ФГБОУ ВО “Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова”

На правах рукописи

ЛЕБЕДЕВ Алексей Викторович

Неклассические задачи стохастической теории экстремумов

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва
2015

Работа выполнена в ФГБОУ ВО "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова", кафедра теории вероятностей механико-математического факультета

Научный консультант:	ПИТЕРБАРГ Владимир Ильич доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник
Официальные оппоненты:	НОВАК Сергей Юрьевич доктор физико-математических наук, Мидлсекский университет (Великобритания), факультет науки и технологии, старший доцент
	ЧУПРУНОВ Алексей Николаевич доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет", профессор кафедры математического анализа
	БУРНАШЕВ Марат Валиевич доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ФГБУН "Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича Российской академии наук", ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский государственный университет"

Защита диссертации состоится 22 апреля 2016 года в 16:45 на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 на базе ФГБОУ ВО "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова", по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова" по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А и на сайте механико-математического факультета `http://mech.math.msu.su/~snark/index.cgi`.

Автореферат разослан 2 марта 2016 года

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 на базе
ФГБОУ ВО "МГУ имени М. В. Ломоносова",
доктор физико-математических наук,
профессор В.В.Власов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Стохастическая теория экстремумов занимается изучением максимумов и минимумов (а также других порядковых статистик) систем случайных величин. Начало современного этапа развития этой теории принято датировать 1943 годом, с появления фундаментальной работы Б.В.Гнеденко[1], где была доказана знаменитая теорема об экстремальных типах (хотя ранее этот результат был кратко представлен в его статье 1941 года на русском языке[2]). А именно, было показано, что если для максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин существует невырожденное предельное распределение при линейной нормировке, то оно относится к одному из трех экстремальных типов (получивших впоследствии наименования законов Гумбеля, Фреше и Вейбулла).

В качестве предшественников Б.В.Гнеденко следует упомянуть М.Фреше[3], Р.Фишера и Л.Типпетта[4], Р. фон Мизеса[5].

Первым введением в теорию экстремумов с обзором результатов до 1970 года, опубликованным на русском языке, стала работа Э.Гумбеля[6]. В 1980-е гг. вышли две классические монографии по теории экстремумов Я.И.Галамбоша[7] и М.Лидбеттера, Г.Линдгрена, Х.Ротсена[8], до сих пор служащие настольными книгами для специалистов. Обзор Я.И.Галамбоша[9] был приурочен к 50-летию работы[1]. Более современное состояние теории и ее приложения в страховании и финансах отражены в книгах П.Эмбрехтса, К. Клюппельберг, Т.Микоша[10], А.Мак-Нила, Р.Фрея и П.Эмбрехтса[11], Л. де Хаана и А.Феррейры[12].

Современная стохастическая теория экстремумов весьма широка и разнопланова, однако в ее содержании и развитии можно заметить много аналогий с классической теорией суммирования. Так, теорема об экстремальных типах аналогична центральной предельной теореме. Имеются также слабые и усиленные законы больших чисел для экстремумов, правда, они бывают аддитивные и мультипликативные[7]. В обеих теориях важной задачей является получение оценок скорости сходимости.

[1] *Gnedenko B.V.* Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire // Ann. Math. 1943. V. 44. № 3. P. 423–453.

[2] *Гнеденко Б.В.* Предельные теоремы для максимального члена вариационного ряда // Доклады Академии наук УССР. 1941. Т. 32. № 1. С. 101–106.

[3] *Fréshet M.* Sur la loi de probabilité de l'écart maximum // Ann. de la Soc. polonaise de Math. (Cracow). 1927. V. 6. P. 93.

[4] *Fisher R.A., Tippett L.H.C.* Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample // Proc. Camb. Phil. Soc. 1928. V. 24. P. 180–190.

[5] *von Mises R.* La distribution de la plus grande de n valeurs. 1936. Reprinted in Selected Papres, II // Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1954. P. 271–294.

[6] *Гумбель Э.* Статистическая теория экстремальных значений (основные результаты) / Введение в теорию порядковых статистик. М.: Фазис, 1970. С. 61–93.

[7] *Галамбош Я.И.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.

[8] *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

[9] *Галамбош Я.И.* О развитии математической теории экстремумов за последние полвека // Теория вероятностей и ее применения, 1994. Т. 39. № 2. С. 272–293.

[10] *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosh T.* Modelling extremal events for insurance and finance. Springer, 2003.

[11] *McNeil A.J., Frey R., Embrechts P.* Quantitative risk management. Princeton University Press, 2005.

[12] *de Haan L., Ferreira A.* Extreme value theory. An introduction. Springer, 2006.

На основе предельных теорем строятся различные статистические оценки параметров. При отказе от независимости случайных величин, как и в теории суммирования, вводятся различные условия перемешивания для последовательностей и полей, позволяющие обобщить предельные теоремы[8]. Далее, в теории случайных процессов, процессам авторегрессии и скользящего среднего можно сопоставить процессы максимум-авторегрессии и скользящего максимума[13], устойчивым процессам — экстремальные процессы[7], ветвящимся процессам — максимальные ветвящиеся процессы[14] и т.д. Многомерным устойчивым законам соответствуют многомерные максимум-устойчивые, и как и в первом случае, помимо частных распределений оказывается важна структура зависимости компонент, для описания которой в теории экстремумов активно используются копулы. Современный аппарат копул хорошо изложен в книге Р.Нельсена[15]. Заметим, что теория экстремумов и теория суммирования представляют собой как бы два "параллельных мира", которые в чем-то похожи, а в чем-то отличаются друг друга.

Остановимся лишь на некоторых направлениях, разрабатываемых в настоящее время российскими учеными. Экстремумами гауссовских случайных процессов и полей много лет занимаются В.И.Питербарг и его школа. Отметим его классическую монографию[16]. Одним из важных направлений в теории экстремумов является теория рекордов, которая активно разрабатывается В.Б.Невзоровым и его школой. Отметим его цикл лекций[17]. Исследованиями экстремумов и превышений высокого уровня в связи с моделями телекоммуникаций занимается Н.М.Маркович[18,19]. В соавторстве с К.Авраченковым и Дж.Сридхараном ею изучались распределения и зависимость экстремумов в процессах выборочного исследования информационных сетей (network sampling processes)[20]. Ее перу также принадлежит книга[21] о непараметрическом анализе с помощью порядковых статистик. Недавняя докторская диссертация С.Ю.Новака[22] посвящена разнообразным задачам современной теории экстремумов, доказаны различные предельные теоремы и получены оценки скоростей сходимости, с приложениями в финансах. Докторская диссертация А.В.Степанова[23] посвящена предельным теоремам и статистическим процедурам для величин, связанных с рекордами и экстремальными порядковыми статистиками. Под руководством

[13] *Davis R.A., Resnick S.I.* Basic properties and prediction of max-ARMA processes // Adv. Appl. Prob., 1989. V. 21. № 4. P. 781–803.

[14] *Lamperti J.* Maximal branching processes and long-range percolation // J. Appl. Probab., 1970. V. 7. № 1. P. 89–96.

[15] *Nelsen R.* An introduction to copulas. Springer, 2006.

[16] *Питербарг В.И.* Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: МГУ, 1988. 176 с.

[17] *Невзоров В.Б.* Рекорды. Математическая теория. М.: Фазис, 2000.

[18] *Markovich N.M.* Modeling clusters of extreme values // Extremes, 2013.

[19] *Markovich N.M.* Quality assessment of the packet transport of peer-to-peer video traffic in high-speed networks // Perform. Evaluation, 2013. V. 70. № 1. P. 28–44.

[20] *Avrachenkov K., Markovich N.M., Sreedharan J.K.* Distribution and dependence of extremes in network sampling processes. INRIA Research report № 8578. August 2014. http://arxiv.org/abs/1408.2529

[21] *Markovich N.M.* Nonparamertic analysis of univariate heavy-tailed data. Wiley, 2007.

[22] *Новак С.Ю.* Предельные теоремы и оценки скорости сходимости в теории экстремальных значений. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.05. СПб.: ПОМИ РАН, 2014.

[23] *Степанов А.В.* Предельные теоремы и статистические процедуры для величин, связанных с рекордами и экстремальными порядковыми статистиками. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.05. СПб.: ПОМИ РАН, 2015.

А.В.Лебедева в 2014 году защищена кандидатская диссертация А.А.Голдаевой[24], посвященная тяжелым хвостам, экстремумам и кластерам линейных стохастических рекуррентных последовательностей.

Теория ветвящихся процессов восходит к исследованиям Ф.Гальтона и Г.Ватсона, обеспокоенных вырождением старинных дворянских фамилий в Англии XIX века. Однако аксиоматические основы этой теории были заложены лишь в середине XX века в фундаментальных исследованиях А.Н.Колмогорова, Б.А.Севастьянова, Р.Беллмана и Т.Харриса и получили развитие в многочисленных публикациях современных авторов. Отметим здесь классические книги Б.А.Севастьянова[25] и Т.Харриса[26], а также обстоятельные обзоры В.А.Ватутина и А.М.Зубкова[27,28]. В настоящее время передовые исследования в этой области ведутся В.А.Ватутиным, В.А.Топчим, В.И.Афанасьевым, Е.Е.Дьяконовой и др.

В обеих теориях существуют свои классические задачи, которые много лет глубоко исследуются специалистами, однако представляется иногда полезным расширить круг задач, как в связи с теоретическим обобщением некоторых понятий, так и в связи с потребностями практики. К сожалению, многие интересные начинания оказываются малоизвестными.

В теории вероятностей достаточно традиционно изучаются максимумы сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, когда речь идет о последовательных суммах (например, неравенство Колмогорова) или о суммах членов последовательности, попадающих в скользящее окно (максимумы частичных сумм Эрдеша-Реньи, см. например, работы С.Ю.Новака[29], В.И.Питербарга и А.М.Козлова[30]. Но можно поставить вопрос более широко, о максимумах сумм по произвольному семейству подмножеств некоторого растущего множества случайных величин.

В работе Г.И.Ивченко[31] изучалось поведение крайних членов вариационного ряда для независимых случайных сумм, где число сумм и число слагаемых в каждой сумме росли одновременно, причем распределение слагаемых удовлетворяло двустороннему условию Крамера. В силу асимптотической нормальности сумм, как и следовало ожидать, для максимумов возникал двойной показательный закон (Гумбеля). Серьезного развития эти исследования в то время, к сожалению, не получили. А.В.Лебедевым в [1, 8] была рассмотрена аналогичная задача в некрамеровском случае, когда известно, что распределение имеет лишь конечное число моментов либо является субэкспоненциальным. Отметим, что субэкспоненциальные распределения были введены В.П.Чистяковым[32] в 1964 году, но стали популярны только в последние

[24] *Голдаева А.А.* Тяжелые хвосты, экстремумы и кластеры линейных стохастических рекуррентных последовательностей. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.05. М.: МГУ, 2014.

