ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

МЯСНИЦКАЯ УЛ., Д.20, МОСКВА, РОССИЯ, 101000, ТЕЛ: 8 (495) 771-32-32, ФАКС: 8 (495) 628-79-31, E-MAIL: HSE@HSE.RU, WWW.HSE.RU
ОКПО 17701729, ОГРН 1027739630401, ИНН/КПП 7714030726/770101001

________________ № ____________________

на № ________________ от ________________

УТВЕРЖДАЮ
Проректор НИУ ВШЭ
по научной работе

____
к.э.н. М.М.Юдкевич
20 ноября 2015 года

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Е.А. Авксентьева
«Инвариантные меры и теоремы о замыкании типа Понселе»,
представленную на соискание ученной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — действительный, комплексный и функциональный анализ

Автор рассматривает алгебраические дискретные динамические системы на окружности с геометрической точки зрения, и исследует их методами математического анализа. Самый стандартный пример дискретной динамической системы на множестве X — это отображение $f : X \to X$. Рассматривать отображение f как динамическую систему — значит, изучать *итерации* $f^{\circ n}$ этого отображения и *орбиты* $\{f^{\circ n}(x)\}$ различных точек $x \in X$. Например, пусть X — это окружность, а f — диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию. Если на X существует гладкая инвариантная мера, то динамическая система $f : X \to X$ удовлетворяет следующей теореме *типа Понселе*: либо у f нет ни одной периодической орбиты, либо все орбиты периодические, причем одинакового периода. Автор рассматривает теоремы типа Понселе, возникающие в классической геометрии, и находит явные выражения для соответствующих инвариантных мер. Найденные явные выражения представляют самостоятельный геометрический (и динамический) интерес.

Например, в классической теореме Понселе рассматривается пара коник X, Y на вещественной проективной плоскости. Допустим для простоты, что Y лежит внутри X, то есть Y принадлежит стягиваемой компоненте дополнения до X. Из каждой точки $x \in X$

можно провести две касательные к конике Y. Эти касательные можно согласованным образом упорядочить: одну назвать правой, а другую левой. Определим точку $f(x)$ как вторую точку пересечения правой касательной к Y, выходящей из x. Хорошо известно, что таким образом определенное *отображение Понселе* f имеет инвариантную меру, а отсюда вытекает классическая теорема Понселе. Заметим, что отображение Понселе f имеет *алгебраическую природу*: $f(x)$ можно найти как решение алгебраического уравнения, коэффициенты которого — регулярные (полиномиальные) функции от x. Все остальные примеры, рассматриваемые автором, в частности, теорема о зигзаге, поризм Штейнера, теорема Эмха — тоже алгебраические. Более того, этим же свойством обладают найденные автором инвариантные меры. Это важное их свойство.

Автором получены явные аналитические формулы для инвариантной меры в многомерной теореме Эмха, в том числе, в классических теоремах Понселе, о зигзаге и Штейнера. Классифицированы все инвариантные меры для определенного класса динамических систем типа Понселе. Получены явные формулы для чисел вращения, а также новые результаты в духе теорем замыкания. Полученные автором результаты новые и заслуживают самой высокой научной оценки. Некоторые мелкие замечания, не влияющие на общую оценку работы, приведены в конце этого отзыва.

То, что я пишу ниже — возможные направления дальнейшего развития идей автора. Я это пишу для того, чтобы объяснить перспективность данной области. Для этого я должен напомнить стандартный подход к теореме Понселе с точки зрения комплексной геометрии. Алгебраические задачи полезно комплексифицировать. При этом задачи упрощаются и проявляются, как правило, общие свойства, которые трудно заметить из-за разнообразия форм действительного (вещественного) мира.

Например, можно комплексифицировать отображение Понселе. Правда, оно неизбежно потеряет свою однозначность, но это важное свойство рассматриваемой задачи! Существует несколько более общая ситуация, чем задание отображения $f : X \to X$, при которой можно говорить про орбиты. А именно, допустим, дано симметричное бинарное отношение $R \subset X \times X$ со следующим свойством: для каждой точки $x \in X$ имеется не более двух точек y со свойством $(x, y) \in R$. Тогда тоже можно говорить про орбиты (двусторонние), только нельзя эти орбиты упорядочить. В самом деле, пусть $x_0 \in X$ — произвольная точка. Мы можем определить x_{-1} и x_1 как такие две различные точки, что $(x_0, x_{\pm 1}) \in R$, или, если есть только одна точка x_1 со свойством $(x_0, x_1) \in R$, то полагаем $x_{-1} = x_1$. Выбор нижнего индекса ± 1 у точки $x_{\pm 1}$ произволен. Однако, после того, как этот выбор сделан, можно определить двусторонне бесконечную последовательность точек x_n по индукции. Допустим, что при некотором $n > 0$ точки $x_{\pm n}$ уже определены, и что мы хотим определить точки x_{n+1} и x_{-n-1}. Если есть только одна точка y со свойством $(x_n, y) \in R$, то обязательно $y = x_{n-1}$, и мы положим $x_{n+1} = y$. Если есть ровно две такие точки y, то одна из этих точек совпадает с x_{n-1}, а вторую мы обозначим через x_{n+1}. Точка x_{-n-1} определяется аналогично. Бинарное отношение R с указанными свойствами называется *симметричным 2-2 соответствием*.

