

ФГБОУ ВО Московский государственный университет

им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

ПОНОМАРЕВА ЕЛИЗАВЕТА ВАЛЕНТИНОВНА

**ДВОЙНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ**

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент Д.А. Тимашев.

Москва, 2015

Оглавление

Введение	3
Глава 1. О двойных многообразиях флагов	18
1.1. Двойные многообразия флагов и их кольца Кокса	18
1.2. Тензорное произведение модулей и ограничение на подгруппу	20
1.3. Строение B -инвариантных дивизоров на многообразиях малой сложности	23
1.4. Связь между B -инвариантными дивизорами и алгеброй U -инвариантов кольца Кокса	25
Глава 2. Классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1	29
2.1. Некоторые леммы о сложности двойных многообразий флагов	29
2.2. Метод классификации для классических групп	30
2.3. Классификация для классических групп	36
2.4. Метод классификации для особых групп	45
2.5. Классификация для особых групп	46
Глава 3. U -инварианты колец Кокса двойных многообразий флагов	49
3.1. Метод поиска B -инвариантных дивизоров	49
3.2. Метод вычисления инвариантов колец Кокса для классических групп	53
3.3. Инварианты колец Кокса для классических групп	58
3.4. Метод вычисления инвариантов колец Кокса для особых групп	101
3.5. Инварианты колец Кокса для особых групп	106
3.6. Примеры разложений тензорных произведений представлений и ограничений представлений на подгруппу	119
Заключение	122
Литература	124
Публикации автора по теме диссертации	125

Введение

В теории представлений алгебраических групп фундаментальными задачами являются задача разложения тензорного произведения двух неприводимых представлений связной редуктивной комплексной алгебраической группы G в прямую сумму неприводимых представлений и задача разложения на неприводимые слагаемые ограничения неприводимого представления группы G на редуктивную подгруппу H (проблема ветвления).

Существуют общие формулы для разложения тензорных произведений G -модулей. Разложение тензорного произведения неприводимых представлений любой полупростой группы можно получить из формулы Вейля для характеров (см., например, [3, §123-124]) с помощью формулы Стейнберга (см., например, [9, §25.3]). Также есть формула “трех индусов” [17] и ряд других формул.

Приведем ещё некоторые из известных результатов. Одним из важных достижений в задаче разложения тензорных произведений представлений является правило Литтлвуда-Ричардсона (см., например, [9, §A]). Оно позволяет вычислить разложение на неприводимые представления тензорного произведения любых двух неприводимых представлений группы GL_n или группы SL_n . Неприводимые полиномиальные представления групп GL_n и SL_n можно задавать диаграммами Юнга. Чтобы найти кратность вхождения неприводимого модуля в тензорное произведение двух неприводимых модулей, нужно вычислить количество способов, которыми можно получить соответствующую диаграмму Юнга из двух заданных (соответствующих исходным представлениям) по определённым правилам. Частный случай данного правила — тензорное умножение неприводимого представления GL_n на $\bigwedge^k \mathbb{C}^m$ или $S^k \mathbb{C}^m$ — известен как правило Пиери (см., например, [9, §A]). Позже Литтельман обобщил понятие диаграммы Юнга на классические и некоторые особые простые группы, и получил для них аналог правила Литтлвуда-Ричардсона (обобщенное правило Литтлвуда-Ричардсона) [13]. Также существуют правила ограничения неприводимых представлений с GL_n на GL_{n-1} , с SL_n на SL_{n-1} , с SO_n на SO_{n-1} , с Sp_n на Sp_{n-2} (см., например, [3, §66,129-130]).

Однако почти у всех данных правил есть недостаток — они хорошо работают только для “небольших” представлений, а в общем случае требуют больших вычислений. Также они не позволяют изучать изменение разложения в зависимости от представлений. Поэтому разумно поставить следующую задачу: для некоторых серий представлений получить более эффективные формулы разложения тензорных произведений и правила ветвления.

Описанные выше задачи можно решать геометрически. Основанием к этому является теорема Бореля-Вейля (см., например, [10, II.5]), которая даёт геометрическую реализацию неприводимых представлений: она утверждает, что любой неприводимый G -модуль реализуется как пространство сечений некоторого G -линейного расслоения \mathcal{L} над обобщённым многообразием флагов G/P , где $P \subset G$ — параболическая подгруппа. Тензорное произведение пространств сечений $H^0(G/P, \mathcal{L})$ и $H^0(G/Q, \mathcal{M})$ можно реализовать как пространство сечений тензорного произведения расслоений $\mathcal{N} = \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M}$ над двойным многообразием флагов $X = G/P \times G/Q$. Таким образом задача разложения тензорного произведения на неприводимые представления сводится к разложению пространства сечений $H^0(X, \mathcal{N})$ на неприводимые модули. Задача разложения на неприводимые слагаемые ограничения неприводимого представления G на редуктивную подгруппу H сводится к разложению $H^0(G/P, \mathcal{L})$ на неприводимые H -модули.

При изучении G -многообразий важным оказывается понятие сложности. Сложностью неприводимого алгебраического многообразия X с действием группы G называется коразмерность типичной B -орбиты, где $B \subset G$ — борелевская подгруппа. Понятие сложности впервые появилось в работе [14], посвящённой эквивариантным вложениям однородных пространств — теме, связанной с задачей классификации G -многообразий. Многообразия сложности 0 и 1 довольно хорошо устроены — в работах [14], [11] и [4] получено комбинаторное описание нормальных G -многообразий сложности 0 и 1 в терминах объектов выпуклой геометрии, таких как полиэдральные конусы и их коллекции, называемые веерами. Наиболее известно данное описание для частного случая многообразий сложности 0 — торических многообразий (см., например, [8]). Кроме этого, сложность связана с кратностями вхождений неприводимых модулей в пространства сечений линейных расслоений над многообразием X (см., например, [19, 5.4]). На G -многообразиях сложности 0 и 1 разложение пространств сечений линейных расслоений на неприводимые G -модули допускает относительно простое описание [7], [20] (см. также [19, 17.4]).

Таким образом возникает задача классификации двойных многообразий флагов сложности 0 и 1. Без ограничения общности можно считать G односвязной полупростой группой (т.к. центр редуктивной группы тривиально действует на многообразии флагов, и

можно перейти к односвязному накрытию полупростой части группы G). Тогда группа G разлагается в почти прямое произведение простых подгрупп, а двойное многообразие флагов группы G разлагается в прямое произведение двойных многообразий флагов для простых подгрупп. Сложность двойного многообразия флагов группы G равна сумме сложностей двойных многообразий флагов, соответствующих простым подгруппам. Таким образом, задача классификации сводится к случаю простой группы G . Литтельман [12] классифицировал двойные многообразия флагов сложности 0 в случае максимальных параболических подгрупп. Стембридж [18] классифицировал все двойные многообразия флагов сложности 0. Панюшев [15] нашёл сложности всех двойных многообразий флагов в случае максимальных параболических подгрупп. В диссертации получены единым более простым и концептуальным методом уже известные результаты по классификации двойных многообразий флагов сложности не большей 1 и завершена классификация в случае сложности 1.

Вместо того, чтобы рассматривать пространства сечений линейных расслоений на многообразии X по отдельности, мы можем рассмотреть их все вместе. При этом на их прямой сумме (при некоторых условиях на X) можно дополнительно ввести структуру кольца. Полученное кольцо $R(X)$ называется кольцом Кокса многообразия X (точное определение см. в разделе 1.1). Задача разложения пространств $H^0(X, \mathcal{N})$ на неприводимые G -модули (а следовательно, и задача разложения тензорных произведений неприводимых представлений, и проблема ветвления) решается описанием алгебры $R(X)^U$ унипотентных инвариантов кольца Кокса, где $U \subset B$ — максимальная унипотентная подгруппа.

Задача описания структуры алгебры $R(X)^U$ снова сводится к случаю простой группы G . Литтельман [12] описал алгебры $R(X)^U$ в терминах образующих и соотношений для двойных многообразий флагов $X = G/P \times G/Q$ сложности 0, в случаях, когда обе параболические подгруппы P, Q максимальны. Панюшев [16, §6] нашёл образующие и соотношения в $R(X)^U$ для сложности 1 также в случае максимальных параболических подгрупп. В диссертации найдено задание $R(X)^U$ с помощью образующих и соотношений для всех двойных многообразий флагов сложности 0 и 1. Таким образом проверены уже известные результаты (для максимальных параболических подгрупп) и получены новые результаты для случая, когда хотя бы одна из параболических подгрупп не максимальна. Это даёт новые формулы для разложений тензорных произведений некоторых серий неприводимых представлений.

Вернёмся к задаче разложения на неприводимые представления ограничения представления G на подгруппу H . В случае, когда $H = M$ — подгруппа Леви в Q , структура алгебры унипотентных инвариантов для действия H на $R(G/P)$ определяется из структуры алгебры $R(G/P \times G/Q)^U$. В случае, когда обе параболические подгруппы максимальны и сложность соответствующего двойного многообразия флагов равна 0, связь структур данных колец была получена Литтельманом [12]. В диссертации получен способ определения структуры кольца Кокса $R(G/P)^{U \cap M}$ из структуры кольца $R(G/P \times G/Q)^U$ для случая, когда параболические подгруппы произвольны и сложность соответствующего двойного многообразия флагов равна 0 или 1, обобщающий результат Литтельмана. Это даёт новые правила ветвления.