[25] *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.

[26] *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.

[27] *Ватутин В.А., Зубков А.М.* Ветвящиеся процессы. I. Итоги науки и техники. Сер. Теор. вероятн. Матем. статистика. Теор. кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 23. С. 3–67.

[28] *Vatutin V.A., Zubkov A.M.* Branching processes. II // J. Sov. Math. 1993. V. 67. № 6. P. 3407–3485.

[29] *Новак С.Ю.* О распределении максимума частичных сумм Эрдеша-Реньи // Теория вероятностей и ее применения. 1997. Т. 42. №2. С. 274–293.

[30] *Питербарг В.И., Козлов А.М.* О больших скачках случайного блуждания с условием Крамера // Теория вероятностей и ее применения. 2002. Т. 47. № 4. С. 803–814.

[31] *Ивченко Г.И.* Вариационный ряд для схемы суммирования независимых величин // Теория вероятн. и ее примен., 1973. Т. 18. № 3. С. 557–570.

[32] *Чистяков В.П.* Теорема о суммах положительных случайных величин и ее приложения к вет-

десятилетия XX века, в связи с осознанием необходимости изучения тяжелых хвостов. В случае правильно меняющихся хвостов А.В.Лебедевым показано, что в зависимости от соотношения скоростей роста числа сумм и числа слагаемых может иметь место как предельный закон Гумбеля, так и Фреше. В качестве приложений можно указать, например, время выполнения однотипных работ, проводимых параллельно, если каждая из них делится на множество фаз. Модель параллельных вычислений на компьютере с большим числом процессоров изучалась С.Кангом и Р.Ф.Серфозо[33]. Степенные хвосты распределения числа операций возникают при последовательном декодировании[34].

Иногда возникают ситуации, когда суммы приходится брать нерегулярным образом. Например, имеется случайный граф, где с вершинами связаны случайные величины и нас интересуют максимумы сумм по вершинам и их соседям. Еще более общая ситуация может быть описана гиперграфом, где ребрами считаются произвольные подмножества всего множества вершин, и можно брать суммы по этим подмножествам. Подобные задачи изучались А.В.Лебедевым [12, 17, 20] применительно к моделям активности в информационных сетях (в том числе, социальных), что весьма актуально в наше время. Предполагалось, что информационные активности узлов сети имеют тяжелые (правильно меняющиеся) хвосты. Некоторые модели случайных графов и гиперграфов являются авторскими.

При изучении случайных графов используются различные модели: классические, исследование которых восходит к работе П.Эрдеша и А.Реньи[35], и степенные (power law, scale-free), активное исследование которых в последние десятилетия было инициировано работой А.Барабаши и Р.Альберта[36] (и которые в отечественной литературе также называют графами Интернет-типа или Интернет-графами). В степенных графах предельное распределение степени вершины имеет вид $p_k \sim ck^{-\beta}$, $\beta > 0$. Оказалось, что подобные модели хорошо описывают многие информационные, технические и биологические системы. Исследованиями Интернет-графов в России активно занимаются Ю.Л.Павлов и его коллеги (см. например, работы[37,38,39]), а также А.М.Райгородский (см. его обзор[40]).

Отметим классические книги по случайным графам В.Ф.Колчина[41] и Б.Боллобаса[42], а также современный учебник Р. ван дер Хофстеда[43].

вящимся случайным процессам // Теория вероятностей и ее применения, 1964. Т. 9. № 4. С. 710–718.

[33] *Kang S., Serfozo R.F.* Extreme values of phase-type and mixed random variables with parallel-processing examples // J. Appl. Prob., 1999. V. 36. № 1. P. 194–210.

[34] *Касами Т., Токура Н., Ивадари Е., Ингаки Я.* Теория кодирования. М.: Мир, 1978.

[35] *Erdös P., Rényi A.* On random graphs // Publ. Math. Debrecen. 1959. V. 6. P. 290–297.

[36] *Barabási A., Albert R.* Emergence of scaling in random networks // Science. 1999. V. 286. P. 509–512.

[37] *Павлов Ю.Л.* О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21. № 3. С. 14–23.

[38] *Павлов Ю.Л.* Об условных Интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания // Дискретная математика. 2010. Т. 22. № 3. С. 20-33.

[39] *Лери М.М., Чеплюкова И.А.* Об одной статистической задаче для случайных графов Интернет-типа // Информатика и ее применения. 2011. Т. 5. № 3. С. 34–40.

[40] *Райгородский А.М.* Модели случайных графов и их применения // Труды МФТИ. 2010. Т. 2. № 4. С. 130–140.

[41] *Колчин В.Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2004.

[42] *Bollobás B.* Random graphs. Cambridge Univ. Press. 2001.

[43] *van der Hofstad R.* Random graphs and complex networks. V. 1. Eindhoven Univ. of Technology, 2014. http://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCN.pdf

В качестве недавних отечественных работ о случайных гиперграфах можно указать[44], [45], [46].

Интересным направлением междисциплинарных исследований на стыке теории экстремумов и теории ветвящихся процессов является изучение максимумов случайных признаков частиц в ветвящихся процессах (по поколениям или за все время). Отметим фундаментальные в этой области работы Б.Арнольда и Дж.Вилласенора[47] и А.Пейкса[48]. В качестве признаков часто изучаются числа потомков частиц. Отметим обзор Дж.Янева[49] и недавние работы Дж.Бертоина[50,51]. В качестве исторической предшественницы можно указать модель М.Йенга[52], в которой популяция растет детерминированным образом (в геометрической прогрессии), и нас интересуют промежутки между рекордами, а также классическую F^{α}-модель (см. лекции[17] и дальнейшее обобщение в работе П.Деовельса и В.Б.Невзорова[53]).

В ситуации, когда признаки частиц независимы и одинаково распределены, причем их распределение принадлежит области притяжения одного из максимум-устойчивых законов (экстремальных типов), а число частиц ветвящегося процесса, должным образом нормированное, также имеет некоторое предельное распределение, задача сводится к давно известной[7] и представляется банальной. Возможно, это и затормозило дальнейшие исследования. Однако если отказаться хотя бы от одного из предположений (независимости признаков или принадлежности области притяжения), как возникает много новых задач и результатов.

При отказе от предположения о принадлежности распределения признака области притяжения какого-либо максимум-устойчивого закона А.В.Лебедевым в [14, 19] был получен обширный класс возможных предельных законов для максимумов в случае бессмертных надкритических ветвящихся процессов с дискретным временем. Этот класс обобщает максимум-полуустойчивые распределения, введенные и изучавшиеся И.В.Гриневич[54] и Е.Панчевой[55] (см. также недавний обзор[56]), а впоследствии

---

[44] *Будников Ю.А.* Об асимптотическом поведении хроматического индекса случайных гиперграфов // Интеллектуальные системы. 2007. Т. 11. № 1–4. С. 343–360.

[45] *Купавский А.Б., Шабанов Д.А.* Раскраски частичных систем Штейнера и их приложения // Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Т. 18. № 3. С. 77–115.

[46] *Шаповалов А.В.* Цикловая структура случайного неоднородного гиперграфа на докритическом этапе эволюции // Дискретная математика. 2007. Т. 19. № 4. С. 52–69.

[47] *Arnold B.C., Villasenor J.A.* The tallest man in the world / Statistical theory and applications. Papers in honor of H.A.David. Springer, 1996. P. 81–88.

[48] *Pakes A.G.* Extreme order statistics on Galton-Watson trees // Metrika, 1998. V. 47. P. 95–117.

[49] *Yanev G.P.* Revisiting offspring maxima in branching processes // Pliska Studia Mathematica Bulgarica, 2007. V. 18. P. 401–426.

[50] *Bertoin J.* On the maximal offspring in a critical branching processes with infinite variance // J. Appl. Probab., 2011. V. 48. № 2. P. 576–582.

[51] *Bertoin J.* On the maximal offspring in a critical branching processes with finite variance // J. Appl. Probab., 2013. V. 50. № 3. P. 791–800.

[52] *Yang M.C.K.* On the distribution of the inter-record times in an increasing population // J. Appl. Probab. 1975. V. 12. № 1. P. 148–154.

[53] *Деовельс П., Невзоров В.Б.* Рекорды в F^{α}-схеме. II. Предельные теоремы // Проблемы теории вероятностных распределений. 13. Зап. науч. сем. ПОМИ. 1994. Т. 216. С. 42–51.

[54] *Гриневич И.В.* Макс-полуустойчивые предельные распределения, отвечающие линейной и степенной нормировке // Теория вероятностей и ее примен. 1992. Т. 37. № 4. С. 774–776.

[55] *Pancheva E.* Multivariate max-semistable distributions // Теория вероятностей и ее примен. 1992. V. 37. № 4, P. 794–795.

[56] *Pancheva E.* Max-semistability: a survey // ProbStat Forum, 2010. V. 3. P. 11–24.

Л.Канто э Кастро, Л. де Хааном и М.Темидо[57]. В случае непрерывного времени новых законов не возникает [13]. Во многомерном случае (нескольких признаков) изучена предельная зависимость максимумов, порождаемая как возможно исходной зависимостью признаков частицы, так и влиянием ветвящегося процесса [19, 13].

С другой стороны, при отказе от предположения о независимости признаков возникает две основные задачи: выяснить, когда зависимость не влияет на асимптотику максимумов, и напротив, когда она существенно влияет, и это влияние необходимо описать. Первая задача решалась А.В.Лебедевым в [16, 25] для нормальных признаков (когда признаки частиц в поколении имеют многомерное нормальное распределение при известном генеалогическом дереве поколения), а вторая для признаков с тяжелыми (правильно меняющимися) хвостами. Во всех случаях предполагалось, что зависимость признаков пары частиц определяется дальностью их родства, т.е. сколько поколений назад они имеют ближайшего общего предка. Рассмотрены критические, околокритические и надкритические ветвящиеся процессы. При этом использовались книги В.А.Ватутина[58] и Т.Харриса[26], а также известные работы К.Фляйшмана и Р.Зигмунда-Шульце[59] и А.Л.Якымива[60,61] о редуцированных критических ветвящихся процессах.

