МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Авксентьев Евгений Александрович

ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ И ТЕОРЕМЫ О ЗАМЫКАНИИ ТИПА ПОНСЕЛЕ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на кафедре общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	**Протасов Владимир Юрьевич**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Тиморин Владлен Анатольевич**, доктор физико-математических наук, профессор базовой кафедры МИАН факультета математики НИУ ВШЭ
	Кожевников Павел Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики МФТИ
Ведущая организация:	**Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН**

Защита диссертации состоится 11 декабря 2015 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова", по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО "МГУ им. М. В. Ломоносова" по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi

Автореферат разослан   ноября 2015 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО
"Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова"
доктор физико-математических наук,
профессор **В. В. Власов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации разрабатывается аналитический подход к исследованию теорем о замыкании типа Понселе для многоугольников и последовательностей окружностей. Подход основан на применении инвариантных мер, числа вращения, композиций дробно-линейных преобразований и т.д. Построена теория инвариантных мер на кониках, обобщены некоторые классические теоремы о замыкании и доказан ряд новых результатов.

Актуальность темы

Одной из важнейших и в то же время
красивейших теорем классической геометрии
является теорема Понселе.

Ф.Гриффитс, Дж.Харрис (1977).

Теорема, открытая Жаном-Виктором Понселе в 1814 г. и опубликованная им в 1822 г., представляет собой альтернативу, согласно которой вписано-описанная ломаная двух коник[1] либо замыкается для любой, либо не замыкается ни для какой начальной точки, причем в случае замыкания число звеньев всегда одинаковое. Иными словами, если для двух коник α и δ существует n-угольник $\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_n$, вписанный в δ и описанный около α (т.е. прямые, содержащие его стороны, касаются α), то таких n-угольников существует бесконечно много, и его первая вершина $\boldsymbol{x}_1$ может быть выбрана на δ произвольно (см. рис.).

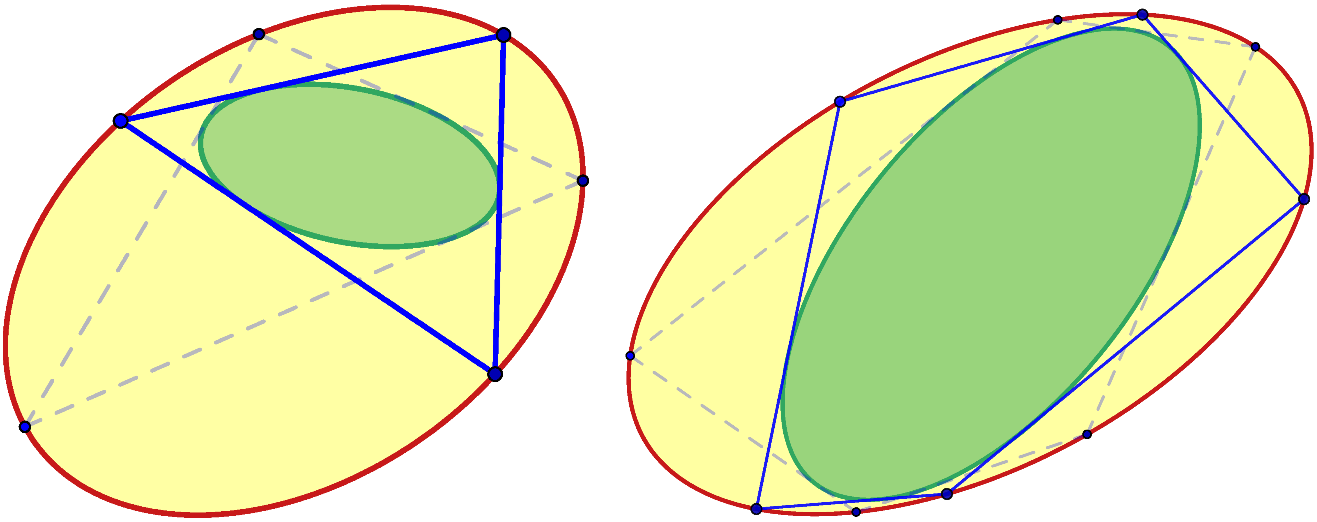


Рис. 1: Теорема Понселе для $n = 3$ и $n = 5$

За два века своего существования теорема Понселе во множестве работ нашла применение в разных областях математики, в частности, в задачах дифференциальных уравнений, спектральной теории линейных операторов, теории

[1] *коника* – это плоская квадрика, т.е. кривая второго порядка

бильярдов, квантовой механики, теории алгебраических кривых, и т.д. Получены ее многомерные обобщения. Различные варианты, обобщения и связи теоремы Понселе исследовались К. Якоби, Ж. Бертран, А. Кэли, Г. Дарбу, А. Лебегом, И. Шёнбергом, О. Боттемаой, Ф. Гриффитсом, Дж. Харрисом, А. Хованским, В. Козловым, Н. Хитчиным, и др. По этой теме существует обширная литература, в том числе, две монографии [2] [3]

Помимо классической теоремы Понселе, к наиболее известным теоремам о замыкании относятся теорема о зигзаге, поризм Штейнера, теорема Эмха. В недавней работе В. Протасова[4] был сформулирован общий принцип замыкания для сфер в пространстве $\mathbb{R}^n$ и получено многомерное обобщение теоремы Эмха, из которого как частные случаи следуют четыре классические теоремы о замыкании.

Методы доказательства теоремы Понселе нетривиальны и используют различную технику (меры, эллиптические интегралы, эллиптические кривые, теоремы Абеля и Римана-Роха, и т.д.). Подход, использующий некоторый инвариант, восходит к работам Якоби 1828 г. и Бертрана 1870 г. Спустя более чем столетие, в 1983 году, один из основателей теории приближений и теории сплайнов Шёнберг изложил эти результаты в упрощенном виде. В 1994 г. Кинг интерпретировал конструкцию Якоби-Бертрана в терминах инвариантной меры на конике. Это доказательство стало классическим и вошло во многие книги и задачники по геометрии.

Изложим кратко идею доказательства. Для простоты рассмотрим случай, когда окружность α лежит внутри окружности δ. Предположим, что есть мера $m(\cdot)$ на δ, такая что все ориентированные дуги $\breve{\boldsymbol{xy}} \subset \delta$, хорды которых касаются окружности α, имеют одно и то же значение $m(\breve{\boldsymbol{xy}}) = \tilde{m}$ (см. рис. 2).