Приведём краткое содержание глав диссертации и сформулируем основные результаты диссертации. **Глава 1** посвящена некоторым общим фактам и теоремам о двойных многообразиях флагов малой сложности, об их кольцах Кокса, и применением двойных многообразий флагов в теории представлений. Вначале мы опишем, каким образом знание структуры алгебры $R(X)^U$ позволяет раскладывать тензорные произведения неприводимых G -модулей и получать правила ветвления. В случае двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 алгебра $R(X)^U$ хорошо устроена. Для случая сложности 0 эта алгебра всегда свободна (см, например, [12]). Для сложности 1 в диссертации доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 0.1. (*см. теорему 1.9*) *Пусть X — двойное многообразие флагов простой группы G сложности 1. Тогда алгебра $R(X)^U$ либо свободна, либо её образующие связаны единственным определяющим соотношением.*

Данная теорема была ранее известна только для случая, когда обе параболические подгруппы максимальные [16]. В случаях, когда алгебра $R(X)^U$ свободна или её образующие связаны единственным определяющим соотношением, формулы разложения тензорных произведений неприводимых модулей можно записать в красивой форме (см. теоремы 1.4 и 1.5).

Знание структуры алгебры $R(G/P \times G/Q)^U$ позволяет нам определить структуру алгебры $R(G/P)^{U \cap M}$, где M — подгруппа Леви в Q . Пусть D_1, \dots, D_t — B -инвариантные дивизоры на G/Q (где $B \supset U$), классы которых образуют базис группы Пикара $\text{Pic}(G/Q)$. Обозначим через $s_{D_k} \in H^0(G/P \times G/Q, \mathcal{O}_{G/P} \boxtimes \mathcal{O}(D_k))$ соответствующие канонические сечения. На кольце $R(G/P \times G/Q)$ имеется естественная градуировка группой $\text{Pic}(G/P \times G/Q)$, которая определяет мультистепень однородных элементов. Координаты, составляющие

мультистепень, естественным образом делятся на 2 группы (соответствующие сомножителям G/P и G/Q).

ТЕОРЕМА 0.2. (см. теорему 1.3) *Кольцо $R(G/P)^{U \cap M}$ изоморфно подкольцу в кольце частных $R(G/P \times G/Q)^U$ по мультипликативной системе, порождённой элементами s_{D_1}, \dots, s_{D_t} , состоящему из элементов мультистепени $(0, \dots, 0)$ по второй группе координат.*

Если известны образующие и соотношения алгебры $R(G/P \times G/Q)^U$, то можно найти образующие и соотношения алгебры $R(G/P)^{U \cap M}$ с помощью теоремы 1.10. Таким образом мы получим правила ветвления на подгруппу $M \subseteq G$ неприводимых G -модулей, реализующихся в пространствах сечений линейных расслоений над G/P .

Описание структуры алгебры $R(X)^U$ мы будем осуществлять геометрическим методом. Для этого необходимо знать, как устроены простые дивизоры на X , инвариантные относительно борелевской подгруппы $B \subseteq G$, содержащей U . Действительно, сечения линейных расслоений, нули которых составляют простые B -инвариантные дивизоры, являются мультипликативно неразложимыми однородными B -полуинвариантами в кольце $R(X)^U$. В частности, они порождают $R(X)^U$ как алгебру. Далее мы опишем устройство совокупности простых B -инвариантных дивизоров — на многообразии малой сложности это множество устроено довольно просто. По простым B -инвариантным дивизорам можно найти образующие и соотношения в алгебре $R(X)^U$ (см. теоремы 1.7 и 1.8). Таким образом задача описания структуры алгебры $R(X)^U$ сводится к описанию простых B -инвариантных дивизоров и соответствующих канонических сечений.

Глава 2 посвящена доказательству теоремы о классификации двойных многообразий флагов сложности не больше 1. Параболические подгруппы можно задавать подмножествами простых корней (из двух естественных соответствий мы возьмём то, при котором борелевской подгруппе соответствует всё множество простых корней), подробнее см. в разделе 1.1. В диссертации доказана следующая классификационная теорема:

ТЕОРЕМА 0.3. (см. теорему 2.5 и раздел 2.5) *Для групп SL_n , $SO_{2l}(l \geq 4)$, SO_{2l+1} , Sp_{2l} , E_6 , E_7 все двойные многообразия флагов сложности 0 и 1 соответствуют парам параболических подгрупп, приведённым в таблице 1. Параболические подгруппы заданы наборами простых корней, нумерация корней соответствует [1, табл. 1]. Классификация дана с точностью до перестановки подгрупп, для групп SL_n , SO_{2l} и E_6 — ещё с точностью до диаграммного автоморфизма G . Для групп G_2 , F_4 и E_8 двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 нет.*

ТАБЛИЦА 1. Двойные многообразия флагов сложности 0 и 1

	сложность 0			сложность 1		
G	P	Q	условия	P	Q	условия
SL_n	α_i	α_j		α_3	α_i, α_j	$i, j \geq 2; i, j \leq n-2; i-j \geq 2$
	α_2	α_i, α_j		α_i	α_2, α_4	$i \geq 3; i \leq n-3$
	α_i	α_1, α_j		α_i	α_2, α_{n-2}	$i \geq 3; i \leq n-3$
	α_i	α_j, α_{j+1}		α_2	$\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$	
	α_1	$\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}$		α_i	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	$i \geq 2; i \leq n-2$
				α_i	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{n-1}$	$i \geq 2; i \leq n-2$
				α_1, α_2	α_i, α_j	
				α_1, α_{n-1}	α_i, α_j	
SO_{2l}	α_1	α_i		α_1	α_i, α_j	$i, j \leq l-2$
	$l \geq 4$	α_i	α_l	$i \leq 3$	α_1	$\alpha_i, \alpha_j, \alpha_l$
		α_i	α_l	$i = l-1, l$	α_4	α_2, α_4
		α_1	α_i, α_l		α_4	$\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$
		α_l	α_1, α_i	$i = 2, l-1, l$	α_5	α_i, α_j
		α_l	α_{l-1}, α_l		α_4	α_6
		α_4	α_2, α_3	$l = 4$		
SO_{2l+1}	α_1	α_i		α_2	α_l	$l \geq 3$
		α_l		α_1	α_i, α_j	
				α_2	α_1, α_2	$l = 2$
Sp_{2l}	α_1	α_i		α_2	α_l	$l \geq 3$
		α_l		α_1	α_i, α_j	
				α_2	α_1, α_2	$l = 2$
E_6	α_1	α_i	$i \neq 3$	α_1	α_1, α_2	
		α_1	α_1, α_5	α_1	α_1, α_6	
				α_1	α_4, α_5	
				α_1	α_5, α_6	
E_7	α_1	α_i	$i = 1, 6, 7$	α_1	α_2	

В случае классических групп параболические подгруппы удобнее задавать не подмножествами простых корней, как в общем случае, а размерами диагональных блоков

в блочно-треугольной структуре общей матрицы. Теорему классификации для двойных многообразий флагов классических групп удобнее сформулировать и доказывать в этих терминах (см. теорему 2.5).

Общая идея вычисления сложности состоит в том, чтобы привести точку общего положения к некоторому каноническому виду и найти количество параметров, от которых этот вид зависит. При этом мы будем использовать теорему Панюшева (см. теорему 2.1). Двойных многообразий флагов для классических групп бесконечно много, и нам нужен способ отбросить сразу большое количество вариантов. Можно получить оценки на сложность снизу исходя из взаимного расположения блочных структур параболических подгрупп и размеров блоков. Для особых групп двойных многообразий флагов конечное число, оценки на сложность оставляют для перебора не слишком большое количество вариантов.

В главе 3 мы опишем структуру алгебр $R(X)^U$ для всех двойных многообразий флагов X сложностей 0 и 1. Мы докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 0.4. (см. разделы 3.3, 3.5) *Пусть $X = G/P^- \times G/Q^-$ имеет сложность 0 или 1, где P^- и Q^- — параболические подгруппы, содержащие отрицательную борелевскую подгруппу B^- , противоположные к P, Q ; пусть P и Q заданы подмножествами простых корней $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}\}$, нумерация корней соответствует [1]. Тогда алгебры $R(X)^U$ порождаются элементами указанных в таблицах 2 и 3 весов и мультистепеней и элементами соответствующих фундаментальных весов $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_r}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_t}$, мультистепеней $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, 1)$ соответственно. В случае сложности 0 указанные образующие свободно порождают $R(X)^U$. В случае сложности 1 в таблице указано количество определяющих соотношений между данными элементами (либо одно соотношение, либо их нет), вес и мультистепень соотношения. Если соотношение есть, то оно имеет следующий вид: сумма всех мономов данного веса и мультистепени от порождающих равна 0.*

Пояснения к таблицам. Если указано условие рядом с весом образующей, то данная образующая присутствует не всегда. Для удобства записи мы будем использовать иногда вес ω_0 вместо 0, а для группы SL_n ещё иногда вес ω_n вместо 0. Для случая сложности 1, когда образующие независимы, мы выписываем некоторые веса и мультистепень — это вес и мультистепень сечений, соответствующих параметрическим дивизорам (определение см. в разделе 1.3). Если соотношение между образующими есть, то вес и мультистепень сечений, соответствующих параметрическим дивизорам, совпадает с весом и мультистепенью соотношения.

