Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.956

Подольский Александр Вадимович

Усреднение задач для p-Лапласиана в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Шапошникова Татьяна Ардолионовна

Москва, 2015

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена изучению асимптотического поведения при $\varepsilon \to 0$ решения u_ε задач для эллиптического и параболического уравнений с p-Лапласианом: $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, — в ε-периодически перфорированной области $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $2 < p \leq n$, с нелинейным краевым условием вида $\partial_{\nu_p} u_\varepsilon + \theta(\varepsilon)\sigma(x, u_\varepsilon) = 0$ на границе полостей, где $\partial_{\nu_p} u = |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nu)$, ν — вектор внешней единичной нормали к поверхности полостей. В том случае, когда $2 < p < n$ коэффициент при функции σ, $\theta(\varepsilon)$, имеет следующий вид: $\varepsilon^{-\gamma}$, при $p = n$ он равен $\beta^{n-1}(\varepsilon)$. Предполагается, что полости диффеоморфны замкнутому шару, диаметр которого есть $O(a_\varepsilon)$, где $a_\varepsilon \ll \varepsilon$. Таким образом, исследуемая задача имеет четыре параметра: n — размерность пространства, p — показатель оператора, a_ε — характеризует размер перфораций; и так называемый коэффициент адсорбции $\theta(\varepsilon)$, который характеризует процессы, происходящие на границе перфораций.

Таким образом, при $2 < p < n$ в задаче имеются два параметра: α, γ. В настоящей работе для эллиптического случая рассмотрены все возможные соотношения между параметрами α и γ, а для параболического случая — $1 < \alpha < n/(n-p)$, $\gamma \leq \alpha(n-1)-n$, построены усредненные задачи и доказана слабая сходимость решения исходной задачи к решению усредненной. В зависимости от соотношений между ними в пределе получаются различные усредненные задачи — наиболее интересен случай, когда $1 < \alpha \leq n/(n-p)$ и $\gamma = \alpha(n-1)-n$, так как при данном соотношении между параметрами процессы, происходящие на границе микроскопической полости, дают вклад в предельное макроскопическое уравнение в виде эффективного нелинейного члена. При этом когда $1 < \alpha < n/(n-p)$ вид нелинейного члена не меняется. В критическом случае, когда $\alpha = n/(n-p)$, $\gamma = n(p-1)/(n-p)$, усредненная задача содержит новое нелинейное слагаемое, которое определяется как решение функционального уравнения.

Для случая $p = n$ рассматривается критическое соотношение между параметрами a_ε и $\beta(\varepsilon)$ (см. (1.1)), при котором построена усредненная задача, которая также содержит новое нелинейное слагаемое, являющееся решением функционального уравнения, которое имеет аналогичный вид, что и в критическом случае для $2 < p < n$. Также доказана теорема о сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.

В работе доказаны теорема продолжения решения на перфорации как для эллиптического случая, так и для параболического. Приводятся леммы, в которых доказываются неравенства типа Фридрихса и Пуанкаре для функций из введенных функциональных пространств, в которых рассматриваются соответствующие задачи. В работе доказывается существование и единственность решения функционального уравнения, появляющегося при усреднении задачи в критическом случае.

Актуальность темы.

Рассматриваемая в работе задача возникает при изучении нелинейной диффузии (см. работы [1] и [2]) веществ в пористой среде (см. [3]), при этом подразумевается, что на границе включений имеет место нелинейная адсорбция. Математические модели, в которых участвует p-Лапласиан, появляются также при изучении неньютоновских жидкостей (см. [4]), задач ползучести (см. [5,6]), в климатологии (см. [7]), в гляциологии (см. [4,8]).

Необходимость изучения уравнений с p-Лапласианом появляется и в задачах, связанных с восстановлением изображений, поврежденных вследствие некачественной передачи по каналам связи или небережного хранения (см. [9]).

Усреднение краевых задач в перфорированных областях с третьим краевым условием на границе полостей изучалось во многих работах. Такого рода задачам были посвящены работы [10] и [11]. Краевая задача в частично перфорированной области для уравнения Пуассона, в которой $\sigma(x,u) = \varepsilon^{-\gamma} a(x/\varepsilon)u$ и $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $\alpha = 1$, была рассмотрена в работе [12]. Линейная задача с третьим краевым условием в схожей перфорированной области была рассмотрена в работе [13]. Усреднение задач для уравнения Пуассона с краевым условием третьего рода изучалось в работах [14,15].

Задача для эллиптического уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами и нелинейным краевым условием на границе полостей при $\alpha = 1$ исследовалось в работах [16–22].

Усреднение задачи Дирихле для уравнения $-\Delta_p u_\varepsilon = f_\varepsilon(x)$ при $\alpha = 1$ и $1 < p < 2$ было изучено в [23]. В работе [24] исследуется усреднение указанного уравнения при $1 < p \le n$ в задаче с препятствиями в области перфорированной множествами случайного размера, при этом, $\alpha = n/(n-p)$, если $1 < p < n$. Задачи усреднения квазилинейных монотонных уравнений исследовались в [25,26].

Для параболического уравнения аналогичная задача при $\alpha = 1$ была исследована в [27]. Усреднению параболического квазилинейного уравнения посвящена работа [28].

Наиболее близкими являются работы [29] и [30], в которых рассматривается аналогичная "геометрия" перфораций. В [29] изучается усреднение краевой задачи для уравнения $-\Delta u_\varepsilon = f(x)$ с краевым условием третьего рода $\partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma}\sigma(x,u_\varepsilon) = g(x)\varepsilon^{-\gamma}$, заданным на границе полостей. Работа [30] посвящена исследованию асимптотического поведения решения начально-краевой задачи для параболического уравнения $\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f(x,t)$ с аналогичным краевым условием. В указанных работах построены усредненные задачи и доказаны теоремы о слабой сходимости решения исходной к решению усредненной. Таким образом, настоящая работа обобщает результаты, полученные в [29] и [30], на случай задач, содержащих нелинейные уравнения с оператором p-Лапласа.

Асимптотическое поведение решения вариационного неравенства для оператора Лапласа в перфорированной области с нелинейными ограничениями вида: $u_\varepsilon \geq 0$, $\partial_\nu u_\varepsilon \geq -\varepsilon^{-\gamma}\sigma(x, u_\varepsilon)$, $u_\varepsilon(\partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma}\sigma(x, u_\varepsilon)) = 0$, заданными на границе перфораций, было исследовано в работе [31].

Работа [32] посвящена изучению краевой задачи для оператора Лапласа в области, перфорированной мелкими изопериметрическими полостями, с нелинейным краевым условием третьего рода. В приведенной работе рассматривается критический случай соотношения между параметрами a_ε и $\beta(\varepsilon)$ при $n = 2$. Настоящая работа обобщает результаты, полученные в [32], на случай уравнения с p-Лапласианом ($p = n \geq 3$).

В работах [29–32] при критическом соотношении между параметром a_ε и коэффициентом адсорбции наблюдается следующий эффект: усредненная задача содержит новое нелинейное слагаемое, определяемое как решение функционального уравнения. Данный эффект впервые был замечен в работе [17], в которой была рассмотрена аналогичная задача для уравнения Пуассона при $n = 3$ и $\alpha \in (2, 3]$. Стоит отметить, что в настоящей работе наблюдается аналогичная особенность (см. Теоремы 5, 11, 14).

Цель работы. Основной целью настоящей работы является исследование асимптотического поведения решений задач для эллиптического и параболического уравнений с оператором p-Лапласа в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа, заданным на границе полостей, при стремлении диаметра полостей и периода, с которым расположены эти множества, к нулю.

Методы исследования. В работе используются методы теории усреднения дифференциальных операторов, общей теории уравнений в частных производных, функционального анализа и теории пространств Соболева. Также строятся пробные функции, учитывающие нелинейный характер оператора p-Лапласа.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. Основные из них — следующие:

1. Дана полная классификация асимптотического поведения решения рассматриваемой задачи для случая $2 < p < n$. Выделены 6 различных видов асимптотического поведения решения, каждому из которых соответствует определенное соотношение между параметрами α и γ. Для каждого из этих случаев был разработан метод, позволяющий построить усредненную задачу и доказать теоремы о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.

2. Рассмотрено критическое соотношение между параметрами a_ε и $\beta(\varepsilon)$ (см. условия (1.1)) для случая $p = n$. Разработан метод позволяющий рассматривать перфорации произвольной формы с заданной площадью поверхности. Построена усредненная задача и доказана теорема о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.

3. Для начально-краевой задачи рассмотрен случай, когда $2 < p < n$ и когда выполнены условия (3.2). Выделены 3 различных случая асимптотического поведения решения рассматриваемой задачи, для каждого из которых построена усредненная задача и доказана теорема о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты настоящей работы относятся к теории усреднения краевых и начально-краевых задач для уравнений с p-Лапласианом. Использованные в диссертации методы могут быть применены при исследовании других краевых и начально-краевых задач, вариационных неравенств с ограничениями различного типа.

Апробации работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы Россия, Москва, посвященной 110-й годовщине со дня рождения И.Г. Петровского, проходившей с 30 мая по 4 июня 2011 года; на международной конференции "Седьмая международная конференция по дифференциальным уравнениям и функционально-дифференциальным уравнениям Россия, Москва, проходившей с 26 по 28 августа 2014 года; на международной конференции "Многомасштабные методы и моделирование: переход от микро- к макромасштабу в механике и медицине Россия, Москва, проходившей 25-27 июня 2015 года; на "Новогодней мини-конференции кафедры дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014; международная научная конференция "Ломоносов-2010 Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 7 печатных работах, 4 из которых опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. Список работ приведен в конце диссертации.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав (первая глава содержит вспомогательные утверждения, в последующих главах приводятся основные результаты), а также из списка цитируемой литературы. Главы разбиты на 14 параграфов и 8 подпараграфов. Параграфы и формулы имеют двойную нумерацию, теоремы и леммы — сквозную. Диссертация содержит 16 теорем и 9 лемм. Список литературы включает 47 наименований, общий объем диссертации 78 страниц.

Автор глубоко признателен научному руководителю, профессору Т.А. Шапошниковой, за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание к работе.

Глава 1

Вспомогательные утверждения.

В данной главе описывается рассматриваемая перфорированная область, вводятся функциональные пространства, в которых рассматриваются соответствующие задачи (см. параграф 1.1). также строится продолжение решения как на ячейку периодичности, так и на всю перфорированную область, приводятся доказательства следствий из полученной теоремы продолжения (см. параграфы 1.2 и 1.3). В параграфе 1.4 приводится лемма, используемая в теоремах 5, 11, 14 и доказывается существование и единственность решения функционального уравнения, которое появляется в усредненной задаче в указанных выше теоремах.

1.1 Рассматриваемые перфорированные области

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с гладкой границей $\partial\Omega$ и пусть $Y = (-1/2, 1/2)^n$. Для $j \in \mathbb{M}$, где $\mathbb{M}$ — конечное подмножество из $\mathbb{Z}^n$, определим множества D^j в Y следующим образом: D^j диффеоморфны шару, и $\overline{D^j} \subset T_{1/4} = \big\{y : \ |y| < \frac{1}{4}\big\}$. Также предполагается, что $(n-1)$-мерная мера Лебега множества ∂D^j равна заданному числу $l > 0$, то есть

$$\left|\partial D^j\right| = l, \quad \text{для всех } j \in \mathbb{M}$$

Для $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ определим множества $\delta B = \{x \,|\, \delta^{-1}x \in B\}$ и $\widetilde{\Omega}_\varepsilon = \{x \in \Omega \,|\, \rho(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon\}$.

Для случая $2 < p < n$ положим $a_\varepsilon = C_0\varepsilon^\alpha$, где $\alpha > 1$ и C_0 — положительное число. В том случае, когда $p = n$, мы будем рассматривать a_ε и $\beta(\varepsilon)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{cases} \beta(\varepsilon)a_\varepsilon\varepsilon^{-\frac{n}{n-1}} \to C^2 \text{ при } \varepsilon \to 0, \\ \frac{1}{\beta(\varepsilon)a_\varepsilon \ln\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}} \to -C_1^2 \text{ при } \varepsilon \to 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $C, \ C_1 \neq 0$.

Пусть

$$G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} (a_\varepsilon G^j + \varepsilon j) = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j, \tag{1.2}$$

где G^j совпадает с некоторым множеством D^i, $i \in \mathbb{M}$, $\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^n : \overline{G^j_\varepsilon} \subset Y^j_\varepsilon = \varepsilon Y + \varepsilon j,\ G^j_\varepsilon \bigcap \overline{\overline{\Omega}}_\varepsilon \neq \emptyset\}$, и $|\Upsilon_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{-n}$, $d = const > 0$. Заметим, что $\overline{G}^j_\varepsilon \subset T^j_{a_\varepsilon} \subset T^j_{\frac{\varepsilon}{4}} \subset \overline{Y}^j_\varepsilon$, где T^j_r — шар радиуса r с центром, совпадающим с центром куба Y^j_ε.

Положим

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon},\ S_\varepsilon = \partial G_\varepsilon,\ \partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon.$$

Далее введем функциональные пространства, в которых будут изучены соответствующие задачи для эллиптических и параболических уравнений с оператором p-Лапласа.

Через $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ обозначено пространство, полученное замыканием в $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$ множества бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}_\varepsilon$ функций, обращающихся в ноль в окрестности границы $\partial\Omega$.

Определим через $W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ — пространство сопряженное к пространству $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$, и скобки $\langle .,. \rangle$ обозначают отношение двойственности. В введенном пространстве рассматривается норма:

$$\|v\|_{W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)} = \sup_{u\in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega), \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)}\leqslant 1} |<u,v>|$$

Применяя методы из [13, 33], получим следующие леммы, справедливые для функций из введенного пространства.

Лемма 1. *Пусть $u \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$, $2 \le p \le n$, $n \ge 2$. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |u|^p dx \le K\Big\{a_\varepsilon^{1-n}\varepsilon^n \int\limits_{S_\varepsilon} |u|^p ds + a_\varepsilon^{p-n}\varepsilon^n \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^p dx\Big\}, \tag{1.3}$$

если $2 \le p < n$,

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |u|^n dx \le K\Big\{a_\varepsilon^{1-n}\varepsilon^n \int\limits_{S_\varepsilon} |u|^p ds + \left|\ln\frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}\right|^{n-1} \varepsilon^n \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^p dx\Big\}, \tag{1.4}$$

елси $p = n$, где постоянная K здесь и далее не зависит от ε.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что G^j совпадает с G_0 — шар радиуса $\rho < 1$, центр которого совпадает с центром Y. Пусть также $\varepsilon(1-1/4) > a_\varepsilon\rho$. Тогда функция u определена в $T_{\varepsilon/4} \setminus a_\varepsilon G_0$, где T_σ — шар радиуса σ, центр которого совпадает с центром Y_ε. Пусть $P \in a_\varepsilon S_0$ и $Q \in rS_1, a_\varepsilon\varrho < r \leqslant \varepsilon/4, \varrho < 1$ и P, Q лежат на одном радиус-векторе, а S_1, S_0 — сферы радиуса 1. Тогда имеем, что

$$u(Q) = u(P) + \int\limits_{a_\varepsilon\rho}^{\varepsilon/4} \frac{\partial u}{\partial r} dr$$

Беря модуль и возводя в степень p, получим оценку

$$|u(Q)|^p \le 2^{p-1}|u(P)|^p + 2^{p-1}\left(\int\limits_{a_\varepsilon\rho}^{\varepsilon/4} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| dr\right)^p = 2^{p-1}|u(P)|^p + 2^{p-1}\left(\int\limits_{a_\varepsilon\rho}^{\varepsilon/4} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| r^{\frac{n-1}{p}} r^{\frac{1-n}{p}} dr\right)^p$$

Применяя неравенство Гельдера, придем к следующему неравенству

$$|u(Q)|^p \leqslant 2^{p-1}|u(P)|^p + 2^{p-1}\left(\int\limits_{a_\varepsilon\varrho}^{\varepsilon/4} r^{\frac{1-n}{p-1}}dr\right)^{p-1}\int\limits_{a_\varepsilon\varrho}^{\varepsilon/4}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^p r^{n-1}dr$$

Отсюда получим оценки:

$$\begin{cases} |u(Q)|^p \leqslant 2^{p-1}|u(P)|^p + 2^{p-1}C(a_\varepsilon\varrho)^{p-n}\int\limits_{a_\varepsilon\varrho}^{\varepsilon/4}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^p r^{n-1}dr, \text{ при } 2\le p<n, \\ |u(Q)|^n \leqslant 2^{n-1}|u(P)|^n + 2^{n-1}C(\ln(\frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}))^{n-1}\int\limits_{a_\varepsilon\varrho}^{\varepsilon/4}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^n r^{n-1}dr, \text{ при } p=n, \end{cases}$$

Далее домножаем на Якобиан сферической замены координат $J|_{r=a_\varepsilon\varrho} = (a_\varepsilon\varrho)^{n-1}\Phi(\varphi_1,...,\varphi_{n-1})$ и, интегрируя по переменным $\varphi_1,...,\varphi_{n-1}$, получаем:

$$(a_\varepsilon\varrho)^{n-1}\int\limits_{S_1}|u(Q)|^p d\varphi_1...d\varphi_{n-1} \leqslant 2^{p-1}\int\limits_{a_\varepsilon S_0}|u(P)|^p dS_x +$$

$$+2^{p-1}(a_\varepsilon\varrho)^{p-1}\int\limits_{T_{\varepsilon/4}/T_{a_\varepsilon\varrho}}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^p r^{n-1}\Phi(\varphi_1,...,\varphi_{n-1})drd\varphi_1...d\varphi_{n-1},$$

если $2\le p<n$, и

$$(a_\varepsilon\varrho)^{n-1}\int\limits_{S_1}|u(Q)|^n d\varphi_1...d\varphi_{n-1} \leqslant 2^{n-1}\int\limits_{a_\varepsilon S_0}|u(P)|^n dS_x +$$

$$+2^{n-1}C(a_\varepsilon\rho\ln(\frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}))^{n-1}\int\limits_{T_{\varepsilon/4}/T_{a_\varepsilon\varrho}}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^n r^{n-1}\Phi(\varphi_1,...,\varphi_{n-1})drd\varphi_1...d\varphi_{n-1},$$

если $p=n$, где T_σ — шар радиуса σ, центр которого совпадает с центром G_0.

Затем, домножая обе части уравнения на r^{n-1} и интегрируя по $r\in(a_\varepsilon\varrho,\varepsilon/4)$, получаем:

$$(a_\varepsilon\varrho)^{n-1}\int\limits_{T_{\varepsilon/4}/T_{a_\varepsilon\varrho}}|u|^p dx \leqslant K_0\left\{\varepsilon^n\int\limits_{a_\varepsilon S_0}|u|^p dS_x + a_\varepsilon^{p-1}\varepsilon^n\int\limits_{T_{\varepsilon/4}/T_{a_\varepsilon\varrho}}|\nabla_x u|^p dx\right\}$$

при $2\le p<n$, и

$$(a_\varepsilon\varrho)^{n-1}\int\limits_{T_{\varepsilon/4}/T_{a_\varepsilon\varrho}}|u|^n dx \leqslant K_0\left\{\varepsilon^n\int\limits_{a_\varepsilon S_0}|u|^n dS_x + (a_\varepsilon\ln(\frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}))^{n-1}\varepsilon^n\int\limits_{T_{\varepsilon/4}/T_{a_\varepsilon\varrho}}|\nabla_x u|^n dx\right\}$$

при $p=n$.

Откуда и следует требуемое утверждение. □

Лемма 2. *Пусть $u\in W^{1,p}(Y_\varepsilon)$, $Y_\varepsilon=\varepsilon Y\setminus a_\varepsilon G_0$, где G_0 совпадает с некоторым множеством D^j, $2\le p\le n$, $n\ge 2$. Тогда*

$$\int\limits_{a_\varepsilon S_0}|u|^p dx \le K\Big\{a_\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{-n}\int\limits_{Y_\varepsilon}|u|^p dy + a_\varepsilon^{p-1}\int\limits_{Y_\varepsilon}|\nabla u|^p dy\Big\}, \tag{1.5}$$

если $2 \le p < n$,

$$\int\limits_{a_\varepsilon S_0} |u|^p dx \le K\Big\{a_\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{-n}\int\limits_{Y_\varepsilon}|u|^p dy + a_\varepsilon^{n-1}\left|\ln\frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}\right|^{n-1}\int\limits_{Y_\varepsilon}|\nabla u|^p dy\Big\}, \tag{1.6}$$

если $p = n$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что G_0 — шар радиуса $\rho < \frac{1}{2}$ с центром, совпадающим с центром Y. Пусть $P \in a_\varepsilon S_0$, $P' \in \rho^{-1} r S_0$, $a_\varepsilon\rho \le r < \frac{\varepsilon}{2}\rho$ и P, P' лежат на одном и том же радиус-векторе. Имеем, что

$$|u(P)|^p \le 2^{p-1}|u(P')|^p + 2^{p-1}\left(\int\limits_{a_\varepsilon\rho}^{\varepsilon\rho/2}\left|\frac{\partial u}{\partial r}dr\right|\right)^p \tag{1.7}$$

Из (1.7) заключаем, что

$$|u(P)|^p \le 2^{p-1}|u(P')|^p + 2^{p-1}\left(\int\limits_{a_\varepsilon\rho}^{\varepsilon\rho/2}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| r^{(n-1)/p} r^{(1-n)/p} dr\right)^p \le$$

$$\le 2^{p-1}|u(P')|^p + 2^{p-1}\left(\int\limits_{a_\varepsilon\rho}^{\varepsilon\rho/2} r^{\frac{1-n}{p-1}} dr\right)^{p-1}\left(\int\limits_{a_\varepsilon\rho}^{\varepsilon\rho/2}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^p r^{n-1} dr\right)$$

Исходя из этого, получаем неравенства

$$\begin{cases} |u(P)|^p \le 2^{p-1}|u(P')|^p + \frac{2^{p-1}K}{n-p}(a_\varepsilon\rho)^{p-n}\int\limits_{a_\varepsilon\rho}^{\varepsilon\rho/2}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^p r^{n-1}dr, \quad \text{если } 2 \le p < n, \\ \\ |u(P)|^p \le 2^{p-1}|u(P')|^p + 2^{p-1}\ln^{n-1}\frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}\int\limits_{a_\varepsilon\rho}^{\varepsilon\rho/2}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^p r^{n-1}dr, \quad \text{если } p = n. \end{cases}$$

Домножая полученные неравенства на $(a_\varepsilon\rho)^{n-1}\ \psi(\varphi_1, ..., \varphi_{n-1})$, где $J \equiv r^{n-1}\psi(\varphi_1, ..., \varphi_{n-1})$ — якобиан сферической замены координат и интегрируя по $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, получим

$$\int\limits_{a_\varepsilon S_0}|u|^p ds \le K\left\{a_\varepsilon^{n-1}\int\limits_{S_1}|u(P')|^p\psi d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1} + a_\varepsilon^{p-1}\|\nabla_x u\|^p_{L_p(T_{\varepsilon/2}\setminus T_{a_\varepsilon})}\right\} \tag{1.8}$$

если $2 \le p < n$, и

$$\int\limits_{a_\varepsilon S_0}|u|^p ds \le K\left\{a_\varepsilon^{n-1}\int\limits_{S_1}|u(P')|^p\psi d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1} + a_\varepsilon^{n-1}\ln^{n-1}\frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}\|\nabla_x u\|^p_{L_p(T_{\varepsilon/2}\setminus T_{a_\varepsilon})}\right\}, \tag{1.9}$$

если $p = n$, где S_1 — сфера единичного радиуса, T_σ обозначает шар радиуса $\sigma\rho$, центр которого совпадает с центром G_0.

Далее, домножая неравенства (1.8), (1.9) на r^{n-1} и интегрируя по P' при $r \in \left(a_\varepsilon\rho, \frac{\varepsilon\rho}{2}\right)$, приходим к следующим оценкам:

$$K\left(\frac{\varepsilon^n}{2^n} - a_\varepsilon^n\right)\|u\|^p_{L_p(a_\varepsilon S_0)} \le K\left\{a_\varepsilon^{n-1}\|u\|^p_{L_p(T_{\varepsilon/2}\setminus T_{a_\varepsilon})} + a_\varepsilon^{p-1}\left(\frac{\varepsilon^n}{2^n} - a_\varepsilon^n\right)\|\nabla_x u\|^p_{L_p(T_{\varepsilon/2}\setminus T_{a_\varepsilon})}\right\}$$

при $2 \le p < n$ и

$$K\left(\frac{\varepsilon^n}{2^n} - a_\varepsilon^n\right)\|u\|^p_{L_p(a_\varepsilon S_0)} \le$$
$$\le K\left\{a_\varepsilon^{n-1}\|u\|^p_{L_p(T_{\varepsilon/2}\setminus T_{a_\varepsilon})} + a_\varepsilon^{n-1}\left|\ln\frac{\varepsilon}{2a_\varepsilon}\right|^{n-1}\left(\frac{\varepsilon^n}{2^n} - a_\varepsilon^n\right)\|\nabla_x u\|^p_{L_p(T_{\varepsilon/2}\setminus T_{a_\varepsilon})}\right\}$$

при $p = n$.

Из полученных оценок немедленно следует утверждение теоремы. $\square$

1.2 Теорема продолжения

В ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей ∂U рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} -\Delta_p v = F, & x \in U, \\ v = h, & x \in S_1, \\ \partial_{\nu_p} v = 0, & x \in S_2, \end{cases} \tag{1.10}$$

где $F \in L_q(U)$, $h \in W^{1,p}(U)$, $q = \frac{p}{p-1}$, $2 \le p \le n$. Также предполагается, что $\partial U = \overline{S_1} \bigcup \overline{S_2}$ и границы S_1, S_2 достаточно гладкие.