Тогда n-угольник Понселе существует в том и только в том случае, если $n\,\tilde{m}$ является целым кратным $m(\delta)$. Поскольку это свойство не зависит от положения первой вершины многоугольника, отсюда следует теорема Понселе для окружностей.

Мера на окружности δ называется инвариантной, если ее плотность $\rho = m'$ удовлетворяет равенству

$$\rho(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}| = \rho(\boldsymbol{y})|d\boldsymbol{y}|, \tag{1}$$

где $d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{y}$ – это ориентированные длины малых дуг при шевелении хорды $\boldsymbol{xy}$, касающейся α. Если функция $\rho : \delta \to \mathbb{R}_+$ обладает этим свойством, то мера

$$m(\breve{\boldsymbol{xy}}) = \int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{y}} \rho(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s}$$

является инвариантной (интегрирование по дуге $\breve{\boldsymbol{xy}}$).

[2] V.Dragović and M.Radnović, Poncelet porisms and beyond, Springer-Birkhauser, Basel, 2011

[3] L.Flatto, Poncelet's theorem, AMS, Providence, RI, 2009.

[4] V.Yu.Protasov, Generalized closing theorems, Elem. Math., 66 (2011) №3, 98-117.

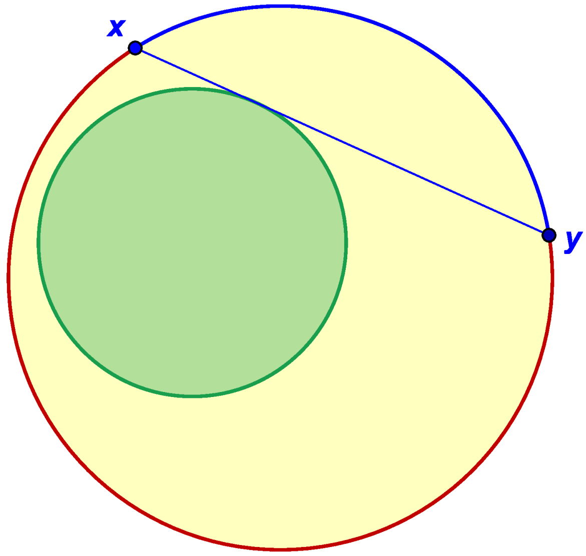


Рис. 2: $m(\breve{\boldsymbol{xy}}) = \mathrm{const}$

Для окружностей α и δ такая мера задается простой формулой

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{|f_\alpha(\boldsymbol{x})|}}\,,$$

где $f_\alpha(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_\alpha|^2 - r_\alpha^2$ – это степень относительно окружности α радиуса r_α и центром в точке $\boldsymbol{c}_\alpha \in \mathbb{R}^2$. Эту меру будем называть *мерой Якоби-Бертрана*. Более того, как это было замечено А. Г. Хованским, если мы рассмотрим произвольную квадратичную функцию $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, то та же формула также определяет инвариантную меру для окружности δ и коники $\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(\boldsymbol{x}) = 0\}$, что доказывает теорему Понселе для них в случае, когда α лежит внутри δ. Однако, при попытке провести рассуждения с конструкцией Кинга в других случаях, возникают трудности, связанные с нарушением порядка обхода вершин ломаных Понселе. В статье А. А. и Д. А. Пановых 2006 г. с помощью другой конструкции, использующей гомеоидную плотность, эти неприятности удается устранить. Тем не менее, остается задача получить явную формулу инвариантной меры двух произвольных коник. В диссертации такая формула выведена и классифицированы все инвариантные меры на кониках. Доказано свойство универсальности меры, согласно которому она инвариантна относительно отображений Понселе всего пучка, проходящего через две данные коники, что ведет к новым доказательствам "больших" теорем Понселе и Эмха для пучков коник.

В 1974 году Блэк, Хоулэнд и Хоулэнд построили инвариантную меру для другой хорошо известной теоремы о замыкании:

Теорема о зигзаге. Если для данных окружностей α, δ и числа $l > 0$, существует $2n$-угольник, все стороны которого равны l, а вершины по очереди лежат на окружностях δ и α, то таких $2n$-угольников существует бесконечно много, и его первой вершиной может быть произвольная точка окружности δ, удаленная от окружности α на расстояние меньше l.

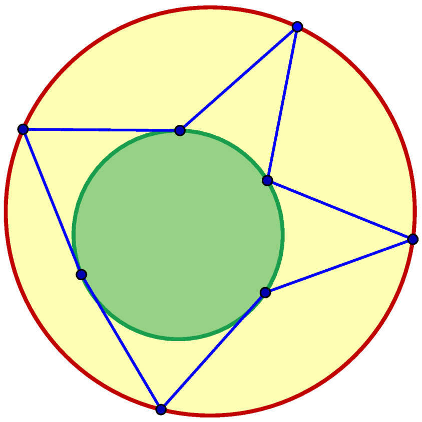
Эта теорема была установлена Эмхом в 1901 году, затем дважды независимо переоткрыта: Боттемой в 1965 году и Блэком-Хоулэндом в 1974 году.

Теорема Штейнера. Пусть даны две окружности α_0, α_1, одна внутри другой. Окружности $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ вписаны в кольцо между α_0 и α_1 последовательно касаются друг друга (ω_k и ω_{k+2} различны и обе касаются ω_{k+1} , $k \in \mathbb{N}$). Если эта цепочка замыкается через n шагов, т.е., $\omega_{n+1} = \omega_1$, то это же выполняется для произвольной начальной окружности ω_1.

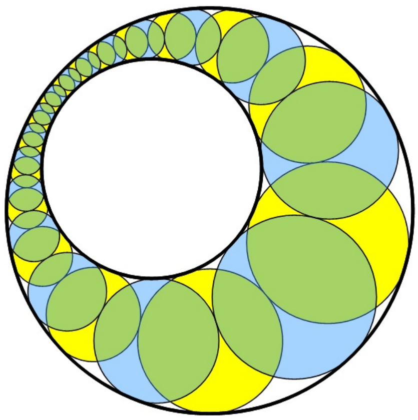
Мы упомянули три наиболее известные теоремы о замыкании. Относительно недавно было замечено[5], что все они являются, по сути, частными случаями теоремы Эмха о цепочках окружностей.