Таблица 2: Веса и мультистепени образующих U -инвариантов в кольце Кокса для сложности 0

I	J	степень	вес
SL_n			
α_i	α_j $i \leq j$	(1, 1)	$\omega_{i-k} + \omega_{j+k}, k = 1, \dots, \min\{i, n-j\}$
α_i $i \leq j$	α_1, α_j	(1, 1, 0)	ω_{i+1}
		(1, 0, 1)	$\omega_{i-k} + \omega_{j+k}, k = 1, \dots, \min\{i, n-j\}$
		(1, 1, 1)	$\omega_{i-k+1} + \omega_{j+k}$ $k = \max\{1, 2 - (j-i)\}, \dots, \min\{i-1, n-j\}$
α_i $i > j$	α_1, α_j	(1, 1, 0)	ω_{i+1}
		(1, 0, 1)	$\omega_{i+k} + \omega_{j-k}, k = 1, \dots, \min\{j, n-i\}$
		(1, 1, 1)	$\omega_{i+k} + \omega_{j-k+1}, k = 2, \dots, \min\{j-1, n-i\}$
α_i $i \geq j+1$	α_j, α_{j+1}	(1, 1, 0)	$\omega_{i+k} + \omega_{j-k}, k = 1, \dots, \min\{j, n-i\}$
		(1, 0, 1)	$\omega_{i+k} + \omega_{j-k+1}, k = 1, \dots, \min\{j+1, n-i\}$
α_2 $i > j$ $i, j - i, n - j \geq 2$	α_i, α_j	(1, 1, 0)	$\omega_1 + \omega_{i+1}, \omega_{i+2}$
		(1, 0, 1)	$\omega_1 + \omega_{j+1}, \omega_{j+2}$
		(1, 1, 1)	$\omega_{i+1} + \omega_{j+1}$
α_1	$\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}$	(1, 1, 0, 0, ..., 0)	ω_{i_1+1}
		(1, 0, 1, 0, ..., 0)	ω_{i_2+1}
	
		(1, 0, 0, 0, ..., 1)	ω_{i_s+1}
Sp_{2l}, ($l \geq 2$)			
α_1 $i \leq l-1$	α_i	(1, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$
		(2, 1)	ω_i при $i > 1$
α_1	α_l	(1, 1)	ω_{l-1}
		(2, 1)	ω_l
α_l	α_l	(1, 1)	$2\omega_k, k = 0, \dots, l-1$
SO_{2l}, ($l \geq 4$)			
α_1 $i \leq l-3$	α_i	(1, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$
		(2, 1)	ω_i при $i > 1$
α_1	α_{l-2}	(1, 1)	$\omega_{l-3}, \omega_{l-1} + \omega_l$
		(2, 1)	ω_{l-2}
α_1	α_{l-1}	(1, 1)	ω_l
α_2	α_l	(1, 1)	$\omega_1 + \omega_{l-1}, \omega_l$
		(1, 2)	ω_{l-2}
α_3 $l \geq 6$	α_l	(1, 1)	$\omega_1 + \omega_l, \omega_2 + \omega_{l-1}, \omega_{l-1}$
		(1, 2)	$\omega_1 + \omega_{l-2}, \omega_{l-3}$
		(2, 2)	$\omega_2 + \omega_{l-2}$
α_{l-1}	α_l	(1, 1)	$\omega_{l-2k-1}, k = 1, \dots, [\frac{l-1}{2}]$
α_l	α_l	(1, 1)	$\omega_{l-2k}, k = 1, \dots, [\frac{l}{2}]$
α_1 $i \leq l-3$	α_i, α_l	(1, 1, 0)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$
		(2, 1, 0)	ω_i при $i > 1$
		(1, 0, 1)	ω_{l-1}
α_1	α_{l-2}, α_l	(1, 1, 0)	$\omega_{l-3}, \omega_{l-1} + \omega_l$
		(2, 1, 0)	ω_{l-2}
		(1, 0, 1)	ω_{l-1}

α_1	α_{l-1}, α_l	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (1, 1, 1)	ω_l ω_{l-1} ω_{l-2}
α_l	α_1, α_2	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1)	ω_{l-1} $\omega_1 + \omega_{l-1}, \omega_l$ ω_{l-2}
α_l	α_1, α_{l-1}	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (1, 1, 1)	ω_{l-1} $\omega_{l-2k-1}, k = 1, \dots, [\frac{l-1}{2}]$ $\omega_{l-2k}, k = 1, \dots, [\frac{l-2}{2}]$
α_l	α_1, α_l	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (1, 1, 1)	ω_{l-1} $\omega_{l-2k}, k = 1, \dots, [\frac{l}{2}]$ $\omega_{l-2k+1}, k = 2, \dots, [\frac{l-1}{2}]$
α_l	α_{l-1}, α_l	(1, 1, 0) (1, 0, 1)	$\omega_{l-2k-1}, k = 1, \dots, [\frac{l-1}{2}]$ $\omega_{l-2k}, k = 1, \dots, [\frac{l}{2}]$
SO₈			
α_4	α_2, α_3	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1)	$\omega_1 + \omega_3, \omega_4$ ω_2 ω_1
SO₁₀			
α_3	α_5	(1, 1) (1, 2)	$\omega_1 + \omega_5, \omega_2 + \omega_4, \omega_4$ $\omega_1 + \omega_3, \omega_2$
SO_{2l+1}, ($l \geq 3$)			
α_1 $i \leq l-2$	α_i	(1, 1) (2, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$
α_1	α_{l-1}	(1, 1) (2, 1)	$\omega_{l-2}, 2\omega_l$ ω_{l-1}
α_1	α_l	(1, 1) (1, 2)	ω_l ω_{l-1}
α_l	α_l	(1, 1)	$\omega_k, k = 0, \dots, l-1$
E₆			
α_1	α_1	(1, 1)	ω_2, ω_5
α_1	α_2	(1, 1) (2, 1)	$\omega_1 + \omega_5, \omega_3, \omega_6$ $\omega_2 + \omega_5, \omega_4$
α_1	α_4	(1, 1) (2, 1)	$\omega_2, \omega_5, \omega_5 + \omega_6$ ω_3, ω_6
α_1	α_5	(1, 1)	$0, \omega_6$
α_1	α_6	(1, 1) (2, 1)	ω_1, ω_4 ω_2
α_1	α_1, α_5	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (1, 1, 1)	ω_2, ω_5 $0, \omega_6$ ω_4
E₇			
α_1	α_1	(1, 1)	$0, \omega_2, \omega_6$
α_1	α_6	(1, 1) (2, 1)	ω_1, ω_7 ω_2
α_1	α_7	(1, 1) (2, 1) (2, 2)	$\omega_2, \omega_5, \omega_6$ ω_3, ω_7 ω_4

Таблица 3: Веса и мультистепени образующих U -инвариантов в кольце Кокса для сложности 1

I	J	степень	вес	соотношения
\mathbf{SL}_n				
α_2	$\alpha_i, \alpha_j, \alpha_m$	$(1, 1, 0, 0)$ $i < j < m$	$\omega_{2-k} + \omega_{i+k}, k = \max\{1, 3-i\}, \dots, 2$ $\omega_1 + \omega_{j+1}, \omega_{j+2}$	$(2, 1, 1, 1)$ $\omega_1 + \omega_{i+1} + \omega_{j+1} + \omega_{m+1}$
		$(1, 0, 1, 0)$		1 соотношение
		$(1, 0, 0, 1)$	$\omega_{2-k} + \omega_{m+k}, k = 1, \dots, \min\{2, n-m\}$	
		$(1, 1, 1, 0)$	$\omega_{i+1} + \omega_{j+1}$ при $j - i > 1$	
		$(1, 1, 0, 1)$	$\omega_{i+1} + \omega_{m+1}$	
		$(1, 0, 1, 1)$	$\omega_{j+1} + \omega_{m+1}$ при $m - j > 1$	
α_i	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	$(1, 1, 0, 0)$ $i, n - i \geq 3$	ω_{i+1} $\omega_1 + \omega_{i+1}, \omega_{i+2}$ $\omega_1 + \omega_{i+2}, \omega_2 + \omega_{i+1}, \omega_{i+3}$ $\omega_2 + \omega_{i+2}$	$(2, 1, 1, 1)$ $\omega_1 + \omega_2 + \omega_{i+1} + \omega_{i+2}$
		$(1, 0, 1, 0)$		1 соотношение
		$(1, 0, 0, 1)$		
		$(1, 1, 0, 1)$		
		$(1, 0, 1, 1)$		
α_i	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{n-1}$	$(1, 1, 0, 0)$ $i, n - i \geq 3$	ω_{i+1} $\omega_1 + \omega_{i+1}, \omega_{i+2}$ ω_{i-1} ω_i $\omega_1 + \omega_i, \omega_{i+1}$	$(2, 1, 1, 1)$ $\omega_1 + \omega_i + \omega_{i+1}$
		$(1, 0, 1, 0)$		1 соотношение
		$(1, 0, 0, 1)$		
		$(1, 1, 0, 1)$		
		$(1, 0, 1, 1)$		
α_3	α_i, α_j	$(1, 1, 0)$ $i, j - i, n - j \geq 2$	$\omega_{3-k} + \omega_{i+k}, k = \max\{1, 4-i\}, \dots, 3$ $\omega_{3-k} + \omega_{j+k}$ $k = 1, \dots, \min\{3, j-i\}$ $\omega_1 + \omega_{i+1} + \omega_{j+1}, \omega_{i+k} + \omega_{j+3-k}$ $k = 1, \dots, \min\{2, j-i-1\}$ $\omega_2 + \omega_{i+2} + \omega_{j+2}$	$(3, 2, 2)$ $\omega_1 + \omega_2 + \omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \omega_{j+1} + \omega_{j+2}$
		$(1, 0, 1)$		1 соотношение
		$(1, 1, 1)$		
		$(2, 1, 1)$		
α_i	α_2, α_4	$(1, 1, 0)$ $i, n - i \geq 4$	$\omega_1 + \omega_{i+1}, \omega_{i+2}$ $\omega_1 + \omega_{i+3}, \omega_2 + \omega_{i+2}, \omega_3 + \omega_{i+1}, \omega_{i+4}$ $\omega_1 + \omega_3 + \omega_{i+2}, \omega_3 + \omega_{i+3}$ $\omega_2 + \omega_{i+1} + \omega_{i+3}$	$(3, 2, 2)$ $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \omega_{i+3}$
		$(1, 0, 1)$		1 соотношение
		$(1, 1, 1)$		
		$(2, 1, 1)$		
α_i, α_j	α_1, α_2	$(1, 0, 1, 0)$	ω_{i+1}	$(1, 1, 1, 1)$
		$(1, 0, 0, 1)$	$\omega_{2-k} + \omega_{i+k}, k = \max\{1, 3-i\}, \dots, 2$	$\omega_1 + \omega_{i+1} + \omega_{j+1}$
		$(0, 1, 1, 0)$	ω_{j+1}	1 соотношение
		$(0, 1, 0, 1)$	$\omega_{2-k} + \omega_{j+k}$ $k = 1, \dots, \min\{2, n-j\}$	
		$(1, 1, 0, 1)$	$\omega_{i+1} + \omega_{j+1}$ при $j - i > 1$	
α_i, α_j	α_1, α_{n-1}	$(1, 0, 1, 0)$	ω_{i+1}	$(1, 1, 1, 1)$
		$(1, 0, 0, 1)$	ω_{i-1}	$\omega_i + \omega_j$
		$(0, 1, 1, 0)$	ω_{j+1}	при $j - i > 1$
		$(0, 1, 0, 1)$	ω_{j-1}	0 соотношений;
		$(1, 0, 1, 1)$	ω_i при $i > 1$	при $j - i = 1$
		$(0, 1, 1, 1)$	ω_j при $n - j > 1$	1 соотношение

