ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

На правах рукописи

Пономарева Елизавета Валентиновна

Двойные многообразия флагов и их применение в теории представлений

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель:	**Тимашев Дмитрий Андреевич**, кандидат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Панюшев Дмитрий Иванович** доктор физико-математических наук, доцент, Институт проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, ведущий научный сотрудник
	Смирнов Евгений Юрьевич кандидат физико-математических наук, ФГАОУ ВПО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет математики, доцент
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВПО «Самарский государственный университет»**

Защита диссертации состоится 4 марта 2016 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова, по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.
С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова, по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, и на сайте http://mech.math.msu.su/.

Автореферат разослан 4 февраля 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 на базе
МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук,
профессор **Иванов Александр Олегович**

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к теории алгебраических групп преобразований и теории представлений. В теории представлений алгебраических групп фундаментальными задачами являются задача разложения тензорного произведения двух неприводимых представлений связной редуктивной комплексной алгебраической группы G в прямую сумму неприводимых представлений и задача разложения на неприводимые слагаемые ограничения неприводимого представления группы G на редуктивную подгруппу H (проблема ветвления).

Существуют общие формулы для разложения тензорных произведений G-модулей. Разложение тензорного произведения неприводимых представлений любой полупростой группы можно получить из формулы Вейля для характеров (см., например, у Желобенко[1]) с помощью формулы Стейнберга (см., например, у Фултона и Харриса[2]). Также есть формула "трех индусов"[3] и ряд других формул.

Приведем ещё некоторые из известных результатов. Одним из важных достижений в задаче разложения тензорных произведений представлений является правило Литтлвуда-Ричардсона (см., например, у Фултона и Харриса[2]). Оно позволяет вычислить разложение на неприводимые представления тензорного произведения любых двух неприводимых представлений группы GL_n или группы SL_n. Неприводимые полиномиальные представления групп GL_n и SL_n можно задавать диаграммами Юнга. Чтобы найти кратность вхождения неприводимого модуля в тензорное произведение двух неприводимых модулей, нужно вычислить количество способов, которыми можно получить соответствующую диаграмму Юнга из двух заданных (соответствующих исходным представлениям) по определённым правилам. Частный случай данного правила — тензорное умножение неприводимого представления GL_n на $\bigwedge^k \mathbb{C}^m$ или $S^k\mathbb{C}^m$ — известен как правило Пиери (см., например, у Фултона и Харриса[2]). Позже Литтельман обобщил понятие диаграммы Юнга на классические и некоторые особые простые группы, и получил для них аналог правила Литтлвуда-Ричардсона

[1] Желобенко Д.П., *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, Москва, 1970

[2] Fulton W., Harris J., *Representation theory: A first course*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Velag, New-York, 1991

[3] Parthasarathy K.R., Ranga Rao R., Varadarajan V.S., *Representations of complex semisimple Lie groups and Lie algebras*, Ann. Math, vol. 85, №3 383-429, 1967

(обобщенное правило Литтлвуда-Ричардсона[4]). Также существуют правила ограничения неприводимых представлений с GL_n на GL_{n-1}, с SL_n на SL_{n-1}, с SO_n на SO_{n-1}, с Sp_n на Sp_{n-2} (см., например, у Желобенко[5]).

Однако почти у всех упомянутых правил есть недостаток — они хорошо работают только для "небольших" представлений, а в общем случае требуют больших вычислений. Также они не позволяют изучать изменение разложения в зависимости от представлений. Поэтому разумно поставить следующую задачу: для некоторых серий представлений получить более эффективные формулы разложения тензорных произведений и правила ветвления.

Описанные выше задачи можно решать геометрически. Основанием к этому является теорема Бореля-Вейля (см, например, у Янтцена[6]), которая даёт геометрическую реализацию неприводимых представлений: она утверждает, что любой неприводимый G-модуль реализуется как пространство сечений некоторого G-линейного расслоения $\mathcal{L}$ над обобщённым многообразием флагов G/P, где $P \subset G$ — параболическая подгруппа. Тензорное произведение пространств сечений $H^0(G/P, \mathcal{L})$ и $H^0(G/Q, \mathcal{M})$ можно реализовать как пространство сечений тензорного произведения расслоений $\mathcal{N} = \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M}$ над двойным многообразием флагов $X = G/P \times G/Q$. Таким образом задача разложения тензорного произведения на неприводимые представления сводится к разложению пространства сечений $H^0(X, \mathcal{N})$ на неприводимые модули. Задача разложения на неприводимые слагаемые ограничения неприводимого представления G на редуктивную подгруппу H сводится к разложению $H^0(G/P, \mathcal{L})$ на неприводимые H-модули.

При изучении G-многообразий важным оказывается понятие сложности. Сложностью неприводимого алгебраического многообразия X с действием группы G называется коразмерность типичной B-орбиты, где $B \subset G$ — борелевская подгруппа. Понятие сложности впервые появилось в работе Луны и Вюста[7], посвящённой эквивариантным вложениям однородных пространств — теме, связанной с задачей классификации G-многообразий. Многообразия сложности 0 и 1 довольно хорошо устроены — в работах Луны и Вюста[7], Кнопа[8], Тимашева[9] получено комбинаторное

[4]Littelmann P., *A generalization of the Littlewood-Richardson rule*, J.Algebra, **130** (1990), 328-368

[5]Желобенко Д.П., *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, Москва, 1970

[6]Jantzen J.C., *Representations of algebraic groups*, Academic Press, Boston, 1987

[7]Luna D., Vust Th., *Plongements d'espaces homogénes*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), no. 2, 186-245

[8]Knop F., *The Luna-Vust theory of spherical embeddings*, Proc. Hyderbad Conf. on Algebraic Groups (S. Ramanan ed.), 225-249, Manoj Prakashan, Madras, 1991

[9]Тимашёв Д.А., *Классификация G-многообразий сложности* 1, Изв. РАН, сер. мат. **61** (1997), № 2, 127-162

описание нормальных G-многообразий сложности 0 и 1 в терминах объектов выпуклой геометрии, таких как полиэдральные конусы и их коллекции, называемые веерами. Наиболее известно данное описание для частного случая многообразий сложности 0 — торических многообразий[10]. Кроме этого, сложность связана с кратностями вхождений неприводимых модулей в пространства сечений линейных расслоений над многообразием X (см., например, у Тимашева[11]). На G-многообразиях сложности 0 и 1 разложение пространств сечений линейных расслоений на неприводимые G-модули допускает относительно простое описание, полученное Брионом[12] и Тимашевым[13] (см. также у Тимашева[11]).