Под обобщенным решением задачи (1.10) будем понимать функцию $v \in W^{1,p}(U)$, для которой выполнено $v = h$ на S_1 (т.е. $v - h \in W^{1,p}(U, S_1)$), и которая удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int\limits_U |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \int\limits_U F v dx \tag{1.11}$$

для произвольной функции $v \in W^{1,p}(U, S_1)$. Через $W^{1,p}(U, S_1)$ обозначено пополнение по норме $W^{1,p}(U)$ пространства функций $C^\infty(\overline{U})$, обращающихся в ноль в окрестности S_1. Данное пространство является банoховым, рефлексивным и сепарабельным (см. [38]).

Для функций $v \in W^{1,p}(U, S_1)$ выполняется неравенство Фридрихса (см. [35])

$$\|v\|_{L_p(U)} \le \|\nabla v\|_{L_p(U)} \tag{1.12}$$

Следуя методам, описанным в [34, 36], получим следующую теорему.

Теорема 1. *Существует единственное обобщенное решение v задачи* (1.10) *и для него справедлива оценка:*

$$\|v\|_{W^{1,p}(U)} \le K\{\|F\|^{\frac{1}{p-1}}_{L_q(U)} + \|h\|_{W^{1,p}}\}, \tag{1.13}$$

где K не зависит от v, F, h.

Доказательство. Используя (1.11), получаем, что функция $\psi = v - h$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int\limits_U |\nabla(\psi + h)|^{p-2}\nabla(\psi + h)\nabla\varphi dx = \int\limits_U F\varphi dx \tag{1.14}$$

для произвольной функции $\varphi \in W^{1,p}(U, S_1)$.

Рассмотрим функционал вида:

$$J_h(\psi) = \frac{1}{p} \int\limits_U |\nabla(\psi + h)|^p dx$$

Используя результаты, полученные в [45] и то, что $h \in W^{1,p}(U)$, заключаем, что $J_h \in C^1(W^{1,p}(U, S_1), \mathbb{R})$. Обозначим $A_h = J'_h : W^{1,p}(U, S_1) \to W^{-1,q}(U, S_1)$. Тогда тождество (1.14) можно переписать в виде:

$$(A_h(\psi), \varphi) = (F, \varphi).$$

Оператор A_h является огранчиенным, непрерывным, коэрцетивным (см. [36, 41]). Также легко проверяется, что он монотонен (см. [42]). Таким образом, все условия Теоремы 2.1 из [36] выполнены, следовательно, существует обобщенное решение задачи (1.10).

Докажем, что решение задачи единственно. Пусть существует два решения v_1 и v_2 задачи (1.10). Тогда для каждой функции выполнено интегральное тождество (1.11). Очевидно, что функция $v = v_1 - v_2 \in W^{1,p}(U, S_1)$, поэтому возьмем поэтому возьмем ее в качестве пробной функции в соответствующих интегральных тождествах:

$$\int\limits_U |\nabla v_i|^{p-2} \nabla v_i \nabla(v_1 - v_2) dx = \int\limits_U F(v_1 - v_2) dx, \quad i = 1, 2.$$

Вычитая из одного равенства другое, получим

$$\int\limits_U (|\nabla v_1|^{p-2} \nabla v_1 - |\nabla v_2|^{p-2} \nabla v_2) \nabla(v_1 - v_2) dx = 0$$

Используя свойство строгой монотонности соответствующего оператора (см. [42]):

$$\int\limits_U (|\nabla v_1|^{p-2} \nabla v_1 - |\nabla v_2|^{p-2} \nabla v_2) \nabla(v_1 - v_2) dx \geq K \|v_1 - v_2\|_{L_p(U)},$$

придем к следующему равенству:

$$\|\nabla(v_1 - v_2)\|_{L_p(U)} = 0 \tag{1.15}$$

Но для функций из пространства $W^{1,p}(U, S_1)$ выполнено неравенство (1.12), откуда заключаем, что $v_1 = v_2$, следовательно, решение задачи (1.10) единтсвенно.

Теперь докажем оценку (1.13). В интегральном тождестве (1.11) в качестве пробной функции положим $\varphi = v - h$:

$$\int\limits_U |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla(v - h) dx = \int\limits_U f(v - h) dx \tag{1.16}$$

Далее используя неравенство (1.12) для функции $v - h \in W^{1,p}(U, S_1)$ и неравество Юнга, получим:

$$
\begin{gathered}
\|\nabla v\|^p_{L_p(U)} \le \int\limits_U |\nabla v|^{p-1}|\nabla h| dx + \int\limits_U |f||v-h| dx \le \\
\le \|\nabla v\|^{p-1}_{L_p(U)} \|\nabla h\|_{L_p(U)} + \|f\|_{L_q(U)} \|v-h\|_{L_p(U)} \le \\
\le \|\nabla v\|^{p-1}_{L_p(U)} \|\nabla h\|_{L_p(U)} + \|f\|_{L_q(U)} \|\nabla(v-h)\|_{L_p(U)} \le \\
\le \|\nabla v\|^{p-1}_{L_p(U)} \|\nabla h\|_{L_p(U)} + \|f\|_{L_q(U)} \|\nabla v\|_{L_p(U)} + \|f\|_{L_q(U)} \|\nabla h\|_{L_p(U)} \le \\
\le \delta_1 \|\nabla v\|^p_{L_p(U)} + C_{\delta_1} \|\nabla h\|^p_{L_p(U)} + \delta_2 \|\nabla v\|^p_{L_p(U)} + C_{\delta_2} \|f\|^q_{L_q(U)}
\end{gathered} \tag{1.17}
$$

Возьмем $\delta_1 = 1/4$, $\delta_2 = 1/4$ в неравенстве (1.17), тогда придем к оценке следующего вида:

$$
\|\nabla v\|_{L_p(U)} \le K \left\{ \|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{L_q(U)} + \|\nabla h\|_{L_p(U)} \right\} \tag{1.18}
$$

Далее используя неравенсвто (1.12) и (1.18), получим:

$$
\begin{gathered}
\|v\|_{L_p(U)} = \|v-h+h\|_{L_p(U)} \le \|v-h\|_{L_p(U)} + \|h\|_{L_p(U)} \le \\
\le \|\nabla(v-h)\|_{L_p(U)} + \|h\|_{L_p(U)} \le \|\nabla v\|_{L_p(U)} + C_1 \left(\|h\|_{W^{1,p}(U)} + \|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{L_q(U)} \right) \le \\
\le C_2 \left(\|h\|_{W^{1,p}(U)} + \|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{L_q(U)} \right)
\end{gathered} \tag{1.19}
$$

Исходя из полученных неравенств (1.18), (1.19), заключаем, что справедлива следующая оценка

$$
\|v\|_{W^{1,p}(U)} \le C \left(\|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{L_q(U)} + \|h\|_{W^{1,p}(U)} \right)
$$

Что и требовалось доказать.

□

Следуя методу, описанному в [37], докажем лемму о продолжении решения на ячейке периодичности.

Лемма 3. *Пусть $G \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ и G, Y, $Y \setminus \overline{G}$ — непустые ограниченные области с гладкой границей и $\Gamma = (\partial G) \bigcap Y \neq \emptyset$, тогда для любой функции $u \in W^{1,p}(Y \setminus \overline{G})$, где $2 \le p \le n$, определен оператор продолжения $P : W^{1,p}(Y \setminus \overline{G}) \to W^{1,p}(Y)$ такой, что*

$$
\|Pu\|_{W^{1,p}(Y)} \le C_1 \|u\|_{W^{1,p}(Y \setminus \overline{G})} \tag{1.20}
$$

$$
\|\nabla Pu\|_{L_p(Y)} \le C_2 \|\nabla u\|_{L_p(Y \setminus \overline{G})} \tag{1.21}
$$

Доказательство. Рассмотрим шар $B \subset \mathbb{R}^n$ достаточно большого радиуса, содержащий некоторую окрестность множества $\overline{Y}$. Известно (см. [34], Теорема 7.25, стр. 165), что функция u продолжается с $Y \setminus \overline{G}$ на B так, что для продолжения Eu выполнена оценка:

$$
\|Eu\|_{W^{1,p}(B)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(Y \setminus \overline{G})}
$$

Далее рассматривая ограничение Ru функции Eu на множество Y, получим функцию удовлетворяющую следующему:

$$\|Ru\|_{W^{1,p}(Y)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(Y\setminus\overline{G})} \tag{1.22}$$

Обозначим через v обобщенное решение задачи:

$$\begin{cases} -\Delta_p v = 0, & x \in G, \\ v = Ru, & x \in \partial G \bigcap Y, \\ \partial_{\nu_p} v = 0. & x \in \partial G \bigcap \partial Y. \end{cases} \tag{1.23}$$

Если $\partial G \bigcap \partial Y = \emptyset$, то последнее краевое условие отсутствует. По доказанной теореме 1 существует единственное обобщенное решение задачи (1.23) и для него справедлива оценка:

$$\|v\|_{W^{1,p}(G)} \leq K_5\|Ru\|_{W^{1,p}(G)} \leq K_5\|Ru\|_{W^{1,p}(Y)}$$

Беря во внимание оценку (1.22), получим

$$\|v\|_{W^{1,p}(G)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(Y\setminus\overline{G})}$$

Положим

$$P(u) = \begin{cases} u, x \in Y \setminus G, \\ v, x \in G. \end{cases}$$

По построению функции Pu имеем, что

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(Y)} \leq C_1\|u\|_{W^{1,p}(Y\setminus\overline{G})} \tag{1.24}$$

Далее рассмотрим константу L такую, что

$$\int\limits_{Y\setminus G} (Pu + L)dx = 0. \tag{1.25}$$

Ввиду единственности решения задачи (1.23) (см. теорему 1) имеем, что для $L \equiv const$ справедливо равенство $P(u+L) = Pu + PL$. Тогда, применяя неравество Пуанкаре, из (1.24) получим оценку:

$$\|\nabla P(u+L)\|_{L_p(Y)} \leq C_0(\|\nabla(u+L)\|_{L_p(Y\setminus\overline{G})} + \|u+L\|_{L_p(Y\setminus\overline{G})}) \leq C_2\|\nabla(u+L)\|_{L_p(Y\setminus\overline{G})}$$

Беря во внимание, что $\nabla L = 0$ и $PL = L$, придем к оценке

$$\|\nabla(Pu)\|_{L_p(Y)} \leq C_2\|\nabla u\|_{L_p(Y\setminus\overline{G})}$$

Что и доказывает лемму. □

Теорема 2. *Пусть Ω_ε — перфорированная область, определенная выше, а $2 \leq p \leq n$. Тогда существует оператор продолжения $P_\varepsilon : W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ такой, что*

$$\|P_\varepsilon u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_1\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)} \tag{1.26}$$

$$\|\nabla(P_\varepsilon u)\|_{L_p(\Omega)} \leq C_2\|\nabla u\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}, \tag{1.27}$$

где константы C_1, C_2 не зависят от u и ε.

Доказательство. Пусть $u(x) \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)$. Сначала рассмотрим отедльную ячейку. Введем новую переменную $y = a_\varepsilon^{-1}x$. Рассмотрим область $a_\varepsilon^{-1}Y_\varepsilon = \left(a_\varepsilon^{-1}\varepsilon Y \setminus \overline{G_0}\right)$. Так как $a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, тогда можно выбрать куб Y_1 со сторонами не зависищами от ε с гранями параллельными граням Y и такой, что $\overline{G_0} \subset Y_1$.

По лемме 3 существует продолжение Pu функции $u \in W^{1,p}(Y_1 \setminus \overline{G_0})$ на множество Y_1, что выполнены оценки:

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(Y_1)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(Y_1 \setminus \overline{G_0})}$$
$$\|\nabla_y Pu\|_{L_p(Y_1)} \leq C_2 \|\nabla_y u\|_{L_p(Y_1 \setminus \overline{G_0})},$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от ε.

Откуда следует, что справедливы неравенства:

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(a_\varepsilon Y_1)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(Y_\varepsilon)} \tag{1.28}$$
$$\|\nabla_x Pu\|_{L_p(a_\varepsilon Y_1)} \leq C_2 \|\nabla_x u\|_{L_p(Y_\varepsilon)} \tag{1.29}$$

Далее определим функцию

$$\widetilde{u} = \begin{cases} u, & x \in \varepsilon Y \setminus a_\varepsilon G_0 \\ Pu, & x \in a_\varepsilon G_0 \end{cases}$$

Используя (1.28) и (1.29), получим следующие оценки:

$$\|\widetilde{u}\|_{W^{1,p}(\varepsilon Y)} \leq K_2 \|u\|_{W^{1,p}(Y_\varepsilon)} \tag{1.30}$$
$$\|\nabla \widetilde{u}\|_{L_p(\varepsilon Y)} \leq K_2 \|\nabla u\|_{L_p(Y_\varepsilon)} \tag{1.31}$$

Таким образом мы построили продолжение функции u внутри одной ячейки. Так как множество G_ε состоит из шаров, которые лежат строго внутри своих ячеек, не пересекаясь с их границей, то мы можем построить продолжение по изложенной схеме для каждой из ячеек, не опасаясь того, что следы функции не будут совпадать на соседних гранях. Следовательно, мы получим продолжение $P_\varepsilon u$ на множество Ω. Используя (1.30), (1.31), получим оценки (1.26), (1.27). □

1.3 Следствия теоремы продолжения

Используя результаты, полученные в теореме 2 и лемме 3, мы можем доказать ряд полезных в дальнейшем утверждений. Во-первых, при усреднении начально краевой задачи для параболического уравнения нам требуется построить продолжение функции на цилиндр $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Сначало построим продолжение функции, определенной на множестве $Y \setminus \overline{G} \times (0, T)$, до функции, определенной на ячейке $Y \times (0, T)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть $G \subset Y \subset \mathbb{R}^n$ и $G,\ Y,\ Y \setminus \overline{G}$ — непустые ограниченные области с гладкой границей и $\Gamma = (\partial G) \bigcap Y \neq \emptyset$, тогда для любой функции $u \in L_p(0,T;W^{1,p}(Y \setminus \overline{G}))$, где $2 \le p \le n$, определен оператор продолжения $R : L_p(0,T;W^{1,p}(Y \setminus \overline{G})) \to L_p(0,T;W^{1,p}(Y))$, а также $R : L_2(Y \setminus \overline{G} \times (0,T)) \to L_2(Y \times (0,T))$ такой, что*

$$Ru = u \quad \text{на} \quad Y \setminus \overline{G} \times (0,T),$$

$$Ru' = (Ru)' \quad \text{в} \quad Y \times (0,T)$$

$$\|Ru\|_{W^{1,p}(Y)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(Y\setminus\overline{G})} \quad \text{для п.в.}\, t \in (0,T) \tag{1.32}$$

$$\|\nabla Ru\|_{L_p(Y)} \le C\|\nabla u\|_{L_p(Y\setminus\overline{G})} \quad \text{для п.в.}\, t \in (0,T) \tag{1.33}$$

$$\|Ru'\|_{L_2(0,T;L_2(Y))} \le C\|u'\|_{L_2(0,T;L_2(Y\setminus\overline{G}))} \tag{1.34}$$

$$\|Ru\|_{L_p(0,T;W^{1,p}(Y))} \le C\|u\|_{L_p(0,T;W^{1,p}(Y\setminus\overline{G}))} \tag{1.35}$$

Доказательство. Определим оператор продолжения следующим образом:

$$(Ru)(x,t) = [Pu(.,t)]\,(x),$$

где P — оператор, определенный в лемме .

Далее, так как функция $\{t \to u'(.,t)\}$ принадлежит $L_2(0,T;L_2(Y \setminus \overline{G}))$, тогда функция $\{t \to Ru'(.,t)\}$ принадлежит пространству $L_2(0,T;L_2(Y))$.

Заметим, что оператор P независит от t, следовательно, выполнено:

$$P(z'(.,t)) = (Pz(.,t))'.$$

Используя (1.21), легко видеть, что

$$\|\nabla(Rz)\|_{L_p(0,T;L_2(Y))} \le C\|z\|_{L_p(0,T;L_2(Y\setminus\overline{G}))}$$

Таким образом, оператор R удовлетворяет всем вышеуказанным свойствам. $\square$

Проводя аналогичные рассуждения, что и в теореме 2, получим следующую теорему продолжения решения, которая используется при изучении начально-краевой задачи для уравнения параболического типа.

Теорема 3. *Пусть Ω_ε — перфорированная область, определенная выше, а $2 \le p \le n$. Тогда $\forall u \in L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$ определен оператор продолжения $R_\varepsilon : L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)) \to L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, а также $R_\varepsilon : L_2(\Omega_\varepsilon \times (0,T)) \to L_2(\Omega \times (0,T))$ такой, что*

$$R_\varepsilon u = u \quad \text{на} \quad \Omega_\varepsilon \times (0,T),$$

$$R_\varepsilon u' = (R_\varepsilon u)' \quad \text{в} \quad Q_T$$

$$\|R_\varepsilon u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)} \quad \text{для п.в.}\, t \in (0,T) \tag{1.36}$$

$$\|\nabla R_\varepsilon u\|_{L_p(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \quad \text{для п.в.}\, t \in (0,T) \tag{1.37}$$

$$\|R_\varepsilon u'\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \le C\|u'\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega_\varepsilon))} \tag{1.38}$$

$$\|Ru\|_{L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \le C\|u\|_{L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))} \tag{1.39}$$

Во-вторых, справедлива следующая оценка функции на ячейке периодичности через ее градиент. Тот факт, что в оценке присутствует малый параметр ε, является существенным при доказательстве теоремы усреднения 6.

Лемма 5. *Пусть* $u \in W^{1,p}(Y_\varepsilon)$ *и* $< u >_{Y_\varepsilon} = 0$, $2 \le p \le n$, $n \ge 2$, *где* Y_ε *такое же как и в лемме 2. Тогда*

$$\|u\|_{L_p(Y_\varepsilon)} \leqslant K_1 \varepsilon \|\nabla u\|_{L_p(Y_\varepsilon)} \tag{1.40}$$

где константа K_1 *не зависит от* ε.

Доказательство. По теореме 2 существует продолжение $\widetilde{u}$ функции u на множество εY такое, что для него выполнены оценки:

$$\|\nabla \widetilde{u}\|_{L_p(\varepsilon Y)} \le C \|\nabla u\|_{L_p(Y_\varepsilon)}$$

Для простоты будем считать, что u, $\widetilde{u}$ — гладкие функции. Тогда для любых P, $P' \in Y_\varepsilon$ имеем, что

$$u(P') - u(P) = \int\limits_{x_1^P}^{x_1^{P'}} \widetilde{u}_{x_1}(x_1, x_2^{P'}, ..., x_n^{P'}) dx_1 +$$
$$+ \int\limits_{x_2^P}^{x_2^{P'}} \widetilde{u}_{x_2}(x_1^P, x_2, ..., x_n^{P'}) dx_2 + ... + \int\limits_{x_1^P}^{x_1^{P'}} \widetilde{u}_{x_1}(x_1, ..., x_{n-1}^P, x_n) dx_n$$

Далее получаем

$$|u(P') - u(P)| \le \int\limits_0^\varepsilon |\widetilde{u}_{x_1}| dx_1 + ... + \int\limits_0^\varepsilon |\widetilde{u}_{x_n}| dx_n$$

Проинтегрируем по $P \in Y_\varepsilon$:

$$\int\limits_{Y_\varepsilon} |u(P') - u(P)| dP \le \int\limits_{Y_\varepsilon} \int\limits_0^\varepsilon |\widetilde{u}_{x_1}| dx_1 dP + ... + \int\limits_{Y_\varepsilon} \int\limits_0^\varepsilon |\widetilde{u}_{x_n}| dx_n dP \tag{1.41}$$

Но мы также имеем, что

$$\int\limits_{Y_\varepsilon} |u(P) - u(P')| dP \ge \left| \int\limits_{Y_\varepsilon} (u(P) - u(P'))\, dP \right| = |u(P')||Y_\varepsilon| \tag{1.42}$$

Тогда из (1.41) и (1.42) выводим, что

$$|u(P')||Y_\varepsilon| \le \int\limits_{Y_\varepsilon} \int\limits_0^\varepsilon |\widetilde{u}_{x_1}| dx_1 dP + ... + \int\limits_{Y_\varepsilon} \int\limits_0^\varepsilon |\widetilde{u}_{x_n}| dx_n dP \tag{1.43}$$

Возведем (1.43) в степень p и, используя неравенство $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p+b^p)$, где $a,b>0$, $p>1$, получим

$$|u(P')|^p|Y_\varepsilon|^p \le C\left(\left(\int\limits_{Y_\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon |\widetilde{u}_{x_1}|dx_1dP\right)^p + ... + \left(\int\limits_{Y_\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon |\widetilde{u}_{x_n}|dx_ndP\right)^p\right) \le$$

$$\le c|Y_\varepsilon|^{p-1}\varepsilon^{p-1}\left(\int\limits_{Y_\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon |\widetilde{u}_{x_1}|^p dx_1dP + ... + \int\limits_{Y_\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon |\widetilde{u}_{x_n}|^p dx_ndP\right) \quad (1.44)$$

Далее проинтегрировав (1.44) по $P' \in Y_\varepsilon$, придем к неравенству

$$|Y_\varepsilon|^p\int\limits_{Y_\varepsilon}|u|^pdx \le |Y_\varepsilon|^p\varepsilon^p\int\limits_{Y_\varepsilon}|\nabla u|^pdx$$

Откуда немедленно следует оценка:

$$\|u\|_{L_p(Y_\varepsilon)} \le K_1\varepsilon\|\nabla u\|_{L_p(Y_\varepsilon)}$$

Что и требовалось доказать. □

В-третьих, используя теорему продолжения, докажем неравенство типа Пуанкаре для функций из пространства $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$, введенного в параграфе 1.1.

Лемма 6. *Пусть $u \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ и $2 \le p \le n, n \ge 2$, тогда существует положительная константа C таккая, что выполнено неравенство:*

$$\|u\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \le C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \quad (1.45)$$

Доказательство. По теореме 2 существует продолжение $P_\varepsilon u$ функции u на множество Ω, что выполнены оценки:

$$\|P_\varepsilon u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le K_1\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)} \quad (1.46)$$

$$\|\nabla(P_\varepsilon u)\|_{L_p(\Omega)} \le K_2\|\nabla u\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \quad (1.47)$$

Из определения множества $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ и способа построения продолжения немедленно следует, что $P_\varepsilon u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Используя неравенство Пуанкаре для функций из $W_0^{1,p}$(см. [35]), получаем оценку:

$$\|P_\varepsilon u\|_{L_p(\Omega)} \le K_3\|\nabla(P_\varepsilon u)\|_{L_p(\Omega)} \quad (1.48)$$

Используя (1.47), (1.46) и (1.48), выводим:

$$\|u\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \le \|P_\varepsilon u\|_{L_p(\Omega)} \le K_3\|\nabla(P_\varepsilon u)\|_{L_p(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}$$

Что и требовалось доказать. □

1.4 Вспомогательные предложения

В следующей лемме предполагается, что множества G^j совпадают с единичным шаром G_0, то есть полости — это шары радиуса a_ε.

Лемма 7. *Пусть $u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)\,(2 \le p \le n)$ и $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ при $\varepsilon \to 0$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$, тогда*

$$\left| 2^{2(n-1)}(n-2)C^{n-2}\varepsilon \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \int\limits_{\partial T^j_{\varepsilon/4}} u_\varepsilon dS - C_1 \int\limits_\Omega u_0 dx \right| \to 0,\, \varepsilon \to 0, \tag{1.49}$$

где $C_1 = (n-2)C^{n-2}\omega_n$, а ω_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \Delta_p M_\varepsilon = \mu,\, x \in \varepsilon Y \setminus T_{\varepsilon/4} \\ \partial_{\nu_p} M_\varepsilon = \varepsilon,\, x \in \partial T_{\varepsilon/4} \\ \int\limits_{\varepsilon Y \setminus T_{\varepsilon/4}} M_\varepsilon dx = 0,\, M_\varepsilon - \varepsilon\,\text{периодическая}, \end{cases} \tag{1.50}$$

где $\mu = \frac{|\partial T_{1/4}|}{|Y \setminus T_{1/4}|}$.