$\text{Sp}_{2l}, (l \geq 2)$				
α_l	α_2	(1, 1) (1, 2) (2, 2)	$\omega_1 + \omega_{l-1}, \omega_{l-2}$ $\omega_1 + \omega_{l-1}, 2\omega_1 + \omega_l, \omega_l$ $2\omega_{l-1}$	(3, 4) $2\omega_1 + 2\omega_{l-1} + \omega_l$ 1 соотношение
α_1	α_i, α_l	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ ω_{l-1} ω_l	(2, 1, 1) $\omega_i + \omega_l$ при $l - i > 1$ 0 соотношений; при $l - i = 1$ 1 соотношение
α_1	α_i, α_j $i < j < l$	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{j-1}, \omega_{j+1}$ ω_j	(2, 1, 1) $\omega_i + \omega_j$ при $j - i > 1$ 0 соотношений; при $j - i = 1$ 1 соотношение
Sp_4				
α_2	α_1	(1, 1, 0) (1, 2, 0) (1, 0, 1)	ω_1 ω_2 $0, 2\omega_1$	(2, 1, 1) $2\omega_1 + \omega_2$ 1 соотношение
Sp_6				
α_3	α_2	(1, 1) (1, 2) (2, 2)	$\omega_1, \omega_1 + \omega_2$ $2\omega_1 + \omega_3, \omega_3$ $2\omega_2$	(3, 4) $2\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3$ 1 соотношение
$\text{SO}_{2l}, (l \geq 4)$				
α_1	α_i, α_j $i < j < l - 2$	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{j-1}, \omega_{j+1}$ ω_j	(2, 1, 1) $\omega_i + \omega_j$ при $j - i > 1$ 0 соотношений; при $j - i = 1$ 1 соотношение
α_1	α_i, α_{l-2} $i < l - 2$	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{l-3}, \omega_{l-1} + \omega_l$ ω_{l-2}	(2, 1, 1) $\omega_i + \omega_{l-2}$ при $l - 2 - i > 1$ 0 соотношений; при $l - 2 - i = 1$ 1 соотношение
α_1	$\alpha_i, \alpha_j, \alpha_l$ $i < j < l - 2$	(1, 1, 0, 0) (2, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (2, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{j-1}, \omega_{j+1}$ ω_j ω_{l-1}	(2, 1, 1, 0) $\omega_i + \omega_j$ при $j - i > 1$ 0 соотношений; при $j - i = 1$ 1 соотношение
α_1	$\alpha_i, \alpha_{l-2}, \alpha_l$ $i < l - 2$	(1, 1, 0, 0) (2, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (2, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{l-3}, \omega_{l-1} + \omega_l$ ω_{l-2} ω_{l-1}	(2, 1, 1, 0) $\omega_i + \omega_{l-2}$ при $l - 2 - i > 1$ 0 соотношений; при $l - 2 - i = 1$ 1 соотношение

α_1	$\alpha_i, \alpha_{l-1}, \alpha_l$	$(1, 1, 0, 0)$ $(2, 1, 0, 0)$ $(1, 0, 1, 0)$ $(1, 0, 0, 1)$ $(1, 0, 1, 1)$	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ ω_l ω_{l-1} ω_{l-2}	$(2, 1, 1, 1)$ $\omega_i + \omega_{l-1} + \omega_l$ при $l - 1 - i > 1$ 0 соотношений; при $l - 1 - i = 1$ 1 соотношение
SO₈				
α_4	α_2, α_4	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$	$\omega_1 + \omega_3, \omega_4$ ω_2 $0, \omega_2$	$(2, 1, 1)$ $\omega_2 + \omega_4$ 1 соотношение
α_4	$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$	$(1, 1, 0, 0)$ $(1, 0, 1, 0)$ $(1, 0, 0, 1)$ $(1, 1, 1, 0)$	ω_3 ω_1 $0, \omega_2$ ω_2	$(2, 1, 1, 1)$ $\omega_1 + \omega_3 + \omega_4$ 0 соотношений
α_4	$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$	$(1, 1, 0, 0)$ $(2, 1, 0, 0)$ $(1, 0, 1, 0)$ $(1, 0, 0, 1)$	$\omega_1 + \omega_3, \omega_4$ ω_2 ω_1 $0, \omega_2$	$(2, 1, 0, 1)$ $\omega_2 + \omega_4$ 1 соотношение
α_4	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$	$(1, 1, 0, 0)$ $(1, 0, 1, 0)$ $(2, 0, 1, 0)$ $(1, 0, 0, 1)$	ω_3 $\omega_1 + \omega_3, \omega_4$ ω_2 $0, \omega_2$	$(2, 0, 1, 1)$ $\omega_2 + \omega_4$ 1 соотношение
α_4	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	$(1, 1, 0, 0)$ $(1, 0, 1, 0)$ $(2, 0, 1, 0)$ $(1, 0, 0, 1)$ $(1, 1, 0, 1)$	ω_3 $\omega_1 + \omega_3, \omega_4$ ω_2 ω_1 ω_2	$(2, 1, 1, 1)$ $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ 1 соотношение
SO₁₀				
α_5	α_2, α_5	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(1, 1, 1)$ $(2, 1, 1)$	$\omega_1 + \omega_4, \omega_5$ ω_3 ω_1, ω_3 ω_3 $\omega_2 + \omega_4$	$(2, 1, 1)$ $\omega_3 + \omega_5$ 1 соотношение
α_5	α_2, α_4	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(1, 1, 1)$	$\omega_1 + \omega_4, \omega_5$ ω_3 $0, \omega_2$ $\omega_1 + \omega_3$	$(2, 1, 1)$ $\omega_2 + \omega_5$ 0 соотношений
α_5	α_3, α_5	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$	$\omega_1 + \omega_5, \omega_2 + \omega_4, \omega_4$ $\omega_1 + \omega_3, \omega_2$ ω_1, ω_3	$(2, 1, 1)$ $\omega_1 + \omega_3 + \omega_5$ 1 соотношение
α_5	α_3, α_4	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$	$\omega_1 + \omega_5, \omega_2 + \omega_4, \omega_4$ $\omega_1 + \omega_3, \omega_2$ $0, \omega_2$	$(2, 1, 1)$ $\omega_2 + \omega_4$ 1 соотношение
SO₁₂				
α_4	α_6	$(1, 1)$ $(1, 2)$	$\omega_1 + \omega_5, \omega_2 + \omega_6, \omega_3 + \omega_5, \omega_6$ $\omega_1 + \omega_3, \omega_2, \omega_2 + \omega_4, \omega_4$	$(2, 3)$ $\omega_2 + \omega_4 + \omega_6$ 1 соотношение