Таким образом возникает задача классификации двойных многообразий флагов сложности 0 и 1. Без ограничения общности можно считать G односвязной полупростой группой (т.к. центр редуктивной группы тривиально действует на многообразии флагов, и можно перейти к односвязному накрытию полупростой части группы G). Тогда группа G разлагается в почти прямое произведение простых подгрупп, а двойное многообразие флагов группы G разлагается в прямое произведение двойных многообразий флагов для простых подгрупп. Сложность двойного многообразия флагов группы G равна сумме сложностей двойных многообразий флагов, соответствующих простым подгруппам. Таким образом, задача классификации сводится к случаю простой группы G.

Частные случаи данной задачи для простой группы G решены в работах Литтельмана[14], Стембриджа[15], Панюшева[16]. Литтельман классифицировал двойные многообразия флагов сложности 0 в случае, когда обе параболические подгруппы, задающие двойное многообразие флагов, максимальны. Стембридж классифицировал все двойные многообразия флагов сложности 0. Панюшев нашёл сложности всех двойных многообразий флагов в случае максимальных параболических подгрупп.

Вместо того, чтобы рассматривать пространства сечений линейных рас-

[10] Cox D., Little J., Schenck H., *Toric varieties*, Graduate Studies in Mathematics, 124, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011

[11] Timashev D.A., *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, Encyclopedia of Mathematical Science, vol. 138, Springer (2011)

[12] Brion M., *Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques*, Duke Math. J. **58** (1989), 397-424

[13] Timashev D.A., *Cartier divisors and geometry of normal G-varieties*, Transform. Groups **5** (2000), no. 2, 181-204

[14] Littelmann P., *On spherical double cones*, J.Algebra, **166** (1994), 142-157

[15] Stembridge J., *Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters*, Represent. Theory 7 (2003), 404-439

[16] Panyushev D.I., *Complexity and rank of double cones and tensor product decompositions*, Comment. Math. Helv. **68** (1993), no. 3, 455-468

слоений на многообразии X по отдельности, мы можем рассмотреть их все вместе. При этом на их прямой сумме (при некоторых условиях на X) можно дополнительно ввести структуру кольца. Полученное кольцо $R(X)$ называется кольцом Кокса многообразия X. Задача разложения пространств $H^0(X, \mathcal{N})$ на неприводимые G-модули (а следовательно, и задача разложения тензорных произведений неприводимых представлений, и проблема ветвления) решается описанием алгебры $R(X)^U$ унипотентных инвариантов кольца Кокса, где $U \subset B$ — максимальная унипотентная подгруппа.

Возникает задача описания алгебр $R(X)^U$ для двойных многообразий флагов сложности 0 и 1. Задача снова сводится к случаю простой группы G. Частные случаи данной задачи решены в работах Литтельмана[17] и Панюшева[18]. Литтельман описал алгебры $R(X)^U$ в терминах образующих и соотношений для двойных многообразий флагов $X = G/P \times G/Q$ сложности 0 в случаях, когда обе параболические подгруппы P, Q максимальны. Панюшев нашёл образующие и соотношения в $R(X)^U$ для сложности 1 также в случаях, когда подгруппы P и Q максимальны.

Известно, что для двойных многообразий флагов $X = G/P \times G/Q$ сложности 0 алгебры $R(X)^U$ свободны (см., например, у Литтельмана[17]). Панюшев получил, что для двойных многообразий флагов сложности 1, в случаях, когда подгруппы P и Q максимальны, образующие алгебр $R(X)^U$ связаны единственным определяющим соотношением. Интересна структура алгебр $R(X)^U$ для двойных многообразий флагов сложности 1 при произвольных параболических подгруппах P и Q.

Задачу ограничения неприводимого представления, реализующегося в пространстве сечений линейного расслоения над многообразием G/P, на стандартную подгруппу Леви M в Q можно решить с помощью описания структуры кольца $R(G/P)^{U\cap M}$. Для случая, когда параболические подгруппы P и Q максимальны и сложность многообразия $G/P \times G/Q$ равна 0, Литтельман[17] получил способ описать структуру кольца $R(G/P)^{U\cap M}$ через структуру кольца $R(G/P \times G/Q)^U$. Возникает задача обобщить данный результат на двойные многообразия флагов сложности 0 и 1 для произвольных параболических подгрупп, из решения которой будут следовать правила ветвления для некоторых серий неприводимых представлений.

[17] Littelmann P., *On spherical double cones*, J.Algebra, **166** (1994), 142-157

[18] Panyushev D.I., *Complexity and rank of actions in Invariant theory*, J.Math.Sci. New York **95** (1999), no. 1, 1925-1985

Цель работы

Цель работы: классифицировать двойные многообразия флагов сложности 0 и 1, описать алгебры унипотентных инвариантов их колец Кокса, получить новые правила разложения тензорных произведений некоторых серий неприводимых представлений в прямую сумму неприводимых представлений и некоторые правила ветвления.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

1. Получена классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 единым концептуальным методом. Таким образом, проверены уже известные результаты Литтельмана, Стембриджа и Панюшева (для сложности 0; для сложности 1, когда обе параболические подгруппы, задающие двойное многообразие флагов, максимальны) и получены новые результаты для случая сложности 1 (когда хотя бы одна из параболических подгрупп не максимальна).