Обобщенное решение $M_\varepsilon \in W^{1,p}(\varepsilon Y \setminus T_{\varepsilon/4})$ задачи (1.50) удовлетворяет интегральному тождеству:

$$-\int\limits_{\varepsilon Y \setminus T_{\varepsilon/4}} |\nabla M_\varepsilon|^{p-2} \nabla M_\varepsilon \nabla \varphi dx + \varepsilon \int\limits_{\partial T_{\varepsilon/4}} \varphi dS = \mu_\varepsilon \int\limits_{\varepsilon Y \setminus T_{\varepsilon/4}} \varphi dx \tag{1.51}$$

Полагая в (1.51), $\varphi = M_\varepsilon$ получим оценку:

$$\|\nabla M_\varepsilon\|^p_{L_p(\varepsilon Y \setminus T_{\varepsilon/4})} \le \varepsilon \left| \int\limits_{\partial T_{\varepsilon/4}} M_\varepsilon dS \right| + \mu \left| \int\limits_{\varepsilon Y \setminus T_{\varepsilon/4}} M_\varepsilon dx \right| \le$$

$$\le \varepsilon \int\limits_{\partial T_{\varepsilon/4}} |M_\varepsilon| dS \le \varepsilon |\partial T_{\varepsilon/4}|^{\frac{p-1}{p}} \|M_\varepsilon\|_{L_p(\partial T_{\varepsilon/4})} \le C\varepsilon \cdot \varepsilon^{\frac{(p-1)(n-1)}{p}} \|M_\varepsilon\|_{L_p(\partial T_{\varepsilon/4})} \tag{1.52}$$

Далее нам потребуются вспомогательные неравенства. Введем новую переменную $y = \frac{x}{\varepsilon}$. Для функций $v_\varepsilon(x) \in W^{1,p}(\varepsilon Y \setminus T_{\varepsilon/4})$ рассмотрим функцию $v(y) = v_\varepsilon(\varepsilon y) \in W^{1,p}(Y \setminus T_{1/4})$. Для $v(y)$ из соответствующей теоремы о следах ([38, 39]) следует, что выполнено неравенство

$$\int\limits_{\partial T_{1/4}} |v|^p dy \le K \Big\{ \int\limits_{Y \setminus T_{1/4}} |v|^p dy + \int\limits_{Y \setminus T_{1/4}} |\nabla v|^p dy \Big\}.$$

Возвращаясь к переменной $x = \varepsilon y$ получим оценку:

$$\int\limits_{\partial T_{\varepsilon/4}} |v_\varepsilon|^p dx \le K \Big\{ \varepsilon^{-1} \int\limits_{\varepsilon Y \setminus T_{\varepsilon/4}} |v_\varepsilon|^p dy + \varepsilon^{p-1} \int\limits_{\varepsilon Y \setminus T_{\varepsilon/4}} |\nabla v_\varepsilon|^p dy \Big\}. \tag{1.53}$$

Пусть $v_\varepsilon \in W^{1,p}(\varepsilon Y \setminus T_{\varepsilon/4})$ и $< v_\varepsilon >_{\varepsilon Y\setminus T_{\varepsilon/4}} = 0$, $2 \le p \le n$, $n \ge 2$. Рассмотрим функцию v, определенную также, как и выше. Заметим, что $v \in W^{1,p}(T \setminus T_{1/4})$ и $< v >_{Y\setminus T_{1/4}} = 0$. Для данной функции справедливо неравенство Пуанкаре:

$$\|u\|_{L_p(Y\setminus T_{1/4})} \leqslant K_1 \|\nabla\|_{L_p(Y\setminus T_{1/4})}$$

Возвращаясь к исходной переменной, x, придем к следующей оценке

$$\|u\|_{L_p(\varepsilon Y\setminus T_{\varepsilon/4})} \leqslant K_1 \varepsilon \|\nabla u\|_{L_p(\varepsilon Y\setminus T_{\varepsilon/4})} \tag{1.54}$$

где константа K_1 независит от ε.

Используя оценки (1.52), (1.53), (1.54), получим:

$$\begin{aligned}\|\nabla M_\varepsilon\|^p_{L_p(\varepsilon Y\setminus T_{\varepsilon/4})} \le C_1 \varepsilon \cdot \varepsilon^{\frac{(p-1)(n-1)}{p}} \left(\varepsilon^{-\frac{1}{p}} \|M_\varepsilon\|_{L_p(\varepsilon Y\setminus T_{\varepsilon/4})} + \varepsilon^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla M_\varepsilon\|_{L_p(\varepsilon Y\setminus T_{\varepsilon/4})}\right) \le \\ \le C_2 \varepsilon \cdot \varepsilon^{\frac{(n-1)(p-1)}{p}} \left(\varepsilon^{-\frac{1}{p}+1} + \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}\right) \|\nabla M_\varepsilon\|_{L_p(\varepsilon Y\setminus T_{\varepsilon/4})} \le \\ \le C_3 \varepsilon \cdot \varepsilon^{n\frac{p-1}{p}} \|\nabla M_\varepsilon\|_{L_p(\varepsilon Y\setminus T_{\varepsilon/4})}\end{aligned} \tag{1.55}$$

Откуда следует, что

$$\|\nabla M_\varepsilon\|_{L_p(\varepsilon Y\setminus T_{\varepsilon/4})} \le C_4 \varepsilon^{\frac{1}{p-1}} \varepsilon^{\frac{n}{p}}$$

Суммируя по всем ячейкам, получим оценку:

$$\|\nabla M_\varepsilon\|_{L_p(\bigcup\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon Y\setminus T^j_{\varepsilon/4})} \le C_5 \varepsilon^{\frac{1}{p-1}} \tag{1.56}$$

Теперь положим в интегральном тождестве (1.51), $\varphi = u_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\varepsilon Y\setminus T_{\varepsilon/4}} div(|\nabla M_\varepsilon|^{p-2} \nabla M_\varepsilon u_\varepsilon) = \\ = \mu \int\limits_{\varepsilon Y\setminus T_{\varepsilon/4}} u_\varepsilon dx + \int\limits_{\varepsilon Y\setminus T_{\varepsilon/4}} |\nabla M_\varepsilon|^{p-2} \nabla M_\varepsilon \nabla u_\varepsilon dx = \varepsilon \int\limits_{\partial T_{\varepsilon/4}} u_\varepsilon dS\end{aligned} \tag{1.57}$$

Просуммировав (1.57) по всем ячейкам, придем к тождеству:

$$\varepsilon \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \int\limits_{\partial T^0_{\varepsilon/4}} u_\varepsilon dS = \mu \int\limits_{\bigcup\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon Y\setminus T^j_{\varepsilon/4}} u_\varepsilon dx + \int\limits_{\bigcup\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon Y\setminus T^j_{\varepsilon/4}} |\nabla M_\varepsilon|^{p-2} \nabla M_\varepsilon \nabla u_\varepsilon dx$$

Далее воспользуемся леммой 6 из [37] и получим, что

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon Y\setminus T^j_{\varepsilon/4}} u_\varepsilon dx \to |Y \setminus T_{\varepsilon/4}| \int\limits_\Omega u_0 dx \tag{1.58}$$

Используя (1.56), выводим оценку

$$\left| \int\limits_{\bigcup\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon Y \setminus T^j_{\varepsilon/4}} |\nabla M_\varepsilon|^{p-2} \nabla M_\varepsilon \nabla u_\varepsilon dx \right| \leq \|\nabla M_\varepsilon\|^{p-1}_{L_p(\bigcup\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon Y \setminus T^j_{\varepsilon/4})} \|\nabla u_\varepsilon\|^{p}_{L_p(\bigcup\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon Y \setminus T^j_{\varepsilon/4})} \leq$$

$$\leq \varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|^{p}_{L_p(\bigcup\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} \varepsilon Y \setminus T^j_{\varepsilon/4})} \leq C\varepsilon \to 0 \tag{1.59}$$

Далее из (1.57), используя (1.58) и (1.59), получим

$$\left| \varepsilon \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \int\limits_{\partial T^j_{\varepsilon/4}} u_\varepsilon dS - \left|\partial T_{1/4}\right| \int\limits_{\Omega} u_0 dx \right| \leq \left| \mu \int\limits_{\bigcup\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} Y^j_\varepsilon \setminus T^j_{\varepsilon/4}} u_\varepsilon dx - \left|\partial T^0_{1/4}\right| \int\limits_{\Omega} u_0 dx \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\bigcup\limits_{j=1}^{N_\varepsilon} Y^j_\varepsilon \setminus T^j_{\varepsilon/4}} |\nabla M_\varepsilon|^{p-2} \nabla M_\varepsilon \nabla u_\varepsilon dx \right| = \mathfrak{X}_\varepsilon \to 0 \tag{1.60}$$

при $\varepsilon \to 0$. Так как $\left|\partial T_{1/4}\right| = 2^{2(1-n)} \omega_n$, то из (1.60) получаем требуемое. □

Усредненная задача в теоремах 5, 11, 14 содержит новое нелинейное слагаемое, которое определяется как решение функционального уравнения (см. (2.23), (3.44)). Далее приводится лемма, в которой доказывается существование и единственность решения данного уравнения, а также показывается, что данное решение обладает свойством монотонности по одной из переменных. Благодаря данному свойству, справедливо утверждение о существовании и единственности решения усредненной задачи.

Лемма 8. *Пусть $p \geq 2$, B — положительная константа, а $\sigma(x,u)$ — непрерывно дифференцируемая в $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая следующим условиям: во-первых, $\sigma(x,0) \equiv 0$, во-вторых, существуют такие положительные постоянные k_1, k_2, что*

$$\begin{aligned} &(\sigma(x,u) - \sigma(x,v))(u-v) \geq k_1 |u-v|^p, \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ u,\ v \in \mathbb{R} \\ &|\sigma(x,u)| \leq k_2 |u|^{p-1}, \quad x \in \overline{\Omega},\ u \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Тогда, функциональное уравнение

$$|H|^{p-2} H = B\sigma(x, u - H), \tag{1.62}$$

имеет единственное решение $H(x,\tau)$, которое является непрерывной в $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ функцией, и которое также является непрерывно дифференцируемой функцией на $\overline{\Omega} \times \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Также существует положительная константа $\tilde{k}_1$, такая что

$$(|H(x,u)|^{p-2}H(x,u) - |H(x,v)|^{p-2}H(x,v))(u-v) \geq \tilde{k}_1|u-v|^p, \tag{1.63}$$

выполненно для любых $x \in \overline{\Omega}$, u, $v \in \mathbb{R}$.

Доказательство. В функциональном уравнении (1.62) положим $V = u - H$ и придем к уравнению вида:

$$|V-u|^{p-2}(V-u) + B\sigma(x,V) = 0.$$

Рассмотрим функцию $F(x,u,V) = |V-u|^{p-2}(V-u) + B\sigma(x,V)$. Она является непрерывно дифференцируемой по переменным $x \in \overline{\Omega}$, $u \in \mathbb{R}$, $V \in \mathbb{R}$. Исходя из строгой монотонности функции $\sigma(x,V)$ по переменной V и монотонности функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$, заключаем, что данная функция строго монотонна по переменной V на $\mathbb{R}$. Поэтому, при фиксированных $x_0 \in \Omega$ и $u_0 \in \mathbb{R}$ функция $F(x_0,u_0,V)$ является взаимно-однозначным отображением из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Следовательно, существует точка V_0, в которой $F(x_0,u_0,V_0) = 0$, то есть уравнение имеет решение хотя бы в одной точке.

Далее, из свойств (1.61) функции $\sigma(x,u)$ следует, что при $u_1 \neq u_2$ и $p \geq 2$ имеем:

$$\frac{\sigma(x,u_1) - \sigma(x,u_2)}{u_1 - u_2} = \frac{(\sigma(x,u_1) - \sigma(x,u_2))(u_1-u_2)}{|u_1-u_2|^2} \geq k_1|u_1-u_2|^{p-2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\sigma(x,u)}{\partial u} \geq 0.$$

Используя данное свойство функции σ, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial V} = (p-1)|V-u|^{p-2} + B\frac{\partial\sigma(x,V)}{\partial V} > 0,$$

при $V \neq u$. Следовательно, равенство нулю производной F по переменной V возможно только в тех точках, в которых $V = u$. В тоже время, при $V = u$ имеем, что $F = B\sigma(x,u)$. Таким образом, при $V = u$ равенство нулю функции F возможно только в тех точках (x,u,u), в которых $\sigma(x,u) = 0$. Ввиду условия, наложенного в данной лемме на функцию $\sigma(x,u)$, заключаем, что последнее возможно только при $V = u = 0$.

Тогда по теореме о неявной функции существует непрерывно дифференцируемая в $\overline{\Omega} \times \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ функция $V = U(x,\tau)$, такая что

$$|U(x,\tau) - \tau|^{p-2}(U(x,\tau) - \tau) + B\sigma(x,U(x,\tau)) = 0.$$

Далее определим функцию $H(x,\tau) = \tau - U(x,\tau)$ для $(x,\tau) \in \overline{\Omega} \times \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ и $H(x,\tau) = 0$ при $\tau = 0$ для любого $x \in \overline{\Omega}$. Как легко видеть, функция $H(x,\tau)$ — единственное непрерывное решение задачи (1.62), которое является также непрерывно дифференцируемой на $\overline{\Omega} \times \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ функцией.

Используя монотонность функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ (см. [42]) и $\sigma(x,\tau)$, соответственно, по переменным λ и τ получим

$$\begin{gathered}(|H(x,u)|^{p-2}H(x,u)-|H(x,v)|^{p-2}H(x,v))(u-v)=\\=(|H(x,u)|^{p-2}H(x,u)-|H(x,v)|^{p-2}H(x,v))(H(x,u)-H(x,v))+\\+B(\sigma(x,u-H(x,u))-\sigma(x,v-H(x,v)))(u-H(x,u)-(v-H(x,v)))\geq\\\geq K|H(x,u)-H(x,v)|^{p}+Bk_1|u-H(x,u)-(v-H(x,v))|^{p}\geq C|u-v|^{p},\end{gathered}$$

для всех $x\in\overline{\Omega}$, u, $v\in\mathbb{R}$ и для определенной постоянной $C>0$. Отсюда следует строгая монотонность функции $H(x,u)$ по переменной u. $\square$

Замечание 1. *Рассмотим функцию следующего вида: $\sigma(x,u)=g(x)|u|^{p-2}u$, где $g(x)$ — непрерывно дифференцируемая на $\overline{\Omega}$ функция, которая также является строго положительной на данном множестве. Ясно, что функция $\sigma(x,u)$ удовлетворяет всем условиям леммы 8. Но в данном случае мы можем найти в явном виде решение соответствующего функционального уравнения:*

$$H(x,u)=\frac{(Bg(x))^{\frac{1}{p-1}}}{1+(Bg(x))^{\frac{1}{p-1}}}u.$$

Глава 2

Усреднение краевой задачи в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа на границе полостей

В данной главе описывается рассматриваемая краевая задача для уравнения эллиптического типа с p-Лапласианом как для случая $2 < p < n$, так и для случая $p = n$. Также приводится доказательство теоремы существования и единственности решения соответствующей задачи.

В параграфе 2.3 доказываются теоремы усреднения для случая $2 < p < n$ для всех возможных наборов параметров $1 < \alpha$ и $\gamma \in \mathbb{R}$. Параграф разбит на 6 подпараграфов, которые соответствуют определенному соотношению между указанными параметрами.

В параграфе 2.4 доказывается теорема усреднения для случая $p = n$ для критического соотношения между параметрами a_ε и $\beta(\varepsilon)$ (см. (1.1)). Данный параграф разбит на 2 подпараграфа: в первом доказывается вспомогательная лемма, а во втором — непосредственно теорема усреднения.

2.1 Постановка задачи.

Рассмотрим следующую задачу при $2 < p < n$

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\varepsilon = f(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_{\nu_p} u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma}\sigma(x, u_\varepsilon) = 0, & x \in S_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p \in (2, n)$, $\partial_{\nu_p} u \equiv |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nu)$, ν — внешняя единичная нормаль к S_ε и предполагается, что $f \in L_q(\Omega)$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Предположим, что $\sigma(x,u)$ — непрерывно дифференцируемая по перменным $x \in \overline{\Omega}$ и $u \in \mathbb{R}$ функция такая, что $\sigma(x,0)=0$ и существуют положительные постоянные k_1 и k_2, что выполнены неравенства

$$(\sigma(x,u)-\sigma(x,v))(u-v) \geq k_1|u-v|^p, \tag{2.2}$$

$$|\sigma(x,u)| \leq k_2|u|^{p-1}. \tag{2.3}$$

Под обобщенным решением задачи (2.1) будем понимать функцию $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla v dx + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,u_\varepsilon) v ds = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f v dx, \tag{2.4}$$

для произвольной функции $v \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$.

При $p=n$ рассматриваем аналогичную задачу:

$$\begin{cases} -\Delta_n u_\varepsilon = f(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ \partial_{\nu_n} u_\varepsilon + \beta^{n-1}(\varepsilon)\sigma(x,u_\varepsilon) = 0, & x \in S_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $f \in L_q(\Omega)$, $q = \frac{n}{n-1}$, а $\beta(\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (1.1), σ — функция, обладающая аналогичными свойствами, что и в случае $2<p<n$.

Под обобщенным решением задачи (2.5) будем понимать функцию $u_\varepsilon \in W^{1,n}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^{n-2} \nabla u_\varepsilon \nabla v dx + \beta^{n-1}(\varepsilon) \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,u_\varepsilon) v ds = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f v dx, \tag{2.6}$$

для произвольной функции $v \in W^{1,n}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$.

2.2 Теорема существования и единственности. Продолжение решения

Теорема 4. *Пусть* $2<p\leq n$, *тогда существует единственное обобщенное решение* u_ε *задачи* (2.1), (2.5) *и для него справедливы оценки:*

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)} \leq K, \ \ \varepsilon^{-\gamma/p}\|u_\varepsilon\|_{L_p(S_\varepsilon)} \leq K, \tag{2.7}$$

для $2<p<n$,

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{1,n}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)} \leq K, \quad \beta^{n-1}(\varepsilon)\|u_\varepsilon\|^n_{L_n(S_\varepsilon)} \leq K, \tag{2.8}$$

для $p=n$.

Доказательство. Проведем доказательство данной теоремы для случая $2 < p < n$. Доказательство в случае $p = n$ в точности повторяет приводимое ниже с несущественными изменениями.

Рассмотрим следующий функционал:

$$J(u) = \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^p dx + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma_\varepsilon(u) ds,$$

где $\sigma_\varepsilon(u) = \int\limits_0^u \sigma(x, v) dv$.

Используя результаты полученные в [45] и свойства функции σ, заключаем, что $J \in C^1(W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega), \mathbb{R})$. Обозначим $A = J' : W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$, тогда

$$(Au, v) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u) v ds$$

Перечислим свойства введенного оператора, которые будут использоваться в доказательстве.

Основываясь на свойствах функции σ и оператора p-Лапласа (см. [41, 42]), отметим, что A — непрерывный и ограниченный оператор. Также для любых $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ справедливо следующее неравенство (см. [42]):

$$(|\boldsymbol{a}|^{p-2}\boldsymbol{a} - |\boldsymbol{b}|^{p-2}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^p |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^p,$$

если $p \geq 2$.

Из этих неравенств и условия (2.2), наложенного на функцию $\sigma(x, u)$, следует строгая монотонность оператора A.

Также A — коэрцетивный оператор:

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{(Au, u)}{\|u\|} = +\infty$$

Для доказательства существования решения задачи воспользуемся методом Галеркина (см. [36]). Для этого рассмотрим $\{\omega_n\}_{n \geq 1}$ — счетное всюду плотное множество в $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$. Будем искать функцию $u_{\varepsilon,m}$ такую, что $u_{\varepsilon,m} \in [\omega_1, \ldots, \omega_n]$ и

$$(Au_{\varepsilon,m}, \omega_j) = (f_0, \omega_j), \quad 1 \leq j \leq m, \tag{2.9}$$

где $f_0 : W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) \to \mathbb{R}$ который определяется следующим образом:

$$(f_0, v) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f v dx$$

Из определения функции f заключаем, что f_0 — линейный непрерывный функционал, определенный на $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$. Поэтому из перечисленных выше свойств оператора A следует существование $u_{\varepsilon,m}$, удовлетворяющего (2.9) (см. [36]).

Оценим норму функции $u_{\varepsilon,m}$. Из (2.9) следует

$$(Au_{\varepsilon,m}, u_{\varepsilon,m}) = (f_0, u_{\varepsilon,m}),$$

что может быть переписано в следующем виде:

$$\|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u_{\varepsilon,m}) ds = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f u_{\varepsilon,m} dx$$

Используя свойства функции $\sigma(x, u)$ и неравенство Гельдера, придем к следующей оценке:

$$\|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + k_1 \varepsilon^{-\gamma} \|u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(S_\varepsilon)} \leq \|f\|_{L_q(\Omega)} \|u_{\varepsilon,m}\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}$$

Далее, воспользовавшись неравеснвтом Юнга, а также Леммой 6 , получим:

$$\|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + k_1 \varepsilon^{-\gamma} \|u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(S_\varepsilon)} \leq C_{\delta_1} \|f\|^q_{L_q(\Omega)} + \delta_1 \|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)}$$

Полагая $\delta_1 = 1/2$, придем к оценке

$$\frac{1}{2} \|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \frac{k_1}{2} \varepsilon^{-\gamma} \|u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(S_\varepsilon)} \leq C_{\delta_1} \|f\|^q_{L_q(\Omega)} \tag{2.10}$$

Далее из (2.10) получаем:

$$\|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma} \|u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(S_\varepsilon)} \leq K \|f\|^q_{L_q(\Omega_\varepsilon)} \tag{2.11}$$

Из (2.11), используя Лемму 6, приходим к оценке нормы $u_{\varepsilon,m}$:

$$\|u_{\varepsilon,m}\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)} \leq K_2 \tag{2.12}$$

В тоже время A — ограниченный оператор, то есть

$$\|Au_{\varepsilon,m}\|_{W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)} \leq C \tag{2.13}$$

Из (2.12) и (2.13) следует существование подпоследовательности $u_{\varepsilon,\mu}$, такой что:

$$u_{\varepsilon,\mu} \rightharpoonup u_\varepsilon \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega), \tag{2.14}$$

$$Au_{\varepsilon,\mu} \rightharpoonup^* \chi \quad \text{в} \quad W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega). \tag{2.15}$$

Также, ввиду соответствующих теорем вложения (см. [38, 39]), имеем, что

$$u_{\varepsilon,\mu} \to u_\varepsilon \quad \text{в} \quad L_p(\Omega_\varepsilon), \tag{2.16}$$

$$u_{\varepsilon,\mu} \to u_\varepsilon \quad \text{в} \quad L_p(S_\varepsilon). \tag{2.17}$$

Тогда, переходя к пределу в (2.9) при $\mu \to \infty$ и фиксированном j, получим

$$(\chi, \omega_j) = (f_0, \omega_j), \quad \forall j$$

Следовательно, $\chi = f_0$. С другой стороны, имеем:

$$(Au_{\varepsilon,\mu}, u_{\varepsilon,\mu}) = (f_0, u_{\varepsilon,\mu}) \to (f_0, u_\varepsilon) = (\chi, u_\varepsilon).$$

Таким образом, получим:

$$(Au_{\varepsilon,\mu}, u_{\varepsilon,\mu}) \to (\chi, u_\varepsilon)$$

Так как A — монотонный оператор, то $\forall v \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ имеем:

$$(Au_{\varepsilon,\mu} - Av, u_{\varepsilon,\mu} - v) \geq 0.$$

Используя (2.14) — (2.17), перейдем к пределу в последнем неравенстве:

$$(\chi - Av, u_\varepsilon - v) \geq 0 \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega).$$

Рассмотрим $v = u_\varepsilon - \lambda\omega$, $\lambda > 0$ и $\omega \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$, тогда

$$\lambda(\chi - A(u_\varepsilon - \lambda\omega), \omega) \geq 0.$$

Поделив обе части нeравеснвта на λ, получим

$$(\chi - A(u_\varepsilon - \lambda\omega), \omega) \geq 0.$$

Перейдя к пределу при $\lambda \to 0$ и используя непрерывность оператора A, придем к

$$(\chi - Au_\varepsilon, \omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega).$$

Беря $\lambda < 0$ и проводя аналогичные рассуждения, получим

$$(\chi - Au_\varepsilon, \omega) \leq 0 \quad \forall \omega \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega).$$

Следовательно, $\chi = Au_\varepsilon$, но $\chi = f_0$. Таким образом, $Au_\varepsilon = f_0$. Последнее равносильно тому, что $\forall v \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ имеем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla v dx + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u_\varepsilon) v ds = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f v dx$$

Таким образом, u_ε — обобщенное решение задачи 2.1.

Используя (2.14) — (2.17), перейдем к пределу в оценке (2.11):

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma} \|u_\varepsilon\|^p_{L_p(S_\varepsilon)} \leq K \|f\|^q_{L_q(\Omega_\varepsilon)}. \tag{2.18}$$

Из данного неравенства следуют оценки (2.7).

Перейдем к доказательству единственности решения. Будем доказывать методом от противного. Пусть существует два решения задачи: $u_{\varepsilon,1}$ и $u_{\varepsilon,2}$. Для каждого из них выполненно интегральное тождество, то есть для $i = 1$, 2 имеем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_{\varepsilon,i}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon,i} \nabla v dx + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u_{\varepsilon,i}) v ds = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f v dx$$

Вычитая одно из другого, получим:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla u_{\varepsilon,1}|^{p-2}\nabla u_{\varepsilon,1} - |\nabla u_{\varepsilon,2}|^{p-2}\nabla u_{\varepsilon,2})\nabla v dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon}(\sigma(x,u_{\varepsilon,1}) - \sigma(x,u_{\varepsilon,2}))v ds = 0$$

Полагаем в данном тождестве $v = u_{\varepsilon,1} - u_{\varepsilon,2}$, используя строгую монотонность оператора A и функции $\sigma(x,u)$ по второму аргументу, придем к тому, что

$$0 \le \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(u_{\varepsilon,1} - u_{\varepsilon,2})|^p dx + k_1\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon}(\sigma(x,u_{\varepsilon,1}) - \sigma(x,u_{\varepsilon,2}))(u_{\varepsilon,1} - u_{\varepsilon,2})ds \le 0.$$

Следовательно, $\|\nabla(u_{\varepsilon,1} - u_{\varepsilon,2})\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} = 0$ и $\|u_{\varepsilon,1} - u_{\varepsilon,2}\|_{L_p(S_\varepsilon)} = 0$, отсюда следует единственность обобщенного решения. □

По теореме 2 существует такое продолжение $\widetilde{u}_\varepsilon$ функции u_ε на множество $\Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$, что $\widetilde{u}_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и для него выполнены оценки:

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)},\ \|\nabla\widetilde{u}_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \le C\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \tag{2.19}$$

Благодаря оценкам (2.7), (2.8), имеем что:

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C. \tag{2.20}$$

Следовательно, существует такая подпоследовательность $\widetilde{u}_\varepsilon$ (обозначим ее также как и исходную), что

$$\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \ \text{слабо в}\ W_0^{1,p}(\Omega)\ \text{при}\, \varepsilon \to 0. \tag{2.21}$$

2.3 Теоремы усреднения в случае $2 < p < n$

Следующие теоремы дают асимптотическое описание u_ε для различных α и γ при $\varepsilon \to 0$.