$\text{SO}_{2l+1}, (l \geq 3)$				
α_2	α_l	(1, 1) (1, 2) (2, 2)	$\omega_1 + \omega_l, \omega_l$ $\omega_1 + \omega_{l-1}, \omega_{l-2}, \omega_{l-1}$ $\omega_1 + \omega_{l-1}$	(2, 3) $\omega_1 + \omega_{l-1} + \omega_l$ 1 соотношение
α_1	α_i, α_j $i < j < l - 1$	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{j-1}, \omega_{j+1}$ ω_j	(2, 1, 1) $\omega_i + \omega_j$ при $j - i > 1$ 0 соотношений; при $j - i = 1$ 1 соотношение
α_1	α_i, α_{l-1} $i < l - 1$	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{l-2}, 2\omega_l$ ω_{l-1}	(2, 1, 1) $\omega_i + \omega_{l-1}$ при $l - 1 - i > 1$ 0 соотношений; при $l - 1 - i = 1$ 1 соотношение
α_1	α_i, α_l	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (1, 0, 2)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ ω_l ω_{l-1}	(2, 1, 2) $\omega_i + 2\omega_l$ при $l - i > 1$ 0 соотношений; при $l - i = 1$ 1 соотношение
SO_7				
α_2	α_3	(1, 1) (1, 2)	$\omega_1 + \omega_3, \omega_3$ $\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2$	(2, 3) $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ 1 соотношение
E_6				
α_1	α_1, α_2	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1)	ω_2, ω_5 $\omega_1 + \omega_5, \omega_3, \omega_6$ $\omega_2 + \omega_5, \omega_4$	(2, 1, 1) $\omega_1 + \omega_2 + \omega_5$ 1 соотношение
α_1	α_1, α_6	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1) (2, 1, 1)	ω_2, ω_5 ω_1, ω_4 ω_2 ω_3	(2, 1, 1) $\omega_1 + \omega_2$ 0 соотношений
α_1	α_4, α_5	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1)	$\omega_2, \omega_5, \omega_5 + \omega_6$ ω_3, ω_6 $0, \omega_6$	(2, 1, 1) $\omega_5 + \omega_6$ 1 соотношение
α_1	α_5, α_6	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1) (1, 1, 1)	$0, \omega_6$ ω_1, ω_4 ω_2 ω_3	(2, 1, 1) $\omega_1 + \omega_6$ 0 соотношений
E_7				
α_1	α_2	(1, 1) (2, 1)	$\omega_1, \omega_1 + \omega_6, \omega_3, \omega_7$ $\omega_2, \omega_2 + \omega_6, \omega_5, \omega_6$	(3, 2) $\omega_1 + \omega_2 + \omega_6$ 1 соотношение

Теорема даёт некоторые новые правила разложения тензорных произведений неприводимых представлений, реализующихся в пространствах сечений линейных расслоений над G/P и G/Q соответственно.

Для описания структуры кольца $R(X)^U$ мы будем описывать простые B -инвариантные дивизоры на X и соответствующие канонические сечения. Для нахождения простых B -инвариантных дивизоров мы будем действием группы B приводить точку к каноническому виду (он единственный для случая сложности 0, параметризуется комплексной прямой в случае сложности 1) и искать условия, когда этого сделать нельзя. Эти условия и будут задавать дивизоры из дополнения к открытой B -орбите в случае сложности 0 и B -инвариантные дивизоры из дополнения к некоторому параметрическому семейству B -орбит в случае сложности 1.

Метод описания соответствующих канонических сечений различается для классических и особых групп. В случае классических групп точки многообразия флагов являются цепочками вложенных друг в друга подпространств (в ортогональном и симплектическом случаях есть некоторые условия на эти подпространства). В этом случае дивизоры можно задавать в компактной геометрической форме — в терминах взаимного расположения этих подпространств. Из такого задания можно легко получить описание соответствующих канонических сечений.

В случае особых групп такого хорошего способа задания дивизоров нет. Описание канонических сечений следует из явного задания дивизоров в координатах. В некоторых случаях рассмотрение весов и знание примерного вида уравнения дивизора позволяет избежать вычислений.

Основные обозначения и соглашения

основное поле — поле комплексных чисел \mathbb{C} ;

G — простая комплексная алгебраическая группа;

$T \subseteq G$ — максимальный тор;

$B \subseteq G$ — борелевская подгруппа, содержащая T ;

$U \subseteq B$ — максимальная унипотентная подгруппа;

$P, Q \supseteq B$ — параболические подгруппы в G ;

$\Delta = \Delta(G)$ — система корней группы G относительно тора T ;

$\Delta^+ \subset \Delta$ — множество положительных корней, соответствующих заданному выбору борелевской подгруппы B ;

$\Pi \subset \Delta^+$ — система простых корней, соответствующих заданному выбору борелевской подгруппы B ;

α_i — простые корни, нумерация по [1, табл. 1];

ω_i — фундаментальные веса;

$U_\alpha \subset G$ — одномерная унипотентная подгруппа, соответствующая корню α ;

$V(\lambda) = V_G(\lambda)$ — неприводимый G -модуль со старшим весом λ ;

$\text{Res}_H^G V_G(\lambda)$ — ограничение G -модуля $V_G(\lambda)$ на подгруппу $H \subset G$;

$V(\lambda)^*$ — двойственный к $V(\lambda)$ модуль;

λ^* — старший вес $V(\lambda)^*$;

X — гладкое неприводимое алгебраическое G -многообразие;

$\mathbb{C}(X)$ — поле рациональных функций на многообразии X ;

$\text{ord}_D f, \text{ord}_D s$ — порядок функции f и сечения s вдоль простого дивизора D ;

$H^0(X, \mathcal{L})$ — пространство сечений линейного расслоения \mathcal{L} над многообразием X ;

$\mathcal{O}(D)$ — линейное расслоение, соответствующее дивизору D ;

$s_D \in H^0(X, \mathcal{O}(D))$ — каноническое сечение расслоения $\mathcal{O}(D)$, удовлетворяющее условию $\text{div } s_D = D$;

M^H — множество неподвижных точек для действия группы H на множестве M .

Глава 1

О двойных многообразиях флагов

1.1. Двойные многообразия флагов и их кольца Кокса

Напомним, что многообразия вида G/P , где P — параболическая подгруппа, называются (обобщёнными) многообразиями (частичных) флагов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Двойными многообразиями флагов называются многообразия вида $G/P \times G/Q$, где P, Q — некоторые параболические подгруппы G .

В дальнейшем нам будет удобно рассматривать параболические подгруппы P, Q , содержащие борелевскую подгруппу $B \subseteq G$, а двойные многообразия флагов реализовывать в виде $G/P^- \times G/Q^-$, где P^- и Q^- — параболические подгруппы в G , противоположные к P и Q .

Таким образом, двойные многообразия флагов задаются парами параболических подгрупп. Параболические подгруппы $P \supseteq B$ можно задавать набором простых корней. Будем говорить, что параболическая подгруппа задана множеством простых корней $I \subseteq \Pi$, и обозначать её P_I , если имеет место следующее разложение её касательной алгебры:

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\{\alpha > 0\} \cup \{\alpha \in \mathbb{Z}(\Pi \setminus I)\}} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где \mathfrak{t} — касательная алгебра тора T , \mathfrak{g}_α — касательная алгебра одномерной унитентной подгруппы U_α . При таком определении максимальные параболические подгруппы будут соответствовать подмножествам из одного простого корня.

Разложим параболическую подгруппу $P = P_I$ в полупрямое произведение подгруппы Леви и унитентного радикала: $P = L \times U_P$, где $L \supseteq T$. Аналогичное разложение имеем и на уровне касательной алгебры: $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}_P$. Тогда алгебры \mathfrak{l} и \mathfrak{u}_P будут иметь следующие

разложения:

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}(\Pi \setminus I)} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{u}_P = \bigoplus_{\{\alpha > 0 \mid \alpha \notin \mathbb{Z}(\Pi \setminus I)\}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Касательная алгебра P_I^- имеет следующее разложение:

$$\mathfrak{p}_I^- = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\{\alpha < 0\} \cup \{\alpha \in \mathbb{Z}(\Pi \setminus I)\}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Мы дадим определение кольца Кокса многообразия X в случае, когда группа Пикара $\text{Pic}(X)$ свободна конечного ранга. Пусть группа $\text{Pic}(X)$ свободно порождается классами линейных расслоений $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$. Тогда любое линейное расслоение \mathcal{L} над X изоморфно расслоению вида $\mathcal{L}_1^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_s^{k_s}$, $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Кольцом Кокса многообразия X называется пространство

$$R(X) = \bigoplus_{k_i \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{L}_1^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_s^{k_s}).$$

Пространство $R(X)$ является кольцом относительно тензорного умножения сечений.

ЗАМЕЧАНИЕ. На кольце $R(X)$ имеется естественная градуировка группой $\text{Pic}(X)$. Градуировка определяет мультистепень однородных элементов, а сечения линейных расслоений — это в точности мультиоднородные элементы $R(X)$.

Более общее определение колец Кокса можно посмотреть, например, в [5, 1.4].

Теперь найдем кольца Кокса многообразий флагов — для этого нам понадобится базис группы $\text{Pic}(G/P^- \times G/Q^-)$.

Пусть $P = P_{\{\alpha_i\}}$ — максимальная параболическая подгруппа. Многообразие G/P^- вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}(V(\omega_i^*))$ как проективизация орбиты младшего вектора. Старший вектор двойственного модуля $f_{\omega_i} \in V(\omega_i^*)^* \simeq V(\omega_i)$ является линейной формой на $\mathbb{P}(V(\omega_i^*))$ и задает некоторый P -инвариантный простой дивизор $D_{P,i}$ на G/P^- , который называется дивизором Шуберта. Группа Пикара многообразия G/P^- порождается классом дивизора $D_{P,i}$. Каноническое сечение $s_{D_{P,i}}$ — это ограничение на G/P^- линейной формы f_{ω_i} ; его вес равен ω_i .

Пусть теперь $P = P_I$, $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$. Прообразы дивизоров $D_{P,i_k} \subset G/P_{\{\alpha_{i_k}\}}$ при естественных морфизмах $G/P^- \rightarrow G/P_{\{\alpha_{i_k}\}}$ будут P -инвариантными дивизорами на G/P^- , которые мы тоже будем называть дивизорами Шуберта и обозначать так же. Дивизоры Шуберта являются компонентами дополнения к открытой B -орбите и исчезают везде, где нет простых B -инвариантных дивизоров на G/P^- . Группа Пикара свободно порождается классами дивизоров Шуберта. Веса канонических сечений, соответствующих дивизорам

Шуберта, равны $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_r}$. Подробнее про дивизоры Шуберта можно посмотреть, например, в [6, 2].