2. Найдено задание с помощью образующих и соотношений алгебр унипотентных инвариантов колец Кокса двойных многообразий флагов сложности 0 и 1. Таким образом, проверены уже известные результаты Литтельмана и Панюшева (для случая, когда параболические подгруппы, задающие двойное многообразие флагов, максимальны) и получены новые результаты для случая, когда хотя бы одна из параболических подгрупп не максимальна. Это даёт новые правила разложения тензорных произведений некоторых серий неприводимых представлений.

   Доказано, что алгебра унипотентных инвариантов кольца Кокса двойного многообразия флагов сложности 1 либо свободна, либо её образующие связаны единственным определяющим соотношением. Таким образом, обобщен результат Панюшева на случай, когда хотя бы одна из параболических подгрупп, задающих двойное многообразие флагов, не максимальна.

3. Получены новые правила ветвления, которые следуют из доказанного диссертантом обобщения результата Литтельмана о связи между

структурой алгебры унипотентных инвариантов кольца Кокса многообразия флагов относительно действия подгруппы Леви и структурой алгебры унипотентных инвариантов кольца Кокса двойного многообразия флагов.

Основные методы исследования

В работе используются методы алгебраической геометрии и теории представлений.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны специалистам в теории представлений, алгебраической геометрии и теории инвариантов.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, всероссийских и международных конференциях:

- Семинар «Группы Ли и теория инвариантов» (2011-2014гг., неоднократно)
- Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры (2014г.)
- XVIII международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2011», Москва, 11-15 апреля 2011г.
- Четвертая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, 27 января — 1 февраля 2014г.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в пяти работах, список которых приводится в конце автореферата [1 - 5].

Структура и объём диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Библиография включает 25 наименований. Общий объём диссертации составляет 125 страниц.

Краткое содержание работы

Во **введении** к диссертации кратко изложена история вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты. Также описаны структура и краткое содержание диссертации.

Глава 1 посвящена некоторым общим фактам и теоремам о двойных многообразиях флагов малой сложности, об их кольцах Кокса, и применениям двойных многообразий флагов в теории представлений. Вначале мы описываем, каким образом знание структуры алгебры $R(X)^U$ двойного многообразия флагов X позволяет раскладывать тензорные произведения некоторых неприводимых G-модулей и получать правила ветвления. В случае двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 алгебра $R(X)^U$ хорошо устроена. Для случая сложности 0 эта алгебра всегда свободна. Для сложности 1 в диссертации доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть X — двойное многообразие флагов простой группы G сложности 1. Тогда алгебра $R(X)^U$ либо свободна, либо её образующие связаны единственным определяющим соотношением.*

В случаях, когда алгебра $R(X)^U$ свободна или её образующие связаны единственным определяющим соотношением, формулы разложения тензорных произведений неприводимых модулей можно записать в красивой форме.

Знание структуры алгебры $R(G/P \times G/Q)^U$ позволяет нам определить структуру алгебры $R(G/P)^{U\cap M}$, где M — подгруппа Леви в Q. Пусть $D_1, \ldots, D_t$ — B-инвариантные дивизоры на G/Q, классы которых образуют базис группы Пикара $\operatorname{Pic}(G/Q)$. Обозначим через $s_{D_k} \in H^0(G/P \times G/Q, \mathcal{O}_{G/P} \boxtimes \mathcal{O}(D_k))$ соответствующие канонические сечения. На кольце $R(G/P \times G/Q)$ имеется естественная градуировка группой $\operatorname{Pic}(G/P \times G/Q)$, которая определяет мультистепень однородных элементов. Координаты, составляющие мультистепень, естественным образом делятся на 2 группы (соответствующие сомножителям G/P и G/Q).

Теорема 2. *Кольцо $R(G/P)^{U\cap M}$ изоморфно подкольцу в кольце частных $R(G/P\times G/Q)^U$ по мультипликативной системе, порождённой элементами $s_{D_1},\ldots,s_{D_t}$, состоящему из элементов мультистепени $(0,\ldots,0)$ по второй группе координат.*

Если известны образующие и соотношения алгебры $R(G/P\times G/Q)^U$, то можно найти образующие и соотношения алгебры $R(G/P)^{U\cap M}$. Таким образом мы получаем правила ветвления на подгруппу $M\subseteq G$ неприводимых G-модулей, реализующихся в пространствах сечений линейных расслоений над G/P.

Описание структуры алгебры $R(X)^U$ мы осуществляем геометрическим методом. Для этого необходимо знать, как устроены простые дивизоры на X, инвариантные относительно борелевской подгруппы $B\subseteq G$, содержащей U. Действительно, сечения линейных расслоений, нули которых составляют простые B-инвариантные дивизоры, являются мультипликативно неразложимыми однородными B-полуинвариантами в кольце $R(X)^U$. В частности, они порождают $R(X)^U$ как алгебру. Далее мы описываем устройство совокупности простых B-инвариантных дивизоров — на многообразии малой сложности это множество устроено довольно просто. По простым B-инвариантным дивизорам можно найти образующие и соотношения в алгебре $R(X)^U$. Таким образом задача описания структуры алгебры $R(X)^U$ сводится к описанию простых B-инвариантных дивизоров и соответствующих канонических сечений.