Теорема Эмха. Пусть α_0, α_1 – произвольные окружности на плоскости и $\mathcal{M}$ – семейство окружностей, касающихся α_0 и α_1. Фиксируем окружность $\delta \notin \mathcal{M}$ и построим цепочку окружностей $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ Если для некоторой начальной окружности $\omega_1 \in \mathcal{M}_i$ цепочка Эмха замыкается через n шагов, то она будет замыкаться для произвольной $\omega_1 \in \mathcal{M}_i$ и тоже через n шагов.

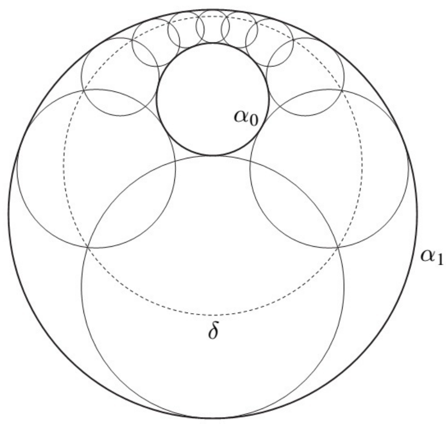
Эта теорема сформулирована А. Эмхом в 1901 году, но приведенное им доказательство подходит только для случая непересекающихся окружностей α_0 и α_1, в 1996 году В. Барт и Т. Бауэр[6] предложили доказательство для общего случая.



Теорема о зигзаге $n = 4$



Теорема Штейнера $n = 16$



Теорема Эмха для $n = 10$

Многомерная теорема Эмха, полученная Протасовым в 2011 г.[7], естественным образом обобщает классическую теорему Эмха: вместо цепочек окружностей, касающихся двух данных окружностей, рассматриваются цепочки сфер, касающихся d данных сфер в пространстве $\mathbb{R}^d$. Одним из основных результатов Главы 1 диссертации является получение явной формулы инвариантной меры,

[5]V.Yu.Protasov, *One generalization of Poncelet's theorem*, Russian Math. Surveys, 61 (2006) № 6, 187-188.

[6]W.Barth and Th.Bauer, *Poncelet theorems*, Exp. Math., 14 (1996), 125-144

[7]V.Yu.Protasov, Generalized closing theorems, Elem. Math., 66 (2011) №3, 98-117.

по квадратичным формам данных сфер, для многомерной теоремы Эмха. Для классической теоремы Эмха она приобретает простой вид:

$$\rho(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{|\sigma_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x})\sigma_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x})|}}, \tag{2}$$

где $\sigma_{\mathbf{j}}(\boldsymbol{x})$ – это степень точки $\boldsymbol{x}$ относительно окружности α_j. Инвариантные меры Якоби-Бертрана и Блэка-Хоулэнда являются частными случаями меры (2).

Еще одна важная задача: нахождение аналитического условия замыкания траекторий. В заметке А. Кэли[8] такое условие формулируется с помощью теории абелевых интегралов. Вдохновившись этим результатом, Лебег перевел доказательство Кэли на язык геометрии. В современном подходе Ф. Гриффитс и Дж. Харрис[9] вывели теорему Кэли, определив аналитическое условие для точек конечного порядка на эллиптической кривой.

Формулы Кэли определяют условия замыкания через заданное число n шагов. При больших n, однако, они становятся громоздки. Кроме того, с их помощью нельзя проверить, что траектории Понселе не замыкаются. Поэтому, необходимо получить такие условия, которые давали бы ответ на вопрос о замыкании траекторий и позволяли бы вычислить период, если он есть. Якоби сделал это для двух вложенных окружностей с помощью эллиптического интеграла. Мы распространяем этот результат на пару коник произвольного взаимного расположения.

Цели и задачи исследования

Основной целью работы является нахождение инвариантных мер для классических теорем о замыкании и их многомерных обобщений, исследование их свойств, усиление классических и вывод новых теорем о замыкании, в частности, некоммутативных, а также получение аналитических условий на замыкание траекторий.

Методы исследования

В диссертации используются различные методы теории функций действительного и комплексного переменного, классической и проективной геометрии.

Научная новизна работы

Основные результаты, изложенные в работе, являются новыми. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Получена явная формула инвариантной меры для многомерной теоремы Эмха, частными случаями которой являются инвариантные меры для

[8] A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon*, Philosophical Magazine, 7 (1854) 339–345.

[9] Griffiths Ph., Harris J., *On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism*, Enseign. Math., 24 (1978), 31-40.

классических теорем Эмха, Понселе, о зигзаге и Штейнера. С применением новой меры доказаны обобщения теоремы Эмха на пучки окружностей и на циклики, а также получено многомерное обобщение на каналовые циклиды Дарбу.

2. Для двух произвольных коник получена в явном виде инвариантная относительно их отображения Понселе мера. Доказана ее универсальность для всего пучка, проходящего через эти коники, приведена полная классификация инвариантных и универсальных борелевских мер на кониках. Получены явные формулы для числа вращения отображения Понселе двух произвольных коник, что дает критерий замыкания траекторий и формулу для периода.

3. Получены некоммутативные аналоги больших теорем Понселе и Эмха, которые не могут быть выведены с помощью инвариантной меры.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты дают полное решение задачи нахождения инвариантных мер для классических теорем о замыкании и их многомерных обобщений. Приведены примеры использования инвариантных мер, в которых получены: геометрические доказательства теорем о замыкании, новое многомерное обобщение и критерий замыкания траекторий. Кроме того, получены некоммутативные теоремы о замыкании. Результаты диссертации могут найти применения в задачах теории алгебраических чисел[10], теории числовых образов линейных операторов[11], теории дифференциальных уравнений[12] и геометрии.

Апробация работы

Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова:

- семинар “Дифференциальная геометрия и приложения” под руководством акад. А. Т. Фоменко (2012);
- семинар “Современные геометрические методы” под руководством акад. А. Т. Фоменко, д.ф.-м.н. проф. А. В. Болсинова, д.ф.-м.н. проф. А. С. Мищенко, д.ф.-м.н. проф. А. А. Ошемкова, к.ф.-м.н. доц. Е. А. Кудрявцевой, к.ф.-м.н. доц. И. М. Никонова (2012);

---

[10] см. В. В. Козлов, *Условия рациональности отношения эллиптических интегралов и большая теорема Понселе*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2003, № 4, 6–13

[11] см. H.-L. Gau, P.Y. Wu, *Numerical range and Poncelet property*, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 7, No. 2 (2003), 173-193 и B. Mirman, Vl. Borovikov, L. Ladyzhensky, R. Vinograd, *Numerical ranges, Poncelet curves, invariant measures*, Linear Algebra Appl., 329 (2001), 61-75.