2.3.1 Случай $\alpha = \frac{n}{n-p}, \gamma = \alpha(n-1) - n = \frac{n}{n-p}(p-1)$

Как было сказано выше, данный случай является критическим, так как характер нелинейности меняется при усреднении исходной задачи. Из-за особенностей используемого метода для данного набора параметров мы полагаем, что G^j в определении (1.2) — это шар единичного радиуса с центром в начале координат. Таким образом, перфорации — это шары малого радиуса, a_ε, центр которых совпадает с центром соответствующих ячеек.

Теорема 5. *Пусть $n \ge 3$, $2 < p < n$, $\alpha = n/(n-p)$, $\gamma = \alpha(p-1)$ и u_ε — обобщенное решение задачи* (2.4). *Пусть $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ — обобщенное решение следующей задачи*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \mathcal{A}|H(x,u)|^{p-2}H(x,u) = f(x),\ \text{в}\ \Omega; \\ u = 0\ \text{на}\ \partial\Omega; \end{cases} \tag{2.22}$$

Здесь $\mathcal{A} = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{n-p}\omega_n$, ω_n *— площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$, *и* $H(x,\varphi)$ *— это определенное для всех* $(x,\varphi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ *решение функционального уравнения*

$$\mathcal{B}_0|H|^{p-2}H = \sigma(x, \varphi - H) \tag{2.23}$$

где $\mathcal{B}_0 = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{1-p}$. *Тогда* $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Заметим, что, ввиду леммы 8 существует единственное решение уравнения (2.23). При этом данное решение обладает свойством (см. (1.63)) для всех $x \in \overline{\Omega}$, u, $v \in \mathbb{R}$. Тогда из строгой монотонности функции $|H|^{p-2}H$ и $|\lambda|^{p-2}\lambda$ (см. [42]), $p > 2$, следует существование и единственность обобщенного решения задачи (2.22) (см. [36, 41]).

В интегральном тождетсве (2.4) в качестве пробной функции рассмотрим $\varphi = u_\varepsilon - v$:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - v)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u_\varepsilon)(u_\varepsilon - v)ds = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(u_\varepsilon - v)dx$$

Перепишем данное тождество в следующем виде:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(u_\varepsilon - v)dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(u_\varepsilon - v)dx +$$
$$+\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} (\sigma(x,u_\varepsilon) - \sigma(x,v))(u_\varepsilon - v)ds + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,v)(u_\varepsilon - v)ds =$$
$$= \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(u_\varepsilon - v)dx$$

Из монотонности функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ (см. [42]) и $\sigma(x,u)$ (см. (2.2)) по u из последнего равенства следует интегральное неравенство:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(v - u_\varepsilon)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,v)(v - u_\varepsilon)ds \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(v - u_\varepsilon)dx. \tag{2.24}$$

где v произвольная функция из $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$.

Обозначим через P_ε^j центр шара $G_\varepsilon^j = \{x \in Y_\varepsilon^j : |x - P_\varepsilon^j| < a_\varepsilon\}$. Пусть T_ε^j — шар радиуса $\varepsilon/4$ с центром в точке P_ε^j. Пусть w_ε^j $(j = 1, \ldots, N(\varepsilon))$ — решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_p w_\varepsilon^j = 0, \quad x \in T_\varepsilon^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}; \\ w_\varepsilon^j = 1, \ x \in \partial G_\varepsilon^j; \ w_\varepsilon^j = 0, \ x \in \partial T_\varepsilon^j. \end{cases} \tag{2.25}$$

Легко проверить, что для $p \in (1,n)$,

$$w_\varepsilon^j = \frac{|x - P_\varepsilon^j|^{\frac{p-n}{p-1}} - (\varepsilon/4)^{\frac{p-n}{p-1}}}{a_\varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} - (\varepsilon/4)^{\frac{p-n}{p-1}}}. \tag{2.26}$$

Функция $W_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ определяется следующим образом:

$$W_\varepsilon = \begin{cases} w_\varepsilon^j, \quad x \in T_\varepsilon^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \ j = 1, \ldots, N(\varepsilon) = |\Upsilon_\varepsilon|; \\ 1, \qquad x \in G_\varepsilon, \\ 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{N(\varepsilon)} T_\varepsilon^j. \end{cases} \tag{2.27}$$

Оценим норму функции W_ε в пространстве $L_p(\Omega)$:

$$\begin{gathered}
\int\limits_\Omega |W_\varepsilon|^p dx = K_0\varepsilon^{-n} \int\limits_{a_\varepsilon}^{\varepsilon/4} \frac{(r^{\frac{p-n}{p-1}} - (\varepsilon/4)^{\frac{p-n}{p-1}})^p r^{n-1}}{(a_\varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} - (\varepsilon/4)^{\frac{p-n}{p-1}})^p} dr + |G_\varepsilon| = \\
= K_0\varepsilon^{-n} \int\limits_{a_\varepsilon}^{\varepsilon/4} \frac{(r^{\frac{p-n}{p-1}} - (\varepsilon/4)^{\frac{p-n}{p-1}})^p r^{n-1}}{(\varepsilon^{\frac{-n}{p-1}} - (\varepsilon/4)^{\frac{p-n}{p-1}})^p} dr + |G_\varepsilon| = r \\
= K_0\varepsilon^{-n} \int\limits_{a_\varepsilon}^{\varepsilon/4} \frac{(r^{\frac{p-n}{p-1}} \varepsilon^{\frac{n}{p-1}} - \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} 4^{\frac{n-p}{p-1}})^p r^{n-1}}{(1 - \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} 4^{\frac{n-p}{p-1}})^p} dr + \varepsilon^{\frac{np}{n-p}} \leq K_1\varepsilon^{-n}\varepsilon^{\frac{np}{p-1}} \int\limits_{a_\varepsilon}^{\varepsilon/4} r^{\frac{p^2-n-p+1}{p-1}} dr = \\
= K_1\varepsilon^{-n}\varepsilon^{\frac{np}{p-1}}((\varepsilon/4)^{\frac{p^2-n}{p-1}} - a_\varepsilon^{\frac{p^2-n}{p-1}}) \leq K_2\varepsilon^{-n}\varepsilon^{\frac{np}{p-1}}\varepsilon^{\frac{p^2-n}{p-1}} = K_2\varepsilon^{\frac{p^2}{p-1}}
\end{gathered} \tag{2.28}$$

Откуда получаем, оценку:

$$\|W_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq K\varepsilon^{\frac{p}{p-1}}. \tag{2.29}$$

Далее оценим норму градиента функции W_ε в пространстве L_p. Используя определение функции W_ε, получим следующую оценку:

$$\begin{gathered}
\int\limits_\Omega |\nabla W_\varepsilon|^p dx = C_0\varepsilon^{-n} \left| \int\limits_{a_\varepsilon}^{\varepsilon/4} \frac{r^{\frac{1-n}{p-1}p} r^{n-1}}{(a_\varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} - (\varepsilon/4)^{\frac{p-n}{p-1}})^p} dr \right| = C_0\varepsilon^{-n} \left| \int\limits_{a_\varepsilon}^{\varepsilon/4} \frac{r^{\frac{1-n}{p-1}}}{(a_\varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} - (\varepsilon/4)^{\frac{p-n}{p-1}})^p} dr \right| \leq \\
\leq C_1\varepsilon^{-n}\varepsilon^{\frac{np}{p-1}}(a_\varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} - (\varepsilon/4)^{\frac{p-n}{p-1}}) \leq C_2\varepsilon^{-n}\varepsilon^{\frac{np}{p-1}}\varepsilon^{\frac{-n}{p-1}} = C_2
\end{gathered}$$

Следовательно для градиента функции W_ε верно, что:

$$\|\nabla W_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq C$$

Исходя из того, что $|G_\varepsilon| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и приведенных выше оценок, заключаем, что:

$$W_\varepsilon \rightharpoonup 0 \text{ в } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{2.30}$$

Пусть $v = \psi - W_\varepsilon H(x,\psi)$, где $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, будет пробной функцией в (2.24). Тогда

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\psi - W_\varepsilon H)|^{p-2}\nabla(\psi - W_\varepsilon H)\nabla(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx + \\
+\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, \psi - H)(\psi - H - u_\varepsilon)ds \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx.
\end{gathered} \tag{2.31}$$

Перейдем к пределу в (2.31) при $\varepsilon \to 0$.

Обозначая

$$\mathfrak{V}_\varepsilon \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla(\psi - W_\varepsilon H(x,\psi))|^{p-2} - |\nabla\psi|^{p-2})\nabla\psi\nabla(\psi - W_\varepsilon H(x,\psi) - u_\varepsilon)dx \tag{2.32}$$

мы покажем, что $\mathfrak{V}_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Доказательство этого утверждения будем проводить с использованием следующей оценки:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^q dx \le K\varepsilon^{n(p-q)/(n-p)}, \tag{2.33}$$

где $1 \le q \le p$. Действительно, воспользовавшись определением функции W_ε (см. (2.25), (2.26), (2.27)), получим:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^q dx \le K\varepsilon^{-n} a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}q} \int\limits_{a_\varepsilon}^{\varepsilon/4} r^{\frac{1-n}{p-1}q+n-1} \le K\varepsilon^{-n} a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}q} a_\varepsilon^{\frac{1-n}{p-1}q+n} =$$

$$= K\varepsilon^{-n} a_\varepsilon^{n-q} = K\varepsilon^{-n}\varepsilon^{\alpha(n-q)} = K\varepsilon^{\alpha(n-q)-n} = K\varepsilon^{\frac{n}{n-p}(n-q)-n} = K\varepsilon^{\frac{n^2-nq-n^2+np}{n-p}} = K\varepsilon^{\frac{n(p-q)}{n-p}}$$

Далее, применяя неравенство Минковского при $p \in [2,3]$ и неравенство

$$(a+b)^{p-2} - b^{p-2} \le (p-2)a(a+b)^{p-3}$$

при $a, b \ge 0$ и $p > 3$, мы получим, для $p \in [2,3]$

$$|\mathfrak{V}_\varepsilon| \le \int\limits_{\Omega_\varepsilon} ((|\nabla\psi| + |\nabla(W_\varepsilon H)|)^{p-2} - |\nabla\psi|^{p-2})|\nabla\psi||\nabla(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon)|dx \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-2}|\nabla\psi||\nabla(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon)|dx \le K\Big\{\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-2}dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-1}dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-2}|\nabla u_\varepsilon|dx\Big\} \to 0, \tag{2.34}$$

и, для $p > 3$

$$\mathfrak{V}_\varepsilon \le K\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon H)|(|\nabla\psi| + |\nabla(W_\varepsilon H)|)^{p-3}(1 + |\nabla(W_\varepsilon H)| + |\nabla u_\varepsilon|)dx \to 0, \tag{2.35}$$

при $\varepsilon \to 0$. Покажем тот факт, что интегралы в правой части оценок (2.34) и (2.35) стремятся к нулю. Действительно, если q — целое число, тогда

$$|\nabla(W_\varepsilon H)|^q \le (|\nabla W_\varepsilon H| + |W_\varepsilon \nabla H|)^p = \sum_{k=0}^{q} C_q^k |\nabla W_\varepsilon H|^k |W_\varepsilon \nabla H|^{q-k}$$

Так как $W_\varepsilon \rightharpoonup 0$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$, то из соответствующей теоремы вложения (см. [38]) следует, что $W_\varepsilon \to 0$ в $L_p(\Omega)$. Также если $q < p$, то из оценки (2.33) следует, что $W_\varepsilon \to 0$ в $L_q(\Omega)$. Таким образом, все интегралы в правой части оценок (2.34) и (2.35) не содержащие ∇u_ε стремятся к нулю, так как в данном случае $q \le p-1$. Далее, используя неравенство Гельдера получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^q |\nabla u_\varepsilon| dx \le \left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^{q\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}$$

Если $q < p-1$, то данное выражение стремиться к нулю, исходя из оценки (2.33). Данное условие в нашем случае выполненно. Таким образом, из сказанного выше следует требуемое утверждение.

Если q — не целое число, то рассмотрим m такое, что $0 < q-m < 1$, то есть целую часть числа q. Тогда справедлива следующая оценка:

$$|\nabla(W_\varepsilon H)|^q \leq (|\nabla W_\varepsilon H| + |W_\varepsilon \nabla H|)^{q-m} (|\nabla W_\varepsilon H| + |W_\varepsilon \nabla H|)^m \leq$$
$$\leq \left(|\nabla W_\varepsilon H|^{q-m} + |W_\varepsilon \nabla H|^{q-m}\right) \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k |\nabla W_\varepsilon H|^k |W_\varepsilon \nabla H|^{m-k}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} |\nabla W_\varepsilon H|^{q-k} |H \nabla W_\varepsilon|^k + \sum_{k=0}^{m} |\nabla W_\varepsilon H|^k |H \nabla W_\varepsilon|^{q-k}$$

Проводя аналогичные рассуждения, что и для случая, когда q — целое число, мы можем показать, что справедливо указанное выше утверждение.

Введем обозначение

$$\mathfrak{F}_\varepsilon \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Big(|\nabla(\psi - W_\varepsilon H)|^{p-2} - |\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-2}\Big) \nabla(W_\varepsilon H) \nabla(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon) dx. \tag{2.36}$$

Так же, как и выше мы получим, что $\mathfrak{F}_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Следовательно, предел левой части в (2.31) при $\varepsilon \to 0$ совпадает с пределом выражения

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\psi|^{p-2} \nabla\psi \nabla(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon) dx + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,\psi)(\psi - H - u_\varepsilon) ds -$$
$$- \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-2} \nabla(W_\varepsilon H) \nabla(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon) dx. \tag{2.37}$$

Легко показать, используя (2.33) и то, что $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\psi|^{p-2} \nabla\psi \nabla(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon) dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla\psi|^{p-2} \nabla\psi \nabla(\psi - u) dx. \tag{2.38}$$

Проводя аналогичные рассуждения, что и при доказательстве сходимостей к нулю правой части оценок (2.34) и (2.35), получим:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-2} \nabla(W_\varepsilon H) \nabla(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon) dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^{p-2} \nabla W_\varepsilon \nabla\Big(|H|^{p-2} H (\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon)\Big) dx. \tag{2.39}$$

Из определения функции W_ε мы имеем

$$\mathfrak{L}_\varepsilon \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^{p-2}\nabla W_\varepsilon \nabla\Big(|H|^{p-2}H(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon)\Big)dx =$$

$$= \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int\limits_{\partial T_\varepsilon^j} |\nabla w_\varepsilon^j|^{p-2}\partial_\nu w_\varepsilon^j |H|^{p-2}H(\psi - u_\varepsilon)ds + \qquad (2.40)$$

$$+ \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int\limits_{\partial G_\varepsilon^j} |\nabla w_\varepsilon^j|^{p-2}\partial_\nu w_\varepsilon^j |H|^{p-2}H(\psi - H - u_\varepsilon)ds,$$

где $\partial_\nu g$ производная по нормали от g.

Используя (2.26), получим:

$$\partial_\nu w_\varepsilon^j\Big|_{\partial T_\varepsilon^j} = \frac{d}{dr} w_\varepsilon^j\Big|_{r=\varepsilon/4} = -\frac{(n-p)2^{\frac{2n-2}{p-1}} C_0^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{1}{p-1}}}{(p-1)(1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})}, \qquad (2.41)$$

$$\partial_\nu w_\varepsilon^j\Big|_{\partial G_\varepsilon^j} = -\frac{d}{dr} w_\varepsilon^j\Big|_{r=a_\varepsilon} = \frac{(n-p)\varepsilon^{\frac{-n}{n-p}}}{(p-1)C_0(1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})}. \qquad (2.42)$$

Исходя из (2.37) – (2.42), неравенство (2.31) может быть переписано в следующем виде:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\nabla(\psi - u)dx + Z_\varepsilon + A_\varepsilon\varepsilon \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int\limits_{\partial T_\varepsilon^j} |H|^{p-2}H(\psi - u_\varepsilon)ds -$$

$$-\varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \Big(\Big(\frac{n-p}{p-1}\Big)^{p-1} C_0^{1-p}|H|^{p-2}H - \sigma(x, \psi - H)\Big)(\psi - H - u_\varepsilon)ds -$$

$$-Q_\varepsilon \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx, \qquad (2.43)$$

где $Z_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$,

$$A_\varepsilon = \Big(\frac{n-p}{p-1}\Big)^{p-1} \frac{2^{2n-2}C_0^{n-p}}{(1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})^{p-1}}, \qquad (2.44)$$

$$Q_\varepsilon = \frac{1 - (1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})^{p-1}}{(1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})^{p-1} C_0^{p-1}} \Big(\frac{n-p}{p-1}\Big)^{p-1} \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} |H|^{p-2}H(\psi - H - u_\varepsilon)ds. \qquad (2.45)$$

Из (2.7) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Q_\varepsilon = 0. \qquad (2.46)$$

Действительно, с одной стороны имеем

$$\varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} |H|^{p-2}H(\psi - H - u_\varepsilon)ds \leq K\varepsilon^{-\gamma} \left(|S_\varepsilon| + \int\limits_{S_\varepsilon} u_\varepsilon ds\right) \leq K\varepsilon^{-\gamma}\left(\varepsilon^\gamma + \varepsilon^{\gamma\frac{p-1}{p}} \|u_\varepsilon\|_{S_\varepsilon}\right) \leq K_1$$

С другой стороны, справедливо следующее:

$$a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}}\varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} = \varepsilon^{\frac{n}{p-1}}\varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} = \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} \to 0,$$

при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-(1-a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}}\varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}}2^{\frac{2n-2p}{p-1}})^{p-1}}{(1-a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}}\varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}}2^{\frac{2n-2p}{p-1}})^{p-1}C_0^{p-1}}\Big(\frac{n-p}{p-1}\Big)^{p-1} = 0$$

Отсюда получаем требуемое утверждение.

Так как H — решение уравнения (2.23), мы получаем из (2.43) при $\varepsilon \to 0$, что u удовлетворяет интегральному неравенству следующего вида

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\nabla(\psi-u)dx + \lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon\varepsilon\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial T_\varepsilon^j}|H|^{p-2}H(\psi-u_\varepsilon)ds \geq \int_\Omega f(\psi-u)dx. \qquad (2.47)$$

Лемма 7 вместе с (2.47), дают

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^{p-2}\nabla\psi\nabla(\psi-u)dx + \mathcal{A}\int_\Omega |H|^{p-2}H(\psi-u)dx \geq \int_\Omega f(\psi-u)dx, \qquad (2.48)$$

где $\mathcal{A} = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{n-p}\omega_n$.

Подставляя в (2.48) $\psi = u+\lambda v$, $\lambda > 0$, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, мы получим

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx + \mathcal{A}\int_\Omega |H(x,u)|^{p-2}H(x,u)v dx \geq \int_\Omega f v dx. \qquad (2.49)$$

Заменяя v на $-v$ в (2.49), получим аналогичное интегральное неравенство, но с противоположным знаком, следовательно, для u выполненно интегральное тождество вида:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx + \mathcal{A}\int_\Omega |H(x,u)|^{p-2}H(x,u)v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Таким образом, u — обощенное решение задачи (2.22). □

2.3.2 Случай $\alpha \in (1, n/(n-p))$, $\gamma = \alpha(n-1)-n$

Теорема 6. *Пусть $n \geq 3$, $2 < p < n$, $\alpha \in (1, n/(n-p))$, $\gamma = \alpha(n-1)-n$ и u_ε — обощенное решение задачи* (2.1). *Пусть $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ обощенное решение задачи*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + A\sigma(x,u) = f(x), \ \text{в } \Omega; \\ u = 0 \ \text{ на } \partial\Omega; \end{cases} \qquad (2.50)$$

где $A = C_0^{n-1}l$. Тогда $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Заметим, исходя из строгой монотонности функции $\sigma(x,u)$ по переменной $u \in \mathbb{R}$ и $|\lambda|^{p-2}\lambda$ (см. [42]) по переменной $\lambda \in \mathbb{R}$, следует существование и единственность обобщенного решения задачи (2.50).

Из интегрального тождества (2.4) и монотонности функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ и $\sigma(x,u)$ по переменной u, получим следующее интегральное неравенство:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(v-u_\varepsilon)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)ds \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(v-u_\varepsilon)dx. \tag{2.51}$$

где v произвольная функция из $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$.

Перейдем к пределу в (2.51) при $\varepsilon \to 0$. Так как $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$, то мы можем найти предел двух интегралов, взятых по области Ω_ε:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla(v-u_\varepsilon)dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla(v-u)dx \tag{2.52}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(v-u_\varepsilon)dx = \int\limits_{\Omega} f(v-u)dx \tag{2.53}$$

Далее нам нужно найти предел двух оставшихся членов неравенства. Докажем, что для $\alpha \in (1, \frac{n}{n-p})$, $\gamma = \alpha(n-1)-n$ мы имеем следующее:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)ds = A\int\limits_{\Omega} \sigma(x,v)(v-u)dx \tag{2.54}$$

Действительно, определим функцию $M_\varepsilon^j(x)$ как решение на ячейке Y_ε^j следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta_p M_\varepsilon^j = \mu_\varepsilon, \ x \in \tilde{Y}_\varepsilon^j = \varepsilon Y \setminus \overline{G_\varepsilon^j}; \\ \partial_{\nu_p} M_\varepsilon^j = 1, \ x \in \partial G_\varepsilon^j = S_\varepsilon^j; \\ \partial_{\nu_p} M_\varepsilon^j = 0, \ x \in \partial\tilde{Y}_\varepsilon^j \setminus \partial G_\varepsilon^j, \end{cases} \tag{2.55}$$

где $\mu_\varepsilon = \frac{C_0^{n-1}\varepsilon^{\alpha(n-1)-n}|\partial G^j|}{1-(a_\varepsilon\varepsilon^{-1})^n|\partial G^j|}$.

А также рассматриваем такое решение, для которого выполнено:

$$\int\limits_{\tilde{Y}_\varepsilon^j} M_\varepsilon^j(x)dx = 0 \tag{2.56}$$

Используя теже рассуждения, что и в теореме 1, получим, что существует функция M_ε^j, которая является решением задачи (2.55) и удовлетворяет условию (2.56).

Функция $M_\varepsilon^j(x)$ на ячейке периодичности удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$-\int\limits_{\tilde{Y}_\varepsilon^j} |\nabla M_\varepsilon^j|^{p-2}\nabla M_\varepsilon^j \nabla\varphi dx + \int\limits_{S_\varepsilon^j} \varphi ds = \mu_\varepsilon \int\limits_{\tilde{Y}_\varepsilon^j} \varphi dx \tag{2.57}$$

Полагая в (2.57), $\varphi = M_\varepsilon$ и применяя лемму 2, лемму 5, и также используя определение $M_\varepsilon^j(x)$, мы получим следующую оценку:

$$\begin{gathered}
\|\nabla M_\varepsilon^j\|^p_{L_p(\tilde{Y}_\varepsilon^j)} \leqslant \left|\int\limits_{S_\varepsilon^j} M_\varepsilon^j ds\right| + \mu_\varepsilon \left|\int\limits_{\tilde{Y}_\varepsilon^j} M_\varepsilon^j dx\right| \leqslant \\
\le \left(\int\limits_{S_\varepsilon^j} 1 ds\right)^{\frac{p-1}{p}} \|M_\varepsilon^j\|_{L_p(S_\varepsilon^j)} \leqslant C_1 a_\varepsilon^{(n-1)\frac{p-1}{p}} \|M_\varepsilon^j\|_{L_p(S_\varepsilon^j)} \leqslant \\
\leqslant C_2 a_\varepsilon^{(n-1)\frac{p-1}{p}} (a_\varepsilon^{\frac{n-1}{p}} \varepsilon^{-\frac{n}{p}} \|M_\varepsilon^j\|_{L_p(\tilde{Y}_\varepsilon^j)} + a_\varepsilon^{\frac{p-1}{p}} \|\nabla M_\varepsilon^j\|_{L_p(\tilde{Y}_\varepsilon^j)}) \leqslant \\
\leqslant C_3 (a_\varepsilon^{n-1} \varepsilon^{-\frac{n}{p}+1} + a_\varepsilon^{n\frac{p-1}{p}}) \|\nabla M_\varepsilon^j\|_{L_p(\tilde{Y}_\varepsilon^j)} \leqslant C_4 a_\varepsilon^{n\frac{p-1}{p}} \|\nabla M_\varepsilon^j\|_{L_p(\tilde{Y}_\varepsilon^j)}
\end{gathered} \tag{2.58}$$

Из (2.58), выводим оценку градиента функции $M_\varepsilon^j(x)$:

$$\|\nabla M_\varepsilon^j\|_{L_p(\tilde{Y}_\varepsilon^j)} \leqslant K a_\varepsilon^{\frac{n}{p}} \tag{2.59}$$

Пусть $M_\varepsilon(x)$ — это такая функция, что $M_\varepsilon(x) \equiv M_\varepsilon^j(x)$ на Y_ε^j, а вне $\bigcup\limits_{j\in\Upsilon_\varepsilon} Y_\varepsilon^j$ функция $M_\varepsilon(x)$ равна нулю. Тогда, просуммировав (2.59) по всем ячейкам, получим оценку градиента функции $M_\varepsilon(x)$ на Ω_ε:

$$\|\nabla M_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C(a_\varepsilon \varepsilon^{-1})^{\frac{n}{p}} \tag{2.60}$$

Используя определение $M_\varepsilon^j(x)$, мы можем проделать следующие преобразования:

$$\begin{gathered}
\varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon) ds = \\
= \varepsilon^{-\gamma} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int\limits_{Y_\varepsilon^j} div(|\nabla M_\varepsilon^j|^{p-2}\nabla M_\varepsilon^j \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)) dx = \\
= \varepsilon^{-\gamma} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int\limits_{Y_\varepsilon^j} |\nabla M_\varepsilon^j|^{p-2}\nabla M_\varepsilon^j \nabla(\sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)) dx + \varepsilon^{-\gamma} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int\limits_{Y_\varepsilon^j} \Delta_p M_\varepsilon^j \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon) dx = \\
= \varepsilon^{-\gamma} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int\limits_{Y_\varepsilon^j} |\nabla M_\varepsilon^j|^{p-2}\nabla M_\varepsilon^j \nabla(\sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)) dx + \varepsilon^{-\gamma} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \mu_\varepsilon \int\limits_{Y_\varepsilon^j} \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon) dx
\end{gathered} \tag{2.61}$$

Используя (2.60), оценим первый член полученного в (2.61) выражения

$$\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\nabla M_\varepsilon|^{p-1}|\nabla(\sigma(x,v)(v-u_\varepsilon))|dx \leqslant C\varepsilon^{-\gamma}\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\nabla M_\varepsilon|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^{-\alpha(n-1)+n}\varepsilon^{(\alpha-1)(p-1)\frac{n}{p}} = C\varepsilon^{\frac{1}{p}(n-\alpha(n-p))} \qquad (2.62)$$

Принимая во внимание оценку (2.62) и то, что $\alpha \in (1, \frac{n}{n-p})$, получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_{Y_\varepsilon^j}|\nabla M_\varepsilon^j|^{p-2}\nabla M_\varepsilon^j\nabla(\sigma(x,v)(v-u_\varepsilon))dx = 0 \qquad (2.63)$$

Затем, используя (2.63), мы придем к тому, что предел правой части (2.61) равен:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\mu_\varepsilon\int\limits_{Y_\varepsilon^j}\sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)dx =$$

$$= C_0^{n-1}|\partial G_0|\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)dx = C_0^{n-1}|\partial G_0|\int\limits_{\Omega}\sigma(x,v)(v-u)dx \qquad (2.64)$$

Используя (2.52), (2.53), (2.54), перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (2.51), тогда получим следующее интегральное неравенство:

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla(v-u)dx + A\int\limits_{\Omega}\sigma(x,v)(v-u)dx \geqslant \int\limits_{\Omega}f(v-u)dx \qquad (2.65)$$

Полагая в (2.65) $\psi = u + \lambda v$, $\lambda > 0$, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, мы придем к интегральному неравенству вида:

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx + A\int\limits_{\Omega}\sigma(x,u)v dx \geq \int\limits_{\Omega}fv dx. \qquad (2.66)$$

Заменяя v на $-v$ в (2.66) получим аналогичное неравенство, в котором знак будет направлен в другую сторону. Следовательно, для u справедливо интегральное тождество:

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx + A\int\limits_{\Omega}\sigma(x,u)v dx = \int\limits_{\Omega}fv dx.$$

Таким образом, u есть обобщенное решение задачи (2.50).