Глава 2 посвящена доказательству теоремы о классификации двойных многообразий флагов сложности не больше 1. Параболические подгруппы можно задавать подмножествами простых корней (из двух естественных соответствий мы возьмём то, при котором борелевской подгруппе соответствует всё множество простых корней). В диссертации доказана следующая классификационная теорема:

Теорема 3. *Для групп SL_n, $SO_{2l}(l\geqslant 4)$, SO_{2l+1}, Sp_{2l}, E_6, E_7 все двойные многообразия флагов сложности 0 и 1 соответствуют парам параболических подгрупп, приведённым в таблице 1. Параболические подгруппы заданы наборами простых корней, нумерация корней как у Винберга и Онищика[19]. Классификация дана с точностью до перестановки подгрупп, для групп SL_n, SO_{2l} и E_6 — ещё с точностью до диаграммного автоморфизма. Для групп G_2, F_4 и E_8 двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 нет.*

[19]Винберг Э.Б., Онищик А.Л., *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, Москва, 1988

Таблица 1: Двойные многообразия флагов сложности 0 и 1

	сложность 0			сложность 1		
G	P	Q	условия	P	Q	условия
SL_n	α_i	α_j		α_3	α_i,α_j	$i,j \geqslant 2; i,j \leqslant n-2; \|i-j\| \geqslant 2$
	α_2	α_i,α_j		α_i	α_2,α_4	$i \geqslant 3; i \leqslant n-3$
	α_i	α_1,α_j		α_i	α_2,α_{n-2}	$i \geqslant 3; i \leqslant n-3$
	α_i	α_j,α_{j+1}		α_2	$\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k$	
	α_1	$\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_s}$		α_i	$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$	$i \geqslant 2; i \leqslant n-2$
				α_i	$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{n-1}$	$i \geqslant 2; i \leqslant n-2$
				α_1,α_2	α_i,α_j	
				α_1,α_{n-1}	$\alpha_i,\ \alpha_j$	
SO_{2l}	α_1	α_i		α_1	α_i,α_j	$i,j \leqslant l-2$
$l \geqslant 4$	α_i	α_l	$i \leqslant 3$	α_1	$\alpha_i,\alpha_j,\alpha_l$	
	α_i	α_l	$i = l-1, l$	α_4	α_2,α_4	$l = 4$
	α_1	α_i,α_l		α_4	$\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k$	$l = 4$
	α_l	α_1,α_i	$i = 2, l-1, l$	α_5	α_i,α_j	$l = 5; i = 2,3; j = 4,5$
	α_l	α_{l-1},α_l		α_4	α_6	$l = 6$
	α_4	α_2,α_3	$l = 4$			
SO_{2l+1}	α_1	α_i		α_2	α_l	$l \geqslant 3$
	α_l	α_l		α_1	α_i,α_j	
				α_2	α_1,α_2	$l = 2$
Sp_{2l}	α_1	α_i		α_2	α_l	$l \geqslant 3$
	α_l	α_l		α_1	α_i,α_j	
				α_2	α_1,α_2	$l = 2$
E_6	α_1	α_i	$i \neq 3$	α_1	α_1,α_2	
	α_1	α_1,α_5		α_1	α_1,α_6	
				α_1	α_4,α_5	
				α_1	α_5,α_6	
E_7	α_1	α_i	$i = 1,6,7$	α_1	α_2	

В случае классических групп параболические подгруппы удобнее задавать не подмножествами простых корней, как в общем случае, а размерами диагональных блоков в блочно-треугольной структуре общей матрицы. Теорему классификации для двойных многообразий флагов классических групп удобнее сформулировать и доказывать в этих терминах.

Общая идея вычисления сложности состоит в том, чтобы привести точку общего положения к некоторому каноническому виду и найти количество параметров, от которых этот вид зависит. При этом мы будем использовать теорему Панюшева[20], которая позволяет свести задачу вычис-

[20] Panyushev D.I., *Complexity and rank of double cones and tensor product decompositions*, Comment. Math. Helv. **68** (1993), no. 3, 455-468

ления сложности действия группы G на двойном многообразии флагов $X = G/P \times G/Q$ к вычислению сложности действия некоторой подгруппы в G (а именно, пересечения подгрупп Леви в P и Q) на некотором подмногообразии многообразия X, которое изоморфно линейному представлению этой подгруппы. Двойных многообразий флагов для классических групп бесконечно много, и нам нужен способ отбросить сразу большое количество вариантов. Можно получить оценки на сложность снизу исходя из взаимного расположения блочных структур параболических подгрупп и размеров блоков. Для особых групп двойных многообразий флагов конечное число, оценки на сложность оставляют для перебора не слишком большое количество вариантов.

В главе 3 мы описываем структуру алгебр $R(X)^U$ для всех двойных многообразий флагов X простой группы G сложностей 0 и 1. Доказана следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть* $X = G/P^- \times G/Q^-$ *имеет сложность* 0 *или* 1, *где* P^- *и* Q^- *— параболические подгруппы простой группы* G, *содержащие отрицательную борелевскую подгруппу* B^-, *противоположные к* P, Q; *пусть* P *и* Q *заданы подмножествами простых корней* $I = \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_t}\}$, *нумерация корней как у Винберга и Онищика*[21]. *Тогда алгебры* $R(X)^U$ *порождаются элементами указанных в таблицах 2 и 3 весов и мультистепеней и элементами соответствующих фундаментальных весов* $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_r}, \omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_t}$, *мультистепеней* $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, 1)$ *соответственно. В случае сложности* 0 *указанные образующие свободно порождают* $R(X)^U$. *В случае сложности* 1 *в таблице указано количество определяющих соотношений между данными элементами (либо одно соотношение, либо их нет), вес и мультистепень соотношения. Если соотношение есть, то оно имеет следующий вид: сумма всех мономов данного веса и мультистепени от порождающих равна* 0.

Пояснения к таблицам. Если указано условие рядом с весом образующей, то данная образующая присутствует не всегда. Для удобства записи мы используем иногда вес ω_0 вместо 0, а для группы SL_n ещё иногда вес ω_n вместо 0. Для случая сложности 1, когда образующие независимы, мы выписываем некоторые вес и мультистепень — это вес и мультистепень сечений, соответствующих некоторому параметрическому семейству дивизоров. Если соотношение между образующими есть, то вес и мультистепень

[21] Винберг Э.Б., Онищик А.Л., *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, Москва, 1988

сечений, соответствующих параметрическому семейству дивизоров, совпадает с весом и мультистепенью соотношения.

