(x,0) = 0$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v\rangle dt + \int_{Q_\varepsilon^T} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \nabla v dx + \varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon^T} \sigma(x,u_\varepsilon) v ds = \int_{Q_\varepsilon^T} f v dx, \tag{42}$$

для произвольной функции $v \in L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $q = p/(p-1)$.

Основные результаты §§3.2, 3.3 составляют следующие теоремы.

Теорема 10. *Существует единственное обобщенное решение u_ε задачи* (38) *и для него справедливы оценки:*

$$\|u_\varepsilon\|_{L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))} \le K, \;\; \varepsilon^{-\gamma/p}\|u_\varepsilon\|_{L_p(0,T;L_p(S_\varepsilon))} \le K, \tag{43}$$

$$\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))} \le K. \tag{44}$$

Теорема 11. *Пусть u_ε — обобщенное решение задачи* (38). *Тогда*

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)),\ \ \partial_t u_\varepsilon \in L_2(0,T;L_2(\Omega_\varepsilon)), \tag{45}$$

и имеет место неравенство

$$\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega_\varepsilon))} + \max_{[0,T]}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma/p}\max_{[0,T]}\|u_\varepsilon\|_{L_p(S_\varepsilon)} \leqslant$$
$$\leqslant C\|f\|_{L_2(Q_\varepsilon^T)}. \tag{46}$$

Для перехода к пределу в задаче (38) при $\varepsilon \to 0$ следует построить продолжение функции u_ε на весь цилиндр Q_T, таким образом, чтобы для продолжения $\tilde{u}_\varepsilon$ было справедливо следующее

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)},\ \|\nabla\tilde{u}_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \le \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)},\ \text{п.в.}\, t\in[0,T], \tag{47}$$

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \|\partial_t\tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \le C. \tag{48}$$

Такое продолжение возможно построить благодаря Теореме 1 и оценкам, полученным в Теоремах 10, 11.

Следовательно, существует такая подпоследовательность (используем для нее тоже обозначение, что и для исходной последовательности), что при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ в } L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \tag{49}$$

$$\tilde{u}_\varepsilon \to u \text{ в } L_2(Q_T), \tag{50}$$

$$\partial_t\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup \partial_t u \text{ в } L_2(0,T;L_2(\Omega)). \tag{51}$$

В §§3.4, 3.5, 3.6 изучено асимптотическое поведение решения задачи (38), дается описание предельной функции u для трех случаев соотношения между параметрами α и γ:

1. $\alpha = n/(n-p)$, $\gamma = \alpha(n-1) - n = (p-1)n/(n-p)$;

2. $\alpha \in (1, n/(n-p))$, $\gamma = \alpha(n-1) - n$;

3. $1 < \alpha < n/(n-p)$, $\gamma < \alpha(n-1) - n$.

Из-за особенностей используемого метода для набора параметров 1 мы предполагаем, что G_0 в определении (1) — это шар единичного радиуса с центром в начале координат. Таким образом, перфорации — это шары малого радиуса, a_ε, центр которых совпадает с центром соответствующих ячеек.

Основной результат главы 3 составляют следующие теоремы усреднения.

Теорема 12. *Пусть* $n \geq 3,\ 2 \leq p < n,\ \alpha = n/(n-p),\ \gamma = \alpha(p-1)$ *и* u_ε — *обобщенное решение задачи* (38). *Введем функцию* $u \in L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ *и* $\partial_t u \in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))$ *как обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_p u + \mathcal{A}|H(x,u)|^{p-2}H(x,u) = f(x), \text{ в } \Omega^T = \Omega \times (0,T); \\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0,T); \\ u(x,0) = 0 \text{ при } x \in \Omega; \end{cases} \tag{52}$$

где $\mathcal{A} = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{n-p}\omega_n$, ω_n — *площадь поверхности единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$, $H(x,u)$ — *решение уравнения*

$$\mathcal{B}_0|H|^{p-2}H = \sigma(x, u-H), \tag{53}$$

где $\mathcal{B}_0 = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{1-p}$. *Тогда* $\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Теорема 13. *Пусть* $n \geq 3,\ 2 < p < n,\ \alpha \in (1, n/(n-p)),\ \gamma = \alpha(n-1) - n$ *и* u_ε — *обощенное решение задачи* (38). *Пусть функция* $u \in L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ *и* $\partial_t u \in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))$ — *это обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_p u + A\sigma(x,u) = f(x,t), \text{ в } \Omega \times (0,T); \\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0,T); \\ u(x,0) = 0, \text{ при } x \in \Omega \end{cases} \tag{54}$$

