

ОТЗЫВ

официального оппонента С.Е. Пастуховой
на диссертационную работу Подольского Александра Вадимовича
«Усреднение задач для p -Лапласиана в перфорированной области с нелинейным
краевым условием третьего типа»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.02 — «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление»

Актуальность темы диссертации

В диссертации Подольского Александра Вадимовича изучается сложная задача об асимптотическом поведении при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения u_ε уравнения с p -лапласианом $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ в ε -периодически перфорированной области Ω_ε с нелинейным третьим краевым условием вида $\partial_{\nu_p} u_\varepsilon + \beta(\varepsilon)\sigma(x, u_\varepsilon) = 0$, заданным на границе перфораций, где ν_p — вектор конормали, связанной с p -лапласианом. Данное краевое условие содержит параметр $\beta(\varepsilon)$, зависящий от ε , который может стремиться к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. Такого вида уравнение и краевое условие на внутренней границе возникают при изучении нелинейной диффузии веществ в пористых средах в том случае, когда граница пор поверхностно активна и на ней наблюдается нелинейная адсорбция. Изучаемая задача сильно неоднородна за счет геометрии ε -периодически перфорированной области Ω_ε . Перфорации диффеоморфны замкнутому шару, радиус которого есть $O(a_\varepsilon)$, условие $a_\varepsilon \ll \varepsilon$ означает, что перфорации имеют малую концентрацию. В этом случае в предельном уравнении, которое ставится уже в сплошной области Ω "без дыр", сохраняется p -лапласиан, но может появиться при критических режимах младший член, компенсирующий отсутствие "дыр" в области Ω . Новый член в уравнении, называемый в зарубежной литературе "странным", вбирает из исходной задачи информацию о геометрии "дыр" и, быть может, о краевом условии на их границе. Все зависит от соотношений между параметрами задачи, а их пять: p — показатель нелинейности, n — размерность пространства, ε — параметр периодической структуры, a_ε — характеристика размеров полостей, $\beta(\varepsilon)$ — коэффициент, который характеризует процессы, происходящие на границе полостей (коэффициент адсорбции). Диссертантом выделено пять различных сценариев усреднения. Три из них ведут к появлению "странного" члена, и в каждом сценарии — своего определенного типа, что уже само по себе интересно. Структура "странного" члена отражает преобладание в пограничных слоях либо диффузии, либо адсорбции, а может, и сложного взаимодействия этих двух конкурирующих процессов. То, что выше было выражено в словесном описании, в диссертации обрело *точную формулировку новых нелинейных законов диффузии в пористых средах с учетом процессов адсорбции*. Найдено

эффективное описание сложной модели нелинейной диффузии, в которой взаимодействуют многие параметры.

Задача, изученная в работе Подольского А.В., в результате всевозможных обобщений проистекает из известной задачи Марченко – Хрушова, поставленной и решенной лет 40 назад. В течение последующих десятилетий внимание многих математиков, отечественных и зарубежных, занимали подобные задачи, связанные с перфорацией малой концентрации. Заслуга и достижение Подольского А.В. в том, что накопленные методы и технические приемы в этой тематике, в основном для линейных уравнений типа уравнения Лапласа, перенесены на нелинейное уравнение с p -лапласианом произвольного порядка $p \in (2, n]$.

Таким образом, диссертационное исследование Подольского А.В. представляется вполне актуальным.

Основные результаты диссертации

В диссертации Подольского А.В. получены следующие основные результаты.

1. Дана полная классификация асимптотического поведения решения исходной задачи для случая, когда $2 < p < n$. Выделено 5 различных сценариев усреднения, для каждого из них построена усредненная задача и доказана теорема о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.
2. Изучено критическое соотношение между коэффициентом $\beta(\varepsilon)$ и a_ε для случая, когда $p = n$. Разработан подход, позволяющий рассматривать перфорации произвольной формы с заданной площадью поверхности, при этом допускается некоторая случайность в их расположении. Момент отхода от жесткой периодичности всегда особо интересен в теории усреднения. Построена усредненная задача, не зависящая от указанной случайности, и доказана теорема о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.
3. Исследована начально-краевая задача для случая, когда $2 < p < n$, при некоторых ограничениях на коэффициент $\beta(\varepsilon)$ и параметр a_ε . Выделены 3 сценария усреднения, построены усредненные задачи, доказаны теорема о слабой сходимости решения исходной задачи к решению усредненной.