Следует отметить, что модели, в которых частицы ветвящегося процесса обладают некоторым признаком (весом, энергией и т.п.) рассматриваются давно[26], но не с точки зрения экстремумов. Например, в работе У.Рослера, В.А.Топчего, В.А.Ватутина[62] вес частицы формируется умножением веса матери на случайный множитель, и изучается асимптотика суммарного веса частиц по поколениям или за все время. Таким образом, мы видим еще одну аналогию между теорией экстремумов и теорией суммирования. Однако как мультипликативная модель[62], так и модели дробления массы или энергии[26] исключают невырожденное стационарное распределение признаков частиц, которое было важным предположением в работах А.В.Лебедева и других упомянутых выше.

При изучении влияния зависимости на поведение максимумов стационарных последовательностей используется понятие экстремального индекса $\theta \in [0, 1]$. Бывает, что максимум n членов последовательности асимптотически растет как максимум $[\theta n]$ независимых случайных величин с тем же распределением. При этом превышения высокого уровня образуют кластеры со средним размером $1/\theta$. Эта тематика широко представлена в монографиях[8,10] и др. Некоторые новые результаты об экстремальных индексах линейных стохастических рекуррентных последовательностей недавно получены А.А.Голдаевой[24].

Однако на практике существует необходимость в изучении максимумов зависи-

---

[57] *Canto e Castro L., de Haan L., Temido M.G.* Rarely observed sample maxima // Теория вероятностей и ее примен. 2000. Т. 45. № 4. P. 787–799.

[58] *Ватутин В.А.* Ветвящиеся процессы и их применения. Лекционные курсы НОЦ. Вып. 8. М.: МИАН, 2008.

[59] *Fleischmann K., Siegmund-Schultze R.* The structure of reduced critical Galton-Watson processes // Math. Nachr., 1977. V. 79. № 1. P. 233–241.

[60] *Якымив А.Л.* Редуцированные ветвящиеся процессы // Теория вероятностей и ее применения. 1980. Т. 25. № 3. С. 593–596.

[61] *Якымив А.Л.* Асимптотические свойства докритических и надкритических редуцированных ветвящихся процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1985. Т. 30. № 1. С. 183–188.

[62] *Рослер У., Топчий В.А., Ватутин В.А.* Условия сходимости для ветвящихся процессов с частицами, имеющими вес // Дискретная математика, 2000. Т. 12. № 1. С. 7–23.

мых случайных величин на более сложных структурах, чем множество натуральных чисел. Связанные с этим трудности обсуждались еще в монографии[7]. В диссертации Г.Чои[63] экстремальный индекс был обобщен на случайные поля на решетках $\mathbf{N}^d$, $d \geq 2$. Эта идея получила дальнейшее развитие в работах Х.Феррейры и Л.Перейры [64,65]. Однако и этого недостаточно для менее регулярных случаев. Поэтому в работе А.В.Лебедева [21] введены два новых экстремальных индекса в схеме серий для произвольных систем случайных величин (одинаково распределенных в каждой серии), взятых в случайном количестве. Их применение продемонстрировано на различных примерах: как упомянутых выше моделях активности в информационных сетях и признаков частиц в ветвящихся процессах, так и на моделях с копулами и пороговых моделях. При этом обнаружен ряд интересных эффектов, не характерных для максимумов стационарных последовательностей.

Отметим, что максимумы независимых разнораспределенных случайных величин в схеме серий ранее изучались, например, в работах Е.Панчевой[66] и А.Н.Чупрунова[67], а максимумы в моделях с копулами в работе Е.А.Савинова[68].

Максимальные ветвящиеся процессы (МВП) представляют собой экстремальные аналоги классических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона. А именно, мы заменяем суммирование числа потомков частиц (при определении численности очередного поколения) на максимум. Можно сказать, что в максимальных ветвящихся процессах в каждом поколении выживают потомки только одной частицы, имеющей больше всего потомков. МВП были введены и изучались Дж.Ламперти[14,69] в 1970–72 гг., однако в дальнейшем были совершенно заброшены (хотя и упомянуты в обзоре[28]). Новый этап исследования был начат А.В.Лебедевым с 2001 года. В [11] проведено обобщение процессов с целочисленных значений на произвольные борелевские множества в $\mathbf{R}_+$ (аналогичные обобщения процессов Гальтона-Ватсона на непрерывное множество значений представляют собой процессы Иржины[70]), изучены различные их свойства и доказана эргодическая теорема. При этом использовалось свойство ассоциированности случайных величин, которому посвящена книга А.В.Булинского и А.П.Шашкина[71], а при доказательстве эргодичности (и в дальнейшем, предельных теорем для стационарных распределений) — теоремы из книги А.А.Боровкова[72].

---

[63] *Choi H.* Central limit theory and extremes of random fields. PhD Dissertation in Univ. of North Carolina at Chapel Hill. 2002.

[64] *Ferreira H., Pereira L.* How to compute the exremal index of stationary random fields // Statistics and Probability Letters, 2008. V. 78. P. 1301–1304.

[65] *Pereira L.* The asymptotic location of the maximum of a stationary random field // Statistics and Probability Letters, 2009. V. 79. P. 2166–2169.

[66] *Панчева Е.И.* Общие предельные теоремы для максимума независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Т. 31. № 4. С. 730–744.

[67] *Чупрунов А.Н.* О сходимости по распределению максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин со случайными коэффициентами // Теория вероятностей и ее применения, 1999. Т. 44. № 1. С. 138–143.

[68] *Савинов Е.А.* Предельная теорема для максимума случайных величин, связанных IT-копулами t-распределения Стьюдента // Теория вероятностей и ее применения, 2014. Т. 59. № 3. С. 594–602.

[69] *Lamperti J.* Remarks on maximal branching processes // Теория вероятн. и ее примен., 1972. Т. 17. № 1. С. 46–54.

[70] *Jiřina M.* Stochastic branching processes with continuous state space // Chechoslovak Math. J., 1958. V. 8. № 2. P. 292–313.

[71] *Булинский А.В., Шашкин А.П.* Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: Физматлит, 2008.

[72] *Боровков А.А.* Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М.: УРСС, 1999. 440 с.

Следует подчеркнуть важное отличие МВП от процессов Гальтона-Ватсона (или Иржины): те либо вырождаются, либо уходят на бесконечность, а МВП могут иметь невырожденное стационарное распределение. Именно на изучении эргодических МВП были сосредоточены дальнейшие исследования А.В.Лебедева. В [3] были доказаны предельные теоремы для стационарных распределений ограниченных МВП, в [4] для неограниченных с относительно легкими (до лог-вейбулловских с показателем $\alpha > 2$) хвостами, в [9] — с тяжелыми (степенными) хвостами распределений числа потомков. Асимптотика хвостов стационарных распределений изучалась в [15]. В качестве приложений рассмотрены вентильные бесконечнолинейные системы массового обслуживания [6, 7]. Такие системы ранее изучались С. Брауни и др.[73], Ч.Кнесслом и З.Таном[74], Д.Пинотци и М.Зазанисом[75] другими методами. Обзор результатов А.В.Лебедева для МВП с одним типом частиц представлен в [22].

Дальнейшее развитие теории МВП связано с введением нескольких типов частиц. Предполагается, что число частиц каждого типа формируется как максимум чисел потомков данного типа от каждой частицы предыдущего поколения. Обобщение с целочисленных значений на произвольные неотрицательные проводится аналогично случаю одного типа частиц. В [19] доказана основная эргодическая теорема, в [23, 24] доказаны предельные теоремы для стационарных распределений. Одной из трудностей, возникающих в определении МВП с несколькими типами частиц и нецелыми значениями, является тот факт, что не всякая положительная степень многомерной функции распределения также является многомерной функцией распределения. Эта проблема полностью снимается только для класса максимум-безгранично делимых многомерных распределений (одномерные распределения все являются максимум-безгранично делимыми). Такие распределения изучались, например, в работах А.А.Балкема и С.И.Резника[76] и А.Земплени[77].

Примечательно, что исследования автора оказались подхвачены в работе О.Айдогмуса, А.П.Гхоша, С.Гхоша и А.Ройтерштейна[78], где были введены раскрашенные максимальные ветвящиеся процессы. Их отличие от многотипных МВП заключается в том, что типы (цвета) частиц определяются уже после формирования поколения, случайным образом, причем тип влияет на дальнейшую плодовитость. Другим отличием от подхода автора стало рассмотрение только процессов, уходящих в бесконечность. На эту тему С.Гхошем была даже написана диссертация[79].

В заключение заметим, что настоящая диссертация не закрывает какие-то известные вопросы и проблемы или углубляет и уточняет ранее известные результаты, а скорее открывает целый ряд перспективных научных направлений.

Цель работы. Целью диссертационной работы является формулирование но-

[73] *Browne S., Coffman E.G., Gilbert E.N., Wright P.E.* Gated, exhaustive, parallel Service // Probab. Eng. Inf. Sci. 1992. V. 2. № 2. P. 217–239.

[74] *Knessl Ch., Tan X.* Heavy traffic asymptotics for a gated, infinite-server queue with uniform service times // SIAM J. Appl. Math. 1994. V. 54. № 6. P. 1768–1779.

[75] *Pinotsi D., Zazanis M. A.* Stability conditions for gated $M|G|\infty$ queues // Probab. Eng. Inf. Sci. 2004. V. 18. № 1. P. 103–110.

[76] *Balkema A.A., Resnick S.I.* Max-infinite divisibility // J. Appl. Probab., 1977. V. 14. № 2. P. 309–311.

[77] *Земплени А.* Проверка max-безграничной делимости // Теория вероятностей и ее применения, 1992. Т. 37. № 1. С. 173–175.

[78] *Aydogmus O., Ghosh A.P., Ghosh S., Roitershtein A.* Coloured maximal branching process // Теория вероятн. и ее примен. 2014. Т. 59. № 4. С. 790–800.

[79] *Ghosh S.* Topics in stochastic growth models. Iowa State University. 2013.

вых современных задач и понятий в стохастической теории экстремумов, получение основных результатов о поведении экстремумов систем случайных величин и максимальных ветвящихся процессов, доказательство соответствующих предельных и эргодических теорем.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные из них состоят в следующем:

1. Получено достаточное условие асимптотической эквивалентности максимумов в общей схеме максимумов сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с тяжелыми хвостами и продемонстрировано его применение к максимумам частичных сумм Эрдеша-Реньи, полей дробового шума и суммарных активностей в моделях информационных сетей. Для различных моделей получены достаточные условия в виде ограничений сверху на хвостовой индекс распределений слагаемых.

