

УТВЕРЖДАЮ

Директор
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук

академик РАН д. ф.-м. н. профессор А. П. Кулешов

« 21 » ноября 2015 года

М.П.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ
НА ДИССЕРТАЦИЮ АВКСЕНТЬЕВА ЕВГЕНИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА
«ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ И ТЕОРЕМЫ О ЗАМКНИИ ТИПА ПОНСЕЛЕ»,
ПРЕДСТАВЛЕННУЮ К ЗАЩИТЕ НА СОИСКАНИЕ
УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
НАУК ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 01.01.01 —
ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Диссертация Авксентьева Евгения Александровича посвящена теоремам о замыкании типа Понселе. В работе изучаются инвариантные меры, связанные с теоремой Понселе и другими теоремами о замыкании, развивается аналитический подход к теоремам типа Понселе, выводятся явные формулы для числа вращений, а также доказываются новые теоремы о замыкании.

Тема исследований является классической, но при этом и вполне актуальной. Сама теорема была доказана Ж.-В. Понселе в 1814 г. В 19-ом веке теоремы о замыкании привлекли внимание многих известных математиков, среди которых были К. Якоби, Я. Штейнер и А. Кэли. В 20-ом веке было обнаружено множество обобщений и новых доказательств. По данной теме публиковались такие известные математики, как А. Лебег, Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, А. Хованский, Н. Хитчин и В. Козлов. Ввиду связи теоремы Понселе с различными динамическими системами, а также её проявлениями в различных комбинаторно-геометрических конструкциях внимание к теоремам о замыкании только увеличивается.

Работа начинается с введения, которое состоит из исторического обзора и краткого содержания диссертации. Особое внимание уделяется обобщениям теоремы Понселе на случай многих коник и другого правила перехода между объектами. Помимо общего введения, первая, вторая и четвертые главы также начинаются с обзора результатов по затрагиваемым вопросам. В целом, автор проработал большое число источников и полученный обзор, пожалуй, является самым полным из существующих на русском языке, а также одним из самых полных вообще.

Содержательная часть диссертации состоит из четырех глав.

В первой главе находятся инвариантная мера для многомерной теоремы Эмха (доказанной В. Ю. Протасовым). Для этого автор сначала получает обобщение знаменитой теоремы Кейзи о касании сфер, после чего выводит уравнение многомерной циклиды Дюпена заданной n сферами. Это позволяет дать явную формулу инвариантной меры для многомерной теоремы Эмха, а также обобщить саму теорему на случай каналовых циклид Дарбу.

Во второй главе дается классификация инвариантных мер на кониках, выводится явная формула для двух коник и доказывается её «универсальность» (инвариантность относительно операции отображения Понселе).

В третьей главе доказываются некоммутативные теоремы о замыкании. По сути, приведены две интересные конструкции.

В первой, качестве отображения $a_i \rightarrow a_{i+1}$ выбирается такое отображение, что прямая $a_i a_{i+1}$ касается фиксированной коникой β_i дважды касающейся коники α , на которой лежат все a_i . Если α считать абсолютной модели Клейна гиперболической геометрии, то β_i будут не чем иным, как эквидистантами (а также окружностями и орициклами если говорить об общем случае). Таким образом данная теорема имеет естественный смысл в гиперболической геометрии.

Вторую конструкцию автор называет «Некоммутативным аналогом большой теоремы Эмха». Она состоит из n пар окружностей $\{\alpha_i, \beta_i\}$, таких что задаваемые ими пучки содержат фиксированную окружность δ . Тогда отображение $a_i \rightarrow a_{i+1}$ (все $a_i \in \delta$) определяется так, что существует окружность, проходящая через a_i и a_{i+1} и касающаяся α_i и β_i .