[12] см. V.P. Burskii, A.S. Zhedanov, On Dirichlet, *Poncelet and Abel problems*, Communications on pure and applied analysis, Vol. 12, № 4 (2013), 1587 – 1633.

- семинар “Узлы и теория представлений” под руководством д.ф.-м.н. проф. В. О. Мантурова, к.ф.-м.н. доц. Д. П. Ильютко, к.ф.-м.н. доц. И. М. Никонова (2013);

- семинар “Геометрическая теория приближений” под руководством д.ф.-м.н. доц. П. А. Бородина (2013)

- семинар “Геометрическая теория оптимального управления” под руководством чл.-корр. РАН проф. М.И. Зеликина и к.ф.-м.н. асс. Л.В. Локуциевского (2014);

- семинар “Бесконечномерный анализ и математическая физика” под руководством д.ф-м.н. проф. О. Г. Смолянов, д.ф.-м.н. проф. Е. Т. Шавгулидзе (2015)

- семинар ИППИ РАН “Дискретная и вычислительная геометрия” под руководством к.ф.-м.н. О. Р. Мусина, д.ф.-м.н. А. А. Гайфуллина, д.ф.-м.н. Г. А. Кабатянского, д.ф.-м.н. доц. Р. Н. Карасёва, д.ф.-м.н. проф. И. М. Кричевера (2015)

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- международная конференция “Геометрия, топология, алгебра и теория чисел, приложения”, посвященная 120-летию Бориса Николаевича Делоне (Москва, 16 - 20 августа, 2010 г.) – полученные результаты опубликованы в сборнике тезисов конференций [4];

- международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013» (Москва, 8 — 13 апреля 2013 г.) – полученные результаты опубликованы в сборнике тезисов конференций [5];

- международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2015» (Москва, 13 — 17 апреля 2015 г.) – полученные результаты опубликованы в сборнике тезисов конференций [6].

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в шести работах [1–6] автора (без соавторов) (две из них [1, 2] – в центральных журналах из перечня ВАК), список которых приведён в конце диссертации.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на параграфы, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объём работы составляет

157 страниц. Список литературы включает 111 наименований, в том числе 6 работ автора.

Краткое содержание работы

Во **Введении** изложена история вопроса, показана актуальность рассматриваемых задач. Сформулированы цель работы и основные результаты.

Первая глава посвящена нахождению инвариантной меры для многомерной теоремы Эмха. Для этого сначала мы излагаем некоторые вспомогательные утверждения о касании сфер в пространстве $\mathbb{R}^n$, обобщающие теорему Кейзи, чтобы затем по уравнениям n данных сфер в $\mathbb{R}^n$ вывести уравнение описанной около них n-мерной циклиды Дюпена. Это нам позволит доказать главный результат этой главы:

Теорема 17 (об инвариантной мере для многомерной теоремы Эмха) *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ даны n ориентированных сфер $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, для которых множество $\mathcal{W}$ сфер, касающихся их, не пусто. Через $\sigma_i(\boldsymbol{x})$ обозначим степень точки $\boldsymbol{x}$ относительно сферы ω_i, а через $\tau_{\omega_i\omega_j}$ – касательное расстояние между сферами ω_i и ω_j. Тогда функция*

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\det(\mathcal{C}(\boldsymbol{x}))|}}\ , \tag{3}$$

$$\text{где}\quad \mathcal{C}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \tau^2_{\omega_1\omega_2} & \ldots & \tau^2_{\omega_1\omega_n} & \sigma_1(\boldsymbol{x}) \\ \tau^2_{\omega_1\omega_2} & 0 & \ldots & \tau^2_{\omega_2\omega_n} & \sigma_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tau^2_{\omega_1\omega_n} & \tau^2_{\omega_2\omega_n} & \ldots & 0 & \sigma_n(\boldsymbol{x}) \\ \sigma_1(\boldsymbol{x}) & \sigma_2(\boldsymbol{x}) & \ldots & \sigma_n(\boldsymbol{x}) & 0 \end{pmatrix},$$

определяет на всякой окружности $\delta \in \mathbb{R}^n$ инвариантную меру для обобщенного процесса Эмха сфер $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ на окружности δ.

Таким образом, если сфера ω' пробегает семейство $\mathcal{W}$, то она высекает на любой окружности δ в $\mathbb{R}^n$ дуги $\overset{\frown}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}$, изменяющиеся по закону (1). Это означает, что мера $\mu(\mathcal{A}) = \int\limits_{\mathcal{A}} \rho(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}|$ инвариантна относительно отображения Эмха æ$_\delta$: $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$, т.е. $\mu($æ$_\delta(\mathcal{A})) = \mu(\mathcal{A})$ для любого измеримого множества $\mathcal{A}$ окружности δ.

В некоторых случаях взаимного расположения сфер $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ и окружности δ отсюда сразу следует многомерная теорема Эмха. Для доказательства общего случая мы найдем ориентирующий инвариант $\tau(\boldsymbol{x})$, который позволит в равенстве (1) избавиться от модулей. Мы докажем, что мера μ' с плотностью $\rho'(\boldsymbol{x}) = \tau(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x})$ тоже æ$_\delta$-инвариантна, а в добавок к этому, она еще постоянна на всех дугах $\overset{\frown}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}$, высекаемых на окружности δ сферами $\omega' \in \mathcal{W}$, т.е.

$\mu(\breve{\boldsymbol{xy}}) = \mathrm{const} := \mathrm{c}_\delta$. Это с помощью конструкции Кинга[13] доказывает многомерную теорему Эмха для общего случая расположения сфер.

В случае $n = 2$ Теорема 17 дает следующую инвариантную меру на окружностях плоскости:

Теорема 20 *Пусть $\sigma_0(\boldsymbol{x})$ и $\sigma_1(\boldsymbol{x})$ – степени точки $\boldsymbol{x}$ относительно окружностей α_0 и α_1. Тогда на любой окружности δ мера с плотностью*

$$\rho(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{|\sigma_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x})\sigma_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x})|}}$$

является инвариантной для процесса Эмха относительно α_0 и α_1.