Наиболее интересным и трудным является так называемый критический случай соотношения между параметрами $\beta(\varepsilon)$ и a_ε . Данный случай особенный из-за того, что усредненное уравнение содержит нелинейное слагаемое нового типа. При этом Подольским А.В. получено функциональное уравнение, из которого находится это нелинейное слагаемое. Функциональное уравнение исследовано на предмет разрешимости, изучены свойства решения этого уравнения (монотонность, порядок роста, свойство коэрцитивности).

Все результаты диссертационной работы являются новыми, современными и актуальными, в работе дано их полное математическое обоснование. Подольским А.В. продемонстрировано уверенное владение методами асимптотического анализа, теорией соболевских пространств, знание обширной литературы по тематике исследования. Диссертант проявил высокую аналитическую культуру.

Диссертация Подольского А.В. избыточна по своим результатам: можно было ограничиться эллиптической теорией. Тем более, что параболическая теория еще не доведена до такой полноты и завершенности, как эллиптическая.

Замечания

Диссертационная работа Подольского А.В. не содержит серьезных недочетов, хорошо продумана и стилистически отредактирована. Имеются следующие замечания по тексту диссертации, не снижающие общей положительной характеристики работы и не влияющие на достоверность полученных результатов.

1. В самом начале Введения, следовало привести рисунок, на котором в осях α и γ были бы изображены участки плоскости, соответствующие различным сценариям усреднения, и указаны соответствующие эффективные уравнения. Без рисунка информация со стр. 4. воспринимается трудно.
2. На стр. 20 в некоторых поверхностных интегралах, например, в (1.53), стоит элемент объема вместо элемента площади поверхности.
3. В нескольких местах замечена путаница в индексах: то они лишние, то их не хватает. Например, на стр. 9 в оценке (1.3) вместо u_ϵ должно быть u ; на стр. 20 в оценке (1.51) вместо μ_ϵ должно быть μ ; на стр. 49 в оценке (2.113) вместо G_ϵ^j должно быть G^j , а в формулировке леммы 10 вместо h_ϵ лучше h ; на стр. 16 в оценке (1.39) вместо R должно быть R_ϵ .
4. На стр. 21 ссылка на лемму 6 из [35] не точна, так как в [35] использована двойная нумерация всех утверждений, причем отдельная для каждой главы. Впрочем (1.58) можно непосредственно обосновать по определению слабой сходимости, без каких-либо ссылок на источники.
5. Ключевой для диссертации термин «коэрцитивный» пишется с «е» вместо первой «и» (см., например, стр. 27, 56).
6. По всему тексту диссертации встречаются опечатки и отсутствие необходимых знаков препинания.

Выводы

Диссертация А.В. Подольского «Усреднение задач для р-Лапласиана в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа» является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение задачи, имеющей существенное значение для развития теории усреднения. Основные результаты диссертации являются новыми и актуальными, они четко сформулированы и строго доказаны. Диссертация написана ясно и последовательно. Тема и содержание диссертации соответствуют специальности 01.01.02 — «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». Доказанные в диссертации утверждения могут быть включены в спецкурсы по дифференциальным уравнениям и найти применение в научно-исследовательской работе в теории усреднения.

Результаты диссертации своевременно опубликованы в 7 печатных работах, 4 из которых входят в перечень журналов, рекомендованных ВАК; прошли апробацию на семинарах механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова и международных конференциях. Таким образом, основные результаты диссертации надлежащим образом опубликованы и прошли достаточную апробацию на научных конференциях и семинарах.

Автореферат диссертации правильно и полно отражает ее содержание, а также историю исследований по выбранной тематике.

Считаю, что диссертация А. В. Подольского «Усреднение задач для р-Лапласиана в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа» удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», а ее автор, Подольский Александр Вадимович, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление».

Официальный оппонент Пастухова Светлана Евгеньевна, доктор физико-математических наук (специальность 01.01.02), профессор кафедры высшей математики-2 ФГБОУ ВО «Московский Государственный Университет информационных технологий, радиотехники и электроники», 119454, г. Москва, проспект Вернадского д. 78, e-mail: pas-se@yandex.ru, тел.: +7(499) 215-65-65.

Пастухова С.Е.

Подпись С.Е. Пастуховой заверяю.