2. Доказаны новые предельные теоремы об экстремумах признаков частиц в ветвящихся процессах при отказе от классических предположений. Для бессмертных надкритических процессов получен и исследован широкий класс предельных распределений максимумов признаков частиц. Для различных ветвящихся процессов изучено влияние зависимости признаков частиц, связанной с их родством, на асимптотическое поведение максимумов. В случае нескольких признаков получены многомерные предельные распределения и изучены их копулы.

3. Введены два новых экстремальных индекса в схеме серий для систем зависимых случайных величин, взятых в случайном количестве, изучены их свойства, взаимосвязи и связь с классическим экстремальным индексом. Вычислены индексы для суммарных активностей в моделях информационных сетей, признаков частиц в ветвящихся процессах, а также для моделей с копулами и пороговых моделей.

4. Введены максимальные ветвящиеся процессы с одним и несколькими типами частиц (с произвольными неотрицательными значениями), представляющие собой экстремальные аналоги ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона и Иржины, доказаны эргодические и предельные теоремы для них, рассмотрены приложения в теории массового обслуживания.

Методы исследования. В работе используются классические и современные методы теории вероятностей, в том числе, теории случайных процессов, стохастической теории экстремумов, теории ветвящихся процессов, а также методы комбинаторики и математического анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Результаты и методы могут быть полезны в исследованиях сложных систем случайных величин, процессов и полей. Они могут быть интересны специалистам, работающим в МГУ имени М.В.Ломоносова, СПбГУ, КФУ, МИАН имени В.А.Стеклова, ИПУ РАН имени В.А.Трапезникова, ИППИ РАН имени А.А.Харкевича, ИМ СО РАН имени С.Л.Соболева, ЯГПУ имени К.Д.Ушинского и других высших учебных заведениях и научных центрах. Результаты диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на семинарах:

- Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (Москва, МГУ, руководитель — академик РАН профессор А.Н.Ширяев)

- Городской семинар по теории вероятностей и математической статистике (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН, руководитель — академик РАН профессор И.А.Ибрагимов)

- Статистика экстремальных событий (Москва, ИПУ РАН, руководитель — д.ф.-м.н., г.н.с. Н.М.Маркович)

а также на следующих конференциях:

- Международная конференция "Колмогоров и современная математика", посвященная 100-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова (Москва, 2003)

- Международная конференция "Теория вероятностей и ее приложения", посвященная 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко (Москва, 2012)

- VII Международная Петрозаводская конференция "Вероятностные методы в дискретной математике" (2008)

- VI Международный Санкт-Петербургский семинар по моделированию (2009)

- Международная конференция "Стохастический анализ и случайная динамика" (Львов, 2009)

- II, V, VI, IX Международные Колмогоровские чтения (Ярославль, 2004, 2007, 2008, 2011)

- IV, V, VI Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике (2003, 2004, 2005)

- VIII, X, XI Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам (2001, 2003, 2004)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 25 работ [1–25], из них 21 в журналах, входящих в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий. Все работы выполнены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка обозначений и списка литературы, насчитывающего 147 наименований. Полный объем диссертации составляет 227 страниц.

Основное содержание работы

Во введении приведен краткий исторический обзор по тематике работы, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, его научная новизна, методы исследования, теоретическая и практическая ценность, даны сведения об апробации работы, изложено основное содержание.

В главе 1 решены две неклассические задачи о максимумах сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с тяжелыми хвостами.

В разделе 1.1 изучены максимумы независимых случайных сумм, когда число сумм и число слагаемых в каждой из них растут. А именно, рассмотрены экстремумы вида

$$Y_{mn} = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}, \quad m, n \ge 1,$$

где X_{ij}, $i, j \ge 1$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины. Обозначим общую функцию распределения X_{ij} через F. Введем случайную величину X, имеющую то же распределение.

Предположим, что $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = 1$.

Заметим, что суммы $S_{in} = \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ асимптотически нормальны при $n \to \infty$; асимптотика же максимумов нормальных случайных величин известна. Получаем повторный предел

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{a_m \left(Y_{mn} n^{-1/2} - b_m\right) \le x\right\} = \exp\{-e^{-x}\}, \tag{1}$$

где $a_m = (2\ln m)^{1/2}$, $b_m = (2\ln m)^{1/2} - (2\ln m)^{-1/2} \ln(4\pi \ln m)^{1/2}$.

А что происходит, если m и n стремятся к бесконечности одновременно? На этот счет автором доказан ряд теорем, из которых наиболее интересна следующая.

Пусть $\bar{F}(u) \sim u^{-\alpha} L(u)$, $u \to \infty$, где $\alpha > 0$ и $L(u)$ — медленно меняющаяся функция. Введем числа c_n такие, что $n\bar{F}(c_n) \to 1$, $n \to \infty$. Тогда $c_n \sim n^{1/\alpha} L^*(n)$, $n \to \infty$, где $L^*(u)$ — медленно меняющаяся функция, зависящая от L.

Теорема 1.1.4. *Пусть $\alpha > 2$ и $\mathbf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$, $\delta > 0$, тогда:*

1) *если*

$$\limsup_{m,n\to\infty} \frac{\ln m}{\ln n} < \frac{\alpha}{2} - 1,$$

то верно

$$\mathbf{P}\left\{a_m \left(Y_{mn} n^{-1/2} - b_m\right) \le x\right\} \to \exp\{-e^{-x}\};$$

2) *если*

$$\liminf_{m,n\to\infty} \frac{\ln m}{\ln n} > \frac{\alpha}{2} - 1,$$

то верно

$$\mathbf{P}(Y_{mn}/c_{mn} \le x) \to \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad x > 0,$$

Таким образом, в зависимости от соотношения скоростей роста m, n и свойств распределений слагаемых могут возникать различные предельные законы (Гумбеля и Фреше).

В разделе 1.2. изложена общая схема максимумов сумм. А именно, рассматривается семейство проиндексированных независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, и случайный процесс, значениями которого являются конечные классы конечных множеств индексов. Случайные величины, чьи индексы вошли в одно множество, складываются, а затем из этих сумм берется максимум. При определенных условиях этот максимум растет асимптотически эквивалентно максимуму всех случайных величин с индексами по объединению множеств.

Пусть задан случайный процесс $\Upsilon = \{\Upsilon(t), t \in T\}$, значения которого — конечные классы конечных подмножеств $\mathbf{N}$.

Пусть задано семейство $\Xi = \{\xi_{i,t}, i \in \mathbf{N}, t \in T\}$ неотрицательных с.в., н.о.р. при любом $t \in T$.

Полагаем, что Υ и Ξ независимы.

Для любых $A \subset \mathbf{N}$, $t \in T$ обозначим максимум набора случайных величин $\{\xi_{i,t}, i \in A\}$ через $M_t(A)$, r-ый максимум (т.е. число, стоящее r-ым с конца в вариационном ряду) через $M_t^{(r)}$, сумму через $S_t(A)$.

Пусть $U(t) = \bigcup_{A\in\Upsilon(t)} A$.

Введем случайные процессы, порожденные Υ и Ξ:

$$\zeta(t) = \sup_{A\in\Upsilon(t)} S_t(A), \quad \kappa(t) = \sup_{A\in\Upsilon(t)} |A|, \quad \nu(t) = |U(t)|,$$
$$\mu_1(t) = M_t(U(t)), \quad \mu_r(t) = M_t^{(r)}(U(t)),$$

где через $|A|$ обозначается число элементов множества A.

Предполагается, что $\nu(t) < \infty$ п.н. при любом $t \in T$.

Пусть существует случайный процесс $\rho(t)$ со значениями в $\mathbf{Z}_+$, измеримый относительно Υ, такой, что $\rho(t) \geq 1$ при $\nu(t) \geq 1$, $\rho(t) \leq \nu(t)$ п.н. при всех $t \in T$.

Обозначим через $\pi(t)$ вероятность того, что для множества B, равновероятно выбранного среди всех подмножеств $U(t)$, состоящих из $\rho(t)$ элементов, имеет место $\sup_{A\in\Upsilon(t)} |A \cap B| > 1$.

Теорема 1.2.1. *Пусть выполнены условия:*

$$(\kappa(t) - 1)\mu_{\rho(t)}(t)/\mu_1(t) \xrightarrow{P} 0, \quad \pi(t) \to 0, \quad t \to \infty,$$

тогда верно

$$\zeta(t)/\mu_1(t) \xrightarrow{P} 1, \quad t \to \infty. \tag{2}$$

Применять теорему в общем виде бывает сложно, поэтому доказано также полезное следствие в случае тяжелых хвостов.

Пусть $T = \mathbf{N}$ и все случайные величины из Ξ имеют одинаковое распределение F, удовлетворяющее условиям

$$F(-0) = 0, \quad \bar{F}(x) \sim x^{-\alpha} L(x), \quad x \to \infty.$$

Следствие 1.2.3. *Пусть* $\nu(n) = n$, $\kappa(n) = O_p(n^\delta)$, $0 < \delta < 1$, $n \to \infty$, *и* $\pi(n) \to 0$ *при* $\rho(n) = [n^\gamma]$, $0 < \gamma < 1$, $n \to \infty$, *тогда при* $0 < \alpha < \gamma/\delta$ *верно* (2).

Пусть c_n такие, что $n\bar{F}(c_n) \to 1$, $n \to \infty$, тогда

$$\mathbf{P}(\zeta(n)/c_n \leq x) \to \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad x > 0.$$

Приведены примеры приложения теоремы 1.2.1 для больших скачков случайных блужданий (максимумов сумм Эрдеша-Реньи) и экстремумов полей дробового шума.

В разделе 1.3 представлены приложения общей схемы из раздела 1.2 для максимумов суммарной активности в информационных сетях, описываемых случайными графами и гиперграфами.

Задача об асимптотическом поведении максимумов суммарных активностей в информационных сетях поставлена автором следующим образом:

- сеть описывается случайным графом;
- узлы обладают индивидуальными информационными активностями (н.о.р.с.в. с правильно меняющимися хвостами распределений, с показателем $a > 0$);
- суммарная активность в узле — сумма его собственной и его соседей (входящих соседей), от которых он получает информацию;
- нас интересует максимум суммарной активности по сети.

Вопрос в том, когда максимум суммарной активности растет асимптотически как максимум индивидуальных активностей.

В качестве примера приведем модель 1 со случайными весами (раздел 1.3.3). Пусть w_i, $1 \le i \le n$ — независимые случайные величины, одинаково распределенные как $W \ge 0$ (не зависящие от индивидуальных активностей), и $\mathbf{E}W^\beta < \infty$, $\beta \ge 1$.