Теорема 20 дает геометрическое доказательство теоремы Эмха. Кроме того, меры Якоби-Бертрана и Блэка-Хоулэнда являются частными случаями меры $\rho(\boldsymbol{x})$. Следовательно, эта мера может рассматриваться как универсальная мера для теорем типа Понселе. Простые алгебраические операции с формулой для $\rho(\boldsymbol{x})$ дают обобщения теоремы Эмха на пучки окружностей, на циклики вместо двух окружностей и доказывают эквивалентность теорем Эмха и Понселе для коник. Кроме того, мы получим следующее обобщение многомерной теоремы Эмха на каналовые циклиды Дарбу[14]:

Теорема 22 *Сферы, вписанные в каналовую циклиду Дарбу, обладают свойством замыкания на любой окружности пространства.*

Во второй главе мы получим классификацию инвариантных мер на кониках, выведем явную формулу инвариантной меры для двух произвольных коник[15], докажем свойство ее универсальности для пучка, проходящего через две данные коники и распространим конструкцию Кинга инвариантной меры на большую теорему Понселе.

Пусть α и β – две различные коники, возможно вырожденные. Отображением Понселе на конике α относительно коники β будем называть такое отображение $j_\beta\colon \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$, что прямая $\boldsymbol{xy}$ касается коники β. Так как к конике β можно провести две касательные, то для нее есть два отображения Понселе j^1_β и j^2_β. Они определены на подмножестве α_β коники α, из точек которого можно провести касательную к конике β. Через через $\mathcal{P}_\alpha(\boldsymbol{x})$ и $\mathcal{P}_\beta(\boldsymbol{x})$ обозначим квадратичные формы коник α и β в некоторой декартовой системе координат. В Теореме 33 мы докажем, что мера на конике α с плотностью

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\nabla\mathcal{P}_\alpha(\boldsymbol{x})|\sqrt{\mathcal{P}_\beta(\boldsymbol{x})}} \tag{4}$$

[13] King J. L., *Three Problems in Search of a Measure*, The American Mathematical Monthly, Vol.101, No.7, 1994, 609-628.

[14] Г. Дарбу, Принципы аналитической геометрии, Л.-М.: ГОНТИ, 1938.

[15] Вид такой меры автору сообщил А. Г. Хованский, профессор факультета математики университета Торонто.

инвариантна относительно отображений Понселе коники β.

Рассмотрим теперь пучок коник $\mathcal{F}$, содержащий конику α. Мера на α называется *$\mathcal{F}$-универсальной*, если она инвариантна относительно отображений Понселе всех коник пучка $\mathcal{F}$. Мы докажем, что мера (4) является *$\mathcal{F}$-универсальной.* С использованием этого мы построим выравнивающее отображение ϑ, которое переводит отображения Понселе j_β всех коник β пучка $\mathcal{F}$ в повороты на окружности. А именно, будет доказана

Теорема 40 *Каждой конике β пучка $\mathcal{F}$ соответствует некоторое число c_β такое, что отображения Понселе j^1_β и j^2_β после применения выравнивающего отображения ϑ перейдут в сдвиги на вектора $\pm c_\beta$. Точнее, для $k \in \{1,2\}$ диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \alpha_\beta & \xrightarrow{j^k_\beta} & \alpha_\beta \\ \Big\downarrow \vartheta & & \Big\downarrow \vartheta \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{\rho_{(-1)^k c_\beta}} & \mathbb{T} \end{array}$$

коммутативна, т.е.

$$\vartheta \circ j^k_\beta = \rho_{(-1)^k c_\beta} \circ \vartheta \tag{5}$$

Это распространяет конструкцию Кинга на большую теорему Понселе, с помощью чего получается простое ее доказательство.

Следующая теорема дает классификацию инвариантных и универсальных мер на кониках:

Теорема 43 *Пусть α и β – произвольные невырожденные коники, $\mathcal{F}$ – пучок коник, порожденный α и β.*
1. *Если траектории Понселе коник α и β не замыкаются, то существует единственная j_β-инвариантная борелевская мера. При этом, она абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и $\mathcal{F}$-универсальна.*
2. *Если траектории Понселе коник α и β замыкаются, то существует бесконечно много инвариантных борелевских мер. Каждая такая мера μ однозначно определяется своим заданием на произвольной дуге (a,b), где b – такая точка орбиты a под действием j_β, что на дуге (a,b) нет других точек этой орбиты.*
3. *$\mathcal{F}$-универсальная мера на α существует, единственна и совпадает с мерой (4).*

В третьей главе мы сформулируем и докажем две теоремы о замыкании, в которых фигурируют новые семейства коник и окружностей, отличные от пучков. Большие теоремы Понселе и Эмха имеют свойство коммутативности траекторий. Поясним его на примере большой теоремы Понселе. В ней рассматриваются коники $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n$, принадлежащие одному пучку $\mathcal{F}$, и строится ломаная, вписанная в конику α так, что ее стороны последовательно касаются коник $\beta_1, \ldots, \beta_n$ (i-ая сторона касается β_i). Тогда при "вращении" ломаной прямая, проходящая через ее первую и последнюю вершину, тоже касается некоторой коники β_{n+1} пучка $\mathcal{F}$. Свойство коммутативности заключается в том, что порядок касания сторон ломаной с кониками $\beta_1, \ldots, \beta_n$ может быть произвольным, а результирующая коника β_{n+1} при этом не меняется.