Пусть $D = \sum m_{i_k} D_{i_k}$, $\lambda = \sum m_{i_k} \omega_{i_k}$. Тогда $H^0(G/P^-, \mathcal{O}(D)) \simeq V(\lambda)$, если $m_{i_1}, \dots, m_{i_r} \geq 0$, и 0 в противном случае. Таким образом:

$$R(G/P^-) \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda = m_{i_1} \omega_{i_1} + \dots + m_{i_r} \omega_{i_r} \\ m_{i_1}, \dots, m_{i_r} \geq 0}} V(\lambda).$$

Теперь рассмотрим двойное многообразие флагов $X = G/P^- \times G/Q^-$, где $P = P_I$, $Q = P_J$, $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}\}$. Его группа Пикара будет свободно порождаться прообразами дивизоров Шуберта на G/P^- и G/Q^- при канонических проекциях $X \rightarrow G/P^-$ и $X \rightarrow G/Q^-$ соответственно. Допуская вольность речи, такие прообразы дивизоров Шуберта мы тоже будем называть дивизорами Шуберта и обозначать так же. Кольцо Кокса двойного многообразия флагов можно записать в следующем виде:

$$R(X) = R(G/P^-) \otimes R(G/Q^-) \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda = m_{i_1} \omega_{i_1} + \dots + m_{i_r} \omega_{i_r}, m_{i_1}, \dots, m_{i_r} \geq 0 \\ \mu = n_{j_1} \omega_{j_1} + \dots + n_{j_t} \omega_{j_t}, n_{j_1}, \dots, n_{j_t} \geq 0}} V(\lambda) \otimes V(\mu).$$

Мультистепень будет задаваться целочисленным $(r+t)$ -вектором.

1.2. Тензорное произведение модулей и ограничение на подгруппу

Опишем, каким образом знание U -инвариантов колец Кокса двойных многообразий флагов позволяет раскладывать тензорные произведения неприводимых G -модулей и получать некоторые правила ветвления.

Пусть кольцо A градуировано некоторой группой E , тогда через A_ρ будем обозначать соответствующую элементу $\rho \in E$ однородную компоненту в кольце A . Если $A' \subseteq A$ — некоторое подмножество, то через A'_ρ обозначим $A_\rho \cap A'$.

Пусть $X = G/P^- \times G/Q^-$, где $P = P_I$, $Q = P_J$, $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}\}$. Пусть $\lambda = \sum m_{i_k} \omega_{i_k}$, $\mu = \sum n_{j_l} \omega_{j_l}$. Тогда подмодуль $V(\lambda) \otimes V(\mu) \subset R(X)$ будет состоять в точности из мультиоднородных элементов мультистепени $(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, n_{j_1}, \dots, n_{j_t}) =: (\bar{m}, \bar{n})$, то есть совпадать с $R(X)_{(\bar{m}, \bar{n})}$.

Кратность вхождения $V(\nu)$ в $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ равна размерности пространства $(V(\lambda) \otimes V(\mu))_\nu^U$ инвариантов относительно действия U , имеющих вес ν относительно действия T . Это пространство можно отождествить с подпространством $R(X)_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}^U$ (где ν — вес относительно тора T). Таким образом:

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq R(X)_{(\bar{m}, \bar{n})} \simeq \bigoplus_{\nu} V(\nu)^{\oplus d(\bar{m}, \bar{n}, \nu)},$$

где $d(\bar{m}, \bar{n}, \nu) = \dim R(X)_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}^U$.

Пусть H — редуктивная подгруппа G , причём $B \cap H$ — борелевская подгруппа в H , а $T \cap H$ — максимальный тор в H . Похожие рассуждения приводят к следующему правилу ветвления:

$$\text{Res}_H^G V_G(\lambda) \simeq \bigoplus_{\nu} V_H(\nu)^{\oplus d(\bar{m}, \nu)},$$

где $d(\bar{m}, \nu) = \dim R(G/P^-)_{(\bar{m}), \nu}^{U \cap H}$ (ν — вес относительно тора $T \cap H$).

Оказывается, что если в качестве H взять подгруппу Леви $M \subset Q$, то структуру кольца $R(G/P^-)^{U \cap H}$ мы можем найти из структуры кольца $R(G/P^- \times G/Q^-)^U$.

ТЕОРЕМА 1.3. *Кольцо $R(G/P^-)^{U \cap M}$ изоморфно подкольцу в кольце частных $R(G/P^- \times G/Q^-)^U$ по мультипликативной системе, порожденной элементами $s_{D_{Q,j_1}}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}$, состоящему из элементов мультистепени $(0, \dots, 0)$ по второй группе координат в \mathbb{Z}^{r+t} . Данное кольцо обозначим через $R(G/P^- \times G/Q^-)^U[s_{D_{Q,j_1}}^{-1}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}^{-1}]_{(\bar{s}, \bar{0})}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим изоморфизм $\varphi : R(G/P^-)^{U \cap M} \rightarrow R(G/P^- \times G/Q^-)^U[s_{D_{Q,j_1}}^{-1}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}^{-1}]_{(\bar{s}, \bar{0})}$. Вначале определим φ на однородных элементах, то есть на сечениях. Рассмотрим произвольное линейное расслоение \mathcal{L} над G/P^- и его $(U \cap M)$ -инвариантное сечение $s \in H^0(G/P^-, \mathcal{L})^{U \cap M}$. Сечение s единственным образом продолжается до U -инвариантного сечения $\tilde{s} \in H^0(G/P^- \times U_Q[e], \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{O}_{G/Q^-})^U$. Полученное сечение \tilde{s} может не быть регулярным на всем X — оно может иметь полюса на $X \setminus (G/P^- \times U_Q[e])$, то есть на дивизорах Шуберта D_{Q,j_k} . Рассмотрим сечение $\hat{s} = \tilde{s} \otimes s_{D_{Q,j_1}}^{n_{j_1}} \otimes \dots \otimes s_{D_{Q,j_t}}^{n_{j_t}}$, где $n_{j_k} = -\text{ord}_{D_{Q,j_k}} \tilde{s}$. Тогда $\hat{s} \in H^0(X, \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{O}(n_{j_1} D_{Q,j_1} + \dots + n_{j_t} D_{Q,j_t}))^U$ и имеет мультистепень $(n_{j_1}, \dots, n_{j_t})$ по второй группе координат, задающих мультистепень. Положим $\varphi(s) := \tilde{s} = \hat{s} \otimes s_{D_{Q,j_1}}^{-n_{j_1}} \otimes \dots \otimes s_{D_{Q,j_t}}^{-n_{j_t}} \in R(G/P^- \times G/Q^-)^U[s_{D_{Q,j_1}}^{-1}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}^{-1}]_{(\bar{s}, \bar{0})}$. На неоднородных элементах кольца $R(G/P^-)^{U \cap M}$ отображение φ определим по линейности.

То, что φ является изоморфизмом следует того, что можно построить обратное отображение. Поскольку φ переводит однородные элементы в однородные, то достаточно построить обратное отображение на однородных элементах. Элементы вида $\hat{s} \otimes s_{D_{Q,j_1}}^{-n_{j_1}} \otimes \dots \otimes s_{D_{Q,j_t}}^{-n_{j_t}}$,

где сечение \widehat{s} имеет мультистепень $(n_{j_1}, \dots, n_{j_t})$ по второй группе координат, являющиеся U -инвариантными рациональными сечениями расслоения $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{O}_{G/Q^-}$, регулярными на $G/P^- \times U_Q[e]$. На них отображение φ^{-1} определяется как ограничение на $G/P^- \times [e] \simeq G/P^-$. \square

Для следующих случаев размерности $d(\bar{m}, \bar{n}, \nu)$ и $d(\bar{m}, \nu)$, участвующие в правилах разложения тензорных произведений и правилах ветвления, легко вычисляются. Как следует из теоремы 1.9, эти случаи будут включать в себя случаи сложностей 0 и 1.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $X = G/P^- \times G/Q^-$, где $P = P_I$, $Q = P_J$, $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}\}$. Пусть $\lambda = \sum m_{i_k} \omega_{i_k}$, $\mu = \sum n_{j_l} \omega_{j_l}$ и $(\bar{m}, \bar{n}) := (m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, n_{j_1}, \dots, n_{j_t})$.

a) Пусть $R(X)^U$ свободна, элементы её минимальной системы однородных порождающих имеют веса ν_1, \dots, ν_d и мультистепени $(\bar{m}_1, \bar{n}_1), \dots, (\bar{m}_d, \bar{n}_d)$. Тогда имеет место следующее разложение:

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq \bigoplus_{k_1(\bar{m}_1, \bar{n}_1) + \dots + k_d(\bar{m}_d, \bar{n}_d) = (\bar{m}, \bar{n})} V(k_1\nu_1 + \dots + k_d\nu_d).$$

б) Пусть $R(G/P^-)^{U \cap M}$ свободна, элементы её минимальной системы однородных порождающих имеют веса ν_1, \dots, ν_d и мультистепени $(\bar{m}_1), \dots, (\bar{m}_d)$. Тогда имеет место следующее разложение:

$$\text{Res}_M^G V_G(\lambda) \simeq \bigoplus_{k_1(\bar{m}_1) + \dots + k_d(\bar{m}_d) = (\bar{m})} V_M(k_1\nu_1 + \dots + k_d\nu_d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидным образом следует из вышенаписанного. \square

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $X, \lambda, \mu, (\bar{m}, \bar{n})$ — как в теореме 1.4.

a) Пусть $R(X)^U$ является гиперповерхностью (т.е. образующие связаны единственным определяющим соотношением), элементы её минимальной системы однородных порождающих имеют веса ν_1, \dots, ν_d и мультистепени $(\bar{m}_1, \bar{n}_1), \dots, (\bar{m}_d, \bar{n}_d)$, а определяющее соотношение имеет вес ν_0 и мультистепень (\bar{m}_0, \bar{n}_0) . Тогда имеет место следующее разложение:

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq \bigoplus_{k_1(\bar{m}_1, \bar{n}_1) + \dots + k_d(\bar{m}_d, \bar{n}_d) = (\bar{m}, \bar{n})} V(k_1\nu_1 + \dots + k_d\nu_d) - \bigoplus_{l_1(\bar{m}_1, \bar{n}_1) + \dots + l_d(\bar{m}_d, \bar{n}_d) = (\bar{m}, \bar{n}) - (\bar{m}_0, \bar{n}_0)} V(\nu_0 + l_1\nu_1 + \dots + l_d\nu_d) \quad (1)$$

Под разностью представлений понимается представление, для которого кратность вхождения каждого неприводимого представления $V(\nu)$ равна разности кратностей вхождения $V(\nu)$ в исходные представления.