где $A = C_0^{n-1}|\partial G_0|$. *Тогда* $\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Теорема 14. *Пусть* $n \geq 3,\ 2 < p < n,\ 1 < \alpha < n/(n-p),\ \gamma < \alpha(n-1) - n$. *Введем функцию* $u \in L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ *и* $\partial_t u \in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))$ *как обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_p u = f(x,t), \text{ в } \Omega \times (0,T); \\ u = 0, \text{ на } \partial\Omega \times (0,T); \\ u(x,0) = 0, \text{ при } x \in \Omega. \end{cases} \tag{55}$$

Тогда $\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Заключение.

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем.

1. Для задачи эллиптического типа (8) в том случае, когда $2 < p < n$, рассмотрены все возможные наборы параметров α и γ. Для каждого набора построена усредненная задача и доказана теорема о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.

2. Для аналогичной задачи (8) при $p = n$ изучен критический случай, когда a_ε и $\beta(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям (23). Для данного случая разработан

метод, позволяющий рассматривать перфорации произвольной формы с заданной площадью поверхности. Также построена усредененная задача и доказана теорема о слабой сходимости.

3. Для задачи параболического типа (38) рассмотрены все возможные параметры, удовлетворяющие условиям $\alpha \in (1, n/(n-p)]$, $\gamma \leq \alpha(n-1) - n$. Для каждого случая построена усредненная задача и доказана теорема о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.

Дальнейшие цели исследования по данному направлению состоят в следующем: изучение асимптотического поведения решения аналогичной краевой задачи для случаев когда, $1 < p < 2$ и $n < p < \infty$.

Благодарность.
Автор глубоко признателен научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Шапошниковой Татьяне Ардолионовне, за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Основные публикации.

Статьи в научных журналах из перечня ВАК

1. Подольский А.В. Об усреднении краевой задачи в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа на границе полостей для уравнения с р-лапласианом // Доклады Академии Наук, 2010, т. 435, №5, с. 583-586.

2. Подольский А.В. Об усреднении смешанной задачи в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа на границе полостей для параболического уравнения с р-Лапласианом // Доклады Академии Наук, 2012, т. 447, N. 3, с. 269-273.

3. Подольский А.В. О продолжении решения и усреднении краевой задачи для р-Лапласиана в перфорированной области с нелинейным третьим краевым условием на границе полостей // Доклады Академии Наук, 2015, том 460, N. 2, с. 140-144.

4. Подольский А.В., Шапошникова Т.А. Усреднение p-Лапласиана в n-мерной области, перфорированной мелкими полостями, с нелинейным краевым условием на их границе в случае, когда $p = n$ // Доклады Академии Наук, 2015, том 463, N. 4, с. 395-401. [Шапошникова Т.А.

– постановка задачи, доказательство Леммы 3; Подольский А.В. – доказательство Теорем 1,2,3 и Лемм 1 и 2.]

Статьи в других научных журналах и тезисы докладов в материалах научных конференций

1. Shaposhnikova T.A., Podolskiy A.V. Homogenization limit for the boundary value problem with the p-Laplace operator and a nonlinear third boundary condition on the boundary of the holes in a perforated domain // Functional Differential Equations, 2012, Vol. 19, No. 3-4, pp. 351 - 370. [Шапошникова Т. А. – постановка задачи, общее руководство; Подольский А.В. – решение задачи.]

2. Подольский А.В., Шапошникова Т.А. Об усреднении начально-краевозадачи в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа на границе полостей для нелинейного параболического уравнения // Сборник тезисов международной конференции "Дифференциальные уравнення и смежные вопросы посвященной 110-й годовщине со дня рождения И.Г. Петровского. Москва. 2011 г. — М.:Изд-во МГУ и ООО "ИНТУИТ.РУ 2011 г., стр. 307-308.

3. A.V. Podolskii, T.A. Shaposhnikova. Homogenization ofthe initial-boundary value problem in perforated domain for parabolic equation with p-laplace operator and nonlinear Robin-type boundary conditions. The Seventh international conference on dand functional differential equations, 2014. Тезисы докладов. — М:РУДН, 2014, стр. 93-94.