Отзыв

официального оппонента на диссертацию Подольского Александра Вадимовича «Усреднение задач для p-Лапласиана в перфорированной области с нелинейным краевым условием третьего типа», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Тема диссертации относится к теории усреднения эллиптических операторов в областях с мелкомасштабной перфорированной структурой. Первые строгие результаты в этом направлении стали появляться в еще в 70-х и 80-х годах для оператора Лапласа с однородными условиями Неймана или Дирихле на границах «дырок» перфорированной области и были связаны с практическими задачами диффузии, гидродинамики и электродинамики. Цель таких исследований заключалась в анализе асимптотического поведения решений уравнения $-\Delta u = f$ в зависимости от геометрии перфорирующих отверстий и плотности их распределения. Их основной результат можно описать следующим образом. Для условий Неймана проблема отыскания главного члена асимптотики решения $u = u^{\varepsilon}$ оказывается нетривиальной только в случае, когда характерное расстояние между соседними отверстиями, ε, является малой величиной одного порядка с типичным размером отверстий a_{ε}, в случае же $a_{\varepsilon} << \varepsilon$ перфорация области приводит только к малым поправкам. Для условий Дирихле уравнение в для главного члена асимптотики решения меняется по сравнению с исходным уже при $a_{\varepsilon} << \varepsilon$ и принимает вид $-\Delta u + \mu(x)u = f$. Коэффициент μ в появившемся здесь вместо перфорирующих дырок потенциале может, в зависимости от соотношения между a_{ε} и ε, вырождаться в нуль или становиться бесконечным (последнее означает, что вырождается в нуль главный член асимптотики решения).

В дальнейшем эти результаты распространялись на другие линейные задачи, в частности для систем уравнений, а также для третьего краевого условия $\nabla u \cdot \nu + \beta_{\varepsilon} u = 0$, которое в зависимости от величины входящего в него коэффициента β_{ε} может быть ближе к условию Дирихле или Неймана. Следующий естественный шаг, который диктуется логикой математического исследования, состоит в обобщении результатов и методов на нелинейные задачи. Предшественниками соискателя рассматривалась проблема усреднения в перфорированной области для оператора Лапласа с нелинейностью только в краевом условии, а в диссертации указанная проблема всесторонне изучается для нелинейного уравнения с p-Лапласианом $-\nabla\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)+f=0$ и с нелинейными же краевыми условиями 3-го типа на перфорирующих отверстиях. Таким образом, **актуальность** темы не вызывает никаких сомнений.

Основной **целью** рецензируемой работы является полная классификация типов асимптотического поведения решений задач для p-Лапласиана в периодически перфорированной области с 3-м краевым условием вида $|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nu+\beta_\varepsilon\sigma(x,u)=0$ в зависимости от соотношения порядков величин ε, $a_\varepsilon \ll \varepsilon$ и β_ε с обоснованием сходимости для главного члена асимптотики. Соискателем эта задача решалась при ограничении $2<p\le n$ для показателя нелинейности и размерности пространства. В качестве технического условия, упрощающего формулировку результатов, для монотонной функции $u\to\sigma(x,u)$ из краевого условия предполагалась степень роста, согласованная с показателем нелинейности уравнения, то есть $|\sigma(x,u)|\sim|u|^{p-1}$.Следует отметить, что некоторые задачи усреднения p-Лапласиана в периодически перфорированной области рассматривались ранее, но при другом соотношении основных параметров (в частности, при $\beta_\varepsilon=0$ и $a_\varepsilon\sim\varepsilon$), о чем в обзорной части диссертации дается подробная информация. Результаты, представленные в диссертации, являются **новыми**.

Общими словами получившийся ответ можно описать следующим образом. Для соотношений порядков параметров, при которых размеры перфорации a_ε слишком малы или величина коэффициента β_ε в третьем краевом условии слишком мала, решения u^ε задачи оказываются близки в сильной топологии L_p и слабой топологии $W^{1,p}$ к решению «невозмущенного» уравнения в той же области, но без перфорации. С другой стороны, для достаточно больших значений β_ε и размеров перфорирующих отверстий решения u^ε стремятся к нулю в норме $W^{1,p}$. Наконец, для пограничных критических соотношений между ε, a_ε и β_ε в усредненном уравнении для главного члена асимптотики появляется дополнительное слагаемое в форме нелинейного потенциала, вид которого зависит от параметров и вычисляется явно.