Таблица 2: Веса и мультистепени образующих U-инвариантов в кольце Кокса для сложности 0

I	J	степень	вес
		$\mathbf{SL_n}$	
α_i	α_j $i \leqslant j$	$(1,1)$	$\omega_{i-k}+\omega_{j+k}$, $k=1,\dots,\min\{i,n-j\}$
α_i	α_1, α_j $i \leqslant j$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	ω_{i+1} $\omega_{i-k}+\omega_{j+k}$, $k=1,\dots,\min\{i,n-j\}$ $\omega_{i-k+1}+\omega_{j+k}$ $k=\max\{1,2-(j-i)\},\dots,\min\{i-1,n-j\}$
α_i	α_1, α_j $i > j$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	ω_{i+1} $\omega_{i+k}+\omega_{j-k}$, $k=1,\dots,\min\{j,n-i\}$ $\omega_{i+k}+\omega_{j-k+1}$, $k=2,\dots,\min\{j-1,n-i\}$
α_i	α_j, α_{j+1} $i \geqslant j+1$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_{i+k}+\omega_{j-k}$, $k=1,\dots,\min\{j,n-i\}$ $\omega_{i+k}+\omega_{j-k+1}$, $k=1,\dots,\min\{j+1,n-i\}$
α_2	α_i, α_j $i > j$ $i, j-i, n-j \geqslant 2$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	$\omega_1+\omega_{i+1}$, ω_{i+2} $\omega_1+\omega_{j+1}$, ω_{j+2} $\omega_{i+1}+\omega_{j+1}$
α_1	$\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}$	$(1,1,0,0,\dots,0)$ $(1,0,1,0,\dots,0)$ $\dots$ $(1,0,0,0,\dots,1)$	ω_{i_1+1} ω_{i_2+1} $\dots$ ω_{i_s+1}
		$\mathbf{Sp_{2l}}$, $(l \geqslant 2)$	
α_1	α_i $i \leqslant l-1$	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$
α_1	α_l	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_{l-1} ω_l
α_l	α_l	$(1,1)$	$2\omega_k$, $k=0,\dots,l-1$
		$\mathbf{SO_{2l}}$, $(l \geqslant 4)$	
α_1	α_i $i \leqslant l-3$	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$
α_1	α_{l-2}	$(1,1)$ $(2,1)$	ω_{l-3}, $\omega_{l-1}+\omega_l$ ω_{l-2}
α_1	α_{l-1}	$(1,1)$	ω_l
α_2	α_l	$(1,1)$ $(1,2)$	$\omega_1+\omega_{l-1}$, ω_l ω_{l-2}
α_3	α_l $l \geqslant 6$	$(1,1)$ $(1,2)$ $(2,2)$	$\omega_1+\omega_l$, $\omega_2+\omega_{l-1}$, ω_{l-1} $\omega_1+\omega_{l-2}$, ω_{l-3} $\omega_2+\omega_{l-2}$
α_{l-1}	α_l	$(1,1)$	ω_{l-2k-1}, $k=1,\dots,[\frac{l-1}{2}]$
α_l	α_l	$(1,1)$	ω_{l-2k}, $k=1,\dots,[\frac{l}{2}]$

α_1	$\alpha_i,\,\alpha_l$ $i \leqslant l-3$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_{i-1},\,\omega_{i+1}$ ω_i при $i>1$ ω_{l-1}
α_1	$\alpha_{l-2},\,\alpha_l$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_{l-3},\,\omega_{l-1}+\omega_l$ ω_{l-2} ω_{l-1}
α_1	$\alpha_{l-1},\,\alpha_l$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	ω_l ω_{l-1} ω_{l-2}
α_l	$\alpha_1,\,\alpha_2$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{l-1} $\omega_1+\omega_{l-1},\,\omega_l$ ω_{l-2}
α_l	α_1,α_{l-1}	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	ω_{l-1} $\omega_{l-2k-1},\,k=1,\ldots,[\frac{l-1}{2}]$ $\omega_{l-2k},\,k=1,\ldots,[\frac{l-2}{2}]$
α_l	α_1,α_l	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	ω_{l-1} $\omega_{l-2k},\,k=1,\ldots,[\frac{l}{2}]$ $\omega_{l-2k+1},\,k=2,\ldots,[\frac{l-1}{2}]$
α_l	α_{l-1},α_l	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_{l-2k-1},\,k=1,\ldots,[\frac{l-1}{2}]$ $\omega_{l-2k},\,k=1,\ldots,[\frac{l}{2}]$
		$\mathbf{SO_8}$	
α_4	α_2,α_3	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_1+\omega_3,\,\omega_4$ ω_2 ω_1
		$\mathbf{SO_{10}}$	
α_3	α_5	$(1,1)$ $(1,2)$	$\omega_1+\omega_5,\,\omega_2+\omega_4,\,\omega_4$ $\omega_1+\omega_3,\,\omega_2$
		$\mathbf{SO_{2l+1}}$, $(l \geqslant 3)$	
α_1	α_i $i \leqslant l-2$	$(1,1)$ $(2,1)$	$\omega_{i-1},\,\omega_{i+1}$ ω_i при $i>1$
α_1	α_{l-1}	$(1,1)$ $(2,1)$	$\omega_{l-2},\,2\omega_l$ ω_{l-1}
α_1	α_l	$(1,1)$ $(1,2)$	ω_l ω_{l-1}
α_l	α_l	$(1,1)$	$\omega_k,\,k=0,\ldots,l-1$
		$\mathbf{E_6}$	
α_1	α_1	$(1,1)$	$\omega_2,\,\omega_5$
α_1	α_2	$(1,1)$ $(2,1)$	$\omega_1+\omega_5,\,\omega_3,\,\omega_6$ $\omega_2+\omega_5,\,\omega_4$
α_1	α_4	$(1,1)$ $(2,1)$	$\omega_2,\,\omega_5,\,\omega_5+\omega_6$ $\omega_3,\,\omega_6$
α_1	α_5	$(1,1)$	$0,\,\omega_6$
α_1	α_6	$(1,1)$ $(2,1)$	$\omega_1,\,\omega_4$ ω_2