Можно определить итерации симметричного 2-2 соответствия R. А именно, мы скажем, что точки x_0, $x_n \in X$ соответствуют друг другу при n-ой итерации R^n соответствия R, если эти точки включаются в орбиту $\ldots$, x_0, x_1, $\ldots$, x_{n-1}, x_n, $\ldots$. Любая итерация симметричного 2-2 соответствия снова является симметричным 2-2 соответствием.

С точки зрения внутренней комплексной геометрии коника — это сфера Римана. Пара коник X, Y определяет симметричное 2-2 соответствие на каждой из них. Например, точки x_0, $x_1 \in X$ соответствуют друг другу, если проведенная через них прямая касается коники Y. Таким образом, комплексифицированная ситуация классической теоремы Понселе определяет голоморфное симметричное 2-2 соответствие на сфере Римана.

Выбрав на сфере Римана аффинную координату z, голоморфное симметричное 2-2 соответствие можно записать явной формулой. А именно, точки с координатами z_0, z_1 соответствуют друг другу, если координаты удовлетворяют уравнению вида $P(z_0, z_1) = 0$, в котором P — комплексный биквадратичный симметрический многочлен от z_0, z_1 (такие многочлены существенно зависят от пяти комплексных коэффициентов, с точностью до пропорциональности). Заметим, что уравнение $P(z, z) = 0$ имеет степень 4, а следовательно, не может иметь более четырех различных корней, за исключением того случая, когда $P(z, z) = 0$ тождественно. В частности, если у голоморфного симметричного 2-2 соответствия более четырех различных неподвижных точек, то все точки неподвижны. Переходя от соответствия к его итерациям, мы можем также сделать вывод о том, что если у соответствия есть периодическая орбита длины 5 или больше, то все орбиты периодические и имеют одинаковую длину. Отсюда нетрудно вывести как классическую теорему Понселе, так и различные ее варианты. Важным условием является лишь наличие симметричного 2-2 соответствия алгебраической природы. Намеченное рассуждение — одно из классических доказательств теоремы Понселе.

Интересно посмотреть на аналоги инвариантных мер в такой ситуации, когда рассматривается симметричное голоморфное 2-2 соответствие на сфере Римана. Я утверждаю, что комплексификацией алгебраической инвариантной меры на окружности является следующая конструкция. Рассмотрим решетку $\Lambda \subset \mathbb{C}$ и соответствующую эллиптическую кривую $E = E_\Lambda = \mathbb{C}/\Lambda$. Как известно, факторпространство эллиптической кривой E по антиподальному отображению $z \mapsto -z$ наследует естественную комплексную структуру и изоморфно, в смысле этой комплексной структуры, сфере Римана $\mathbb{C}P^1$. Сквозное отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}P^1$, являющееся композицией канонической проекции из $\mathbb{C}$ в $E = \mathbb{C}/\Lambda$ и проекции из E в $\mathbb{C}P^1$, совпадает (с точностью до нормировки) с классической *функцией Вейерштрасса* $\wp = \wp_\Lambda$. На эллиптической кривой E есть очень простой и естественный класс динамических систем, а именно, сдвиги $z \mapsto z + \omega$ (здесь ω — фиксированное комплексное число). Каждый такой сдвиг можно опустить на E, но опущенная динамическая система теряет свою однозначность — получается не отображение, а симметричное 2-2 соответствие!

Можно попытаться действовать в обратную сторону. Дано симметричное 2-2 соответствие, например, приходящее из конструкции типа Понселе. Спрашивается: можно ли его поднять до некоторого сдвига некоторой эллиптической кривой. Поскольку общее симметричное 2-2 соответствие приходит из конструкции Понселе, а вещественное отображение Понселе имеет алгебраическую инвариантную меру, ответ должен быть утвердительным. Интересно рассмотреть задачу явного нахождения инвариантной меры в этой общей комплексной ситуации. Симметричному 2-2 соответствию будет отвечать эллиптическая кривая и сдвиг на ней. Интересно посмотреть на зависимость этих двух объектов (количественно их можно измерить как модуль эллиптической кривой и вектор сдвига) от коэффициентов соответствия. Кстати, вектор сдвига является комплексным аналогом числа вращения.

К замеченным (мелким) недочетам изложения в диссертации Е.А. Авксентьева относятся следующие:

- в двух различных местах автор дает эвристическое определение инвариантной меры, но ни разу не приводится строгое определение;
- в нескольких теоремах типа Понселе, например, в классической теореме Понселе, нужно отдельно рассматривать периодические точки периода 1, то есть неподвижные точки относительно отображения Понселе. Из существования таких точек не следует, что все точки неподвижны. В нескольких местах диссертации автор забывает указывать, что $n \neq 1$.

Конечно, эти недочеты не влияют на полноту результатов и на общую оценку диссертации.

Автор имеет шесть статей по теме диссертации, из них три опубликованных в журналах из центрального перечня ВАК. Результаты докладывались автором на международных конференциях, семинарах, коллоквиумах, на семинарах механико-математического факультета МГУ.

Тема диссертации соответствует специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Я считаю, что диссертация Е. А. Авксентьева «Инвариантные меры и теоремы замыкания типа Понселе» удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Авксентьев Евгений Александрович безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
PhD, доктор физико-математических наук,
профессор базовой кафедры МИАН факультета математики НИУ ВШЭ,
и.о. декана факультета математики НИУ ВШЭ
В.А.Тиморин

Почтовый адрес: 117312, г.Москва, ул. Вавилова, д.7
Телефон: 8 (495) 772–95–90*44196
E-mail: vtimorin@hse.ru

подпись заверяю
Заместитель начальника
Управления персонала

Городиская Ю.Н.