Для данной коники α обозначим через $\Omega(\alpha)$ семейство коник, каждая из которых дважды касается α. При этом касание может быть и мнимым. Например, две концентрические окружности касаются в точках с координатами $(1, \pm i, 0)$ бесконечно удаленной прямой комплексной проективной плоскости. Кроме того, будем считать, что $\Omega(\alpha)$ содержит также и все точки плоскости (как вырожденные коники). Оказывается, что в большой теореме Понселе можно вместо наборов коник из одно пучка брать наборы коник семейства $\Omega(\alpha)$, а именно:

Теорема 58 (Некоммутативный аналог большой теоремы Понселе) *Пусть α – невырожденная коника, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \Omega(\alpha)$. Для произвольной точки $\boldsymbol{a}_1 \in \alpha$ построим ломаную Понселе $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_{n+1}$, у которой $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_{i+1}$ касается β_i. Тогда при движении точки $\boldsymbol{a}_1$ по конике α прямая $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_{n+1}$ тоже касается фиксированной коники $\beta_{n+1} \in \Omega(\alpha)$ (рис. 3).*

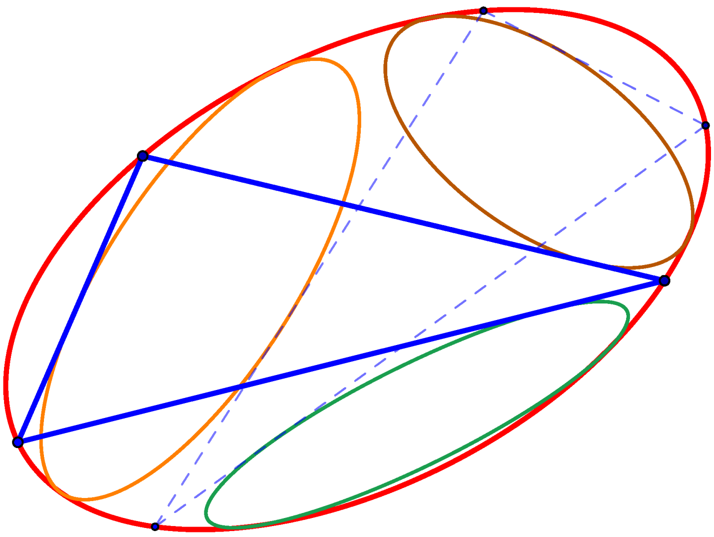


Рис. 3:

При этом, траектории Понселе коник семейства $\Omega(\alpha)$ не имеют свойства коммутативности: если касание сторон ломаной с кониками $\beta_1, \ldots, \beta_n$ происходит в другом порядке, то результирующая коника $\beta_{n+1} \in \Omega(\alpha)$ тоже другая.

Эта теорема имеет одно любопытное следствие:

Теорема 59 (Усиленная теорема Понселе на абсолюте) *Пусть ω_1, $\omega_2, \ldots,$ ω_n – произвольные циклы в плоскости Лобачевского. Выберем точку v_1 на абсолюте и построим вписанную в него ломанную $v_1v_2 \ldots v_{n+1}$, у которой i-ая сторона v_iv_{i+1} касается цикла ω_i, $i = \overline{1, n}$. Тогда при движении точки v_1 по абсолюту прямая v_1v_{n+1} касается некоторого фиксированного цикла.*

Мы также найдем связь между проективными преобразованиями на конике α с фиксированной прямой Штейнера и универсальной мерой на α относительно пучка коник Шаля этих преобразований (Теорема 60).

Рассмотрим n пар окружностей $\{\alpha_1, \beta_1\}$, $\{\alpha_2, \beta_2\}$, …, $\{\alpha_n, \beta_n\}$. Если окружности ориентировать, то для каждой пары $\{\alpha_i, \beta_i\}$ однозначно определяется семейство $\mathcal{M}_i$ касающихся ее окружностей.

Определение 1 *Декартово произведение*

$$\{\mathcal{M}_1 \times \ldots \times \mathcal{M}_n\} = \{\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \colon \gamma_1 \in \mathcal{M}_1, \ldots, \gamma_n \in \mathcal{M}_n\}$$

назовем шкатулкой *набора* $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$ *и будем обозначать через* $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$.

Рассмотрим шкатулку $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$ и произвольную окружность δ. Назовем *δ-ожерельями* шкатулки $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$ такие цепочки $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ из нее, которые обладают следующим свойством: γ_i и γ_{i+1} пересекаются на окружности δ для всех $i = \overline{1, n-1}$. Назовем δ-ожерелье *замкнутым*, если его первая и последняя окружности γ_1 и γ_n тоже пересекаются на δ.

Определение 2 *Будем говорить, что шкатулка Ω обладает свойством замыкания на окружности δ, если из того, что какое-нибудь одно ее δ-ожерелье замкнуто, следует, что в Ω существует гомотопно эквивалентный класс замкнутых δ-ожерелий. То есть, можно непрерывно изменять δ-ожерелье так, чтобы оно оставалось в шкатулке и было замкнутым.*

Существуют ли такой набор окружностей $\{\alpha_1, \beta_1\}$, $\{\alpha_2, \beta_2\}$, …, $\{\alpha_n, \beta_n\}$, шкатулка $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$ которого обладает свойством замыкания? Большая теорема Эмха утверждает, что если окружности $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ принадлежат одному пучку $\mathcal{F}_1$ и окружности $\beta_1, \ldots, \beta_n$ принадлежат одному пучку $\mathcal{F}_2$, причем пучки $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ имеют общую окружность δ, то шкатулка $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$ обладает свойством замыкания на окружности δ.

Свойством коммутативности обладают также и δ-ожерелья из большой теоремы Эмха. Оно состоит в том, что свойство замыкания шкатулки $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^n$ не зависти от порядка множителей в декартовом произведении $\mathcal{M}_1 \times \ldots \times \mathcal{M}_n$, т. е. неважно, в каком порядке идут пары $\{\alpha_1, \beta_1\}$, $\{\alpha_2, \beta_2\}$, …, $\{\alpha_n, \beta_n\}$.

Мы предлагаем другую шкатулку, которая обладает свойством замыкания, но не является коммутативной.

Теорема 63 (Некоммутативный аналог большой теоремы Эмха) *Пусть n пучков, порожденных парами окружностей $\{\alpha_1, \beta_1\}$, $\{\alpha_2, \beta_2\}$, …, $\{\alpha_n, \beta_n\}$, содержат общую окружность δ, которая для всех $i = \overline{1, n}$ лежит в кольце между α_i и β_i. Тогда существует еще одна пара соосных с δ окружностей $\{\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}\}$ такая, что шкатулка $\Omega\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=0}^{n+1}$ обладает свойством замыкания на окружности δ.*

Коммутативность большой теоремы Понселе объясняется тем, что она может быть доказана с помощью инвариантной меры. Если бы такое доказательство существовало и для Теоремы 58, то замыкание не зависело бы от порядка касания с кониками. Поскольку для разных порядков результирующие коники все же различны, скорее всего ее невозможно доказать с помощью инвариантной меры. Их доказательство требует новой техники.