□

2.3.3 Случай: $\alpha > \frac{n}{n-p}$, γ произвольно.

Для данного случая справедлива следующая теорема усреднения.

Теорема 7. *Пусть* $n \geq 3$, $2 < p < n$, $\alpha > n/(n-p)$, γ *произвольно и* u_ε *— обощенное решение задачи* (2.1). *Пусть* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *есть обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), \text{ в } \Omega; \\ u(x) = 0 \text{ на } \partial\Omega; \end{cases} \tag{2.67}$$

Тогда $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Заметим, что из строгой монотонности функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ при $\lambda \in \mathbb{R}$ (см. [42]) следует существование обобщенного решения задачи (2.67) (см. [36, 41]).

Используя монотонность функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ и функции $\sigma(x,u)$ по переменной $u \in \mathbb{R}$, заключаем, что функция u_ε помимо интегрального тождества (2.4) удовлетворяет интегральному неравенству:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(v-u_\varepsilon)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)ds \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(v-u_\varepsilon)dx, \tag{2.68}$$

где v — произвольная функция из $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$.

В интегральном неравенстве (2.68) в качестве пробной функции положим $v = \varphi - W_\varepsilon\varphi$, где W_ε — функция, определенная в теореме 5. Используя рассуждения, схожие с теми, что проводились в теореме 5, получим оценку:

$$\|\nabla W_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq K\varepsilon^{\alpha(n-p)-n} \tag{2.69}$$

Из (2.69) и оценки (2.29) заключаем, что при $\alpha > n/(n-p)$

$$W_\varepsilon \to 0 \quad \text{в} \quad W^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.70}$$

Также используя то, что $W_\varepsilon = 1$ на S_ε и $\sigma(x,0) = 0$, придем к интегральному неравенству вида:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi)|^{p-2}\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi)\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx \tag{2.71}$$

Применяя технику, описанную в теореме 5 (см. (2.34) — (2.36)), заключаем следующее:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi)|^{p-2}\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi)\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon\varphi)|^{p-2}\nabla(W_\varepsilon\varphi)\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx\right) \tag{2.72}$$

Используя (2.70), придем к тому, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon\varphi)|^{p-2}\nabla(W_\varepsilon\varphi)\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx = 0 \tag{2.73}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\nabla(\varphi - u)dx \tag{2.74}$$

Действительно, имеет место оценка:

$$\left| \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon\varphi)|^{p-2}\nabla(W_\varepsilon\varphi)\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx \right| \leq$$
$$\leq K\left\{ \|\nabla W_\varepsilon\|^{p-1}_{L_{p-1}(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla W_\varepsilon\|^{p}_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla W_\varepsilon\|^{p-1}_{L_p(\Omega_\varepsilon)}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \right\} \to 0,$$

при $\varepsilon \to 0$.

Ввиду сходимостей (2.21) и (2.70), заключаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx = \int\limits_{\Omega} f(\varphi - u)dx \tag{2.75}$$

Используя (2.72), (2.73), (2.74), (2.75), из (2.71) при переходе к пределу получим, что функция u удовлетворяет следующему неравенству

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\nabla(\varphi - u)dx \geq \int\limits_{\Omega} f(\varphi - u)dx \tag{2.76}$$

Так как функции из $C_0^\infty(\Omega)$ плотны в $W_0^{1,p}(\Omega)$, то неравенство (2.76) справедливо для произвольной функции $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Тогда, полагая в (2.76) $\varphi = u + \lambda v$, где $\lambda > 0$ и $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx \geq \int\limits_{\Omega} fvdx. \tag{2.77}$$

Заменяя v на $-v$, придем к аналогичному неравенству, в котором знак направлен в противоположную сторону. Следовательно, функция u удовлетворяет интегральному тождеству вида:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx = \int\limits_{\Omega} fvdx.$$

Что и доказывает теорему. □

2.3.4 Случай: $\alpha > 1$, $\gamma < \alpha(n-1) - n$.

Теорема 8. *Пусть $n \geq 3$, $2 < p < n$, $\alpha > 1$, $\gamma < \alpha(n-1) - n$ и u_ε — обощенное решение задачи* (2.1). *Пусть $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ — обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x), \text{ в } \Omega; \\ u(x) = 0, \text{ на } \partial\Omega; \end{cases} \tag{2.78}$$

Тогда $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Заметим, что из строгой монотонности функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ при $\lambda \in \mathbb{R}$ (см. [42]) следует существование обобщенного решения задачи (2.67) (см. [36, 41]).

Используя монотонность функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ и функции $\sigma(x,u)$ по переменной $u \in \mathbb{R}$, заключаем, что функция u_ε помимо интегрального тождества (2.4) удовлетворяет интегральному неравенству:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(v-u_\varepsilon)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)ds \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(v-u_\varepsilon)dx, \tag{2.79}$$

где v — произвольная функция из $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$.

В интегральном неравенстве (2.79) в качестве пробной функци возьмем $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi|^{p-2}\nabla \varphi \nabla(\varphi-u_\varepsilon)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,\varphi)(\varphi-u_\varepsilon)ds \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi-u_\varepsilon)dx. \tag{2.80}$$

Перейдем к пределу в (2.80) при $\varepsilon \to 0$.

Используя (2.21) и тот факт, что $|G_\varepsilon| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, заключаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi-u_\varepsilon)dx = \int\limits_{\Omega} f(\varphi-u)dx \tag{2.81}$$

Исходя из того, что $\gamma < \alpha(n-1)-n$ и $\sigma(x,u)$ — непрерывно дифференцируемая на $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$ функция, $|S_\varepsilon| \leq K\varepsilon^{\alpha(n-1)-n}$, а также используя оценку (2.7), получим:

$$\left|\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,\varphi)(\varphi-u_\varepsilon)ds\right| \leqslant K\varepsilon^{-\gamma}(|S_\varepsilon| + |S_\varepsilon|^{\frac{1}{q}}\|u_\varepsilon\|_{L_p(S_\varepsilon)}) = \tag{2.82}$$

$$= K(\varepsilon^{\alpha(n-1)-n-\gamma} + \varepsilon^{(\alpha(n-1)-n-\gamma)\frac{p-1}{p}}) \to 0$$

Далее, используя сходимость (2.21), легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \varphi|^{p-2}\nabla \varphi \nabla(\varphi-u_\varepsilon)dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla \varphi|^{p-2}\nabla \varphi \nabla(\varphi-u)dx. \tag{2.83}$$

Таким образом, из (2.80), исходя из (2.81) — (2.83), при переходе к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим, что предельная функция u удовлетворяет следующему интегральному неравенству

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla \varphi|^{p-2}\nabla \varphi \nabla(\varphi-u)dx \geq \int\limits_{\Omega} f(\varphi-u)dx \tag{2.84}$$

Так как функции из $C_0^\infty(\Omega)$ плотны в $W_0^{1,p}(\Omega)$, то неравенство (2.84) справедливо и для произвольной функции $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Полагая в (2.84) $\varphi = u + \lambda v$, $\lambda > 0$, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, придем к неравенству:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx \geq \int\limits_{\Omega} f v dx$$

Заменяя v на $-v$, получим аналогичное неравенство, в котором знак направлен в другую сторону. Следовательно, для функции u справедливо интегральное тождество:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int\limits_{\Omega} f v dx$$

Таким образом, u — обобщенное решение задачи (2.78).

$\square$

2.3.5 Случай: $1 < \alpha < \frac{n}{n-p}$, $\gamma > \alpha(n-1) - n$.

Теорема 9. *Пусть* $n \geq 3$, $2 < p < n$, $1 < \alpha < \frac{n}{n-p}$, $\gamma > \alpha(n-1) - n$ *и* u_ε *— обощенное решение задачи* (2.1). *Тогда*

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant K(\varepsilon^{\alpha(1-n)+n+\gamma} + \varepsilon^{\alpha(p-n)+n})^{\frac{1}{p}} \tag{2.85}$$

следовательно, $\tilde{u}_\varepsilon \to 0$ *в* $W^{1,p}(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Из (2.7) следуют оценки:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \leq K, \quad \varepsilon^{-\gamma/p} \|u_\varepsilon\|_{L_p(S_\varepsilon)} \leq K. \tag{2.86}$$

Оценим $\|u_\varepsilon\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)}$. Используя (2.86) и лемму 1, получим следующее:

$$\begin{gathered} \|u_\varepsilon\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K(a_\varepsilon^{1-n} \varepsilon^n \|u_\varepsilon\|_{L_p(S_\varepsilon)} + a_\varepsilon^{p-n} \varepsilon^n \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}) = \\ = K(\varepsilon^{\alpha(1-n)+n} \|u_\varepsilon\|_{L_p(S_\varepsilon)} + \varepsilon^{\alpha(p-n)+n} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}) \leqslant \\ \leqslant K(\varepsilon^{\alpha(1-n)+n+\gamma} + \varepsilon^{\alpha(p-n)+n}) \end{gathered} \tag{2.87}$$

В рассматриваемом случае имеем, что $1 \leqslant \alpha < \frac{n}{n-p}$, $\quad \gamma > \alpha(n-1) - n$, тогда

$$\begin{gathered} \alpha(1-n) + n + \gamma > 0, \\ \alpha(p-n) + n > 0, \end{gathered}$$

следовательно:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} = 0$$

Далее в интегральном тождестве (2.4) в качестве пробной функции рассмотрим $v = u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^p dx + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u_\varepsilon) u_\varepsilon dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon dx$$

Используя свойство монотонности функции $\sigma(x, u)$ по переменной u и применяя неравенство Гельдера, получим

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma} \|u_\varepsilon\|^p_{L_p(S_\varepsilon)} \leq \|f\|_{L_q(\Omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}$$

Откуда, ввиду оценки (2.87), получим

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K(\varepsilon^{\alpha(1-n)+n+\gamma} + \varepsilon^{\alpha(p-n)+n})^{\frac{1}{p}}$$

Из данного неравенства и (2.87) немедленно следует утверждение теоремы. $\square$

2.3.6 Случай: $\alpha = \frac{n}{n-p}$, $\gamma > \alpha(n-1) - n = \frac{n}{n-p}(p-1)$.

Из-за особенностей используемого метода для данного набора параметров мы полагаем, что G^j в определении (1.2) — это шар единичного радиуса с центром в начале координат. Таким образом, перфорации — это шары малого радиуса, a_ε, центр которых совпадает с центром соответствующих ячеек.

В данном случае верна следующая теорема усреднения.

Теорема 10. *Пусть* $n \geq 3$, $2 < p < n$, $\alpha = \frac{n}{n-p}$, $\gamma > \alpha(n-1) - n = \frac{n}{n-p}(p-1)$ *и* u_ε — *обобщенное решение задачи* (2.1). *Пусть* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ — *обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \mathcal{A}|u|^{p-2}u = f(x), \ \text{в } \Omega; \\ u = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega; \end{cases} \tag{2.88}$$

где $\mathcal{A} = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{n-p}\omega_n$, ω_n — *площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда* $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Во-первых, из строгой монотонности функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ при $\lambda \in \mathbb{R}$ (см. [42]) следует существование и единственность обобщенного решения задачи (2.88).

Из интегрального тождества (2.4) и монотонности функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ и $\sigma(x,u)$ по переменной u, получим интегральное неравенство вида (см. теорему 5):

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(v - u_\varepsilon)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)ds \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(v-u_\varepsilon)dx. \tag{2.89}$$

где v произвольная функция из $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$.

Пусть $v = \varphi(1 - W_\varepsilon)$, где W_ε — функция определелленная в (2.27). Она обладает следующими свойствами: $(1 - W_\varepsilon)|_{S_\varepsilon} = 0$, $(1 - W_\varepsilon)|_{T_{\varepsilon/4}} = 1$. Возьмем данную функцию в качестве пробной в (2.89), тогда придем к неравенству вида:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi)|^{p-2}\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi)\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx -$$

$$-\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,0)u_\varepsilon ds \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx \tag{2.90}$$

Используя то свойство функции $\sigma(x,u)$, что $\sigma(x,0) = 0$, преобразуем интегральное неравенство (2.90):

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi)|^{p-2}\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi)\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx \tag{2.91}$$

Перейдем к пределу в (2.91) при $\varepsilon \to 0$. Введем следующие обозначения

$$\mathfrak{V}_\varepsilon \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla(\psi - W_\varepsilon H(x,\psi))|^{p-2} - |\nabla\psi|^{p-2})\nabla\psi\nabla(\psi - W_\varepsilon H(x,\psi) - u_\varepsilon)dx,$$

$$\mathfrak{F}_\varepsilon \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Big(|\nabla(\psi - W_\varepsilon H)|^{p-2} - |\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-2}\Big)\nabla(W_\varepsilon H)\nabla(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx.$$

Аналогичными методами как и в теореме 5 (см. (2.34) — (2.36)), мы можем доказать, что $\mathfrak{V}_\varepsilon$, $\mathfrak{F}_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, предел левой части (2.91) при $\varepsilon \to 0$ совпадает с пределом выражения

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon\varphi)|^{p-2}\nabla(W_\varepsilon\varphi)\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\nabla(\varphi - W_\varepsilon H\varphi - u_\varepsilon)dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\nabla(\varphi - u)dx.$$

Используя аналогичные рассуждения, что проводились при доказательстве сходимостей (2.34) — (2.35) в теореме 5, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon\varphi)|^{p-2}\nabla(W_\varepsilon\varphi)\nabla(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^{p-2}\nabla W_\varepsilon\nabla\Big(|\varphi|^{p-2}\varphi(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)\Big)dx.$$

Исходя из определения функция W_ε (см. (2.27)), заключаем справедливость следующего равенства

$$\mathfrak{L}_\varepsilon \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^{p-2}\nabla W_\varepsilon\nabla\Big(|\varphi|^{p-2}\varphi(\varphi - W_\varepsilon\varphi - u_\varepsilon)\Big)dx =$$
$$= \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_{\partial T_\varepsilon^j} |\nabla w_\varepsilon^j|^{p-2}\partial_\nu w_\varepsilon^j|\varphi|^{p-2}\varphi(\varphi - u_\varepsilon)ds -$$
$$- \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_{\partial G_\varepsilon^j} |\nabla w_\varepsilon^j|^{p-2}\partial_\nu w_\varepsilon^j|\varphi|^{p-2}\varphi u_\varepsilon ds,$$

где $\partial_\nu g$ обозначает производную по нормали от g.

Так как $\alpha = \frac{n}{n-p}$, то имеем, что

$$\partial_\nu w_\varepsilon^j\Big|_{\partial T_\varepsilon^j} = \frac{d}{dr} w_\varepsilon^j\Big|_{r=\varepsilon/4} = -\frac{(n-p)2^{\frac{2n-2}{p-1}} C_0^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{1}{p-1}}}{(p-1)(1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})}, \tag{2.92}$$

$$\partial_\nu w_\varepsilon^j\Big|_{\partial G_\varepsilon^j} = -\frac{d}{dr} w_\varepsilon^j\Big|_{r=a_\varepsilon} = \frac{(n-p)\varepsilon^{\frac{-n}{n-p}}}{(p-1)C_0(1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})}. \tag{2.93}$$

Используя (2.93), получим следующее:

$$\left| \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int\limits_{\partial G_\varepsilon^j} |\nabla w_\varepsilon^j|^{p-2} \partial_\nu w_\varepsilon^j |\varphi|^{p-2} \varphi u_\varepsilon ds \right| \leqslant K \varepsilon^{-\alpha(p-1)} |S_\varepsilon|^{\frac{p-1}{p}} \|u_\varepsilon\|_{L_p(S_\varepsilon)} \leqslant K \varepsilon^{\frac{\gamma-\alpha}{p}(p-1)} \to 0$$

Таким образом, неравенство (2.91) может быть записано в виде

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\varphi|^{p-2} \nabla\varphi \nabla(\varphi - u) dx + Z_\varepsilon + A_\varepsilon \varepsilon \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int\limits_{\partial T_\varepsilon^j} |\varphi|^{p-2} \varphi(\varphi - u_\varepsilon) ds \geq$$
$$\geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - W_\varepsilon \varphi - u_\varepsilon) dx, \tag{2.94}$$

где $Z_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и

$$A_\varepsilon = \Big(\frac{n-p}{p-1}\Big)^{p-1} \frac{2^{2n-2} C_0^{n-p}}{(1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})^{p-1}}, \tag{2.95}$$

Аналогично, как и в критическом случае (теорема 5), применяя лемму 7, найдем предел:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon \varepsilon \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int\limits_{\partial T_\varepsilon^j} |\varphi|^{p-2} \varphi(\varphi - u_\varepsilon) ds = \mathcal{A} \int\limits_\Omega |\varphi|^{p-2} \varphi(\varphi - u) dx \tag{2.96}$$

Перейдем к пределу в (2.94), используя полученный предельный переход (2.96):

$$\int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^{p-2} \nabla\varphi \nabla(\varphi - u) dx + \mathcal{A} \int\limits_\Omega |\varphi|^{p-2} \varphi(\varphi - u) dx \geq \int\limits_\Omega f(\varphi - u) dx, \tag{2.97}$$

где $\mathcal{A} = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{n-p} \omega_n$.

Полагая в (2.97) $\varphi = u + \lambda v$, $\lambda > 0$, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, мы получим

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \mathcal{A} \int\limits_\Omega |u|^{p-2} u v dx \geq \int\limits_\Omega f v dx. \tag{2.98}$$

Заменяя v на $-v$ в (2.98) получим аналогичное интегральное неравенство со знаком, направленным в другую сторону, поэтому для u выполненно интегральное тождество:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx + \mathcal{A}\int\limits_{\Omega} |u|^{p-2}uv dx = \int\limits_{\Omega} fv dx,$$

где v — произвольная функция из $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Следовательно, u — обобщенное решение задачи (2.88). Что и требовалось доказать. $\square$

2.4 Теорема усредения для случая $p = n$

В данном разделе изучается асимптотическое поведение решения u_ε задачи (2.5) в критическом случае, когда параметры a_ε и $\beta(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям (1.1).

2.4.1 Вспомогательные леммы

Для усреднения задачи (2.5) нам понадобтся следующие вспомогательные функции. Введем в рассмотрение функцию q_ε^j как решение задачи:

$$\begin{cases} \Delta_n q_\varepsilon^j = 0, \quad x \in T_\varepsilon^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}; \\ q_\varepsilon^j = 1, \quad x \in \partial G_\varepsilon^j; \quad q_\varepsilon^j = 0, \ x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j. \end{cases} \tag{2.99}$$

Определим функцию $q_\varepsilon \in W_0^{1,n}(\Omega)$ полагая

$$q_\varepsilon = \begin{cases} q_\varepsilon^j, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \ j = 1, \dots, N(\varepsilon) = |\Upsilon_\varepsilon|; \\ 1, \qquad x \in G_\varepsilon, \\ 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{N(\varepsilon)} \overline{T_{\varepsilon/4}^j}. \end{cases} \tag{2.100}$$

Для введенной функции справедливо следующее:

$$q_\varepsilon \rightharpoonup 0 \text{ в } W_0^{1,n}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{2.101}$$

Введем функцию w_ε^j $(j = 1, \dots, N(\varepsilon))$ как решение краевой задач

$$\begin{cases} \Delta_n w_\varepsilon^j = 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{T_{a_\varepsilon}^j}; \\ w_\varepsilon^j = 1, \quad x \in \partial T_{a_\varepsilon}^j; \quad w_\varepsilon^j = 0, \ x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j. \end{cases} \tag{2.102}$$

Имеем

$$w_\varepsilon^j = \frac{\ln\left(\frac{4|x-P_\varepsilon^j|}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}. \tag{2.103}$$

Воспользовавшись (2.103), вычисляем:

$$\partial_\nu w_\varepsilon^j\Big|_{\partial T_\varepsilon^j} = \frac{d}{dr} w_\varepsilon^j\Big|_{r=\varepsilon/4} = \frac{4}{\varepsilon \ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}, \tag{2.104}$$

$$\partial_\nu w_\varepsilon^j\Big|_{\partial T_{a_\varepsilon}^j} = -\frac{d}{dr} w_\varepsilon^j\Big|_{r=a_\varepsilon} = -\frac{1}{a_\varepsilon \ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}. \tag{2.105}$$

Определим функцию $W_\varepsilon \in W_0^{1,n}(\Omega)$ полагая

$$W_\varepsilon = \begin{cases} w_\varepsilon^j, \quad x \in T_\varepsilon^j \setminus \overline{T_{a_\varepsilon}^j},\ j = 1, \dots, N(\varepsilon) = |\Upsilon_\varepsilon|; \\ 1, \qquad\qquad\qquad\qquad x \in \bigcup T_{a_\varepsilon}^j = G'_\varepsilon, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{N(\varepsilon)} \overline{T_\varepsilon^j}. \end{cases} \tag{2.106}$$

Имеем

$$W_\varepsilon \rightharpoonup 0 \text{ в } W_0^{1,n}(\Omega) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{2.107}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть $n \geq 3$, тогда для определенных выше функций q_ε и W_ε справедлива оценка*

$$\|W_\varepsilon - q_\varepsilon\|_{W^{1,n}(\Omega)} \leq K\varepsilon^{\frac{1}{n-1}} \tag{2.108}$$

Доказательство. В качестве пробной функции в интегральных тождествах для задач (2.102) и (2.99) возьмем функцию $W_\varepsilon - q_\varepsilon$ и получим:

$$\int\limits_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus G_\varepsilon^j} |\nabla q_\varepsilon|^{n-2} \nabla q_\varepsilon \nabla (W_\varepsilon - q_\varepsilon) dx = 0, \tag{2.109}$$

$$\int\limits_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus T_{a_\varepsilon}^j} |\nabla W_\varepsilon|^{n-2} \nabla W_\varepsilon \nabla (W_\varepsilon - q_\varepsilon) dx - \int\limits_{\partial T_{a_\varepsilon}^j} \partial_{\nu_n} w_\varepsilon^j (W_\varepsilon - q_\varepsilon) ds_x = 0. \tag{2.110}$$

Вычитая из равенства (2.110) равенство (2.109), получим

$$\int\limits_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus G_\varepsilon^j} \left(|\nabla W_\varepsilon|^{n-2} \nabla W_\varepsilon - |\nabla q_\varepsilon|^{n-2} \nabla q_\varepsilon\right) \nabla (W_\varepsilon - q_\varepsilon) dx = \int\limits_{\partial T_{a_\varepsilon}^j} \partial_{\nu_n} W_\varepsilon (W_\varepsilon - q_\varepsilon) ds_x \tag{2.111}$$

Далее, воспользовавшись монотоностью оператора p-Лапласа, неравенством Гельдера и (2.105), из (2.111) получим следующую оценку:

$$\|\nabla (W_\varepsilon - q_\varepsilon)\|^n_{L_n(T_{\varepsilon/4}^j)} \leq K_1 \frac{1}{a_\varepsilon^{n-1} \left|\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right|^{n-1}} \left| \int\limits_{\partial T_{a_\varepsilon}^j} (W_\varepsilon - q_\varepsilon) ds_x \right| \leq$$

$$\leq K_2 \frac{a_\varepsilon^{\frac{n-1}{n}(n-1)}}{a_\varepsilon^{n-1} \left|\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right|^{n-1}} \|W_\varepsilon - q_\varepsilon\|_{L_n(\partial T_{a_\varepsilon}^j)} \tag{2.112}$$

Далее, рассмотрим функцию $v_\varepsilon = W_\varepsilon - q_\varepsilon$ и введем новую переменную $y = \frac{x}{a_\varepsilon}$. Так как G^j — диффеоморфна шару, то воспользовавшись теоремой вложения (см. [35, 38, 39]) получим, что

$$\int\limits_{\partial T_1} |v|^n ds_y \leq K \int\limits_{T_1 \setminus G^j} |\nabla_y v|^n dy,$$

где $v(y) = v_\varepsilon(a_\varepsilon y)$ и $v = 0$ на G^j. Возвращаясь к переменной x прийдем к следующему неравенству

$$a_\varepsilon^{1-n} \int\limits_{\partial T^j_{a_\varepsilon}} |v_\varepsilon|^n ds_x \leq K \int\limits_{T^j_{a_\varepsilon} \setminus G^j_\varepsilon} |\nabla v_\varepsilon|^n dx$$

Откуда получаем оценку

$$\|v_\varepsilon\|_{L_n(\partial T^j_{a_\varepsilon})} \leq K a_\varepsilon^{\frac{n-1}{n}} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L_n(T^j_{a_\varepsilon} \setminus G^j_\varepsilon)}$$

Воспользовавшись полученным резулзультатом, из неравенства (2.112) получаем оценку:

$$\|\nabla(W_\varepsilon - q_\varepsilon)\|^n_{L_n(T^j_{\varepsilon/4})} \leq K_2 \frac{a_\varepsilon^{\frac{n-1}{n}(n-1)} a_\varepsilon^{\frac{n-1}{n}}}{a_\varepsilon^{n-1} \left|\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right|^{n-1}} \|\nabla(W_\varepsilon - q_\varepsilon)\|_{L_n(T^j_{\varepsilon/4})}$$

Откуда заключаем, что

$$\|\nabla(W_\varepsilon - q_\varepsilon)\|^n_{L_n(T^j_{\varepsilon/4})} \leq K \frac{1}{\left|\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right|^n} \leq K \varepsilon^{\frac{n^2}{n-1}}$$

Просуммировав по всем ячейкам, придем к оценке

$$\|W_\varepsilon - q_\varepsilon\|^n_{W^{1,n}(\Omega)} \leq K \varepsilon^{-n} \varepsilon^{\frac{n^2}{n-1}} = K \varepsilon^{\frac{n}{n-1}}$$

Отсюда немедленно следует требуемое утверждение. □

Также справедлива следующая лемма.