Обозначим $p_i = \varphi(w_i n^{-s/2})$, где $0 < s \le 1$, и для φ на $\mathbb{R}_+$ верно $0 \le \varphi(x) \le \min\{1, x\}$, $\varphi(x) \sim x$, $x \to 0$. Пусть при известных w_i, $1 \le i \le n$, каждая пара вершин i и j соединяется ребром с вероятностью $p_i p_j$ независимо от других пар. Применительно к социальным сетям веса могут отражать общительность пользователей.

Теорема 1.3.3.1. *В модели 1 верно* (2) *при* $\beta \ge 2$*, если*

$$a < \frac{2s-1}{2(1-(s-1/\beta)_+)}, \quad s > 1/2,$$

и при $1 \le \beta < 2$*, если*

$$a < \frac{(1+\beta/2)s-1}{2(1-(s-1/\beta)_+)}, \quad s > \frac{1}{1+\beta/2}.$$

В главе 2 получены новые результаты о максимумах признаков частиц в ветвящихся процессах при отказе от классических условий (принадлежности распределения признака области притяжения максимум-устойчивого закона либо независимости признаков в популяции).

В разделе 2.1 рассмотрены максимумы независимых признаков в бессмертных надкритических процессах с дискретным и непрерывным временем, для одного или нескольких признаков частицы. Получен обширный класс возможных предельных законов для максимумов в случае дискретного времени. Этот класс обобщает максимум-полуустойчивые распределения. В случае непрерывного времени новых законов не возникает. Во многомерном случае (нескольких признаков) изучена предельная зависимость максимумов, порождаемая как возможно исходной зависимостью признаков частицы, так и влиянием ветвящегося процесса.

Для краткости приведем лишь простейший одномерный случай с дискретным временем (раздел 2.1.1). Рассмотрим надкритический процесс Гальтона–Ватсона Z_n, $n \ge 0$, $Z_0 = 1$, с производящей функцией числа непосредственных потомков $f(s)$:

$$f(0) = 0, \quad f(s) < s, \quad \forall s \in (0, 1).$$

Каждая частица имеет одного или более потомков, так что процесс не вырождается (бессмертный).

Теорема 2.1.1.1. *Пусть для некоторых числовых последовательностей* $a_n > 0$, b_n *имеет место слабая сходимость*

$$\mathbf{P}(M_n \leq a_n x + b_n) \xrightarrow{w} \Psi(x), \quad n \to \infty,$$

к невырожденной ф.р. $\Psi(x)$. *Тогда* Ψ *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$\Psi(ax+b) = f(\Psi(x)), \tag{3}$$

для некоторых чисел $a > 0$, b.

Теорема 2.1.1.2. *Любая невырожденная ф.р.* Ψ, *удовлетворяющая функциональному уравнению* (3), *является предельной в указанной схеме для подходящих* f *и* F.

Введем обозначения $x_0 = \inf\{u : \Psi(u) > 0\}$, $x_\omega = \sup\{u : \Psi(u) < 1\}$.

Теорема 2.1.1.3. *Для невырожденных распределений* Ψ, *удовлетворяющих уравнению* (3), *возможны только следующие варианты:*

1) $0 < a < 1$, $x_0 = b/(1-a)$, $x_\omega = +\infty$;

2) $a = 1$, $b < 0$, $x_0 = -\infty$, $x_\omega = +\infty$;

3) $a > 1$, $x_0 = -\infty$, $x_\omega = b/(1-a)$.

Теорема 2.1.1.4. *Решение* $\Psi(x)$ *функционального уравнения* (3) *однозначно определяется его сужением на любой полуинтервал вида* $[c, (c-b)/a)$.

Следствие 2.1.1.1. *Для любого* $a > 0$ *и непрерывной справа неубывающей функции* $\psi(x)$ *на* $[c_1, c_2)$, *такой, что*

$$0 < f(\psi(c_2 - 0)) \leq \psi(c_1) < 1,$$

существует распределение Ψ, *удовлетворяющее* (3) *с заданным* a *и* $b = c_1 - ac_2$, *такое, что* $\Psi(x) = \psi(x)$ *на* $[c_1, c_2)$.

В разделе 2.2. рассмотрены максимумы зависимых признаков в различных процессах с дискретным временем. Предполагалось, что ветвящийся процесс влияет на признаки частиц только через определяемую им структуру зависимости признаков в популяции, а признаки частиц не влияют на ветвящийся процесс (тем самым исключен естественный отбор). При этом зависимость признаков пары частиц определяется дальностью их родства, т.е. сколько поколений назад они имеют ближайшего общего предка. Рассмотрены критические, околокритические и надкритические ветвящиеся процессы. В гауссовском случае найдены ограничения на корреляции, при которых максимумы растут асимптотически так же, как при независимых признаках. В случаях тяжелых хвостов и сестринской зависимости доказаны предельные теоремы, описывающие влияние зависимости признаков на асимптотическое поведение максимумов с помощью некоторого показателя, который может быть интерпретирован как экстремальный индекс (см. раздел 3.2).

В гауссовском случае (раздел 2.2.1) автор предполагает, что

- совместное распределение признаков частиц в поколении (при известном генеалогическом дереве поколения) является многомерным нормальным;
- частные распределения признаков — стандартные нормальные;

- коэффициент корреляции признаков пары частиц мажорируется (по модулю) величиной $0 \le r_k < 1$, если эти частицы имеют ближайшего общего предка k поколений назад.

Вопрос в том, когда максимумы растут асимптотически как в случае независимых признаков.

Отметим, что для стандартного нормального распределения Φ верно:

$$\Phi^s(a(s)x + b(s)) \to \exp\{-e^{-x}\}, \quad s \to \infty,$$
$$a(s) = (2\ln s)^{-1/2}, \quad b(s) = (2\ln s)^{1/2} - \tfrac{1}{2}(2\ln s)^{-1/2}(\ln\ln s + \ln 4\pi).$$

Предполагается, что дисперсия числа потомков $\sigma^2 < \infty$, $B = \sigma^2/2$.

Теорема 2.2.1.1. (для критического процесса) *Пусть* $\sup r_k = \delta < 1$ *и* $r_k \ln k \to 0$, $k \to \infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(M_n \le a(n)x + b(n) | Z_n > 0) \to \left(1 + Be^{-x}\right)^{-1}, \quad n \to \infty.$$

Для надкритического процесса со средним числом потомков $\mu > 1$ верно:

$$\frac{Z_n}{\mu^n} \xrightarrow{\text{п.н.}} W, \quad n \to \infty; \quad \mathbf{P}(W > 0) > 0.$$

Теорема 2.2.1.3. (для надкритического процесса) *Пусть* $\sup r_k = \delta < 1$ *и* $r_k = o(1/k)$, $k \to \infty$, *тогда*

$$\mathbf{P}(M_n \le a(\mu^n)x + b(\mu^n) | Z_n > 0) \to \mathbf{E}(\exp\{-e^{-x}W\} | W > 0), \quad n \to \infty.$$

В случае тяжелых хвостов (раздел 2.2.2) автором введена максимум-линейная модель формирования признаков и установлено влияние зависимости на предельное распределение максимумов.

Пусть $\kappa(i,n,m)$ — номер предка i-ой частицы n-го поколения в m-ом поколении, $0 < m < n$, $1 \le i \le Z_n$. Положим также $\kappa(i,n,n) = i$ и $\kappa(i,n,m) = 1$ при $m < 0$. Пусть задано распределение A на $\mathbf{R}_+$ с $\bar{A}(x) \sim x^{-\gamma}L(x)$, $x \to \infty$, $\gamma > 0$, и $v(s)$ — положительная функция такая, что $s\bar{A}(v(s)) \to 1$, $s \to \infty$.

Предположим, что признак i-ой частицы n-го поколения задан формулой

$$\xi_{n,i} = \bigvee_{k=0}^{\infty} a_k \eta_{n-k,\kappa(i,n,n-k)},$$

где $\eta_{n,i}$, $n \in \mathbf{Z}$, $i \ge 1$, н.о.р.с.в. с ф.р. A, и

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\gamma} = 1.$$

Тогда все признаки частиц имеют одинаковое распределение $F(x) = \prod_{k=0}^{\infty} A(x/a_k)$ с хвостом $\bar{F}(x) \sim \bar{A}(x)$, $x \to \infty$, а при $A(x) = \exp\{-(x/c)^{-\gamma}\}$, $x > 0$, $c > 0$ верно равенство $F = A$.

Пусть $Z(m,n)$ — число частиц ветвящегося процесса в момент $m \le n$, которые имеют непустое потомство в момент n. Процесс $Z(m,n), 0 \le m \le n$ называется редуцированным процессом.

Теорема 2.2.2.3. *Пусть для любого $K \geq 1$ верно*

$$((Z(n-k,n)/c_n)_{0\leq k\leq K}|Z_n > 0) \xrightarrow{d} \zeta(b_k)_{0\leq k\leq K}, \quad n \to \infty,$$

где ζ — положительная случайная величина, $b_k \geq 0$, $k \geq 0$, и $c_n > 0$, $n \geq 1$, — некоторые числовые последовательности, $c_n \to +\infty$, $n \to \infty$, и $u_n = xv(c_n)$, $n \geq 1$, $x > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n|Z_n > 0) \to \mathbf{E}\exp\{-\theta x^{-\gamma}\zeta\}, \quad n \to \infty,$$

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\gamma} b_k.$$

Разобраны примеры критических процессов (с конечной и бесконечной дисперсией числа потомков) и надкритических процессов.

В главе 3 введены два новых экстремальных индекса в схеме серий со случайными длинами, применимые к широкому классу систем случайных величин, взятых в случайном количестве. Показано, как с помощью экстремальных индексов можно интерпретировать результаты предыдущих глав, а также получены новые результаты для моделей с копулами и пороговых моделей. Тем самым сделан новый шаг в обобщении и развитии понятия экстремального индекса как средства описания влияния зависимости случайных величин на асимптотическое поведение их максимумов.

В разделе 3.1 даны определения и основные свойства экстремальных индексов.

Рассмотрим сначала классическое определение для стационарных в узком смысле последовательностей.

Определение A *Пусть ξ_n, $n \geq 1$, имеют распределение F и $M_n = \vee_{k=1}^{n}\xi_k$. Если для каждого $\tau > 0$ существует такая числовая последовательность $u_n(\tau)$, что $n\bar{F}(u_n(\tau)) \to \tau$ и $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(\tau)) \to e^{-\theta\tau}$, то θ называется экстремальным индексом.*

Интерпретации его в том, что максимумы n зависимых величин асимптотически растут как максимумы $[\theta n]$ независимых, а превышения высокого уровня образуют кластеры среднего размера $1/\theta$. Бывают любые значения $\theta \in [0,1]$.