б) Пусть $R(G/P^-)^{U \cap M}$ является гиперповерхностью, элементы её минимальной системы однородных порождающих имеют веса ν_1, \dots, ν_d и мультистепени $(\bar{m}_1), \dots, (\bar{m}_d)$, а определяющее соотношение имеет вес ν_0 и мультистепень (\bar{m}_0) . Тогда имеет место следующее разложение:

$$\begin{aligned} \text{Res}_M^G V_G(\lambda) \simeq & \bigoplus_{k_1(\bar{m}_1) + \dots + k_d(\bar{m}_d) = (\bar{m})} V_M(k_1\nu_1 + \dots + k_d\nu_d) - \\ & - \bigoplus_{l_1(\bar{m}_1) + \dots + l_d(\bar{m}_d) = (\bar{m}) - (\bar{m}_0)} V_M(\nu_0 + l_1\nu_1 + \dots + l_d\nu_d) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение а). Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow (F_1) \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_d] \xrightarrow{\varphi_2} R(X)^U \rightarrow 0,$$

где F_1 — определяющее соотношение, φ_1 — естественное вложение, $\varphi_2(t_i) = f_i$. Введем на алгебре многочленов $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_d]$ \mathbb{Z}^{r+t+l} -градуировку, где $l = \text{rk } G$, приписав каждой переменной t_i мультистепень (\bar{m}_i, \bar{n}_i) и вес ν_i . Тогда φ_1 и φ_2 сохраняют градуировку. Кратность вхождения $V(\nu)$ в $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ равна $\dim R(X)_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}^U$, кратность вхождения в уменьшающее правой части изоморфизма (1) равна $\dim \mathbb{C}[t_1, \dots, t_d]_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}$, а кратность вхождения в вычитаемое правой части изоморфизма (1) равна $\dim (F_1)_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}$. Из точности последовательности имеем $\dim R(X)_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}^U = \dim \mathbb{C}[t_1, \dots, t_d]_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu} - \dim (F_1)_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}$, что и доказывает теорему.

Пункт б) доказывается аналогично. □

1.3. Строение B -инвариантных дивизоров на многообразиях малой сложности

В данном разделе мы обсудим, как устроена совокупность B -инвариантных дивизоров на многообразиях сложностей 0 и 1. Более подробно про строение совокупности дивизоров можно посмотреть, например, в [19, 16.2].

Напомним определение сложности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Сложностью действия группы G на неприводимом алгебраическом многообразии X называется коразмерность $c(X) = c_G(X)$ типичной B -орбиты.

ЗАМЕЧАНИЕ. Многообразия сложности 0 также называются сферическими.

На сферическом многообразии простых B -инвариантных дивизоров конечное число, поскольку они являются компонентами дополнения к открытой B -орбите.

Пусть теперь X — рациональное многообразие сложности 1. По теореме Люорота $\mathbb{C}(X)^B \simeq \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$. Вложение полей $\mathbb{C}(X) \supseteq \mathbb{C}(X)^B$ задает рациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, типичные слои которого являются замыканиями типичных B -орбит. Поэтому простые B -инвариантные дивизоры устроены следующим образом: все они, за исключением некоторого конечного числа, образуют семейство, которое параметризуется проективной прямой без конечного числа точек. Дивизоры данного семейства будем называть параметрическими, а остальные, которых будет конечное число, — исключительными.

Для каждого простого B -инвариантного дивизора $D \subset X$, ограничив ord_D на $\mathbb{C}(X)^B \simeq \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$, получим нормирование поля $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$ с некоторым центром $z_D \in \mathbb{P}^1$ и порядком $h_D \in \mathbb{Z}_+$ локальной координаты в z_D (при $h_D = 0$ в качестве z_D можно взять любую точку \mathbb{P}^1). Дивизоры D , для которых $h_D > 0$, при отображении $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ переходят в z_D . Остальные дивизоры отображаются на \mathbb{P}^1 доминантно. Параметрические дивизоры будут характеризоваться тем, что для них $h_D = 1$ и не существует других B -инвариантных простых дивизоров D' , для которых $z_D = z_{D'}$ и $h_{D'} > 0$. Точки z проективной прямой, для которых нет такого параметрического дивизора D , что $z_D = z$, будем называть исключительными. Исключительных точек будет конечное число. Остальные точки \mathbb{P}^1 назовем типичными.

Для рассмотренного выше рационального отображения $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ можно найти такие сечения F и F' некоторого G -линейного расслоения $\mathcal{L} \rightarrow X$, что это отображение будет задаваться формулой $x \mapsto (F(x) : F'(x))$. Поскольку отображение постоянно на B -орбитах, то выбранные сечения будут B -полуинвариантными одного и того же веса. Таким образом мы задали отображение с помощью линейной системы дивизоров $\{D \mid D = \text{div } s, s \in \langle F, F' \rangle\}$. Параметрические дивизоры — это в точности простые дивизоры линейной системы. Для типичной точки $z = (p : q) \in \mathbb{P}^1$ параметрический дивизор D , для которого $z_D = z$, будет иметь вид $D = \text{div}(qF - pF')$. Для исключительной точки $z = (p : q) \in \mathbb{P}^1$ дивизор $D = \text{div}(qF - pF')$ не будет простым, и верно следующее разложение: $\text{div}(qF - pF') = \sum_{z_{D_i}=z} h_{D_i} D_i$, где D_i — все простые исключительные дивизоры в прообразе точки z .

1.4. Связь между B -инвариантными дивизорами и алгеброй U -инвариантов кольца Кокса

Теперь опишем строение алгебр U -инвариантов колец Кокса многообразий малой сложности. Будем считать, что $\text{Pic}(X)$ конечно порождена и свободна, тем самым кольцо Кокса корректно определено.

Отметим, что если дивизор D является B -инвариантным, то каноническое сечение s_D будет B -полуинвариантным, и наоборот.

ТЕОРЕМА 1.7. *Пусть X — полное гладкое многообразие сложности 0, а D_1, \dots, D_d — все простые B -инвариантные дивизоры на X . Тогда алгебра $R(X)^U$ свободно порождается каноническими сечениями s_{D_i} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что s_{D_i} порождают $R(X)^U$. Любой элемент из $R(X)^U$ представляется в виде суммы сечений попарно неизоморфных расслоений, эти сечения тоже будут U -инвариантными. Разложим U -инвариантное сечение в сумму B -полуинвариантных. Значит достаточно доказать утверждение для произвольного B -полуинвариантного сечения s линейного расслоения на X . Его дивизор является линейной комбинацией $\text{div } s = \sum a_i D_i$. Тогда s пропорционально произведению $\prod s_{D_i}^{a_i}$ по всем $i = 1, \dots, d$.

Осталось доказать, что s_{D_i} алгебраически независимы. Вначале заметим, что $\mathbb{C}(X)^B = \mathbb{C}$. Действительно, любая $f \in \mathbb{C}(X)^B$ постоянна на открытой орбите, а значит, и на всем X . Если выполнено некое нетривиальное соотношение между s_{D_i} , то найдутся два непропорциональных монома от s_{D_i} одного веса и одной мультистепени. Отношение этих мономов определяет непостоянную B -инвариантную рациональную функцию на X , что противоречит равенству $\mathbb{C}(X)^B = \mathbb{C}$. \square

Похожая теорема верна для многообразий сложности 1.

ТЕОРЕМА 1.8. *Пусть X — полное рациональное гладкое многообразие сложности 1, пусть D_i — все исключительные B -инвариантные дивизоры, а F и F' — сечения, определенные выше. Тогда $R(X)^U$ порождается каноническими сечениями s_{D_i} , F и F' . Если на \mathbb{P}^1 имеется хотя бы одна или две исключительные точки, то либо один, либо оба из элементов F и F' можно убрать из порождающих. Идеал соотношений порождается соотношениями вида*

$$qF - pF' = \prod_{z_{D_i}=(p:q)} s_{D_i}^{h_{D_i}},$$

где $(p : q)$ — исключительная точка \mathbb{P}^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечная порождённость доказывается аналогично предыдущей теореме. Пусть s — произвольное B -полуинвариантное сечение. Представим дивизор сечения в виде линейной комбинации простых дивизоров $\text{div } s = \sum a_i D_i + \sum a_{(p:q)} \text{div}(qF - pF')$, тогда s пропорционально $\prod s_{D_i}^{a_i} \cdot \prod (qF - pF')^{a_{(p:q)}}$. Если исключительных точек хотя бы две, то F и F' можно выразить через s_{D_i} — это легко видеть из соотношений, описанных в теореме.