Лемма 10. *Пусть $n \geq 2$ и $h_\varepsilon \in W_0^{1,n}(\Omega)$, тогда имеет место оценка*

$$\left| \frac{\varepsilon^n}{a_\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{S_\varepsilon} h_\varepsilon ds - \frac{|\partial G^j_\varepsilon| \varepsilon^n}{\omega_n a_\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{\bigcup \partial T^j_{a_\varepsilon}} h_\varepsilon ds \right| \leq K\varepsilon \tag{2.113}$$

Доказательство. Для доказательства леммы мы рассматриваем следующую вспомогательную краевую задачу, где $j \in \Upsilon_\varepsilon$:

$$\begin{cases} \Delta_n m^j(y) = 0, & y \in T_1 \setminus \overline{G^j}, \\ \partial_{\nu_n} m^j(y) = \frac{|\partial G^j|}{\omega_n}, & y \in \partial T_1, \\ \partial_{\nu_n} m^j(y) = -1, & y \in \partial G^j. \end{cases} \tag{2.114}$$

Легко видеть, что данная задача имеет единственное, с точностью до аддитивной константы, решение. Определим функцию $m^j_\varepsilon(x)$, полагая $m^j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{\frac{n}{n-1}} m^j(\frac{x}{a_\varepsilon})$. Используя (2.114), заключаем, что введенная функция является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_n m^j_\varepsilon(x) = 0, & y \in T^j_{a_\varepsilon} \setminus \overline{G^j_\varepsilon}, \\ \partial_{\nu_n} m^j_\varepsilon(x) = \frac{|\partial G^j|}{\omega_n} \varepsilon^n a_\varepsilon^{1-n}, & y \in \partial T^j_{a_\varepsilon}, \\ \partial_{\nu_n} m^j_\varepsilon(x) = -\varepsilon^n a_\varepsilon^{1-n}, & y \in \partial G^j_\varepsilon. \end{cases} \tag{2.115}$$

Беря в интегральном тождетсве для задачи (2.115) в качестве пробной функции h_ε, получим

$$\left|\frac{\varepsilon^n}{a_\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S_\varepsilon} h_\varepsilon ds - \frac{|\partial G_\varepsilon^j|\varepsilon^n}{\omega_n a_\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{\bigcup \partial T_{a_\varepsilon}^j} h_\varepsilon ds\right| = \left|\int\limits_{\bigcup T_{a_\varepsilon}^j \setminus G_\varepsilon^j} |\nabla m_\varepsilon^j|^{n-2}\nabla m_\varepsilon^j \nabla h_\varepsilon dx\right| = \mathfrak{H} \tag{2.116}$$

Но, справедлива следующая оценка

$$\int\limits_{T_{a_\varepsilon}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} |\nabla_x m_\varepsilon^j|^n dx = a_\varepsilon^{-n} a_\varepsilon^n \varepsilon^{\frac{n^2}{n-1}} \int\limits_{T_1 \setminus \overline{G^j}} |\nabla_y m^j|^n dy \le K\varepsilon^{\frac{n^2}{n-1}}, \tag{2.117}$$

откуда следует, что

$$\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int\limits_{T_{a_\varepsilon}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} |\nabla m_\varepsilon^j|^n dx \le K\varepsilon^{-n}\varepsilon^{\frac{n^2}{n-1}} = K\varepsilon^{\frac{n}{n-1}}. \tag{2.118}$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{H} \le K\varepsilon \tag{2.119}$$

Что и требовалось доказать □

2.4.2 Теорема усреднения. Критический случай

Теорема 11. *Пусть* $n \ge 3$, a_ε *и* $\beta(\varepsilon)$ *удовлетворяют условиям* (1.1) *и* u_ε *— обобщенное решение задачи* (2.5). *Введем функцию* $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ *как обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} -\Delta_n u + \mathcal{A}|H(x,u)|^{n-2}H(x,u) = f(x), & \text{в } \Omega; \\ u = 0, & \text{на } \partial\Omega; \end{cases} \tag{2.120}$$

где $\mathcal{A} = \omega_n C^{2(n-1)} C_1^{2(n-1)}$, ω_n *— площадь поверхности единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$, $H(x,u)$ *— решение уравнения*

$$\mathcal{B}_0|H|^{n-2}H = \sigma(x, u-H), \tag{2.121}$$

где $\mathcal{B}_0 = \omega_n C_1^{2(n-1)}|\partial G^j|^{-1}$. *Тогда* $\widetilde{u_\varepsilon} \rightharpoonup u$ *в* $W_0^{1,n}(\Omega)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Ввиду леммы 8, уравнение (2.121) имеет единственное решение, $H(x,u)$, которое обладает свойством (1.63) для всех $x \in \overline{\Omega}$, u, $v \in \mathbb{R}$. Тогда из строгой монотонности функции $|H|^{n-2}H$ и $|\lambda|^{n-2}\lambda$ (см. [42]), следует существование и единственность обобщенного решения задачи (2.120) (см. [36, 41]).

Из интегрального тождества (2.6) и монотонности функций $|\lambda|^{n-2}\lambda$ и $\sigma(x,u)$ относительно переменной u имеем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v|^{n-2}\nabla v \nabla(v-u_\varepsilon)dx + \beta^{n-1}(\varepsilon)\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)ds \ge \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(v-u_\varepsilon)dx \tag{2.122}$$

где v — произвольная функция из $W^{1,n}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$.

Возьмем $v = \psi - q_\varepsilon H(x,\psi)$, где $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, в неравенстве (2.122) в качестве пробной функции, получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\psi - q_\varepsilon H)|^{n-2}\nabla(\psi - q_\varepsilon H)\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx+$$

$$+\beta^{n-1}(\varepsilon)\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,\psi - H)(\psi - H - u_\varepsilon)ds \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx \tag{2.123}$$

Обозначим

$$\mathfrak{D}_\varepsilon \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon}(|\nabla(\psi - W_\varepsilon H(x,\psi) + (W_\varepsilon - q_\varepsilon)H)|^{n-2} - |\nabla(\psi - W_\varepsilon H)|^{n-2})\times$$

$$\nabla(\psi - W_\varepsilon H)\nabla(\psi - q_\varepsilon H(x,\psi) - u_\varepsilon)dx$$

Покажем, что $\mathfrak{D}_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Действительно, учитывая Лемму 2 и неравенство

$$(a+b)^{n-2} - b^{n-2} \leq (n-2)a(a+b)^{n-3} \tag{2.124}$$

справедливое для $a, b \geq 0$, $n > 3$, имеем при $n = 3$

$$|\mathfrak{D}_\varepsilon| \leq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla((W_\varepsilon - q_\varepsilon)H)||\nabla(\psi - W_\varepsilon H)|(1 + |\nabla(q_\varepsilon H)| + |\nabla u_\varepsilon|)dx \to 0, \tag{2.125}$$

и для $n > 3$

$$|\mathfrak{D}_\varepsilon| \leq K\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla((W_\varepsilon - q_\varepsilon)H)|(|\nabla\psi| + |\nabla((W_\varepsilon - q_\varepsilon)H)|)^{n-3}(1 + |\nabla(q_\varepsilon H)| + |\nabla u_\varepsilon|)dx \to 0, \tag{2.126}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Сходимости выражений в (2.125) и (2.126) к нулю при $\varepsilon \to 0$ доказывается аналогичными методами, что и при доказательстве соотношений (2.34), (2.35) в теореме 5.

Обозначим

$$\mathfrak{T}_\varepsilon \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon}\Big(|\nabla((\psi - W_\varepsilon H) + (W_\varepsilon - q_\varepsilon)H)|^{n-2} - |\nabla((W_\varepsilon - q_\varepsilon)H)|^{n-2}\Big)\times$$

$$\times\nabla((W_\varepsilon - q_\varepsilon)H)\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx. \tag{2.127}$$

Аналогично получим, что $\mathfrak{T}_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Следовательно, предел выражения

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\psi - q_\varepsilon H)|^{n-2}\nabla(\psi - q_\varepsilon H)\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx \tag{2.128}$$

совпадает с пределом следующего выражения

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\psi - W_\varepsilon H)|^{n-2}\nabla(\psi - W_\varepsilon H)\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla((W_\varepsilon - q_\varepsilon)H)|^{n-2}\nabla((W_\varepsilon - q_\varepsilon)H)\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx \tag{2.129}$$

Но как легко заметить, последнее слагаемое в (2.129) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, поэтому, предел (2.128) совпадает с пределом выражения

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\psi - W_\varepsilon H)|^{n-2}\nabla(\psi - W_\varepsilon H)\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx. \tag{2.130}$$

Далее, обозначим

$$\mathfrak{P}_\varepsilon \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla(\psi - W_\varepsilon H(x,\psi))|^{n-2} - |\nabla\psi|^{n-2})\nabla\psi\nabla(\psi - q_\varepsilon H(x,\psi) - u_\varepsilon)dx \tag{2.131}$$

Покажем, что $\mathfrak{P}_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Действительно, учитывая оценку

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^q dx \leq K\varepsilon^{q/(n-1)}, \tag{2.132}$$

где $1 \leq q < n$ и применяя неравенство (2.124) имеем для $n = 3$

$$|\mathfrak{P}_\varepsilon| \leq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon H)||\nabla\psi||\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)|dx \to 0 \tag{2.133}$$

и для $n > 3$

$$\mathfrak{P}_\varepsilon \leq K\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon H)|(|\nabla(\psi - W_\varepsilon H)| + |\nabla(W_\varepsilon H)|)^{n-3}(1 + |\nabla(q_\varepsilon H)| + |\nabla u_\varepsilon|)dx \to 0, \tag{2.134}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Сходимости выражений в (2.133) и (2.134) к нулю при $\varepsilon \to 0$ доказываются теми же методами, что и при доказательстве соотношений (2.34), (2.35) в теореме 5.

Обозначим

$$\mathfrak{F}_\varepsilon \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \Big(|\nabla(\psi - W_\varepsilon H)|^{n-2} - |\nabla(W_\varepsilon H)|^{n-2}\Big)\nabla(W_\varepsilon H)\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx. \tag{2.135}$$

Аналогично получим, что $\mathfrak{F}_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Следовательно, предел при $\varepsilon \to 0$ левой части неравенства (2.122) совпадает с пределом выражения

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\psi|^{n-2}\nabla\psi\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx + \beta^{n-1}(\varepsilon)\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,\psi)(\psi - H - u_\varepsilon)ds -$$
$$- \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon H)|^{n-2}\nabla(W_\varepsilon H)\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx. \tag{2.136}$$

Используя (2.101) и (2.21), получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\psi|^{n-2}\nabla\psi\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx = \int\limits_{\Omega} |\nabla\psi|^{n-2}\nabla\psi\nabla(\psi - u)dx. \tag{2.137}$$

Из (2.132) выводим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(W_\varepsilon H)|^{n-2}\nabla(W_\varepsilon H)\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^{n-2}\nabla W_\varepsilon \nabla\Big(|H|^{n-2}H(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)\Big)dx. \tag{2.138}$$

В силу определения W_ε имеем

$$\mathfrak{L}_\varepsilon \equiv \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^{n-2}\nabla W_\varepsilon \nabla\Big(|H|^{n-2}H(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon)\Big)dx =$$

$$= \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_{\partial T^j_{\varepsilon/4}} |\nabla w^j_\varepsilon|^{n-2}\partial_\nu w^j_\varepsilon |H|^{n-2}H(\psi - u_\varepsilon)ds+ \tag{2.139}$$

$$+\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_{\partial T^j_{a_\varepsilon}} |\nabla w^j_\varepsilon|^{n-2}\partial_\nu w^j_\varepsilon |H|^{n-2}H(\psi - H - u_\varepsilon)ds,$$

где $\partial_\nu g$ — производная по нормали от функции g.

Беря во внимание (2.104) и (2.105), из (2.125) — (2.139) следует, что неравенство (2.122) можно переписать в следующем виде

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\psi|^{n-2}\nabla\psi\nabla(\psi - q_\varepsilon H - u)dx + Z_\varepsilon -$$

$$-\left|\frac{4}{\varepsilon\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\right|^{n-2}\frac{4}{\varepsilon\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_{\partial T^j_{\varepsilon/4}} |H|^{n-2}H(\psi - u_\varepsilon)ds+$$

$$+\beta^{n-1}(\varepsilon)\int\limits_{S_\varepsilon}\sigma(x,\psi - H)(\psi - H - u_\varepsilon)ds+ \tag{2.140}$$

$$+\left|\frac{1}{a_\varepsilon\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\right|^{n-2}\frac{1}{a_\varepsilon\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_{\partial T^j_{a_\varepsilon}} |H|^{n-2}H(\psi - u_\varepsilon)ds \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(\psi - q_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx,$$

где $Z_\varepsilon \to 0$, если $\varepsilon \to 0$

Для нахождения предела в левой части (2.140) мы воспользуемся леммой 7. Также чтобы перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в левой части (2.140), требуется найти предел выражения:

$$\mathfrak{U}_\varepsilon = \left|\frac{1}{a_\varepsilon\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\right|^{n-2}\frac{1}{a_\varepsilon\ln\left(\frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}\int\limits_{\bigcup\partial T^j_{a_\varepsilon}} |H|^{n-2}H(\psi - H - u_\varepsilon)ds+$$

$$+\beta^{n-1}(\varepsilon)\int\limits_{S_\varepsilon}\sigma(x,H-\psi)(\psi - H - u_\varepsilon)ds \tag{2.141}$$

Выражение (2.141) мы представим в следующем виде

$$\mathfrak{U}_\varepsilon = \left(\left| \frac{1}{a_\varepsilon \ln \frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}} \right|^{n-2} \frac{1}{a_\varepsilon \ln \frac{4a_\varepsilon}{\varepsilon}} \int\limits_{\bigcup \partial T^j_{a_\varepsilon}} |H|^{n-2} H(\psi - H - u_\varepsilon) ds + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_n C_1^{2(n-1)} \beta^{n-1}(\varepsilon)}{|\partial G^j|} \int\limits_{S_\varepsilon} |H|^{n-2} H(\psi - H - u_\varepsilon) ds \right) + \tag{2.142}$$
$$+ \left(\beta^{n-1}(\varepsilon) \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, H - \psi)(\psi - H - u_\varepsilon) ds - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega_n C_1^{2(n-1)} \beta^{n-1}(\varepsilon)}{|\partial G^j|} \int\limits_{S_\varepsilon} |H|^{n-2} H(\psi - H - u_\varepsilon) ds \right)$$

Используя оценку (2.113) из леммы 10, а также условия (1.1), наложенные на a_ε и $\beta(\varepsilon)$, заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathfrak{U}_\varepsilon = 0. \tag{2.143}$$

Из леммы 7 и (2.143) следует, что функция u удовлетворяет следующему интегральному неравенству

$$\int\limits_\Omega |\nabla\psi|^{n-2} \nabla\psi \nabla(\psi - u) dx + \mathcal{A} \int\limits_\Omega |H|^{n-2} H(\psi - u) dx \geq \int\limits_\Omega f(\psi - u) dx, \tag{2.144}$$

где $\mathcal{A} = \omega_n C^{2(n-1)} C_1^{2(n-1)}$.

Полагая в (2.144) $\psi = u + \lambda v$, $\lambda > 0$, $v \in W_0^{1,n}(\Omega)$, и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{n-2} \nabla u \nabla v dx + \mathcal{A} \int\limits_\Omega |H(x,u)|^{n-2} H(x,u) v dx \geq \int\limits_\Omega f v dx. \tag{2.145}$$

Заменяя в (2.145) v на $-v$ приходим к интегральному тождеству для u:

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^{n-2} \nabla u \nabla v dx + \mathcal{A} \int\limits_\Omega |H(x,u)|^{n-2} H(x,u) v dx = \int\limits_\Omega f v dx.$$

Следовательно, u — обобщенное решение задачи (2.120).

$\square$

Глава 3

Усреднение начально-краевой задачи в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа на границе полостей.

3.1 Постановка задачи

В цилиндре $Q_\varepsilon^T = \Omega_\varepsilon \times (0, T)$ рассматриваем следующую начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta_p u_\varepsilon = f(x,t), & (x,t) \in Q_\varepsilon^T, \\ \partial_{\nu_p} u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma}\sigma(x, u_\varepsilon) = 0, & (x,t) \in S_\varepsilon^T = S_\varepsilon \times (0,T), \\ u_\varepsilon = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p \in [2, n)$, $\partial_{\nu_p} u \equiv |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nu)$, ν — внешняя единичная нормаль к S_ε^T, $\gamma = \alpha(p-1)$ и предполагается, что $f \in L_2(Q^T)$. Также предполагается, что параметры α и γ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} 1 < \alpha \le n/(n-p), \\ \gamma \le \alpha(n-1) - n. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Предположим, что $\sigma(x, u)$ — непрерывно дифференцируемая по переменным $x \in \overline{\Omega}$ и $u \in \mathbb{R}$ функция, такая, что $\sigma(x, 0) = 0$ и существуют положительные постоянные k_1 и k_2, что выполнены неравенства

$$(\sigma(x,u) - \sigma(x,v))(u - v) \ge k_1 |u - v|^p, \tag{3.3}$$

$$|\sigma(x,u)| \le k_2 |u|^{p-1}. \tag{3.4}$$

Обобщенным решением задачи (3.1) назовем функцию $u_\varepsilon \in L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $\partial_t u_\varepsilon \in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $u_\varepsilon(x,0)=0$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v\rangle dt + \int\limits_{Q_\varepsilon^T} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \nabla v dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon^T} \sigma(x,u_\varepsilon) v ds = \int\limits_{Q_T^\varepsilon} f v dx, \tag{3.5}$$

для произвольной функции $v \in L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $q=p/(p-1)$.

3.2 Теорема существования.

Используя лемму 6, метод Галеркина и метод монотонности (см. [36, 41]), получим следующее утверждение.

Теорема 12. *Существует единственное обобщенное решение* u_ε *задачи* (3.1) *и для него справедливы оценки:*

$$\|u_\varepsilon\|_{L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))} \le K,\ \ \varepsilon^{-\gamma/p}\|u_\varepsilon\|_{L_p(0,T;L_p(S_\varepsilon))} \le K, \tag{3.6}$$

$$\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))} \le K. \tag{3.7}$$

Доказательство. Рассмотрим оператор A, определенный в теореме 4. При доказательстве данной теоремы было указано, что он обладает следующими свойствами:

1. непрерывность,
2. ограниченность,
3. строгая монотонность,
4. коэрцетивность.

Для доказательства существования решения задачи (3.1) воспользуемся методом Галеркина (см. [36, 41]).

Пусть $\omega_1^\varepsilon, ..., \omega_n^\varepsilon, ...$ — ортогональный "базис"в $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)$.

Будем искать функцию u_m^ε, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u_{\varepsilon,m} = \sum_{k=1}^m d_{k,m}^\varepsilon(t)\omega_k^\varepsilon$$

$$(\partial_t u_{\varepsilon,m}, \omega_j^\varepsilon)_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + (A(u_{\varepsilon,m}),\omega_j^\varepsilon) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(x,t)\omega_j^\varepsilon dx, \tag{3.8}$$

где $1 \leqslant j \leqslant m$, выполнены для п.в. $t \in [0,T]$ и

$$u_{\varepsilon,m}(x,0) = 0. \tag{3.9}$$

Заметим, что наложенные условия дают систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} D'_\varepsilon = F_{1,\varepsilon}(t, D_\varepsilon) + F_{2,\varepsilon}(t), \\ D_\varepsilon(0) = 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

где $F_{1,\varepsilon}(t, D)$ — непрерывно дифференцируемая функция переменных $t \in [0, T]$ и $D \in \mathbb{R}^m, F_{2,\varepsilon} \in (L_2(0,T))^m$.

Легко проверить, что оператор A обладает следующими свойствами:

1. (Au, v) — измерима от t при фиксированных u, v

2. Для оператора A выполнена оценка:

$$(Au, u) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^p dx + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u) u dS \geq \|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma} k_1 \int\limits_{S_\varepsilon} |u|^p dS =$$

$$= \|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma} k_1 \|u\|^p_{L_p(S_\varepsilon)} \geq C\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)} - d,$$

   где C и d не зависят от t.

3. $\|Au\|_{W^{-1,p'}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)} \leq D(\|u\|^{p-1} + 1)$

Известно, что, при упомянутых выше свойствах оператора A, задача (3.10) имеет единственно решение (см. [41]), являющееся абсолютно непрерывной функцией, определенной на некотором отрезке $[0, t_{\varepsilon,m}]$. Покажем, что это решение определено на всем отрезке $[0, T]$.

Получим некоторые априорные оценки на функцию $u_{\varepsilon,m}$. Умножим уравнение (3.8) на $d^\varepsilon_{k,m}$ и просуммируем по k от 0 до m. Имеем

$$(\partial_t u_{\varepsilon,m}, u_{\varepsilon,m})_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u_{\varepsilon,m}) u_{\varepsilon,m} dS = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f u_{\varepsilon,m} dx. \tag{3.11}$$

Из (3.11) выводим:

$$\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon_m\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + 2\|\nabla u^\varepsilon_m\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + 2\varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u^\varepsilon_m) u^\varepsilon_m dS = 2\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f u^\varepsilon_m dx \tag{3.12}$$

Интегрируя (3.12) по t от 0 до $\tau \in [0, T]$, получим равенство:

$$\|u_{\varepsilon,m}(x, \tau)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + 2\int\limits_0^\tau \|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} dt + 2\varepsilon^{-\gamma} \int\limits_0^\tau \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u_{\varepsilon,m}) u_{\varepsilon,m} dS dt =$$

$$= 2\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f u_{\varepsilon,m} dx dt$$

Применяя неравенство Гельдера и используя свойства функции $\sigma(x, u)$, получим:

$$\|u_{\varepsilon,m}(x, \tau)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_{\varepsilon,m}|^p dx dt + k_1 \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_0^\tau \int\limits_{S_\varepsilon} |u_{\varepsilon,m}|^p dS \leq$$

$$\leq 2\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f u_{\varepsilon,m} dx dt \leq 2\left(\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |f|^2 dx dt\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |u_{\varepsilon,m}|^2 dx dt\right)^{1/2}$$

где $q = \frac{p}{p-1}$. Применим неравенство Юнга к последнему выражению, придем к следующей оценке:

$$\|u_{\varepsilon,m}(x,\tau)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} + \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_{\varepsilon,m}|^p dxdt + k_1\varepsilon^{-\gamma} \int\limits_0^\tau \int\limits_{S_\varepsilon} |u_{\varepsilon,m}|^p dS \leq$$

$$\leq \delta_1 \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |u_{\varepsilon,m}|^2 dxdt + C_{\delta_1} \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |f|^2 dxdt \tag{3.13}$$

Полагая в неравенстве (3.13) $\delta_1 = 1$, получим:

$$\|u_{\varepsilon,m}(x,\tau)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leq C_1 + \int\limits_0^\tau \|u_{\varepsilon,m}(x,v)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} dv, \tag{3.14}$$

где $C_1 = K\|f\|^2_{L_2(Q^T)}$. В силу леммы Гроноулла из (3.14) следует оценка:

$$\|u_{\varepsilon,m}(x,\tau)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C_2,$$

где $\tau \in [0,T]$. Следовательно:

$$\max_{[0,T]} \|u_{\varepsilon,m}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant C, \tag{3.15}$$

где постоянная C не зависит от ε и m. Из данной оценки следует, что $d^\varepsilon_{k,m}(t)(k = 1,...,m)$ определены на всем отрезке $[0,T]$.