α_1 $\quad$ $\alpha_1,\ \alpha_5$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	$\omega_2,\ \omega_5$ $0,\ \omega_6$ ω_4
$\mathbf{E_7}$		
α_1 $\quad$ α_1	$(1,1)$	$0,\ \omega_2,\ \omega_6$
α_1 $\quad$ α_6	$(1,1)$ $(2,1)$	$\omega_1,\ \omega_7$ ω_2
α_1 $\quad$ α_7	$(1,1)$ $(2,1)$ $(2,2)$	$\omega_2,\ \omega_5,\ \omega_6$ $\omega_3,\ \omega_7$ ω_4

Таблица 3: Веса и мультистепени образующих U-инвариантов в кольце Кокса для сложности 1

I $\quad$ **J**	**степень**	**вес**	**соотношения**
$\mathbf{SL_n}$			
α_2 $\quad$ $\alpha_i,\ \alpha_j,\ \alpha_m$ $i<j<m$	$(1,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(1,1,1,0)$ $(1,1,0,1)$ $(1,0,1,1)$	$\omega_{2-k}+\omega_{i+k},\ k=\max\{1,3-i\},\dots,2$ $\omega_1+\omega_{j+1},\ \omega_{j+2}$ $\omega_{2-k}+\omega_{m+k},\ k=1,\dots,\min\{2,n-m\}$ $\omega_{i+1}+\omega_{j+1}$ при $j-i>1$ $\omega_{i+1}+\omega_{m+1}$ $\omega_{j+1}+\omega_{m+1}$ при $m-j>1$	$(2,1,1,1)$ $\omega_1+\omega_{i+1}+\omega_{j+1}+$ $+\omega_{m+1}$ 1 соотношение
α_i $\quad$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ $i,n-i\geqslant 3$	$(1,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(1,1,0,1)$	ω_{i+1} $\omega_1+\omega_{i+1},\ \omega_{i+2}$ $\omega_1+\omega_{i+2},\ \omega_2+\omega_{i+1},\ \omega_{i+3}$ $\omega_2+\omega_{i+2}$	$(2,1,1,1)$ $\omega_1+\omega_2+\omega_{i+1}+$ $+\omega_{i+2}$ 1 соотношение
α_i $\quad$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{n-1}$ $i,n-i\geqslant 3$	$(1,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(1,1,0,1)$ $(1,0,1,1)$	ω_{i+1} $\omega_1+\omega_{i+1},\ \omega_{i+2}$ ω_{i-1} ω_i $\omega_1+\omega_i,\ \omega_{i+1}$	$(2,1,1,1)$ $\omega_1+\omega_i+\omega_{i+1}$ 1 соотношение
α_3 $\quad$ $\alpha_i,\ \alpha_j$ $i,j-i,n-j\geqslant 2$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$ $(2,1,1)$	$\omega_{3-k}+\omega_{i+k},\ k=\max\{1,4-i\},\dots,3$ $\omega_{3-k}+\omega_{j+k}$ $k=1,\dots,\min\{3,j-i\}$ $\omega_1+\omega_{i+1}+\omega_{j+1},\ \omega_{i+k}+\omega_{j+3-k}$ $k=1,\dots,\min\{2,j-i-1\}$ $\omega_2+\omega_{i+2}+\omega_{j+2}$	$(3,2,2)$ $\omega_1+\omega_2+\omega_{i+1}+$ $+\omega_{i+2}+\omega_{j+1}+\omega_{j+2}$ 1 соотношение
α_i $\quad$ α_2,α_4 $i,n-i\geqslant 4$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$ $(2,1,1)$	$\omega_1+\omega_{i+1},\ \omega_{i+2}$ $\omega_1+\omega_{i+3},\ \omega_2+\omega_{i+2},\ \omega_3+\omega_{i+1},\ \omega_{i+4}$ $\omega_1+\omega_3+\omega_{i+2},\ \omega_3+\omega_{i+3}$ $\omega_2+\omega_{i+1}+\omega_{i+3}$	$(3,2,2)$ $\omega_1+\omega_2+\omega_3+$ $+\omega_{i+1}+\omega_{i+2}+\omega_{i+3}$ 1 соотношение
α_i $\quad$ α_2,α_{n-2} $i,n-i\geqslant 4$	$(1,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$ $(2,1,1)$	$\omega_1+\omega_{i+1},\ \omega_{i+2}$ $\omega_{i-1}+\omega_{n-1},\ \omega_{i-2}$ $\omega_1+\omega_{i-1},\ \omega_1+\omega_i+\omega_{n-1}$ $\omega_{i+1}+\omega_{n-1},\ \omega_i$ $\omega_{i-1}+\omega_{i+1}$	$(3,2,2)$ $\omega_1+\omega_{i-1}+\omega_i+$ $+\omega_{i+1}+\omega_{n-1}$ 1 соотношение

