

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА  
на диссертацию Лебедева Алексея Викторовича  
«Неклассические задачи стохастической теории экстремумов»,  
представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук  
по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Стохастическая теория экстремумов занимается изучением максимумов и минимумов систем случайных величин. Фундаментальной в этой области является работа Б.В.Гнеденко (1943), где была доказана знаменитая теорема об экстремальных типах. Согласно этой теореме, если для максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин существует невырожденное предельное распределение при линейной нормировке, то оно относится к одному из трех экстремальных типов. В качестве предшественников Б.В.Гнеденко в этой области можно упомянуть М.Фреше (1927), Р.Фишера и Л.Типпетта (1928), Р. фон Мизеса (1936).

Классические монографии по стохастической теории экстремумов принадлежат Я.И.Галамбошу (1984) и М.Лидбеттеру, Г.Линдгрону, Х.Ротсену (1989), более современные книги П.Эмбрехтсу, К.Клюмпельберг, Т.Микошу (2003), Л. де Хаану и А.Феррейре (2006).

В качестве ведущих современных отечественных специалистов в этой области назовем В.И.Питербарга, В.Б.Невзорова, С.Ю.Новака, Н.М.Маркович, А.В.Степанова.

Отметим здесь монографию В.И.Питербарга (1996) по асимптотическим методам в теории гауссовских процессов и полей и учебник В.Б.Невзорова (2000) по теории рекордов.

Классические задачи стохастической теории экстремумов относятся к изучению экстремумов случайных процессов и полей. Под неклассическими задачами этой теории, которым посвящена данная диссертация, автор, по-видимому, понимает задачи, относящиеся к изучению экстремумов на более сложных, в том числе стохастических структурах, в схеме серий, а также к исследованию экстремальных аналогов классических случайных процессов.

Представленная диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения.

Во введении приведен краткий исторический обзор по тематике работы, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, его научная новизна, методы исследования, теоретическая и практическая ценность, даны сведения об апробации работы, изложено основное содержание.

В первой главе получено достаточное условие асимптотической эквивалентности максимумов в общей схеме максимумов сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с тяжелыми хвостами и продемонстрировано его применение к максимумам частичных сумм Эрдеша-Реньи, полей дробового шума и максимумам суммарных активностей в моделях информационных сетей, описываемых случайными графами и гиперграфами. Для различных моделей получены достаточные условия в виде ограничений сверху на хвостовой индекс распределений слагаемых.

Заметим, что поведение экстремумов независимых случайных сумм, где число сумм и число слагаемых в каждой сумме росли одновременно, рассматривалось еще в работе Г.И.Ивченко (1973), где предполагалось, что общее распределение слагаемых удовлетворяет двустороннему условию Крамера. Однако достойного развития эти исследования в то время не получили.

Диссертантом была рассмотрена аналогичная задача в некрамеровском случае, при наличии тяжелых хвостов распределений, а затем проведено обобщение на случай, когда суммы могут иметь случайное число слагаемых и быть зависимы за счет общих слагаемых. Такая ситуация часто возникает при суммировании по случайным графам и гиперграфам.

Особое внимание уделено автором моделям активности в информационных сетях (в том числе, социальных), что делает работу весьма актуальной. Описанию сетей с помощью современных моделей случайных графов посвящена обширная литература, однако задача исследования максимумов активности является новой.

Во второй главе доказаны новые предельные теоремы об экстремумах признаков частиц в ветвящихся процессах при отказе от классических предположений. Для бессмертных надкритических процессов получен и исследован широкий класс предельных распределений максимумов признаков частиц. Для различных ветвящихся процессов изучено влияние зависимости признаков частиц, связанной с их родством, на асимптотическое поведение максимумов. В случае нескольких признаков получены многомерные предельные распределения и изучены их копулы.