Четвертая глава посвящена условиям замыкания траекторий Понселе. А. Кэли в 1854 году нашел условия при которых траектории Понселе замыкаются через n шагов. В данной работе приводится алгоритм определения по двум коникам, задают ли они замкнутую систему Понселе, и определения соответствующего числа шагов. Автор развивает несколько новых идей, основанных на применении методов математического анализа. Также в этой главе приводится алгоритм для нахождения формул на условие замыкания ломанной Понселе для двух окружностей.

Результаты диссертационной работы Авксентьева Евгения Александровича являются актуальными и новыми. Их достоверность подтверждается публикациями в рецензируемых научных журналах, докладами на конференциях и научных семинарах. Основные результаты работы опубликованы в рецензируемых научных журналах.

Тема и содержание диссертации соответствуют специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертационной работы. Исследования имеют существенное значение также и в развитии смежных специальностей — динамических систем и геометрии.

К работе имеются небольшие замечания:

- Доказательство теоремы 8 начинается со слов «Сделаем расширение пространства на величину $-r_{n+2}$ ». Кажется, что автор делает «расширение» пространства \mathbb{R}^n , хотя на самом деле речь идет о пространстве сфер в \mathbb{R}^n .
- Автор несколько раз ссылается на некоего Блэка-Хоулэнда, хотя на самом деле упоминаемые результаты принадлежат трём людям В. Блэку, Г. Хоуланду и Б. Хоуланду.
- Было бы хорошо, если бы в четвертой главе автор предъявил явные уравнения на $\{R, r, d\}$ для вписанно-описанных n -угольников для $n = 7, 9, 11$, который можно получить, запрограммировав его алгоритм в системе символьных вычислений. Кажется, они не должны получаться очень громоздкими для этих случаев.
- Автор часто пересказывает классические результаты, когда можно было бы просто сослаться на соответствующую литературу. Впрочем, не ясно, считать ли это недостатком, поскольку текст в конечном итоге получается самодостаточным.
- Известно, что иногда, если система $\{R, r, d\}$ дает замкнутую систему Понселе, то система $\{R, d, r\}$ тоже является системой Понселе. Скорее всего, теоремы из четвертой

главы должны как-то объяснять этот факт, однако автор пропускает этот вопрос. Возможно это может послужить предметом дальнейших исследований.

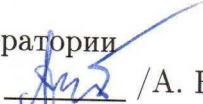
Указанные недостатки являются техническими и не принижают высокую положительную оценку работы.


Результаты работы могут быть использованы в дальнейших фундаментальных и прикладных исследованиях, для чтения специальных курсов по анализу, геометрии и смежным областям математики.

Диссертация Авксентьева Евгения Александровича «Инвариантные меры и теоремы о замыкании типа Понселе» удовлетворяет требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней», утверждённого Постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 года № 842, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор — Авксентьев Евгений Александрович заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертация была заслушана 20 октября 2015 г. на семинаре «Дискретная и вычислительная геометрия» ИППИ РАН. Отзыв утверждён на заседании Добрушинской математической лаборатории 27 октября 2015 г.

ФГБУН Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН), 127051, г. Москва, Большой Каретный пер., д. 19, стр.1.
Тел.: 8 (495) 650-42-25, сайт: www.iitp.ru.

Старший научный сотрудник Добрушинской математической лаборатории
кандидат физико-математических наук  /А. В. Акопян/

Заведующий Добрушинской математической лабораторией,
профессор, доктор физико-математических наук  /Р.А. Минлос/

Минлос Роберт Адольфович
д.ф.-м.н., профессор
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук
Лаборатория №4 им. Р.Л. Добрушина
127051, г.Москва, Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1
Тел.: 8 (495) 623-29-71
e-mail: minl@iitp.ru

Акопян Арсений Владимирович
к.ф.-м.н., старший научный сотрудник
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук
Лаборатория №4 им. Р.Л. Добрушина
127051, г.Москва, Большой Каретный пер., д. 19, стр. 1
Тел.: 8 (495) 699-83-54 (внутр. 124)
e-mail: akopjan@gmail.com