Полагая в неравенстве (3.13) $\delta_1 = 1/2$ получим:

$$\int\limits_0^T \|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_0^T \|u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K\|f\|^q_{L_q(\Omega)} \tag{3.16}$$

Ввиду леммы 6, из (3.16) следует:

$$\int\limits_0^T \|u_{\varepsilon,m}\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} dt \leqslant K\|f\|^q_{L_q(\Omega)}, \tag{3.17}$$

$$\|u_{\varepsilon,m}\|_{L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))} \leqslant C, \tag{3.18}$$

$$\varepsilon^{-\gamma/p} \|u_{\varepsilon,m}\|_{L_p(0,T;L_p(S_\varepsilon))} \leqslant C. \tag{3.19}$$

Получим оценку для производной $\partial_t u^\varepsilon_m$.

Пусть $v \in L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$ и $\|v\|_{W^{1,p}}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega) \leqslant 1$ для п.в. $t \in [0,T]$. Представляем v в виде суммы $v = \sum\limits_{k=1}^m g^\varepsilon_{k,m}(t)\omega^\varepsilon_k(x) + \tilde{v}^\varepsilon_m \equiv \hat{v}^\varepsilon_m + \tilde{v}^\varepsilon_m$ и $(\tilde{v}^\varepsilon_m, \omega^\varepsilon_k)_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = 0,\ k = 1,...,m$. Функции $\{\omega^\varepsilon_k\}$ образуют ортогональный базис в $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)$, следовательно:

$$\|\hat{v}^\varepsilon_m\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)} \leqslant \|v\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)} \leqslant 1.$$

Имеем

$$\langle \partial_t u_{\varepsilon,m}, v\rangle = (\partial_t u^\varepsilon_m, v)_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = (\partial_t u_{\varepsilon,m}, \hat{v}^\varepsilon_m)_{L_2(\Omega_\varepsilon)} =$$

$$= (f, \hat{v}^\varepsilon_m) - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_{\varepsilon,m}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon,m} \nabla \hat{v}^\varepsilon_m dx - \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u_{\varepsilon,m}) \hat{v}^\varepsilon_m dS \tag{3.20}$$

Отсюда получаем неравество:

$$|\langle\partial_t u_{\varepsilon,m},\hat{v}^\varepsilon_m\rangle|\leqslant\|f\|_{L_q(\Omega)}\|\hat{v}^\varepsilon_m\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}+$$
$$+\|\nabla u^\varepsilon_m\|^{p-2}_{L_p(\Omega_\varepsilon)}\|\nabla\hat{v}^\varepsilon_m\|^2_{L_p(\Omega_\varepsilon)}+\|\nabla u^\varepsilon_m\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)}+k_2\varepsilon^{-\gamma}\|u^\varepsilon_m\|^{p-1}_{L_p(\Omega_\varepsilon)}\|\hat{v}^\varepsilon_m\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \tag{3.21}$$

Из леммы 2, ввиду условий (3.2), наложенных на параметры α и γ, получаем, что

$$\varepsilon^{-\gamma/p}\|\hat{v}^\varepsilon_m\|_{L_p(S_\varepsilon)}\leqslant C\|\nabla\hat{v}^\varepsilon_m\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}\leqslant C, \tag{3.22}$$

Также в ввиду оценки (3.19) имеем, что

$$\varepsilon^{-\gamma\frac{p-1}{p}}\|u_{\varepsilon,m}\|^{p-1}_{L_p(S_\varepsilon)}\leq C \tag{3.23}$$

Откуда:

$$|\langle\partial_t u_{\varepsilon,m},v\rangle|\leqslant C \tag{3.24}$$

Следовательно, выполнена следующая оценка:

$$\|\partial_t u_{\varepsilon,m}\|_{L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))}\leqslant C. \tag{3.25}$$

Из полученных оценок следует, что существует подпоследовательность $\{u_{\varepsilon,m'}\}$ и функция $u_\varepsilon\in L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $\partial_t u_\varepsilon\in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, такие, что при $m'\to\infty$:

$$u_{\varepsilon,m'}\rightharpoonup u_\varepsilon \quad \text{в} \quad L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)), \tag{3.26}$$
$$u_{\varepsilon,m'}\to u_\varepsilon \quad \text{в} \quad L_p(0,T;L_p(S_\varepsilon)), \tag{3.27}$$
$$\partial_t u_{\varepsilon,m'}\rightharpoonup \partial_t u_\varepsilon \quad \text{в} \quad L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)), \tag{3.28}$$
$$A(u_{\varepsilon,m'})\rightharpoonup\chi \quad \text{в} \quad L_q(0,T,W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)), \tag{3.29}$$

последнее следует из оценки $\|Au\|_{W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)}\leq\|u\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)}$. Сильная сходимость в (3.27) следует из теоремы компактности (стр. 70, [36]).

Далее, перейдем к пределу при $m'\to\infty$ (ε фиксировано). Нам следует показать, что $\chi=Au$.

Из свойства монотонности оператора A следует:

$$X_\mu=\int\limits_0^T(Au_{\varepsilon,\mu}-Av,u_{\mu,\varepsilon}-v)dt\geq 0,$$

для всех функций $v\in L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$.

Также имеем, что

$$\int\limits_0^T(Au_{\varepsilon,\mu},u_{\varepsilon,\mu})dt=\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon}fu_{\varepsilon,\mu}dx+\int\limits_{S_\varepsilon}gu_{\varepsilon,\mu}ds\right)dt-\frac{1}{2}\|u_{\varepsilon,\mu}(T)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}$$

Следовательно,

$$X_\mu=\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon}fu_{\varepsilon,\mu}dx+\int\limits_{S_\varepsilon}gu_{\varepsilon,\mu}ds\right)dt-\frac{1}{2}\|u_{\varepsilon,\mu}(T)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}-\int\limits_0^T(Au_{\varepsilon,\mu},v)dt-\int\limits_0^T(Av,u_{\varepsilon,\mu}-v)dt.$$

А так как $\liminf \|u_{\varepsilon,\mu}(T)\|^2 \geq \|u_\varepsilon(T)\|^2$, то из последнего получим:

$$\limsup X_\mu \leq \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon dx + \int\limits_{S_\varepsilon} g u_\varepsilon ds \right) dt - \frac{1}{2}\|u_\varepsilon(T)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} - \int\limits_0^T (\chi u_\varepsilon, v)dt - \int\limits_0^T (Av, u_\varepsilon - v)dt.$$

С другой стороны, имеем:

$$\int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f u_\varepsilon dx + \int\limits_{S_\varepsilon} g u_\varepsilon ds \right) dt - \frac{1}{2}\|u_\varepsilon(T)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = \int\limits_0^T (\chi, u_\varepsilon)dt$$

Следовательно, справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_0^T (\chi - Av, u_\varepsilon - v)dt \geq 0.$$

Далее воспользуемся непрерывностью оператора A. Положим $v = u - \lambda\omega$, где $\lambda > 0$, $\omega \in L_p(0,T; W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$ и произвольно. Тогда имеем, что:

$$\lambda \int\limits_0^T (\chi - A(u - \lambda\omega), \omega)dt \geq 0,$$

откуда следует:

$$\int\limits_0^T (\chi - A(u - \lambda\omega), \omega)dt \geq 0.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим:

$$\int\limits_0^T (\chi - Au, \omega)dt \geq 0,$$

для любой функции ω из $L_p(0,T; W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$.

Аналогично, рассмотрев $v = u - \lambda\omega$, где теперь $\lambda < 0$, получим такое же неравенство, но с противоположным знаком. Следовательно, $\chi = Au$.

Тогда перейдя к пределу при $m' \to 0$ в исходном уравнении, получим:

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, d_k^\varepsilon(t)\omega_k^\varepsilon \rangle dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon, \nabla(d_k^\varepsilon(t)\omega_k^\varepsilon))dxdt + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_0^T \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u_\varepsilon) d_k^\varepsilon(t)\omega_k^\varepsilon dsdt =$$
$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f d_k^\varepsilon(t)\omega_k^\varepsilon dxdt$$

Так, как функции $\sum\limits_{k=1}^M d_k^\varepsilon(t) v_k^\varepsilon(x)$ всюду плотны в $L_p(0,T; W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$, имеем, что u_ε удовлетворяет интегральному тождеству для задачи (3.1).

Перейдем к доказательству единственности обобщенного решения. Воспользуемся методом от противного. Пусть существуют два решения u_ε^1 и u_ε^2 краевой задачи. Тогда они удовлетворяют интегральному тождеству (3.5). В качестве пробной функции возьмем $v = u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2$, получим:

$$\int\limits_0^t \langle \partial_t u_\varepsilon^i, u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2 \rangle dt + \int\limits_{Q_\varepsilon^t} |\nabla u_\varepsilon^i|^{p-2} \nabla u_\varepsilon^i \nabla (u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2) dxdt + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon^t} \sigma(x, u_\varepsilon^i)(u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2) dsdt =$$
$$= \int\limits_{Q_\varepsilon^t} f(u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2) dxdt,$$

где $i = 1, 2$.

Вычитая из одного равенства другое, придем к:

$$\int\limits_0^t \langle \partial_t (u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2), u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2 \rangle dt + \int\limits_{Q_\varepsilon^t} (|\nabla u_\varepsilon^1|^{p-2} \nabla u_\varepsilon^1 - |\nabla u_\varepsilon^2|^{p-2} \nabla u_\varepsilon^2) \nabla (u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2) dxdt +$$
$$+ \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon^t} (\sigma(x, u_\varepsilon^1) - \sigma(x, u_\varepsilon^2))(u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2) dsdt = 0 \tag{3.30}$$

Используя монотонность функции $\sigma(x, u)$ по переменной u и строгую монотонность оператора p-Лапласа (см. [42]), получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\varepsilon^1 - u_\varepsilon^2\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le 0 \tag{3.31}$$

Откуда следует, что $u_\varepsilon^1 = u_\varepsilon^2$.

Оценки (3.2), (3.15) легко получаются из оценок (3.18), (3.19), (3.25). □

3.3 Дополнительная регулярность решения. Продолжение решения.

Теорема 13. *Пусть u_ε — обобщенное решение задачи* (3.1). *Тогда*

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; W^{1,p}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)), \ \partial_t u_\varepsilon \in L_2(0, T; L_2(\Omega_\varepsilon)), \tag{3.32}$$

и имеет место неравенство

$$\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega_\varepsilon))} + \max_{[0,T]} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma/p} \max_{[0,T]} \|u_\varepsilon\|_{L_p(S_\varepsilon)} \leqslant$$
$$\leqslant C \|f\|_{L_2(Q_\varepsilon^T)}. \tag{3.33}$$

Доказательство. Умножим уравнение на $(d_{k,m}^\varepsilon)'$ и просуммируем по k от 1 до m. Получим

$$\|\partial_t u_{\varepsilon,m}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_{\varepsilon,m}|^{p-2} \nabla u_{\varepsilon,m} \nabla \partial_t u_{\varepsilon,m} dx + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x, u_{\varepsilon,m}) \partial_t u_{\varepsilon,m} ds = \tag{3.34}$$

$$= \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f \partial_t u_{\varepsilon,m} dx \tag{3.35}$$

Определим функцию:

$$\tilde{\sigma}(x,u) = \int\limits_0^u \sigma(x,\tau)d\tau, \quad x \in \overline{\Omega},\, u \in \mathbb{R}.$$

Используя условия, наложенные на функцию $\sigma(x,u)$, заключаем, что:

$$\tilde{\sigma}(x,u) \geq C|u|^p. \tag{3.36}$$

Также справедливо следующее соотношение:

$$\partial_t \tilde{\sigma}(x, u_{\varepsilon,m}(x,t)) = \sigma(x, u_{\varepsilon,m}(x,t))\partial_t u_{\varepsilon,m} \tag{3.37}$$

Интегрируя по t и используя (3.36), (3.37), получим:

$$\int\limits_0^\tau \|\partial_t u_{\varepsilon,m}\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}dt + \frac{1}{p}\|\nabla u_{\varepsilon,m}(x,\tau)\|^p_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + C\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon}|u_{\varepsilon,m}(x,\tau)|^p ds \leqslant$$

$$\leqslant C_{\delta_1}\|f\|_{L_2(Q_\varepsilon^T)} + \delta_1 \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\partial_t u_{\varepsilon,m}|^2 dxdt$$

Полагая в полученном неравенстве $\delta_1 = 1/2$, $\delta_2 = 1/2$, придем к следующей оценке:

$$\|\partial_t u_{\varepsilon,m}\|_{L_2(Q_\varepsilon^T)} + \max_{[0,T]}\|\nabla u_{\varepsilon,m}\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma/p}\max_{[0,T]}\|u_{\varepsilon,m}\|_{L_p(S_\varepsilon)} \leqslant K\|f\|^q_{L_2(Q_\varepsilon^T)}$$

Откуда и следует утверждение теоремы. □

Для перехода к пределу в задаче (3.1) при $\varepsilon \to 0$ следует построить продолжение функции u_ε, для которой справедливы неравенства (3.2), (3.2) и (3.33), на весь цилиндр Q_T, таким образом, чтобы для продолжения $\tilde{u}_\varepsilon$ были справедливы следующие неравенства

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)},\ \|\nabla\tilde{u}_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)},\ \text{п.в.}\, t \in [0,T], \tag{3.38}$$

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \|\partial_t \tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \leq C. \tag{3.39}$$

Такое продолжение построено в теореме 3.

Следовательно, существует такая подпоследовательность (используем для нее тоже обозначение, что и для исходной последовательности), что при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ в } L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega)), \tag{3.40}$$

$$\tilde{u}_\varepsilon \to u \text{ в } L_2(Q_T), \tag{3.41}$$

$$\partial_t\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup \partial_t u \text{ в } L_2(0,T;L_2(\Omega)). \tag{3.42}$$

3.4 Случай $\alpha = \frac{n}{n-p}$, $\gamma = \frac{n}{n-p}(p-1)$

Из-за особенностей используемого метода для данного набора параметров мы полагаем, что G^j в определении (1.2) — это шар единичного радиуса с центром в начале координат. Таким образом, перфорации — это шары малого радиуса, a_ε, центр которых совпадает с центром соответствующих ячеек.

Теорема 14. *Пусть $n \geq 3$, $2 \leq p < n$, $\alpha = n/(n-p)$, $\gamma = \alpha(p-1)$ и u_ε — обобщенное решение задачи* (3.1). *Введем функцию $u \in L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ и $\partial_t u \in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))$ как обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_p u + \mathcal{A}|H(x,u)|^{p-2}H(x,u) = f(x), \text{ в } \Omega^T = \Omega \times (0,T); \\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0,T); \\ u(x,0) = 0 \text{ при } x \in \Omega; \end{cases} \tag{3.43}$$

где $\mathcal{A} = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{n-p}\omega_n$, ω_n — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $H(x,u)$ — решение уравнения

$$\mathcal{B}_0|H|^{p-2}H = \sigma(x, u-H), \tag{3.44}$$

где $\mathcal{B}_0 = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{1-p}$. Тогда $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Ввиду леммы 8, существует единственное решение уравнения (3.1). При этом данное решение обладает свойством (см. (1.63)) для всех $x \in \overline{\Omega}$, u, $v \in \mathbb{R}$. Тогда из строгой монотонности функции $|H|^{p-2}H$ и $|\lambda|^{p-2}\lambda$ (см. [42]), $p > 2$, следует существование и единственность обобщенного решения задачи (3.43) (см. теорему 12 и [36, 41]).

В интегральном тождестве (3.5) положим $\varphi = v - u_\varepsilon$, где v — произвольная функция из $L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $\partial_t v \in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$:

$$\int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v - u_\varepsilon\rangle dt + \int_{Q_\varepsilon^T} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \nabla(v-u_\varepsilon)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon^T}\sigma(x,u_\varepsilon)(v-u_\varepsilon)ds \geq$$
$$\geq \int_{\Omega_\varepsilon} f(v-u_\varepsilon)dx.$$

Из монотонности функций $|\lambda|^{p-2}\lambda$ и $\sigma(x,u)$ относительно переменной u имеем

$$\int_{Q_\varepsilon^T} (|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\nabla(u_\varepsilon - v)dxdt \geq 0, \tag{3.45}$$

$$\int_{S_\varepsilon^T} (\sigma(x,u_\varepsilon) - \sigma(x,v))(u_\varepsilon - v)dsdt \geq 0. \tag{3.46}$$

Также справедливо, что

$$\int_0^T \langle \partial_t(u_\varepsilon - v), v - u_\varepsilon\rangle dt = \frac{1}{2}\left(\|v(x,0)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} - \|u_\varepsilon(x,T) - v(x,T)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}\right). \tag{3.47}$$

Из (3.45) — (3.47), получаем, что функция u_ε удовлетворяет следующему интегральному неравенству

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t v, v - u_\varepsilon\rangle dt + \int\limits_{Q_\varepsilon^T} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(v - u_\varepsilon)dx + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon^T} \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)ds \geq$$
$$\geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f(v-u_\varepsilon)dx - \frac{1}{2}\|v(x,0)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}, \qquad (3.48)$$

где v — произвольная функция из $L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $\partial_t v \in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$.

Обозначим через P_ε^j центр шара $G_\varepsilon^j = \{x \in Y_\varepsilon^j : |x - P_\varepsilon^j| < a_\varepsilon\}$. Обозначим через T_ε^j шар радиуса $\varepsilon/4$ с центром в точке P_ε^j.

Рассмотрим функцию W_ε определенную в теореме 5 (см. (2.25), (2.26), (2.27)). Также, как и в указанной теореме (см. (2.30)), имеем, что

$$W_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \qquad (3.49)$$

В неравенстве (3.48) в качестве пробной функции возьмем $v = \psi - W_\varepsilon H(x,\psi)$, где $\psi = \eta(t)\phi(x), \eta \in C^1([0,T]), \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, и получим

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t(\psi - W_\varepsilon H), \psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon\rangle dt +$$
$$+\int\limits_{Q_\varepsilon^T} |\nabla(\psi - W_\varepsilon H)|^{p-2}\nabla(\psi - W_\varepsilon H)\nabla(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx +$$
$$+\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_0^T\int\limits_{S_\varepsilon} \sigma(x,\psi - H)(\psi - H - u_\varepsilon)ds \geq \int\limits_{Q_\varepsilon^T} f(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon)dx - \qquad (3.50)$$
$$-\frac{1}{2}\|\psi(x,0) + W_\varepsilon H(x,\psi(x,0))\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Перейдем к пределу в (3.50) при $\varepsilon \to 0$.

Ввиду (3.49) и (3.40), заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^T \langle \partial_t(\psi - W_\varepsilon H), \psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon\rangle dt = \int\limits_0^T \langle \partial_t\psi, \psi - u\rangle dt \qquad (3.51)$$

Применяя аналогичные соображения, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_\varepsilon^T} f(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon)dxdt = \int\limits_{Q_T} f(\psi - u)dxdt \qquad (3.52)$$

Исходя из (2.28) и соответствующей теоремы вложения, имеем:

$$W_\varepsilon \to 0 \quad \text{в} \quad L_2(\Omega) \qquad (3.53)$$

Из (3.53) немедленно следует равенство:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\psi(x,0)+W_\varepsilon H(x,\psi(x,0))\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}=\|\psi(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3.54}$$

Далее введем обозначение

$$\mathfrak{P}_\varepsilon\equiv\int\limits_{Q_\varepsilon^T}(|\nabla(\psi-W_\varepsilon H(x,\psi))|^{p-2}-|\nabla\psi|^{p-2})\nabla\psi\nabla(\psi-W_\varepsilon H(x,\psi)-u_\varepsilon)dxdt \tag{3.55}$$

Покажем, что $\mathfrak{P}_\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Действительно, учитывая оценку

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\nabla W_\varepsilon|^q dx\le K\varepsilon^{n(p-q)/(n-p)}, \tag{3.56}$$

где $1\le q\le p$ и применяя неравенство Минковского для $p\in[2,3]$ и неравенство $(a+b)^{p-2}-b^{p-2}\le(p-2)a(a+b)^{p-3}$ для $a,b\ge 0$, $p>3$ имеем для $p\in[2,3]$

$$\begin{aligned}|\mathfrak{P}_\varepsilon|&\le\int\limits_{Q_\varepsilon^T}((|\nabla\psi|+|\nabla(W_\varepsilon H)|)^{p-2}-|\nabla\psi|^{p-2})|\nabla\psi||\nabla(\psi-W_\varepsilon H-u_\varepsilon)|dxdt\\&\le\int\limits_{Q_\varepsilon^T}|\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-2}|\nabla\psi||\nabla(\psi-W_\varepsilon H-u_\varepsilon)|dx\le K\Big\{\int\limits_{\Omega_\varepsilon}|\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-2}dxdt\\&\quad+\int\limits_{Q_\varepsilon^T}|\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-1}dx+\int\limits_{Q_\varepsilon^T}|\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-2}|\nabla u_\varepsilon|dxdt\Big\}\to 0,\end{aligned} \tag{3.57}$$

и для $p>3$

$$\mathfrak{P}_\varepsilon\le K\int\limits_{Q_\varepsilon^T}|\nabla(W_\varepsilon H)|(|\nabla\psi|+|\nabla(W_\varepsilon H)|)^{p-3}(1+|\nabla(W_\varepsilon H)|+|\nabla u_\varepsilon|)dxdt\to 0, \tag{3.58}$$

при $\varepsilon\to 0$. Тот факт, что интегралы в правой части оценок (3.57), (3.58) стремяться к нулю, доказывается теми же методами с использованием оценки (3.56), что и при доказательстве сходимости к нулю выражений, стоящих в правой части оценок (2.34) и (2.35), из теоремы 5.

Обозначим

$$\mathfrak{F}_\varepsilon\equiv\int\limits_{Q_\varepsilon^T}\Big(|\nabla(\psi-W_\varepsilon H)|^{p-2}-|\nabla(W_\varepsilon H)|^{p-2}\Big)\nabla(W_\varepsilon H)\nabla(\psi-W_\varepsilon H-u_\varepsilon)dxdt. \tag{3.59}$$

Аналогично получим, что $\mathfrak{F}_\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Используя (3.51) — (3.59) предел при $\varepsilon \to 0$ левой части неравенства (3.50) совпадает с пределом выражения

$$\int_0^T \langle \partial_t \psi, \psi - u \rangle dt +$$
$$+ \int_{Q_\varepsilon^T} |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi \nabla (\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon) dxdt + \varepsilon^{-\gamma} \int_{S_\varepsilon^T} \sigma(x, \psi)(\psi - H - u_\varepsilon) dsdt - \tag{3.60}$$
$$- \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla (W_\varepsilon H)|^{p-2} \nabla (W_\varepsilon H) \nabla (\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon) dxdt.$$

Из сходимостей (2.21) и (3.49) немедленно следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Q_\varepsilon^T} |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi \nabla (\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon) dxdt = \int_{Q^T} |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi \nabla (\psi - u) dxdt. \tag{3.61}$$

Используя оценку (3.56), теми же методами, что и при доказательстве теоремы 5, выводим, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Q_\varepsilon^T} |\nabla (W_\varepsilon H)|^{p-2} \nabla (W_\varepsilon H) \nabla (\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon) dxdt =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{Q_\varepsilon^T} |\nabla W_\varepsilon|^{p-2} \nabla W_\varepsilon \nabla \Big(|H|^{p-2} H (\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon) \Big) dxdt. \tag{3.62}$$

В силу определения W_ε имеем

$$\mathfrak{L}_\varepsilon \equiv \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W_\varepsilon|^{p-2} \nabla W_\varepsilon \nabla \Big(|H|^{p-2} H (\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon) \Big) dxdt =$$
$$= \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_\varepsilon^j} |\nabla w_\varepsilon^j|^{p-2} \partial_\nu w_\varepsilon^j |H|^{p-2} H (\psi - u_\varepsilon) dsdt + \tag{3.63}$$
$$+ \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} |\nabla w_\varepsilon^j|^{p-2} \partial_\nu w_\varepsilon^j |H|^{p-2} H (\psi - H - u_\varepsilon) dsdt,$$

где $\partial_\nu g$ — производная по нормали от функции g.