α_i,α_j α_1,α_2	$(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(0,1,1,0)$ $(0,1,0,1)$ $(1,1,0,1)$	ω_{i+1} $\omega_{2-k}+\omega_{i+k}$, $k=\max\{1,3-i\},\dots,2$ ω_{j+1} $\omega_{2-k}+\omega_{j+k}$ $k=1,\dots,\min\{2,n-j\}$ $\omega_{i+1}+\omega_{j+1}$ при $j-i>1$	$(1,1,1,1)$ $\omega_1+\omega_{i+1}+\omega_{j+1}$ 1 соотношение
α_i,α_j α_1,α_{n-1}	$(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(0,1,1,0)$ $(0,1,0,1)$ $(1,0,1,1)$ $(0,1,1,1)$	ω_{i+1} ω_{i-1} ω_{j+1} ω_{j-1} ω_i при $i>1$ ω_j при $n-j>1$	$(1,1,1,1)$ $\omega_i+\omega_j$ при $j-i>1$ 0 соотношений; при $j-i=1$ 1 соотношение
$\mathbf{Sp_{2l}}$, $(l\geqslant 2)$			
α_l α_2 $l\geqslant 4$	$(1,1)$ $(1,2)$ $(2,2)$	$\omega_1+\omega_{l-1}$, ω_{l-2} $\omega_1+\omega_{l-1}$, $2\omega_1+\omega_l$, ω_l $2\omega_{l-1}$	$(3,4)$ $2\omega_1+2\omega_{l-1}+\omega_l$ 1 соотношение
α_1 α_i, α_l	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{l-1} ω_l	$(2,1,1)$ $\omega_i+\omega_l$ при $l-i>1$ 0 соотношений; при $l-i=1$ 1 соотношение
α_1 α_i, α_j $i<j<l$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{j-1}, ω_{j+1} ω_j	$(2,1,1)$ $\omega_i+\omega_j$ при $j-i>1$ 0 соотношений; при $j-i=1$ 1 соотношение
$\mathbf{Sp_4}$			
α_2 α_1	$(1,1,0)$ $(1,2,0)$ $(1,0,1)$	ω_1 ω_2 0, $2\omega_1$	$(2,1,1)$ $2\omega_1+\omega_2$ 1 соотношение
$\mathbf{Sp_6}$			
α_3 α_2	$(1,1)$ $(1,2)$ $(2,2)$	ω_1, $\omega_1+\omega_2$ $2\omega_1+\omega_3$, ω_3 $2\omega_2$	$(3,4)$ $2\omega_1+2\omega_2+\omega_3$ 1 соотношение
$\mathbf{SO_{2l}}$, $(l\geqslant 4)$			
α_1 α_i,α_j $i<j<l-2$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{j-1}, ω_{j+1} ω_j	$(2,1,1)$ $\omega_i+\omega_j$ при $j-i>1$ 0 соотношений; при $j-i=1$ 1 соотношение

α_1 α_i,α_{l-2} $i < l-2$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i > 1$ ω_{l-3}, ω_{l-1}+ω_l ω_{l-2}	$(2,1,1)$ $\omega_i + \omega_{l-2}$ при $l-2-i > 1$ 0 соотношений; при $l-2-i = 1$ 1 соотношение
α_1 α_i,α_j,α_l $i < j < l-2$	$(1,1,0,0)$ $(2,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(2,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i > 1$ ω_{j-1}, ω_{j+1} ω_j ω_{l-1}	$(2,1,1,0)$ $\omega_i + \omega_j$ при $j-i > 1$ 0 соотношений; при $j-i = 1$ 1 соотношение
α_1 α_i,α_{l-2},α_l $i < l-2$	$(1,1,0,0)$ $(2,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(2,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i > 1$ ω_{l-3}, ω_{l-1}+ω_l ω_{l-2} ω_{l-1}	$(2,1,1,0)$ $\omega_i + \omega_{l-2}$ при $l-2-i > 1$ 0 соотношений; при $l-2-i = 1$ 1 соотношение
α_1 α_i,α_{l-1},α_l $i < l-1$	$(1,1,0,0)$ $(2,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(1,0,1,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i > 1$ ω_l ω_{l-1} ω_{l-2}	$(2,1,1,1)$ $\omega_i + \omega_{l-1} + \omega_l$ при $l-1-i > 1$ 0 соотношений; при $l-1-i = 1$ 1 соотношение
		SO_8	
α_4 α_2,α_4	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_1 + \omega_3$, ω_4 ω_2 0, ω_2	$(2,1,1)$ $\omega_2 + \omega_4$ 1 соотношение
α_4 α_1,α_3,α_4	$(1,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(1,1,1,0)$	ω_3 ω_1 0, ω_2 ω_2	$(2,1,1,1)$ $\omega_1 + \omega_3 + \omega_4$ 0 соотношений
α_4 α_2,α_3,α_4	$(1,1,0,0)$ $(2,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$	$\omega_1 + \omega_3$, ω_4 ω_2 ω_1 0, ω_2	$(2,1,0,1)$ $\omega_2 + \omega_4$ 1 соотношение
α_4 α_1,α_2,α_4	$(1,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(2,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$	ω_3 $\omega_1 + \omega_3$, ω_4 ω_2 0, ω_2	$(2,0,1,1)$ $\omega_2 + \omega_4$ 1 соотношение
α_4 α_1,α_2,α_3	$(1,1,0,0)$ $(1,0,1,0)$ $(2,0,1,0)$ $(1,0,0,1)$ $(1,1,0,1)$	ω_3 $\omega_1 + \omega_3$, ω_4 ω_2 ω_1 ω_2	$(2,1,1,1)$ $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ 1 соотношение