Следует отметить, что максимумы признаков частиц в ветвящихся процессах ранее изучались в работах Б.Арнольда и Дж.Вилласенора (1996), А.Пейкса (1998), Дж.Янева (2007) и др. Однако обычно предполагалось, что признаки частиц независимы и их распределения принадлежат области притяжения одного из экстремальных типов. Автор показал, что при отказе от последнего предположения возникает новый класс предельных распределений, которые можно рассматривать как обобщения максимум-полуустойчивых распределений, ранее введенных И.В.Гриневиц и Е.Панчевой (1992).

Дальнейшее изучение автором различных моделей с зависимыми признаками частиц, где зависимость связана с их родством (сколько поколений назад они имеют общих предков), представляется вполне естественным в приложении к живым организмам (микробам, растениям, животным, людям). Отметим, что в свое время модель линейной регрессии была введена Ф.Гальтоном как раз для описания зависимости роста детей и родителей.

В третьей главе введены два новых экстремальных индекса в схеме серий для систем зависимых случайных величин, взятых в случайном количестве, изучены их свойства и взаимосвязь с классическим экстремальным индексом. Вычислены индексы для суммарных активностей в моделях информационных сетей, признаков частиц в ветвящихся процессах, а также для моделей с копулами и пороговых моделей.

Исследование экстремального индекса восходит к работам Дж.Л.О'Брайена 1970-х годов. Классическое определение экстремального индекса стационарной в узком смысле случайной последовательности можно найти в упомянутой выше монографии М.Лидбеттера и др. Существует множество работ, посвященных вычислению индекса для различных случайных последовательностей, а также его статистическому оцениванию по реальным наблюдениям. Г.Чои (2002) ввел понятие экстремального индекса стационарного случайного поля на многомерной целочисленной решетке, затем исследования в этом направлении были продолжены в работах Х.Феррейры и Л.Перейры (2008, 2009).

Однако всего этого оказывается недостаточно для изучения поведения экстремумов на более сложных, нерегулярных и стохастических структурах, описывающих различные природные и технические системы (в том числе, сеть Интернет).

В этой связи диссертант ввел принципиально новые экстремальные индексы в схеме серий, изучил их свойства и обнаружил некоторые удивительные явления, невозможные для классического экстремального индекса (например, частичные индексы могут быть больше единицы). Данный подход открывает широкие перспективы для дальнейших исследований, в том числе с приложениями в информатике и биологии.

В четвертой главе введены максимальные ветвящиеся процессы с одним типом частиц и произвольными неотрицательными значениями, представляющие собой экстремальные аналоги классических ветвящихся процессов, доказаны эргодические и предельные теоремы для них, рассмотрены возможные приложения.

Следует отметить, что максимальные ветвящиеся процессы были введены еще в работах Дж.Ламперти (1970, 1972), однако затем оказались практически забыты. Речь идет об экстремальных аналогах классических процессов Гальтона-Ватсона, в которых при вычислении численности поколения сумма чисел потомков частиц заменяется на максимум. Можно сказать, что в каждом поколении выживают потомки только одной частицы, у которой их больше всего.

Исследования максимальных ветвящихся процессов с одним типом частиц были возобновлены с 2001 года диссертантом, который обобщил такие процессы, допустив вместо

целочисленных значений произвольные неотрицательные, и далее развил в ряде работ целую теорию указанных процессов, представляющую как самостоятельный интерес, так и в приложении к некоторым системам массового обслуживания.

В пятой главе введены максимальные ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц и для них получены аналогичные результаты.

Данные процессы были введены автором в 2011 году как естественное обобщение ранее изучавшихся им максимальных ветвящихся процессов с одним типом частиц. Каждая частица может иметь потомков нескольких типов. Далее для определения числа частиц определенного типа берется максимум из чисел потомков этого типа по всем частицам предыдущего поколения.

Недавно это направление оказалось подхвачено в работе О.Айдогмуса, А.П.Гхоша, С.Гхоша и А.Ройтерштейна (2014), которые ввели и исследовали более простую модель «раскрашенных» максимальных ветвящихся процессов, где тип (цвет) частицы выбирается случайно уже после формирования поколения.