Если взять максимумы $\hat{M}_n$ последовательности независимых случайных величин с тем же распределением F, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \leq u_n(\tau)) = e^{-\tau}$, откуда следует:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \leq u_n(\tau)) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \leq u_n(\tau))\right)^{\theta}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \leq u_n(\tau)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_{[\theta n]} \leq u_n(\tau)), \quad \theta > 0$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \leq u_n(\tau)) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \leq u_n(\tau))$.

Далее новое определение 1 обобщает свойство 1, определение 2 — свойство 2, а свойство 3, как выяснилось, в схеме серий может нарушаться.

Пусть задан набор случайных величин $\xi_{n,m}$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, с распределениями F_n, а также последовательность целочисленных случайных величин $\nu_n \xrightarrow{P} +\infty$, $n \to \infty$, и $M_n = \vee_{m=1}^{\nu_n}\xi_{n,m}$.

Определение 1. *Пусть для каждого $s \in (0,1)$ существует такая последовательность $u_n(s)$, что $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\nu_n} \to s$, и $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) \to \psi(s)$, $n \to \infty$. Тогда ψ назовем экстремальной функцией. Если $\psi(s) = s^{\theta}$, то θ назовем экстремальным индексом.*

В общем случае определим частичные индексы

$$\theta^+ = \sup_{s\in(0,1)} \log_s \psi(s), \quad \theta^- = \inf_{s\in(0,1)} \log_s \psi(s),$$

тогда $\theta^+ \ge \theta^-$ и $s^{\theta^+} \le \psi(s) \le s^{\theta^-}$, $s \in (0,1)$.

Индексы, как и ранее, принимают неотрицательные значения, однако ограничение сверху единицей снимается, по крайней мере, для θ^+.

Определение 2. *Пусть для каждого $s \in (0,1)$ существует такая последовательность $u_n(s)$, что $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\nu_n} \to s$, и $\mathbf{P}(M_n \le u_n(s)) - \mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n} \to 0$, $n \to \infty$, тогда θ назовем экстремальным индексом.*

Существование экстремального индекса по определению 2 означает, что экстремальная функция из определения 1 допускает представление:

$$\psi(s) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n}.$$

Доказан ряд свойств новых экстремальных индексов (теорема 3.1.1), связывающих их с классическим экстремальным индексом (по определению A) и между собой. Приведем простейшие из них (свойства 1–3 из семи).

Теорема 3.1.1. *Экстремальные индексы обладают следующими свойствами:*

1) *Пусть η_n, $n \ge 1$, — стационарная последовательность с экстремальным индексом θ по определению A. Положим $\xi_{n,m} = \eta_m$, $m \ge 1$, и пусть задана целочисленная последовательность $l_n \to +\infty$, тогда система $\{\xi_{n,m}; l_n\}$ имеет экстремальный индекс θ по определениям 1 и 2.*

2) *Пусть система $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$ имеет экстремальный индекс по одному из определений 1 и 2 (или экстремальную функцию), и задана последовательность функций $g_n(x)$, $n \ge 1$, непрерывных и строго возрастающих на множестве точек роста F_n. Положим $\tilde{\xi}_{n,m} = g_n(\xi_{n,m})$, тогда система $\{\tilde{\xi}_{n,m}; \nu_n\}$ имеет тот же экстремальный индекс (экстремальную функцию).*

3) *Пусть система $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$ имеет экстремальный индекс по одному из определений 1 и 2 и существует такая последовательность $c_n \to +\infty$, что $\nu_n/c_n \xrightarrow{P} 1$, $n \to \infty$, тогда система имеет тот же экстремальный индекс по другому определению.*

Возникает вопрос, зачем давать два определения, нельзя ли обойтись каким-то одним. Действительно, во многих случаях оба индекса эквивалентны: они существуют и равны между собой (теорема 3.1.1: свойства 1, 3, 6). Но бывает также, что обоих индексов не существует, а по определению 1 существует экстремальная функция и частичные индексы (примеры 3.3.2–3.3.4, 3.4.1–3.4.3); бывает, что существует индекс по определению 2, и не существует индекс по определению 1, а экстремальная функция и частичные индексы по-прежнему существуют (раздел 3.2: признаки частиц); наконец, бывает удивительная ситуация, когда оба индекса существуют, но принимают *различные* значения (пример 3.3.5). Таким образом, это действительно две разные характеристики системы, не сводящиеся к одной.

Для определенности терминологии, далее будем говорить об экстремальных индексах *системы* (случайных величин), обозначаемой через $\{\xi_{n,m}; \nu_n\}$.

Утверждения об экстремальных индексах системы представляют собой фактически утверждения о совместных распределениях случайных величин, поэтому их можно распространить и на условные совместные распределения.

Пусть каждая серия рассматривается при некотором условии A_n, где $\mathbf{P}(A_n) > 0$, $n \geq 1$, тогда будем говорить об *условной системе* $\{\xi_{n,m}; \nu_n | A_n\}$. Для нее можно аналогично сформулировать определения 1 и 2, заменив вероятности $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s))$ на условные вероятности $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)|A_n)$, а математические ожидания $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\nu_n}$ и $\mathbf{E}F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n}$ на условные математические ожидания $\mathbf{E}(F_n(u_n(s))^{\nu_n}|A_n)$ и $\mathbf{E}(F_n(u_n(s))^{\theta\nu_n}|A_n)$. При этом, конечно, предполагается, что условное одномерное распределение случайных величин в серии остается равным F_n (не зависит от A_n).

Таким образом, понятия экстремальных индексов и функции применимы также к условным системам случайных величин.

В разделе 3.2 показано, что некоторые результаты предыдущих глав можно интерпретировать в терминах новых экстремальных индексов. Например, в модели 1 со случайными весами при $s = 1$ (раздел 1.3.3) получаем, что система суммарных активностей имеет экстремальный индекс $\theta = 1/(1+(\mathbf{E}W)^2)$ по обоим определениям, а показатель θ в теореме 2.2.2.3 представляет собой экстремальный индекс условной системы признаков частиц (при условии невырождения $Z_n > 0$) по определению 2.

В разделе 3.3. изучены экстремальные индексы в моделях с копулами.

Определение. *Копулой (m-мерной) называется функция многомерного распределения на $[0,1]^m$ с равномерными частными распределениями. Копулой распределения F в $\mathbf{R}^m$ называется копула C, удовлетворяющая*

$$F(x_1, \ldots, x_m) = C(F_1(x_1), \ldots, F_m(x_m)),$$

где $F_1, \ldots, F_m$ — частные функции распределения.

Такое представление существует по теореме Скляра и единственно в случае непрерывных частных распределений.

Далее мы для простоты будем полагать, что $\nu_n = n$ (треугольная схема), $F_n(x) \equiv x$, $x \in [0,1]$, а случайные величины $\xi_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, связаны n-мерной копулой C_n. К равномерному распределению можно перейти от любого непрерывного в силу свойства 2 из теоремы 3.1.1.

Разобран ряд примеров. Доказаны теоремы для архимедовых копул. Напомним, что строго архимедовой называется копула вида

$$C_d(y_1, \ldots, y_d) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{d} \varphi(y_i)\right), \tag{4}$$

где φ — убывающая функция на $[0,1]$, называемая генератором, $\varphi(0) = +\infty$, $\varphi(1) = 0$. При $d = 2$ достаточно, чтобы эта функция была выпуклой. Если потребовать, чтобы функция φ^{-1} была вполне монотонной на $(0, +\infty)$, то формула (4) определяет копулу при любом $d \geq 2$. Далее будем считать это условие на φ выполненным.

С другой стороны, функция f является преобразованием Лапласа-Стилтьеса некоторого распределения тогда и только тогда, когда f вполне монотонна и $f(0) = 1$. Отсюда следует, что функция φ^{-1} должна быть преобразованием Лапласа-Стилтьеса некоторого распределения, причем в силу условия $\varphi(0) = +\infty$, а значит, и $\varphi^{-1}(+\infty) = 0$, это распределение не должно иметь атомов в нуле. Таким образом, существует некоторая случайная величина $\zeta > 0$ п.н. такая, что

$$\varphi^{-1}(u) = \mathbf{E}e^{-u\zeta}, \quad u \geq 0.$$

Введем обозначения

$$x_0 = \inf\{x > 0 : \mathbf{P}(\zeta \le x) > 0\}, \quad \mu = \mathbf{E}\zeta.$$

Будем для краткости обозначать $f(u) = \varphi^{-1}(u)$.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\mu < \infty$, тогда экстремальная функция $\psi(s) = f(-(\ln s)/\mu) = \mathbf{E}s^{\zeta/\mu}$, $\theta^+ = 1$, $\theta^- = x_0/\mu$.*

Теорема 3.3.2. *Пусть n-мерная копула C_n имеет генератор $\varphi_n(t) = \varphi(t)^{\beta_n}$, где $\beta_n \ge 1$, $(\beta_n - 1)\ln n \to \gamma \ge 0$, и для генератора $\varphi(t)$ верно $\mu < \infty$. Тогда $\psi(s) = f(-e^{-\gamma}(\ln s)/\mu)$, $\theta^- = (x_0/\mu)e^{-\gamma}$, $\theta^+ = e^{-\gamma}$.*

Приведем еще пару интересных примеров.

Пример 3.3.1. Копула Гумбеля-Хоугаарда имеет вид

$$C(y_1, \dots, y_d) = \exp\left\{-\left(\sum_{i=1}^{d}(-\ln y_i)^\alpha\right)^{1/\alpha}\right\}, \quad \alpha \ge 1.$$

При $\nu_n = n$, $(\alpha_n - 1)\ln n \to \gamma \ge 0$, $n \to \infty$, получаем $\theta = e^{-\gamma}$ (по обоим определениям).

Пример 3.3.5. При копуле Гумбеля-Хоугаарда с $(\alpha_n - 1)\ln n \to \gamma \ge 0$, $\nu_n/n \xrightarrow{d} \zeta$, $n \to \infty$, где ζ имеет устойчивое распределение с $\mathbf{E}e^{-u\zeta} = e^{-u^\beta}$, $0 < \beta < 1$, получаем $\theta = e^{-\gamma\beta}$ по определению 1, $\theta = e^{-\gamma}$ по определению 2.

В разделе 3.4 изучены экстремальные индексы для пороговых моделей.

Пусть длина серии ν_n представляет собой момент остановки относительно последовательности $\{\xi_{n,m},\ m \ge 1\}$, где $\xi_{n,m}$, $m \ge 1$ независимы и имеют равномерное распределение на $[0, 1]$, причем остановка происходит в момент превышения очередной случайной величиной некоторого порога ζ_n, не зависящего от $\{\xi_{n,m},\ m \ge 1\}$; $0 < \zeta_n < 1$ п.н.