		SO_{10}		
α_5 α_2,α_5	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$ $(2,1,1)$	$\omega_1+\omega_4$, ω_5 ω_3 ω_1, ω_3 ω_3 $\omega_2+\omega_4$	$(2,1,1)$ $\omega_3+\omega_5$ 1 соотношение	
α_5 α_2,α_4	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,1,1)$	$\omega_1+\omega_4$, ω_5 ω_3 0, ω_2 $\omega_1+\omega_3$	$(2,1,1)$ $\omega_2+\omega_5$ 0 соотношений	
α_5 α_3,α_5	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_1+\omega_5$, $\omega_2+\omega_4$, ω_4 $\omega_1+\omega_3$, ω_2 ω_1, ω_3	$(2,1,1)$ $\omega_1+\omega_3+\omega_5$ 1 соотношение	
α_5 α_3,α_4	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$	$\omega_1+\omega_5$, $\omega_2+\omega_4$, ω_4 $\omega_1+\omega_3$, ω_2 0, ω_2	$(2,1,1)$ $\omega_2+\omega_4$ 1 соотношение	
		SO_{12}		
α_4 α_6	$(1,1)$ $(1,2)$	$\omega_1+\omega_5$, $\omega_2+\omega_6$, $\omega_3+\omega_5$, ω_6 $\omega_1+\omega_3$, ω_2, $\omega_2+\omega_4$, ω_4	$(2,3)$ $\omega_2+\omega_4+\omega_6$ 1 соотношение	
		SO_{2l+1}, $(l \geqslant 3)$		
α_2 α_l $l \geqslant 4$	$(1,1)$ $(1,2)$ $(2,2)$	$\omega_1+\omega_l$, ω_l $\omega_1+\omega_{l-1}$, ω_{l-2}, ω_{l-1} $\omega_1+\omega_{l-1}$	$(2,3)$ $\omega_1+\omega_{l-1}+\omega_l$ 1 соотношение	
α_1 α_i,α_j $i<j<l-1$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{j-1}, ω_{j+1} ω_j	$(2,1,1)$ $\omega_i+\omega_j$ при $j-i>1$ 0 соотношений; при $j-i=1$ 1 соотношение	
α_1 α_i,α_{l-1} $i<l-1$	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(2,0,1)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_{l-2}, $2\omega_l$ ω_{l-1}	$(2,1,1)$ $\omega_i+\omega_{l-1}$ при $l-1-i>1$ 0 соотношений; при $l-1-i=1$ 1 соотношение	
α_1 α_i,α_l	$(1,1,0)$ $(2,1,0)$ $(1,0,1)$ $(1,0,2)$	ω_{i-1}, ω_{i+1} ω_i при $i>1$ ω_l ω_{l-1}	$(2,1,2)$ $\omega_i+2\omega_l$ при $l-i>1$ 0 соотношений; при $l-i=1$ 1 соотношение	
		SO_7		
α_2 α_3	$(1,1)$ $(1,2)$	$\omega_1+\omega_3$, ω_3 $\omega_1+\omega_2$, ω_1, ω_2	$(2,3)$ $\omega_1+\omega_2+\omega_3$ 1 соотношение	

		$\mathbf{E_6}$		
α_1	α_1, α_2	$(1,1,0)$	ω_2, ω_5	$(2,1,1)$
		$(1,0,1)$	$\omega_1+\omega_5$, ω_3, ω_6	$\omega_1+\omega_2+\omega_5$
		$(2,0,1)$	$\omega_2+\omega_5$, ω_4	1 соотношение
α_1	α_1, α_6	$(1,1,0)$	ω_2, ω_5	$(2,1,1)$
		$(1,0,1)$	ω_1, ω_4	$\omega_1+\omega_2$
		$(2,0,1)$	ω_2	0 соотношений
		$(2,1,1)$	ω_3	
α_1	α_4, α_5	$(1,1,0)$	ω_2, ω_5, $\omega_5+\omega_6$	$(2,1,1)$
		$(2,1,0)$	ω_3, ω_6	$\omega_5+\omega_6$
		$(1,0,1)$	0, ω_6	1 соотношение
α_1	α_5, α_6	$(1,1,0)$	0, ω_6	$(2,1,1)$
		$(1,0,1)$	ω_1, ω_4	$\omega_1+\omega_6$
		$(2,0,1)$	ω_2	0 соотношений
		$(1,1,1)$	ω_3	
		$\mathbf{E_7}$		
α_1	α_2	$(1,1)$	ω_1, $\omega_1+\omega_6$, ω_3, ω_7	$(3,2)$
		$(2,1)$	ω_2, $\omega_2+\omega_6$, ω_5, ω_6	$\omega_1+\omega_2+\omega_6$
				1 соотношение

Теорема даёт некоторые новые правила разложения тензорных произведений неприводимых представлений, реализующихся в пространствах сечений линейных расслоений над G/P и G/Q соответственно.

Для описания структуры кольца $R(X)^U$ мы описываем простые B-инвариантные дивизоры на X и соответствующие канонические сечения. Для нахождения простых B-инвариантных дивизоров мы действием группы B приводим точку к каноническому виду (он единственный для случая сложности 0, параметризуется комплексной прямой в случае сложности 1) и ищем условия, когда этого сделать нельзя. Эти условия и задают дивизоры из дополнения к открытой B-орбите в случае сложности 0 и B-инвариантные дивизоры из дополнения к некоторому параметрическому семейству B-орбит в случае сложности 1.

Метод описания соответствующих канонических сечений различается для классических и особых групп. В случае классических групп точки многообразия флагов являются цепочками вложенных друг в друга подпространств (в ортогональном и симплектическом случаях есть некоторые условия на эти подпространства). В этом случае дивизоры можно задавать в компактной геометрической форме — в терминах взаимного расположения этих подпространств. Из такого задания можно легко получить описание соответствующих канонических сечений.

В случае особых групп такого хорошего способа задания дивизоров нет.

Описание канонических сечений следует из явного задания дивизоров в координатах. В некоторых случаях рассмотрение весов и знание примерного вида уравнения дивизора позволяет избежать вычислений.

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю кандидату физико-математических наук, доценту Дмитрию Андреевичу Тимашеву за постановку задач и постоянную поддержку в течение всех лет обучения, профессору Эрнесту Борисовичу Винбергу и профессору Ивану Владимировичу Аржанцеву за полезные и интересные лекции и семинары, а также заведующему кафедрой высшей алгебры профессору Виктору Николаевичу Латышеву и всем сотрудникам кафедры за творческую атмосферу, которая способствует научной работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Пономарева Е.В., *Классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1*, Изв. РАН. Сер. матем., **77**:5 (2013), 155–178.

[2] Пономарева Е.В., *Инварианты колец Кокса двойных многообразий флагов малой сложности классических групп*, Тр. ММО., **76**, № 1, МЦНМО, М., 2015, 85-150.

[3] Пономарева Е.В., *Инварианты колец Кокса двойных многообразий флагов малой сложности особых групп*, депонировано в ВИНИТИ РАН, №72-В2015 от 31.03.2015, 40 стр.

[4] Пономарева Е.В., *Классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1*, тезисы XVIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2011”.

[5] Пономарева Е.В., *Инварианты колец Кокса двойных многообразий флагов малой сложности классических групп*, тезисы докладов четвертой школы-конференции “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов”, 2014, с. 41.