Четвертая глава посвящена условиям замыкания траекторий Понселе.

А. Кэли в 1854 году полностью решил задачу нахождения условий для двух данных коник, при которых их траектории Понселе замыкаются через n шагов. Он дал ответ на этот вопрос, получив явные формулы в терминах отпределителей специальных матриц.

Пусть α и β – две произвольные коники, которые задаются в некоторой декартовой системе координат матрицами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Рассмотрим их дискриминант $\mathcal{D}(\lambda) = \det(\lambda\mathcal{A} + \mathcal{B})$ и разложим в ряд по степеням λ корень из него:

$$\sqrt{\mathcal{D}(\lambda)} = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \dots$$

Тогда формулы Кэли имеют следующий вид: замыкание траекторий Понселе коник α и β происходит через n шагов тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} c_3 & c_4 & \dots & c_{p+1} \\ c_4 & c_5 & \dots & c_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \dots & c_{2p-1} \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{если} \quad \text{n=2p}$$

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_{p+1} \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \dots & c_{2p} \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{если} \quad \text{n=2p+1} \tag{6}$$

Однако, эти формулы дают ответ на вопрос о замыкании траекторий только для каждого конкретного n, а замыкаются ли вообще траектории Понселе с помощью условий Кэли узнать нельзя.

С использованием инвариантной меры и проективных инвариантов пары коник, мы получим явные формулы для периода замыкания траекторий Понселе двух произвольных коник.

Рассмотрим на конике α диффеоморфизм $f\colon \alpha \to \alpha$. Обозначим через $[f^n(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}]$ количество оборотов, которое точка $\boldsymbol{x} \in \alpha$ делает за n итераций отображения f (обороты считаются против часовой стрелки). Тогда *числом вращения* отображения f называется предел

$$\rho(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{[f^n(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}]}{n}.$$

Известно[16], что этот предел существует и не зависит от точки $\boldsymbol{x}$. Кроме того, если $\rho(f) \in \mathbb{Q}$, то у отображения f есть периодическая траектория. Для отображения Понселе j_β это означало бы, что у него все траектории периодические, причем если период равен n, то $n\rho(j_\beta) \in \mathbb{N}$. Таким образом, критерием того, что траектории Понселе замыкаются, является рациональность числа вращения $\rho(j_\beta)$, а его знаменатель в этом случае равен периоду n.

Рассмотрим еще раз дискриминант $\mathcal{D}(\lambda) = \det(\lambda\mathcal{A} + \mathcal{B})$ коник α и β. Он является кубическим многочленом

$$\det(\lambda A + B) = \Delta\lambda^3 + \Theta\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta'.$$

Тогда величины

$$I_1 = \frac{\Theta^2}{\Delta\Theta'},\ I_2 = \frac{\Theta'^2}{\Delta'\Theta}$$

являются проективными инвариантами пары коник α и β.

Определение 3 *Корень уравнения*

$$u^3 = I_1 I_2(u^2 - I_1 u + I_1)$$

при условии

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{4}{I_1}\right) u^2 + 2u - 3 > 0,\ u > 1, & \textit{если } \alpha \textit{ и } \beta \textit{ вложенные;} \\ \left(1 - \frac{4}{I_1}\right) u^2 + 2u - 3 > 0,\ u < 1, & \textit{если } \alpha \textit{ и } \beta \textit{ лежат одна вне другой;} \\ \left(1 - \frac{4}{I_1}\right) u^2 + 2u - 3 < 0, & \textit{если } \alpha \textit{ и } \beta \textit{ имеют две общие точки,} \end{cases}$$

назовем особым инвариантом *пары коник α и β.*

Следующая теорема дает явные формулы для числа вращения отображения Понселе двух коник, который, как было замечено выше, позволяет находить период замыкания траекторий.

Теорема 75 *Пусть α и β – две невырожденные коники, u – их особый инвариант. Положим*

$$\mathfrak{I}(A,B,C) = \frac{\int\limits_A^B \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(c-x)}}}{\int\limits_{-1}^C \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(c-x)}}}, \quad \textit{где} \quad c = \frac{3-u}{2\sqrt{\frac{u^2}{I_1} - 2u + 3}}$$

[16] А. Б. Каток, Б. Хасселблат *Введение в современную теорию динамических систем*, М.: Факториал, 1999

Тогда число вращения $\rho(j_\beta)$ можно вычислить по следующим формулам в зависимости от взаимного расположения коник α и β:
1) если β лежит внутри α, то

$$\rho(j_\beta) = \mathfrak{I}(a,1,1)\,, \quad \text{где} \;\; a = \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - u + 1} + \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - 2u + 3}\,;$$

2) если β лежит вне α, то

$$\rho(j_\beta) = \mathfrak{I}(a',c,c)\,, \quad \text{где} \;\; a' = 2\left(\frac{u^2}{I_1} - u + 1\right)\left(1 - \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - 2u + 3}\right)^{-2} - 1;$$

3) если α и β пересекаются в двух точках, то

$$\rho(j_\beta) = \mathfrak{I}(b,1,1)\,, \quad \text{где} \;\; b = \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - 2u + 3} - \sqrt{\frac{u^2}{I_1} - u + 1}\,;$$

В статье В. В. Козлова[17] применяется интересный метод проверки чисел на алгебраичность, в котором используется эллиптический интеграл, связанный с числом вращения отображения Понселе двух коник. Возможно, полученные нами явные формулы для числа вращения позволят найти новые применения этого метода в теории алгебраических чисел.

Отметим также, что применение формул Кэли даже в простейшем случае, когда α и β – две окружности, приводит к довольно громоздким вычислениям. В то время, как для некоторых малых n существуют более простые формулы проверки на замыкание. Например для $n = 3$ и $n = 4$ есть формулы Эйлера и Фусса:

$$\frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d} = \frac{1}{r} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2}\,,$$

где R, r и d – радиусы окружностей α и β и расстояние между их центрами. Математиками были выведены такие формулы для разных n, были также найдены рекурентные соотношения для их получения. В Разделе 4.3 мы с помощью полученного нами обобщения одного несложного геометрического факта, установленного Радичем и Калиманом, предложим алгоритм для нахождения формул на условия замыкания ломанных Понселе для двух окружностей.