Для числовых порогов $\zeta_n = a_n \to 1$, $n \to \infty$, получаем $\psi(s) = (2 - 1/s)_+$ по определению 1. В этом случае $\theta^- = 1$, $\theta^+ = +\infty$. Удивительно, что результат совершенно не зависит от выбора последовательности a_n, $n \ge 1$.

Доказана следующая теорема для некоторого класса случайных порогов.

Теорема 3.4.1. *Пусть $n(1-\zeta_n) \xrightarrow{L_1} \zeta > 0$, $n \to \infty$, $\mathbf{E}\zeta = 1$. Тогда $\psi(s) = g(f^{-1}(s))$, где $f(t) = \mathbf{E}(1 + t/\zeta)^{-1}$ и $g(t) = \mathbf{E}(\zeta - t)_+$.*

Примеры показывают большое разнообразие поведения экстремальных функций в этом случае.

В главе 4 изучены общие максимальные ветвящиеся процессы (МВП) с одним типом частиц. Такие процессы представляют собой экстремальные аналоги ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона (в целочисленном случае) и процессов Иржины (для произвольных неотрицательных значений).

В разделе 4.1 даны определения и доказаны основные свойства МВП.

Первоначально[14] процессы определялись стохастически рекуррентной формулой

$$Z_{n+1} = \bigvee_{m=1}^{Z_n} \xi_{m,n},$$

где $\xi_{m,n}$, $m \ge 1$, $n \ge 0$, — независимые случайные величины с общим распределением F на $\mathbf{Z}_+$. Результат взятия максимума “ноль раз” (при $Z_n = 0$) равен нулю.

Автором они были обобщены с $\mathbf{Z}_+$ на произвольные множества $T \subset \mathbf{R}_+$ с помощью формулы переходных вероятностей

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} \le y | Z_n = x) = F^x(y), \quad x, y \in T, \tag{5}$$

где F сосредоточено на T. Отсюда следует также конструктивное представление:

$$Z_{n+1} = \left\{ \begin{array}{ll} F^{-1}(U_n^{1/Z_n}), & Z_n > 0 \\ 0, & Z_n = 0 \end{array} \right. , \quad n \ge 0,$$

где $F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \ge y\}$ и U_n, $n \ge 1$, — независимые равномерно распределенные на $(0,1)$ с.в.

Доказаны различные свойства МВП (преобразование подобия, ассоциированность, монотонность по параметрам и др.) и следующая эргодическая теорема.

Теорема 4.1.1. *Если для* МВП(T), $T \subset (0, +\infty)$, *выполнено*

$$\limsup_{x \to +\infty} x(1 - F(x)) < e^{-\gamma}, \quad \liminf_{x \to 0} x(-\ln F(x)) > e^{-\gamma},$$

где $\gamma = 0,577...$ *— константа Эйлера, то процесс* Z_n *эргодический.*

Возможность эргодичности является важным отличием МВП от процессов Гальтона-Ватсона и Иржины, которые с вероятностью единица либо вырождаются, либо уходят на бесконечность. Поэтому далее автором изучались эргодические МВП в плане исследования их стационарных распределений.

В разделе 4.2 доказаны предельные теоремы для стационарных распределений для некоторых семейств распределений числа потомков, когда это число стохастически стремится к бесконечности (семейства на растущих отрезках, степенные семейства с легкими и тяжелыми хвостами). Для МВП с функцией распределения числа потомков $F^{(\lambda)}$ стационарное распределение обозначаем через $\Psi^{(\lambda)}$, а случайную величину с таким распределением через $\tilde{Z}^{(\lambda)}$. Нас интересуют пределы при $\lambda \to \infty$.

Для краткости, приведем здесь лишь случай тяжелых хвостов, в котором возникает новый интересный класс предельных распределений.

Пусть задано степенное семейство распределений $F^{(\lambda)}(x) = F(x)^\lambda$, где распределение F сосредоточено на $(0, +\infty)$ и имеет степенной хвост, а следовательно, принадлежит области притяжения предельного закона Фреше для максимумов.

Введем сначала трехпараметрическое семейство распределений Фреше

$$\Phi_{\alpha,b,c}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \exp\{-c(x-b)^{-\alpha}\}, & x > b; \\ 0, & x \le b, \end{array} \right.$$

где $\alpha, c > 0$.

Обозначим $F_1 \succ F_2$, если $\bar{F}_1(x) \ge \bar{F}_2(x)$ для всех x.

Согласно теореме 4.1.1, любой МВП с $F = \Phi_{\alpha,b,c}$ при $\alpha > 1$, $b \ge 0$, $c > 0$ эргодический. Его стационарное распределение обозначим через $\Psi_{\alpha,b,c}$.

Теорема 4.2.3.1. *Пусть существуют такие числа* $\alpha > 1$, $c, c_1 > 0$, *что* $F \succ \Phi_{\alpha,0,c_1}$ *и* $\bar{F}(x) \sim cx^{-\alpha}$, $x \to \infty$. *Тогда*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Psi^{(\lambda)}\left(x\lambda^{1/(\alpha-1)}\right) = \Psi_{\alpha,0,c}(x).$$

Заметим, что рекуррентная случайная последовательность

$$Z_{n+1} = Z_n^{1/\alpha}\xi_{n+1},$$

где ξ_n, $n \geq 0$, независимы и имеют распределение $\Phi_{\alpha,0,1}$, удовлетворяет (5) с $F = \Phi_{\alpha,0,1}$. Отсюда следует, что случайная величина $\tilde{Z}$, заданная бесконечным произведением

$$\tilde{Z} = \prod_{n=0}^{\infty} \xi_n^{\alpha^{-n}}$$

(сходящимся при $\alpha > 1$ почти наверное), будет иметь распределение $\Psi_{\alpha,0,1}$.

В разделе 4.3 рассматриваются приложения МВП к вентильным бесконечнолинейным системам.

Напомним, что вентильными бесконечнолинейными системами массового обслуживания называют системы с бесконечным числом приборов, в которых доступ заявок к обслуживанию регулируется вентилем. Предполагается, что вентиль открыт только в том случае, когда все приборы свободны. Заявки поступают в очередь с бесконечным числом мест ожидания, а обслуживание происходит по стадиям. В начале стадии, когда вентиль открывается, все заявки из очереди мгновенно получают доступ к приборам и далее обслуживаются параллельно и независимо, до полного освобождения всех приборов. В момент освобождения всех приборов вентиль вновь открывается для новой партии заявок (пришедших за это время) и следующей стадии. Если очередь пуста, система ждет поступления заявки.

Как отмечено в разделе 4.1, поведение вентильных бесконечнолинейных систем массового обслуживания на периоде занятости может быть описано максимальными ветвящимся процессами. В этом можно увидеть аналогию с описанием однолинейной системы на периоде занятости ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона. Для полного описания работы системы необходимо рассмотреть максимальные ветвящиеся процессы с иммиграцией в момент обнуления (специального вида), для которых доказаны предельные теоремы, аналогичные доказанным в разделе 4.2.

В разделе 4.4 изучена асимптотика хвостов стационарных распределений МВП, в случаях конечного и бесконечного среднего числа потомков.

Для краткости, приведем лишь случай конечного среднего. Обозначим математические ожидания распределений F и Ψ через μ_F и μ_Ψ соответственно. Оба распределения имеют одну крайнюю правую точку x_ω. Введем функцию

$$\varphi(x) = \mathbf{E}(Z_{n+1}|Z_n = x) = \int_0^{+\infty} (1 - F(u)^x)\, du,$$

которая определена при $\mu_F < \infty$ для всех $x > 0$, и $\varphi(0) = x_0$.

Лемма 4.4.1. *Положительное решение μ^* уравнения $\varphi(x) = x$ существует и единственно; числовая последовательность $v_{n+1} = \varphi(v_n)$ сходится к нему при любом начальном условии $v_0 > 0$.*

Теорема 4.4.1. *$\mu_\Psi < \infty$ тогда и только тогда, когда $\mu_F < \infty$. При этом $\mu_\Psi \leq \mu^*$ и верно*

$$\bar{\Psi}(x) \sim \mu_\Psi \bar{F}(x), \quad x \to x_\omega - 0.$$

В главе 5 изучены общие максимальные ветвящиеся процессы (МВП) с несколькими типами частиц.

В разделе 5.1 даны определения и получены основные свойства.

Пусть заданы случайные векторы $\xi^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_d^{(k)})$, $1 \leq k \leq d$, со значениями в $\mathbf{Z}_+^d$. Определим МПВ с d типами частиц как многомерную цепь Маркова $Z(n) =$

$(Z_1(n), \ldots, Z_d(n))$, $n \geq 0$, со значениями в $\mathbf{Z}_+^d$, заданную следующей рекуррентной формулой:

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^{d} \bigvee_{i=1}^{Z_j(n-1)} \xi_{i,k}^{(j)}(n), \tag{6}$$

где случайные векторы $\xi_i^{(j)}(n) = (\xi_{i,1}^{(j)}(n), \ldots, \xi_{i,d}^{(j)}(n))$, $n \geq 1$, независимы и $\xi_i^{(j)}(n) \stackrel{d}{=} \xi^{(j)}$, $1 \leq j \leq d$. Имеется в виду, что i-ая частица j-го типа $(n-1)$-го поколения порождает $\xi_{i,k}^{(j)}(n)$ частиц k-го типа в n-ом поколении.

Содержательный смысл заключается в следующем: каждая частица может порождать потомков разных типов, распределение численностей которых зависит от типа частицы. Далее по численностям потомков каждого типа берется максимум. Таким образом, предполагается, что частицы разных типов не взаимодействуют между собой.

Обозначим функции многомерного распределения векторов $\xi^{(k)}$ через F_k, $1 \leq k \leq d$, тогда из (6) следует формула для переходных вероятностей:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Z_1(n) \leq j_1, \ldots, Z_d(n) \leq j_d | Z_1(n-1) = i_1, \ldots, Z_d(n-1) = i_d) = \\ &= F_1^{i_1}(j_1, \ldots, j_d) \ldots F_d^{i_d}(j_1, \ldots, j_d), \quad i_k, j_k \in \mathbf{Z}_+. \end{aligned} \tag{7}$$

Вводя произвольные распределения F_k векторов $\xi^{(k)}$ уже не в $\mathbf{Z}_+^d$, а в $\mathbf{R}_+^d$, обобщаем формулу (7) до следующей:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Z_1(n) \leq y_1, \ldots, Z_d(n) \leq y_d | Z_1(n-1) = x_1, \ldots, Z_d(n-1) = x_d) = \\ &= F_1^{x_1}(y_1, \ldots, y_d) \ldots F_d^{x_d}(y_1, \ldots, y_d), \quad x_k, y_k \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \tag{8}$$

Естественным представляется определить МВП с d типами частиц и значениями в $\mathbf{R}_+^d$ как многомерную цепь Маркова с помощью (8).