Доказательства основных утверждений в работе строились посредством перехода к пределу в вариационном неравенстве, соответствующем монотонному оператору исходной задачи. Для этого использовались доказанные в работе оценки норм функций, опирающиеся на неравенства типа Пуанкаре для функций в перфорированной области с константами, явно выраженными через порядки геометрических величин ε и a_ε, а также на доказанную соискателем лемму о продолжении функций с перфорированной области на исходную с контролем за величиной норм продолженных функций и их градиентов. Полученные результаты относительно решений стационарных задач распространены для анализа асимптотики соответствующих параболических задач с начальными данными.

Явное построение подходящих пробных функций в вариационном неравенстве для последующего перехода к пределу потребовало высокой изобретательности, особенно для выделенного критического случая $a_\varepsilon \sim \varepsilon^\alpha$, $.\alpha = n/(n-p)$, $\beta_\varepsilon \sim \varepsilon^{-\gamma}$, $\gamma = \alpha(n-1)-n$, а также для пограничного соотношения $p=n$ между показателем нелинейности и размерностью задачи. Развитые при этом способы построения корректоров для пробных функций и технические приемы для перехода к пределу в поверхностных интегралах вариационного неравенства являются серьезным достижением соискателя. Они несомненно найдут применение в исследованиях многих других задач усреднения.

Таким образом, полученные соискателем результаты основаны на высококвалифицированных теоретических подходах. **Достоверность** получаемых этими методами результатов представляется в достаточной мере обоснованной. Работа прошла апробацию в форме публикаций в печати и обсуждений на семинарах и конференциях.

Диссертация выполнена весьма качественно, и принципиальных претензий по ее содержанию у меня нет. Имеющиеся отдельные **замечания** можно отнести не к изложению основной темы, а к ряду пояснений или их отсутствию. Ниже приведен перечень замеченных неточностей.

1. На стр. 10 автореферата есть описка в формуле для параметра γ в условии теоремы 3. То же замечание к 1-й строке на стр. 16.
2. Для пограничного соотношения $p=n$ между показателем нелинейности и размерностью задачи обозначения коэффициента β_ε в краевом условии в автореферате и тексте диссертации не согласованы: то, что в автореферате обозначено через β_ε, в тексте обозначает величину $\beta_\varepsilon^{\,n-1}$.
3. При доказательстве леммы 1 на стр. 8 диссертации условие $p \ge 2$ никак не используется, и утверждение леммы остается справедливым при $1 < p < 2$. Хотя этот случай не рассматривается в данной работе, лемма может представлять самостоятельный

интерес для других задач, поэтому этот диапазон не стоило исключать из ее формулировки.

4. На стр. 14 диссертации пропущено объяснение того, что построенное продолжение. $P(u)$ функции u принадлежит пространству $W^{1,p}(Y)$.

5. На стр. 15 при доказательстве неравенства (1.28) пропущено объяснение того, что константы в нем не зависят от ε.

6. В условии леммы 4 на стр. 16 не объяснено обозначение u' и не указано условие $u' \in L_2(\cdot,\cdot)$.

7. На странице 19 в лемме используется явно лишняя константа C, роль которой не разъясняется.

8. На стр. 20 в неравенствах (1.54), (1.58) имеются опечатки.

Сделанные замечания не умаляют ни значения выводов, ни хорошего впечатления от всей работы. Диссертация представляет высококвалифицированное научное исследование, имеющее большую теоретическую значимость и перспективы развития. Автор продемонстрировал хорошее владение предметом, позволяющее формулировать и решать новые проблемы. Решение поставленной в диссертации задачи является существенным вкладом в развитие методов теории усреднения дифференциальных уравнений. Автореферат диссертации полностью соответствует содержанию диссертации и правильно отражает суть защищаемых положений. Основываясь на вышесказанном, можно с уверенностью заявить, что работа соответствует требованиям, предъявляемым ВАК РФ к кандидатским диссертациям, а ее автор Подольский Александр Вадимович заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент
ст.н.с. Института водных проблем РАН /к.ф.-м.н. А.Ю.Беляев/
Дата 12.11.2015

Подпись старшего научного сотрудника
Института водных проблем РАН Беляева Алексея Юрьевича заверяю.
Референт Института водных проблем РАН
Федорченко В.С.

Сведения об официальном оппоненте:

Беляев Алексей Юрьевич

к.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Институт водных проблем РАН

119333 г.Москва, у.Губкина, 3

Тел. +7-499-783-37-57

e-mail beliaev@iwp.ru