Построим ломаную Понселе $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\ldots\boldsymbol{v}_n$ окружностей α и β. Из большой теоремы Понселе следует, что при "вращении" этой ломаной, для каждого $i = \overline{2,n}$ ее диагональ $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_i$ касается фиксированной окружности γ_i пучка $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$. Как известно, отношение степеней любой точки окружности α относительно окружностей γ_i и β, есть величина постоянная. Обозначим ее через $k_i = k_i(\alpha,\beta)$.

[17] см. В. В. Козлов, *Условия рациональности отношения эллиптических интегралов и большая теорема Понселе*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2003, № 4, 6–13

Нетрудные вычисления показывают, что радиус $\rho(\gamma_i)$ окружности γ_i и расстояние $D(\gamma_i)$ от ее центра до центра окружности α выражаются через R, r и d по формулам

$$\rho(\gamma_i) = \sqrt{R^2 + k_i^2 d^2 - k_i(R^2 - r^2 + d^2)},\ D(\gamma_i) = k_i d.$$

Правило $(\alpha, \beta) \to (\alpha, \gamma_i)$ определяет для каждого $i \in \mathbb{N}$ отображения

$$G_i \colon (R, r, d) \mapsto (R, \rho(\gamma_i), D(\gamma_i)) = \left(R, \sqrt{R^2 + k_i^2 d^2 - k_i(R^2 - r^2 + d^2)}, k_i d\right).$$

Пусть теперь уравнение $F_n(R, r, d) = 0$ задает условие замыкания траекторий Понселе окружностей α и β через n шагов. Тогда следующая теорема дает алгоритм нахождения соотношений $F_n(R, r, d) = 0$.

Теорема 78 *Если траектории Понселе окружностей α и β замыкаются через n шагов, где $n = n_1 \dots n_r$, то*

$$[F_{n_1} \circ G_{n_2} \circ \dots \circ G_{n_r}](R, r, d) = 0,$$

где $G_{n_i} = G_{n_i}(\alpha, \gamma_{t_i}),\ F_{n_1} = F_{n_1}(\alpha, \gamma_{t_1}),\ t_i = \prod\limits_{j=i+1}^{r} n_j,\ i = \overline{1, r-1},\ t_r = 1.$

Иными словами,

$$F_n(R, r, d) = [F_{n_1} \circ G_{n_2} \circ \dots \circ G_{n_r}](R, r, d).$$

Применять этот алгоритм удобно по индукции, пользуясь соотношением

$$k_{2^i}(\alpha, \beta) = k_{2^{i-1}}(\alpha, \gamma_2) \cdot k_2(\alpha, \beta)$$

и таким следствием Теоремы 78:

Теорема 80 *Пусть траектории Понселе окружностей α и β замыкаются через n шагов, где $n = 2^l \cdot m$, m нечетно, δ – минимальное натуральное число, для которого $q := 2^\delta \pm 1 \equiv 0 \pmod{m}$. Тогда*

$$[F_q \circ\ G_{2^l}](R, r, d) = 0.$$

В качестве примеров с помощью этого алгоритма выведены формулы на условия замыкания для $n = 3, 4, 5, 6, 8$.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

- Получена явная формула инвариантной меры для многомерной теоремы Эмха. Как следствие из нее выводится инвариантная мера для классической теоремы Эмха, частными случаями которой являются инвариантные меры для классических теорем Понселе, о зигзаге и Штейнера.

- Для двух произвольных коник получена в явном виде инвариантная относительно их отображения Понселе мера. Доказана ее универсальность для всего пучка, проходящего через эти коники.

- Приведена полная классификация инвариантных относительно отображения Понселе и универсальных борелевских мер на кониках.

- Получены явные формулы для числа вращения отображения Понселе двух произвольных коник. Это дает критерий замыкания ломаных Понселе и формулу для периода.

- С помощью конструкции инвариантной меры получено обобщение теоремы Эмха на каналовые циклиды Дарбу.

- Получены некоммутативные аналоги больших теорем Понселе и Эмха, которые, по всей видимости, не могут быть выведены с помощью инвариантной меры.

Благодарности

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Юрьевичу Протасову за постановку задач, постоянную поддержку в работе и долготерпение в ожидании результатов. Автор очень признателен профессору А. Г. Хованскому за предложенный им вид инвариантной меры и полезные обсуждения, а также к.ф-м.н. В. А. Кириченко за интересные дискуссии и ценные советы. Автор выражает благодарность к.ф-м.н. доц. А. А. Васильевой, д.ф-м.н. доц. П. А. Бородину, к.ф-м.н. доц. Д. П. Ильютко, Ф. К. Нилову, участникам семинара “Современные геометрические методы” под руководством акад. А. Т. Фоменко за ценные замечания, а также всему коллективу кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ за доброжелательную и творческую атмосферу. Хочется также выразить благодарность начальнику выпускного курса к.ф.-м.н. Василию Васильевичу Козлову за многолетнюю поддержку и помощь в организационных вопросах учебного процесса.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Авксентьев Е. А., *Метрические свойства ломаных Понселе*, Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика. 2012. №3, 43-47.

[2] Е. А. Авксентьев, *Универсальная мера пучка коник и большая теорема Понселе*, Матем. сб., 205 (2014), № 5, 3-22.

[3] Авксентьев Е. А., *Теорема о замыкании с подвижной орбитой и комбинаторное доказательство теоремы Понселе*, Деп. в ВИНИТИ № 154-В2015, 2015. Расширенная версия статьи находится в печати в журнале Математический Сборник

[4] E. Avksentyev, *Metric properties of Poncelet polygonal lines*, Abstracts of the International Conference "Geometry, topology, algebra and number theory, applications", dedicated to the 120th anniversary of Boris Nikolaevich Delone (1890–1980) (August 16–20, 2010), Steklov Mathematical Institute, Moscow, 2010, 23-24.

[5] Авксентьев Е. А., *Большая теорема Понселе и инвариантная мера на кониках*, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013», Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. - М.: МАКС Пресс, 2013, электронное издание:
*http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov*_2013/2188/33962_42*f*1.*pdf*

[6] Авксентьев Е. А., *Инвариантная мера для многомерных теорем типа Понселе*, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015», Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. – М.: МАКС Пресс, 2015, электронное издание:
*http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov*_2015/*data*/6956/*uid*33962_*report.pdf*