Также, исходя из определения функции W_ε, можем вычислить

$$\partial_\nu w_\varepsilon^j \Big|_{\partial T_\varepsilon^j} = \frac{d}{dr} w_\varepsilon^j \Big|_{r = \varepsilon/4} = - \frac{(n-p) 2^{\frac{2n-2}{p-1}} C_0^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{1}{p-1}}}{(p-1)(1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})}, \tag{3.64}$$

$$\partial_\nu w_\varepsilon^j \Big|_{\partial G_\varepsilon^j} = - \frac{d}{dr} w_\varepsilon^j \Big|_{r = a_\varepsilon} = \frac{(n-p) \varepsilon^{\frac{-n}{n-p}}}{(p-1) C_0 (1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})}. \tag{3.65}$$

Используя соотношения (3.64), (3.65) и (3.51) — (3.63), неравенство (3.50) можно переписать в следующем виде

$$\int_0^T \langle \partial_t \psi, \psi - u\rangle dt + \int_{Q_\varepsilon^T} |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi \nabla(\psi - u) dxdt +$$

$$+ Z_\varepsilon + A_\varepsilon \varepsilon \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_\varepsilon^j} |H|^{p-2} H (\psi - u_\varepsilon) dsdt -$$

$$-\varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \int_{S_\varepsilon} \Big(\Big(\frac{n-p}{p-1}\Big)^{p-1} C_0^{1-p} |H|^{p-2} H - \sigma(x, \psi - H) \Big) (\psi - H - u_\varepsilon) dsdt -$$

$$-Q_\varepsilon \geq \int_{Q_\varepsilon^T} f(\psi - W_\varepsilon H - u_\varepsilon) dxdt - \frac{1}{2} \|\psi(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{3.66}$$

где $Z_\varepsilon \to 0$, если $\varepsilon \to 0$ и

$$A_\varepsilon = \Big(\frac{n-p}{p-1}\Big)^{p-1} \frac{2^{2n-2} C_0^{n-p}}{(1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})^{p-1}},$$

$$Q_\varepsilon = \frac{1 - (1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})^{p-1}}{(1 - a_\varepsilon^{\frac{n-p}{p-1}} \varepsilon^{\frac{p-n}{p-1}} 2^{\frac{2n-2p}{p-1}})^{p-1} C_0^{p-1}} \Big(\frac{n-p}{p-1}\Big)^{p-1} \varepsilon^{-\gamma} \int_{S_\varepsilon} |H|^{p-2} H (\psi - H - u_\varepsilon) ds.$$

Также как при доказательстве теоремы 5, выводим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Q_\varepsilon = 0. \tag{3.67}$$

Принимая во внимание, что H — решение уравнения (3.44) из (3.66), используя (3.67), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что u удовлетворяет неравенству

$$\int_0^T \langle \partial_t \psi, \psi - u\rangle dt + \lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon \varepsilon \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_\varepsilon^j} |H|^{p-2} H (\psi - u_\varepsilon) dsdt +$$

$$+ \int_{Q_T} |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi \nabla(\psi - u) dxdt \geq \int_{Q_T} f(\psi - u) dx - \frac{1}{2} \|\psi(x,0)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}. \tag{3.68}$$

Для нахождения предела в левой части (3.68) воспользуемся леммой 7.

Из леммы 7 и неравенства (3.68) следует, что

$$\int_0^T \langle \partial_t \psi, \psi - u\rangle dt + \int_{Q^T} |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi \nabla(\psi - u) dxdt + \mathcal{A} \int_{Q^T} |H|^{p-2} H (\psi - u) dxdt \geq$$

$$\geq \int_{Q^T} f(\psi - u) dxdt - \frac{1}{2} \|\psi(x,0)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}, \tag{3.69}$$

где $\mathcal{A} = \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} C_0^{n-p} \omega_n$.

Стоит отметить, что в (3.69) $\psi = \eta(t)\varphi(x)$, где $\eta \in C^1([0,T])$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Однако, линейная оболочка функций $\{\eta(t)\varphi(x) \mid \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \eta \in C^1([0,T])\}$ плотна в $\mathfrak{K} = \big\{u \in L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \mid \partial_t u \in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))\big\}$ (см. [41]), следовательно, интегральное неравенство (3.69) справедливо для произвольной функции $\psi \in \mathfrak{K}$.

Полагая в (3.69) $\psi = u+\lambda v$, $\lambda > 0$, $v \in L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t u, v\rangle dt + \int\limits_{Q_T} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dxdt + \mathcal{A}\int\limits_{Q^T} |H(x,u)|^{p-2}H(x,u)v dxdt \geq \int\limits_{Q_T} fv dxdt. \qquad (3.70)$$

Заменяя в (3.70) v на $-v$ приходим к интегральному тождеству для u:

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t u, v\rangle dt + \int\limits_{Q_T} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dxdt + \mathcal{A}\int\limits_{Q_T} |H(x,u)|^{p-2}H(x,u)v dxdt = \int\limits_{Q_T} fv dxdt.$$

Следовательно, u — обобщенное решение задачи (3.43). □

3.5 Случай $\alpha \in (1, n/(n-p))$, $\gamma = \alpha(n-1) - n$

Теорема 15. *Пусть* $n \geq 3$, $2 < p < n$, $\alpha \in (1, n/(n-p))$, $\gamma = \alpha(n-1)-n$ *и* u_ε *— обобщенное решение задачи* (3.1). *Пусть функция* $u \in L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ *и* $\partial_t u \in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))$ *— это обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_p u + A\sigma(x,u) = f(x,t), \ \text{в } \Omega\times(0,T); \\ u = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega\times(0,T); \\ u(x,0) = 0, \ \text{ при } \ x\in\Omega \end{cases} \qquad (3.71)$$

где $A = C_0^{n-1} l$. *Тогда* $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ *в* $L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Исходя из монотонности функции $\sigma(x,u)$ по переменной $u \in \mathbb{R}$ и монотонности функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ (см. [42]), заключаем, что существует единственное обобщенное решение задачи (3.71) (см. [36, 41]).

Из интегрального тождества (3.5) и монотонности функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ и $\sigma(x,u)$ по переменной u, используя метод описанный в теореме 5, получим следующее интегральное неравенство:

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t v, v - u_\varepsilon\rangle dt + \int\limits_{Q_\varepsilon^T} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(v-u_\varepsilon) dxdt + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon^T} \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon) dsdt \geq$$
$$\geq \int\limits_{Q_\varepsilon^T} f(v-u_\varepsilon)dxdt - \frac{1}{2}\|v(x,0)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}. \qquad (3.72)$$

где v произвольная функция из $L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$.

Перейдем к пределу в (3.72) при $\varepsilon\to 0$. Так как $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$, то мы можем найти предел двух интегралов, взятых по области Ω_ε:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_\varepsilon^T}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla(v-u_\varepsilon)dx=\int\limits_{Q_T}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla(v-u)dx \tag{3.73}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_\varepsilon^T}f(v-u_\varepsilon)dx=\int\limits_{Q_T}f(v-u)dx \tag{3.74}$$

Заметим, что имеет место равенство:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|v(x,0)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)}=\|v(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3.75}$$

Далее нам нужно найти предел двух оставшихся членов неравенства (3.72). Тем же методом, что и в теореме 6 можем показать, что для $\alpha\in(1,\frac{n}{n-p})$, $\gamma=\alpha(n-1)-n$ мы имеем следующее:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon}\sigma(x,v)(v-u_\varepsilon)ds=A\int\limits_{\Omega}\sigma(x,v)(v-u)dx, \tag{3.76}$$

Используя (3.40), перейдем к пределу в оставшемся члене неравенства (3.72):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^T\langle\partial_t v,v-u_\varepsilon\rangle dt=\int\limits_0^T\langle\partial_t v,v-u\rangle dt \tag{3.77}$$

Исходя из (3.73) — (3.77), перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$ в (3.72), тогда получим следующее интегральное неравенство:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^T\langle\partial_t v,v-u\rangle dt+\int\limits_{\Omega}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla(v-u)dx+A\int\limits_{\Omega}\sigma(x,v)(v-u)dx\geq\\ \geq\int\limits_{\Omega}f(v-u)dx-\frac{1}{2}\|v(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)}\end{aligned} \tag{3.78}$$

Полагая в (3.78) $v=u+\lambda w$, $\lambda>0$, $w\in L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, и переходя к пределу при $\lambda\to 0$, мы придем к интегральному неравенству вида:

$$\int\limits_0^T\langle\partial_t u,w\rangle dt+\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w dx+A\int\limits_{\Omega}\sigma(x,u)w dx\geq\int\limits_{\Omega}fw dx. \tag{3.79}$$

Заменяя w на $-w$ в (3.79) получим аналогичное неравенство, в котором знак будет направлен в другую сторону. Следовательно, для u справедливо интегральное тождество:

$$\int_0^T \langle \partial_t u, w\rangle dt + \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w dx + A\int_\Omega \sigma(x,u) w dx = \int_\Omega f w dx,$$

где w — произвольная функция из $L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$

Таким образом, u есть обобщенное решение задачи (3.71).

□

3.6 Случай: $1 < \alpha < n/(n-p)$, $\gamma < \alpha(n-1) - n$.

Теорема 16. *Пусть $n \geq 3$, $2 < p < n$, $1 < \alpha < n/(n-p)$, $\gamma < \alpha(n-1) - n$. Введем функцию $u \in L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ и $\partial_t u \in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))$ как обобщенное решение задачи*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_p u = f(x,t), \text{ в } \Omega \times (0,T); \\ u = 0, \text{ на } \partial\Omega \times (0,T); \\ u(x,0) = 0, \text{ при } x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.80}$$

Тогда $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Заметим, что из строгой монотонности функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ при $\lambda \in \mathbb{R}$ (см. [42]) следует существование обобщенного решения задачи (3.80) (см. [36, 41]).

Используя монотонность функции $|\lambda|^{p-2}\lambda$ и функции $\sigma(x,u)$ по переменной $u \in \mathbb{R}$, заключаем, что функция u_ε, помимо интегрального тождества (3.5), удовлетворяет интегральному неравенству:

$$\int_0^T \langle \partial_t v, v - u_\varepsilon\rangle dt + \int_{Q_\varepsilon^T} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(v-u_\varepsilon) dxdt + \varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon^T} \sigma(x,v)(v-u_\varepsilon) dsdt \geq$$
$$\geq \int_{Q_\varepsilon^T} f(v-u_\varepsilon)dxdt - \frac{1}{2}\|v(x,0)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \tag{3.81}$$

где v — произвольная функция из $L_p(0,T;W^{1,p}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$.

В интегральном неравенстве (3.81) в качестве пробной функци возьмем $\varphi = \eta(t)\psi(x)$, где $\eta \in C^1([0,T])$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

$$\int_0^T \langle \partial_t \varphi, \varphi - u_\varepsilon\rangle dt + \int_{Q_\varepsilon^T} |\nabla \varphi|^{p-2}\nabla \varphi \nabla(\varphi-u_\varepsilon) dxdt + \varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon^T} \sigma(x,\varphi)(\varphi-u_\varepsilon) dsdt \geq$$
$$\geq \int_{Q_\varepsilon^T} f(\varphi-u_\varepsilon)dxdt - \frac{1}{2}\|\varphi(x,0)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \tag{3.82}$$

Перейдем к пределу в (3.82) при $\varepsilon \to 0$.

Используя (3.40) и тот факт, что $|G_\varepsilon| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, заключаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_\varepsilon^T} f(\varphi - u_\varepsilon)dxdt = \int\limits_{Q_T} f(\varphi - u)dxdt \tag{3.83}$$

Исходя из того, что $\gamma < \alpha(n-1)-n$ и $\sigma(x,u)$ — непрерывно дифференцируемая на $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}$, $|S_\varepsilon| \le K\varepsilon^{\alpha(n-1)-n}$, а также используя оценку (3.2), получим:

$$\begin{gathered}\left|\varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S_\varepsilon^T}\sigma(x,\varphi)(\varphi-u_\varepsilon)dsdt\right| \leqslant K\varepsilon^{-\gamma}(|S_\varepsilon| + |S_\varepsilon|^{\frac{1}{q}}\|u_\varepsilon\|_{L_p(0,T;L_p(S_\varepsilon))}) = \\ = K(\varepsilon^{\alpha(n-1)-n-\gamma} + \varepsilon^{(\alpha(n-1)-n-\gamma)\frac{p-1}{p}}) \to 0\end{gathered} \tag{3.84}$$

Далее, используя сходимость (3.40), легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_\varepsilon^T} |\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\nabla(\varphi-u_\varepsilon)dxdt = \int\limits_{Q_T}|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\nabla(\varphi-u_\varepsilon)dxdt. \tag{3.85}$$

Далее найдем предел двух оставшихся членов неравенства (3.82). Из того, что $|G_\varepsilon|$ и определения функции φ, заключаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\varphi(x,0)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} = \|\varphi(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3.86}$$

Используя (3.40), находим предел оставшегося члена неравенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^T\langle\partial_t\varphi, \varphi-u_\varepsilon\rangle dt = \int\limits_0^T\langle\partial_t\varphi,\varphi-u\rangle dt \tag{3.87}$$

Таким образом, из (3.82), исходя из (3.83) — (3.87), при переходе к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим, что предельная функция u удовлетворяет следующему интегральному неравенству

$$\int\limits_0^T\langle\partial_t\varphi,\varphi-u\rangle dt + \int\limits_{Q_T}|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi\nabla(\varphi-u)dx \ge \int\limits_{Q_T} f(\varphi-u)dx \tag{3.88}$$

Стоит отметить, что в (3.88) $\varphi = \eta(t)\psi(x)$, где $\eta \in C^1([0,T])$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Однако, линейная оболочка функций $\{\eta(t)\psi(x) \mid \psi\in C_0^\infty(\Omega), \eta\in C^1([0,T])\}$ плотна в $\mathfrak{K} = \big\{u\in L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \mid \partial_t u \in L_q(0,T;W^{-1,q}(\Omega))\big\}$ (см. [41]), следовательно, интегральное неравенство (3.88) справедливо для произвольной функции $\varphi\in\mathfrak{K}$.

Полагая в (3.88) $\varphi = u+\lambda v$, $\lambda > 0$, $v \in L_p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, и переходя к пределу при $\lambda\to 0$, получим

$$\int\limits_0^T\langle\partial_t u, v\rangle dt + \int\limits_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx \ge \int\limits_\Omega fvdx$$

Заменяя v на $-v$, получим аналогичное неравенство, в котором знак направлен в другую сторону. Следовательно, для функции u справедливо интегральное тождество:

$$\int_0^T \langle \partial_t u, v \rangle dt + \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$$

Таким образом, u — обобщенное решение задачи (3.80).

$\square$

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем.

1. Для задачи эллиптического типа (2.1) в том случае, когда $2 < p < n$, рассмотрены все возможные наборы параметров α и γ. Для каждого набора построена усредненная задача и доказана теорема о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.

2. Для аналогичной задачи (2.1) при $p = n$ изучен критический случай, когда a_ε и $\beta(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям (1.1). Для данного случая разработан метод, позволяющий рассматривать перфорации произвольной формы с заданной площадью поверхности. Также построена усредененная задача и доказана теорема о слабой сходимости.

3. Для задачи параболического типа (3.1) рассмотрены все возможные параметры, удовлетворяющие условиям $\alpha \in (1, n/(n-p)]$, $\gamma \leq \alpha(n-1)-n$. Для каждого случая построена усредненная задача и доказана теорема о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.

Дальнейшие цели исследования по данному направлению состоят в следующем: изучение асимптотического поведения решения аналогичной краевой задачи для случаев когда, $1 < p < 2$ и $n < p < \infty$.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах из перечня ВАК

1. Подольский А.В. Об усреднении краевой задачи в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа на границе полостей для уравнения с p-лапласианом // Доклады Академии Наук, 2010, т. 435, є5, с. 583-586.

2. Подольский А.В. Об усреднении смешанной задачи в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа на границе полостей для параболического уравнения с p-Лапласианом // Доклады Академии Наук, 2012, т. 447, N. 3, с. 269-273.

3. Подольский А.В. О продолжении решения и усреднении краевой задачи для p-Лапласиана в перфорированной области с нелинейным третьим краевым условием на границе полостей // Доклады Академии Наук, 2015, том 460, N. 2, с. 140-144.

4. Подольский А.В., Шапошникова Т.А. Усреднение p-Лапласиана в n-мерной области, перфорированной мелкими полостями, с нелинейным краевым условием на их границе в случае, когда $p = n$ // Доклады Академии Наук, 2015, том 463, N. 4, с. 395-401. [Шапошникова Т.А. – постановка задачи, доказательство Леммы 3; Подольский А.В. – доказательство Теорем 1,2,3 и Лемм 1 и 2.]

Статьи в других научных журналах и тезисы докладов в материалах научных конференций

1. Shaposhnikova T.A., Podolskiy A.V. Homogenization limit for the boundary value problem with the p-Laplace operator and a nonlinear third boundary condition on the boundary of the holes in a perforated domain // Functional Differential Equations, 2012, Vol. 19, No. 3-4, pp. 351 - 370. [Шапошникова Т. А. – постановка задачи, общее руководство; Подольский А.В. – решение задачи.]

2. Подольский А.В., Шапошникова Т.А. Об усреднении начально-краевозадачи в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа на границе полостей для нелинейного параболического уравнения // Сборник тезисов международной конференции "Дифференциальные уравненния и смежные вопросы посвященной 110-й годовщине со дня рождения И.Г. Петровского. Москва. 2011 г. — М.:Изд-во МГУ и ООО "ИНТУИТ.РУ 2011 г., стр. 307-308.

3. A.V. Podolskii, T.A. Shaposhnikova. Homogenization ofthe initial-boundary value problem in perforated domain for parabolic equation with p-laplace operator and nonlinear Robin-type boundary conditions. The Seventh international conference on dand functional differential equations, 2014. Тезисы докладов. — М:РУДН, 2014, стр. 93-94.

Литература

[1] Philip J.R. N-diffusion // Austral. J. Phys. — 1961. — Vol. 14 — Pp. 1 -13.

[2] Guan M., Zheng L., Zhang X. The similarity solution to a generalized diffusion equation with convection // Advances in dynamical systems and applications — 2006. — Vol. 1 — №2 — Pp. 183 - 189.

[3] Showalter R.E., Walkington, N.J. Diffusion of fluid in a fissured medium with microstructure // SIAM J. Math. Anal. — 1991. — Vol. 22 — Pp. 1702 - 1722.

[4] Antontsev S.N., Diaz J.I., Oliveira H.B. Mathematical models in dynamics of non-newtonian fluids and in glaciology. // Proceedings of the CMNE/CILAMCE Congress / Universidae do Porto. — 2007. — 20 p.

[5] Phillippin G.A. A minimum principle for the problem of torsional creep. // J. Math. Anal. Appl. — 1979. — Vol. 68 — Pp. 526-535.

[6] Kawohl B. On a family of torsional creep problems. // J.reine angew. Math. — 1990. — Vol. 410 — Pp. 1 - 22.

[7] Diaz J.I., Hernandez, Tello L. On the multiplicity of equilibrium solutions to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in climatology // Journal of mathematical analysis and applications. — 1997. — Vol. 216 — Pp. 593 - 613.

[8] Glowinski R., Rappaz J. Approximation of a nonlinear elliptic problem arising in a non-Newtonian fluid model in glaciology // M2AN Math. Model. Numer. Anal. — 2003. — Vol. 37 — №1 — Pp. 175 - 186.

[9] Gomathi R., Vincent Antony Kumar A. Shearlet domain color image inpainting based on p-laplacian operator // European journal of scientific research. — 2012. — Vol. 67 — №3 — pp. 413 - 420.

[10] В.И. Сукретный. Асимптотическое разложение решений третьей краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях // Успехи мат. н. — 1984. — Т. 39 — №4 — с. 120 - 121.

[11] С.Е. Пастухова. Метод компенсированной компактности Тартара в усреднении спектра смешанной задачи для эллиптического уравнения в перфорированной области с третьим краевым условием // Мат. сб. — 1995. — Т. 186 — №5 — с. 127-144.

[12] О.А. олейник, Т.А. Шапошникова. О задаче усреднения в частично перфорированной области с граничным условием смешанного типа на границе полостей, содержащим малый параметр. // Дифференциальные уравнения. — 1995. — Т. 31 — №7. — с. 1140-1150.

[13] Oleinik O.A., Shaposhnikova T.A. On the homogenization of the Poisson equation in partially perforated domains with arbitrary density of cavities anf mixed type conditions on their boundary // Rend. Mat. Acc. Lincei. — 1996. — V. 7. — S. 9. — Pp. 129 - 146.

[14] А.Г. Беляев, А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин. Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием // Мат. сб. — 2001. — Т. 193 — №7 — с. 3 - 20.

[15] В. Егер, О.А. Олейник, А.С. Шамаев. Об усреднении решений краевой задачи для уравнения Лапласа в частично перфорированной области с краевым условием третьего рода на границе полостей // Труды Моск. Матем. Об-ва. — 1997. — Т. 58 — с. 187 - 223.

[16] Berlyand L.V., Goncharenko M.V. The averaging of the diffusion equation in a porous medium with weak absorption // Journal Of Soviet Mathematics. — 1990. — V. 52 — №5 — Pp. 3428 - 3435.

[17] Goncharenko M. The asymptotic behaviour of the third boundary-value problem solutions in domains with fine-grained boundaries // GAKUTO International Series Mathematocal Sciences and Applications. — 1997. — V. 9 — Pp. 203 - 213 — Homogenization and Applications to Material Sciences.

[18] Mel'nik T.A., Sivak O.A. Asymptotic analysis of a boundary-value problem with the nonlinear boundary multiphase interations in a perforated domain // Ukr.Math. J. — 2009. — V. 61 — Pp. 494 - 512.

[19] Piatnitski A.L., Chiado Piat V. Gamma-convergence approach to variational problems in perforated domains with Fourier boundary conditions // ESAIM COCV. — 2008. — ISSN:1292-8119, DOI:10.1051/COCV:2008073.

[20] Yosifian G.A. On homogenization problems in perforated domains with nonlinear boundary conditions // Applicable Analysis. — 1997. — V. 65 — Pp. 257 - 288.

[21] Yosifian G.A. Homogenization of Some Contact problems for the System of Elasticity in Perforated Domains // Rend.Sem.Mat.Univ.Padova. – 2001. — V. 105 — Pp. 37 - 64.

[22] Yosifian G.A. Some homogenization problems for the system of elasticity with nonlinear boundary conditions in perforated domains // Applicable Analysis. — 1999. — V. 71 — Pp. 379 - 411.

[23] Boukrim L., Hakim A., Mekkaoui T. Quasilinear dirichlet problem in a periodically perforated domain // GLASNIK MATEMATICKI. — 2007. — V. 42 — №62 — Pp. 375 - 388.

[24] Lan Tang. Random Homogenization of p-laplacian with obstacles in perforated domain // Communications in partial differential equations. — 2012. — V.37 — №3 — Pp. 538 - 559.

[25] Bystrom J. Correctors for some nonlinear monotone operators // Journal of nonlinear mathematical physics. — 2000. — V. 8 — №1 — Pp. 8 - 30.

[26] Fusco N., Moscariello G. On the homogenization of quasilinear divergence structure operators // Annali di matematica pura ed applicata. — 1986. — V. 146 — №1 — Pp. 1-13.

[27] Т.А. Мельник, О.А. Сивак. Асимптотический анализ параболической полулинейной задачи с нелинейным граничным многофазовым взаимодействиями в перфорированной области // Проблемы Мат. Анализа. — 2009. — Т. 43 — с. 107 - 128.

[28] Abdulle A., Huber M.E., Vilmart, G. Linearized numerical homogenization method for nonlinear monotone parabolic multiscale problems // Multiscale modeling and simulation. — 2014.

[29] М.Н. Зубова, Т.А. Шапошникова. Об усреднении краевых задач в перфорированных областях с третьим граничным условием и об изменении характера нелинейности задачи в результате усреднения // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47 — №1 — с. 79 - 91.

[30] В. Егер, М. Нойс-Раду, Т.А. Шапошникова. Об усреднении уравнения диффузии в перфорированной области с нелинейным краевым условием на поток на границе полостей и масштабами задачи к новому нелинейному между краевыми условиями и эффективным распределением источников-стоков // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2011. — Т. 28 — с. 161 - 181.

[31] Jager W., Neuss-Radu M., Shaposhnikova T.A. Homogenization of a variational inequality for the Laplace operator with nonlinear restriction for the flux on the interior boundary of a perforated domain // Nonlinear Analysis: Real World Applications. — 2014. — V. 15 — Pp. 367 - 380.

[32] Е. Перес, М.Н. Зубова, Т.А. Шапошникова. Задача усреднения в области, перфорированной мелкими изопериметрическими полостями с нелинейным краевым условием

третьего типа на их границе // Доклады Академии Наук. — 2014. — Т. 457. — №5 — с. 520 - 525.

[33] Oleinik O.A., Shaposhnikova T.A. On homogenization problem for the Laplace operator in partially perforated domains with Neumann conditions on the boundary of cavities // Rend. Mat. Acc. Lincei. — 1995. — V. 6 — №9 — Pp. 133 - 142.

[34] Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

[35] Evans Lawrence C. Partial Differential Equations. — American Mathematical Soc., 2010. — 749 pp.

[36] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Изд-во МИР, 1972. — 587 с.

[37] Олейник О.А.. Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: изд. Московского Университета, 1990. — 311 с.

[38] Adams R.A. Sobolev Spaces. — London: Academic Press, 1975. — 268 p.

[39] Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. — Л.: изд. Ленинградского Университета, 1985. — 416 с.

[40] Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 448 с.

[41] Гаевский Х., Грегер К., Захариас Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: изд. МИР, 1978. — 336 с.

[42] Bystrom J. Sharp constants for some inequalities connected to the p-Laplace operator // Journal of Inequalities in pure and applied mathematics. — 2005/ — V. 6 — №2 — Article 56.

[43] Bognar G., Ronto M. Numerical-analytic investigation of the radially symmetric solutions for some nonlinear PDEs // Computers and mathematics with applications. — 2005. — V. 50 — Pp. 983 - 991.

[44] Cioranescu D., Paulin J.S.J. Homogenization in open sets with holes // Journal of mathematical analysis and applications. — 1979. — V. 71 — Pp. 590 - 607.

[45] Chang K.C. Critical point theory and applications. — Shanghai: Shanghai scientific and technology press, 1986.

[46] Jager W., Neuss-Radu M., Shaposhnikova T.A. Homogenization of the diffusion equation with nonlinear flux condition on the interior boundary of a perforated domain. The influence of the scaling on the nonlinearity in the effective sink-source term // Journal of Mathematical Sciences. — 2011. — V. 179 — №3 — Pp. 446 - 459.

[47] Demengel F., Demengel G. Functional Spaces for the theory of elliptic partial differential equations. — Springer, 2012. — 465 p.