Однако здесь возникает одна проблема, связанная с многомерностью. В одномерном случае, если $F(y)$ — функция распределения, то $F^s(y)$ — тоже функция распределения, при любом $s > 0$. В многомерном случае, если $F(y_1, \ldots y_d)$ — функция распределения, то $F^s(y_1, \ldots y_d)$ совсем не обязательно является таковой.

Решением этой проблемы является либо введение набора дополнительных условий на области возможных значений векторов чисел потомков, либо рассмотрение максимум-безгранично делимых распределений (функции распределения которых в любой положительной степени остается функцией распределения). В разделе 5.1 эргодическая теорема доказана для $d = 2$ при дополнительных условиях, а в разделе 5.3 для $d \geq 2$ для максимум-безгранично делимых распределений.

В разделе 5.2 доказаны предельные теоремы для стационарных распределений МВП с несколькими типами частиц, обобщающие соответствующие теоремы раздела 4.2 на многомерный случай.

В разделе 5.3 изучены МВП с несколькими типами частиц, у которых распределения векторов чисел потомков имеют копулы экстремальных значений. Тогда они заведомо являются максимум-безгранично делимыми, а процессы оказываются более удобны для исследования.

Напомним, что максимум-устойчивые копулы (копулы экстремальных значений) удовлетворяют условию:

$$C^s(u_1, \ldots, u_d) = C(u_1^s, \ldots u_d^s), \quad \forall s > 0.$$

При этих условиях удается доказать ряд свойств и эргодическую теорему.

Пусть распределения векторов $\xi^{(k)}$ имеют носители $T_k \subset \mathbf{R}_+^d$. Обозначим через $T_{k,l}$ проекции T_k на ось Ox_l. Тогда множеством возможных значений компоненты $Z_k(n)$ будет $T_k^* = \bigcup_{j=1}^d T_{j,k} \subset \mathbf{R}_+$. Предположим, что выполнено условие

$$\bigwedge_{k=1}^{d} \inf T_k^* \geq x_0 > 0. \tag{9}$$

За множество состояний цепи Маркова $Z(n)$ можно принять

$$S = \left\{ \bigvee_{k=1}^{d} x^{(k)} : x^{(k)} \in T_k, 1 \leq k \leq d \right\},$$

поскольку при любом $Z(0) \in \mathbf{R}_+^d \backslash \{0\}$ получаем $Z(n) \in S$ для всех $n \geq 2$ п.н. Множество S является носителем условного распределения $Z(n)$ при условии $Z(n-1) = x$ для любого $x \in (0, +\infty)^d$.

Будем предполагать, что S состоит более чем из одной точки (в противном случае стационарное распределение сосредоточено в этой точке и эргодичность тривиальна).

Обозначим $x^0 = (x_0, \ldots, x_0)$. Предположим также, что существует точка $a = (a_1, \ldots, a_d)$ такая, что для множеств $A = [a_1, +\infty) \times \cdots \times [a_d, +\infty)$ и $A^* = (0, a_1] \times \cdots \times (0, a_d]$ верно

$$\mathbf{P}(Z(n) \in A | Z(n-1) = x^0) > 0, \quad \mathbf{P}(Z(n) \in A^* | Z(n-1) = x^0) > 0. \tag{10}$$

Введем норму в $\mathbf{R}^d$: $\|(x_1, \ldots, x_d)\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$.

Для случайных векторов $\xi^{(k)}$ с распределениями F_k определим характеристики

$$\rho_k = \limsup_{u \to \infty} u \mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| > u), \quad 1 \leq k \leq d.$$

Теорема 5.3.1. *Если выполнены условия* (9), (10) *и* $\sum_{k=1}^d \rho_k < e^{-\gamma}$, *то процесс* $Z(n)$ *эргодический.*

Далее, теорема 5.3.2 обобщает теорему 4.2.3.1 на многомерный случай.

В заключении излагаются итоги выполненного исследования, рекомендации по использованию полученных результатов, перспективы дальнейшей разработки темы.

В диссертации получены новые результаты о максимумах случайных сумм, доказаны предельные теоремы для экстремумов признаков частиц в ветвящихся процессах, введены и изучены новые экстремальные индексы в схеме серий, развита теория максимальных ветвящихся процессов с одним и несколькими типами частиц.

Хотя диссертация носит в целом теоретический характер, в ней также уделено большое внимание возможным приложениям в информатике, биологии и массовом обслуживании.

Возможно дальнейшее уточнение результатов в схемах максимумов сумм случайных величин и их распространение на более широкий класс объектов, в том числе применительно к различным явлениям в природе, технике и обществе.

Большой интерес представляет изучение максимумов признаков частиц в более сложных моделях ветвящихся процессов и формирования признаков, в том числе, для нескольких признаков частицы. В современной теории вероятностей активно изучаются ветвящиеся процессы в случайной среде, ветвящиеся случайные блуждания и др. Поэтому в русле дальнейшего построения параллелей между теорией суммирования и теорией экстремумов можно изучать как максимумы признаков частиц в подобных процессах, так и новые экстремальные аналоги самих процессов.

Математический аппарат экстремальных индексов в схеме серий уже позволил автору открыть и изучить некоторые удивительные явления, не наблюдавшиеся в классической теории экстремальных индексов случайных последовательностей, и, по-видимому, сулит еще много новых открытий. Кроме того, этот аппарат позволяет единым образом описать и упорядочить результаты, которые до этого выглядели разрозненными и не связанными между собой (в том числе, и других авторов).

Автор благодарен научному консультанту доктору физико-математических наук профессору Владимиру Ильичу Питербаргу за полезные обсуждения и поддержку.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из Перечня ВАК:

[1] *Лебедев А.В.* Предельные теоремы о максимумах независимых случайных сумм // Теория вероятностей и ее применения, 1999. Т. 44. № 3. С. 631–633.

[2] *Лебедев А.В.* Экстремумы полей дробового шума // Фундам. и прикл. матем. 2001. Т.7. № 4. С. 1081–1090.

[3] *Лебедев А.В.* Обобщенные максимальные ветвящиеся процессы на ограниченных множествах // Вестник МГУ. Сер.1. Математика. Механика. 2002. № 6. С. 55–57.

[4] *Лебедев А.В.* Двойной показательный закон для максимальных ветвящихся процессов // Дискретная математика, 2002, Т. 14. № 3. С. 143–148.

[5] *Лебедев А.В.* Максимумы субэкспоненциальных полей дробового шума с конечным радиусом влияния // Математические заметки, 2003. Т. 73. № 2. С. 258–262.

[6] *Лебедев А.В.* Вентильная бесконечнолинейная система с неограниченными временами обслуживания и большой загрузкой // Проблемы передачи информации, 2003, Т. 39. № 3. С. 87–94.

[7] *Лебедев А.В.* Вентильная бесконечнолинейная система с большой загрузкой и степенным хвостом // Проблемы передачи информации, 2004. Т. 40. № 3. С. 62–68.

[8] *Лебедев А.В.* Максимумы независимых сумм в случае тяжелых хвостов // Теория вероятностей и ее применения, 2004. Т. 49. № 4. С. 791–794.

[9] *Лебедев А.В.* Обобщенные максимальные ветвящиеся процессы в случае степенных хвостов // Вестник МГУ. Сер.1. Математика. Механика. 2005. № 2. С. 47–49.

[10] *Лебедев А.В.* Общая схема максимумов сумм независимых случайных величин и ее приложения // Математические заметки, 2005. Т. 77. № 4. С. 544–550.

[11] *Лебедев А.В.* Максимальные ветвящиеся процессы с неотрицательными значениями // Теория вероятностей и ее применения, 2005. Т. 50. № 3. С. 564–570.

[12] *Лебедев А.В.* Максимумы активности в случайных сетях в случае тяжелых хвостов // Проблемы передачи информации, 2008. Т. 44. № 2. С. 96–100.

[13] *Lebedev A.V.* Maxima of random particles scores in Markov branching processes with continuous time // Extremes, 2008. V. 11. № 2. P. 203–216.

[14] *Лебедев А.В.* Максимумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 5. С. 3–6.

[15] *Лебедев А.В.* Асимптотика хвостов стационарных распределений максимальных ветвящихся процессов // Теория вероятностей и ее применения, 2009. Т. 54. № 4. С. 515–520.

[16] *Лебедев А.В.* Асимптотическое поведение экстремумов случайных признаков частиц в ветвящихся процессах с наследственностью // Ярославский педагогический вестник. Сер. Физико-математические и естественные науки, 2010. № 1. С. 7–14.

[17] *Лебедев А.В.* Максимумы активности в безмасштабных случайных сетях с тяжелыми хвостами / Информатика и ее применения, 2011. Т. 5, № 4. С. 13–16.

[18] *Лебедев А.В.* Максимальные ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика, 2012. №3. С. 8–13.

[19] *Лебедев А.В.* Многомерные экстремумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах // Теория вероятностей и ее применения, 2012. Т. 57. № 4. С. 788–794.

[20] *Лебедев А.В.* Максимумы активности в некоторых моделях информационных сетей со случайными весами и тяжелыми хвостами // Проблемы передачи информации, 2015. Т. 51. № 1. С. 72–81.

[21] *Лебедев А.В.* Экстремальные индексы в схеме серий и их приложения // Информатика и ее применения, 2015. Т. 9. № 3. С. 39–54.

Статьи в других изданиях:

[22] *Лебедев А.В.* Максимальные ветвящиеся процессы // Современные проблемы математики и механики, 2009. Т. 4. № 1. С. 93–106.

[23] *Лебедев А.В.* Предельные теоремы для стационарных распределений максимальных ветвящихся процессов с двумя типами частиц // Современные проблемы математики и механики, 2011. Т. 7. № 1. С. 29–38.

[24] *Лебедев А.В.* Многотипные максимальные ветвящиеся процессы с копулами экстремальных значений // Современные проблемы математики и механики, 2011. Т. 7. № 1. С. 39–49.

[25] *Лебедев А.В.* Экстремумы зависимых признаков частиц в ветвящихся процессах // Современные проблемы математики и механики. 2015. Т. 10. № 3. С. 121–135.