В заключении излагаются итоги выполненного исследования, рекомендации по использованию полученных результатов, перспективы дальнейшей разработки темы.

Несмотря на теоретический характер диссертации, в ней уделено большое внимание возможным приложениям в информатике, биологии и массовом обслуживании.

Диссертантом отмечена также возможность дальнейшего уточнения результатов в схемах максимумов сумм случайных величин и их распространение на более широкий класс объектов, в том числе применительно к различным явлениям в природе, технике и обществе.

Большой интерес представляет изучение максимумов признаков частиц в более сложных моделях, для нескольких признаков частицы. В современной теории вероятностей активно изучаются ветвящиеся процессы в случайной среде, ветвящиеся случайные блуждания и др. Диссертант надеется также на дальнейшие результаты в этом направлении.

Математический аппарат экстремальных индексов в схеме серий уже позволил автору открыть некоторые явления, не наблюдавшиеся в классической теории экстремальных индексов стационарных случайных последовательностей, и открывает широкие перспективы на будущее. Кроме того, в ряде случаев этот аппарат позволяет единым образом описать и упорядочить результаты, которые ранее выглядели разрозненными и не связанными между собой.

По диссертации имеются следующие замечания общего характера:

1. Многие утверждения доказываются довольно кратко. Тем не менее, следует отметить заслуги автора в постановке неклассических задач и большую научную ценность полученных результатов.

2. В диссертации много обсуждаются возможные приложения, теоретические результаты проиллюстрированы многочисленными примерами, графиками и компьютерным моделированием. Все это не вполне характерно для диссертации по фундаментальной математике, но делает изложение материала более понятным и увлекательным.

3. В главе 1 теорема 1.2.1 в весьма общей формулировке дает только достаточные условия асимптотической эквивалентности максимумов, а затем используется для вывода достаточных условий в рамках более конкретных задач. Было бы неплохо получить также необходимые условия, хотя бы для важных частных случаев.

4. Автору не удалось выработать единую систему обозначений. Многие обозначения зависят от раздела. Однако эта проблема решается введением списка обозначений в конце диссертации с необходимыми разъяснениями и соответствующими ссылками.

5. Автор признает в заключении, что некоторые вопросы пока остаются открытыми. Так, в главе 3 осталось неясным, возможно ли получить точный экстремальный индекс больше единицы, в главе 4 не рассмотрены максимальные ветвящиеся процессы в случайной среде и т.д. Тем не менее, следует признать, что в диссертации заложен прочный фундамент для научных исследований, и пожелать автору дальнейших успехов в этих направлениях.

Указанные замечания не влияют на общую высокую оценку диссертации. Следует отметить ее актуальность, научную новизну и важный вклад в развитие стохастической теории экстремумов.

Научные результаты диссертации, выносимые на защиту, получены лично автором, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств. Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Основное содержание диссертации опубликовано в 25 научных статьях, из них 21 в журналах, входящих в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий. Работ в соавторстве нет.

Основные результаты диссертации были представлены на крупных международных конференциях и ведущих вероятностных семинарах страны.

Автореферат верно отражает содержание диссертации.

Диссертация может использоваться в учебном процессе в рамках специальных курсов для студентов и аспирантов вузов.

Диссертация является законченной научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в области теории вероятностей и математической статистики, и удовлетворяет требованиям "Положения о присуждении ученых степеней", предъявляемым к диссертации на соискание степени доктора наук.

С учетом вышеизложенного, считаю, что Лебедев Алексей Викторович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент  
доктор физико-математических наук  
по специальности 01.01.05  
ведущий научный сотрудник  
Лаборатории № 1 имени М.С.Пинскера  
ИППИ РАН имени А.А.Харкевича,  
[burn@iitp.ru](mailto:burn@iitp.ru), тел. +7(495)699-83-54

Бурнашев Марат Валиевич



Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича  
Российской академии наук (ИППИ РАН)  
127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д. 19, стр. 1, тел. +7(495)650-42-25



23.03.2016