Теперь найдем соотношения в алгебре $R(X)^U$. Мы знаем, что при подходящей нормировке сечений s_{D_i} выполнены соотношения $qF - pF' = \prod_{z_{D_i}=(p:q)} s_{D_i}^{h_{D_i}}$, где $(p : q)$ — исключительная точка. Докажем, что они порождают все соотношения. Рассмотрим произвольное однородное по мультистепени и весу соотношение

$$\prod s_{D_i}^{a_i} f(F, F') + \prod s_{D_i}^{b_i} g(F, F') + \dots = 0,$$

где f, g, \dots — однородные многочлены от F и F' . Чуть позже мы покажем, что с учётом описанных соотношений $\prod s_{D_i}^{a_i} f(F, F') + \prod s_{D_i}^{b_i} g(F, F')$ можно заменить на $\prod s_{D_i}^{c_i} h(F, F')$. Таким образом в исходном соотношении можно последовательно уменьшать количество слагаемых вида $\prod s_{D_i}^{a_i} f(F, F')$. Тогда мы редуцируем исходное соотношение к соотношению вида $\prod s_{D_i}^{a_i} f(F, F') = 0$, которое выполняется только при $f = 0$.

Осталось показать, что $\prod s_{D_i}^{a_i} f(F, F') + \prod s_{D_i}^{b_i} g(F, F')$ можно заменить на $\prod s_{D_i}^{c_i} h(F, F')$. Обозначим $s_a = \prod s_{D_i}^{a_i} f(F, F')$, $s_b = \prod s_{D_i}^{b_i} g(F, F')$. Поскольку s_a и s_b имеют одинаковые веса и мультистепени, их отношение равно некоторой функции из $\mathbb{C}(X)^B \simeq \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$; однородными координатами на \mathbb{P}^1 являются F и F' . Тогда $\text{div } s_a$ и $\text{div } s_b$ различаются на дивизор рациональной функции от F и F' , и имеет место равенство

$$\sum_i a_i D_i + \text{div } g_a(F, F') = \sum_i b_i D_i + \text{div } g_b(F, F'),$$

где g_a, g_b — однородные многочлены. Рассмотрим кратности вхождения исключительных дивизоров в это равенство. Если D_i — исключительный дивизор с $h_{D_i} = 0$, то $a_i = b_i$. Пусть z — исключительная точка \mathbb{P}^1 . Выделим в равенстве только такие дивизоры D , у которых $z_D = z$ (и $h_D > 0$). Перегруппировав слагаемые, получим следующее равенство:

$$\sum_{\substack{z_{D_i}=z \\ h_{D_i}>0}} (a_i - b_i) D_i = \text{div}(qF - pF')^k = k \sum_{\substack{z_{D_i}=z \\ h_{D_i}>0}} h_{D_i} D_i$$

где $(p : q) = z$, $k \in \mathbb{Z}$.

Можно считать, что $k \geq 0$. Тогда $a_i \geq b_i$ для таких i , что $z_{D_i} = z$ и $h_{D_i} > 0$. Заменим в s_a произведение $\prod_{z_{D_i}=z} s_{D_i}^{a_i}$ на $\prod_{z_{D_i}=z} s_{D_i}^{b_i} \cdot (qF - pF')^k$. Тогда мы получим, что в s_a и s_b степени сечений s_{D_i} совпадают для таких i , что $z_{D_i} = z$ и $h_{D_i} > 0$. Произведя такую

замену для всех исключительных точек \mathbb{P}^1 , мы получим, что из s_a и s_b можно вынести множитель вида $\prod s_{D_i}^{c_i}$ так, что останутся многочлены от F и F' . \square

Известно, что для двойных многообразий сложности 0 алгебра $R(X)^U$ свободна (см, например, [12]). Для двойных многообразий флагов сложности 1 верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.9. *Пусть сложность двойного многообразия флагов X группы G равна 1. Тогда алгебра $R(X)^U$ свободна или является гиперповерхностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данный результат следует из явного описания алгебр $R(X)^U$ для каждого из таких многообразий, которое приведено в главе 3. Получено, что во всех этих случаях исключительных точек будет 2 или 3. Из предыдущей теоремы следует, что если исключительных точек 2, то $R(X)^U$ свободна, а если таких точек 3, то $R(X)^U$ является гиперповерхностью. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Частный случай данной теоремы следует из ранее полученного результата Панюшева [16, 6.5]. Он показал, что в случае максимальных параболических подгрупп $R(X)^U$ является гиперповерхностью.

Теперь опишем, каким образом находить образующие и соотношения $R(G/P^-)^{U \cap M}$, зная образующие и соотношения $R(G/P^- \times G/Q^-)^U$.

ТЕОРЕМА 1.10. a) *Пусть X — как в теореме 1.4 и однородные B -полуинвариантные элементы $s_{D_{Q,j_1}}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}, f_1, \dots, f_d$ порождают $R(X)^U$. Построим отображение*

$$\varphi : R(X)^U \rightarrow R(X)^U[s_{D_{Q,j_1}}^{-1}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}^{-1}]_{(\bar{*}, \bar{0})},$$

определенное на B -полуинвариантных сечениях s мультистепени $(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, n_{j_1}, \dots, n_{j_t})$ как

$$\varphi(s) := s \otimes s_{D_{Q,j_1}}^{-n_{j_1}} \otimes \dots \otimes s_{D_{Q,j_t}}^{-n_{j_t}},$$

а на остальных элементах кольца $R(X)^U$ — по линейности. Элемент $\varphi(s)$ будет иметь в кольце $R(G/P^-)^{U \cap M}$ мультистепень $(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ и вес $\text{wt } \varphi(s) = \text{wt } s - n_{j_1}\omega_{j_1} - \dots - n_{j_t}\omega_{j_t}$ относительно тора T . Тогда элементы $\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_d)$ порождают $R(G/P^- \times G/Q^-)^U[s_{D_{Q,j_1}}^{-1}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}^{-1}]_{(\bar{}, \bar{0})} \simeq R(G/P^-)^{U \cap M}$.*

б) Если образующие $s_{D_{Q,j_1}}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}, f_1, \dots, f_d$ независимы, то элементы $\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_d)$ также независимы. Если идеал соотношений в $R(X)^U$ порождается однородным соотношением

$$F_1(s_{D_{Q,j_1}}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}, f_1, \dots, f_d) = 0$$

мультистепени $(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, n_{j_1}, \dots, n_{j_t})$ и веса ν , то идеал соотношений в $R(G/P^-)^{U \cap M}$ порождается однородным соотношением

$$F_2(\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_d)) := F_1(1, \dots, 1, \varphi(f_1), \dots, \varphi(f_d)) = 0$$

мультистепени $(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ и веса $\nu - n_{j_1}\omega_{j_1} - \dots - n_{j_t}\omega_{j_t}$ относительно тора T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство пункта а) очевидно.

Докажем б). Предположим, что образующие $s_{D_{Q,j_1}}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}, f_1, \dots, f_d$ независимы, а элементы $\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_d)$ связаны соотношением. Домножив это соотношение на подходящие степени $s_{D_{Q,j_1}}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}$, получим соотношение между $s_{D_{Q,j_1}}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}, f_1, \dots, f_d$ — противоречие. Значит, элементы $\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_d)$ свободно порождают

$$R(G/P^- \times G/Q^-)^U [s_{D_{Q,j_1}}^{-1}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}^{-1}]_{(\bar{*}, \bar{0})} \simeq R(G/P^-)^{U \cap M}.$$

Пусть образующие кольца $R(X)^U$ связаны единственным соотношением F_1 . Очевидно, что указанные образующие в $R(G/P^-)^{U \cap M}$ связаны соотношением F_2 , и что F_2 — однородно. Отметим, что F_2 — не тривиальное соотношение, иначе сечения $s_{D_{Q,j_1}}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}$ не были бы независимыми. Докажем, что других соотношений (не лежащих в идеале (F_2)) нет. Предположим, что другое соотношение есть. Домножив соотношение на подходящие степени $s_{D_{Q,j_1}}, \dots, s_{D_{Q,j_t}}$, получим соотношение между образующими $R(X)^U$. Оно должно лежать в идеале (F_1) . Но тогда исходное соотношение лежит в (F_2) . \square

Глава 2

Классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1

2.1. Некоторые леммы о сложности двойных многообразий флагов

Сформулируем несколько лемм, которые нам потребуются для классификации. Основной теоремой, которой мы будем пользоваться, является следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2.1 ([15]). *Пусть P и Q разложены в полуправильное произведение стандартной подгруппы Леви и унитотентного радикала: $P = L \times P_u$, $Q = M \times Q_u$. Тогда сложность действия группы G на $G/P \times G/Q$ равна сложности действия $L \cap M$ на $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u$, где \mathfrak{p}_u и \mathfrak{q}_u — касательные алгебры к P_u и Q_u .*

ЛЕММА 2.2. *Сложность не меняется при перестановке P и Q местами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно. □

ЛЕММА 2.3. *Пусть $P' \subseteq P$, $Q' \subseteq Q$ — параболические подгруппы. Тогда сложность двойного многообразия флагов для пары (P', Q') не меньше сложности для пары (P, Q) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует G -эквивариантный сюръективный морфизм $G/P' \times G/Q' \rightarrow G/P \times G/Q$, поэтому коразмерность типичной B -орбиты на $G/P \times G/Q$ не больше соответствующей коразмерности на $G/P' \times G/Q'$. □

ЛЕММА 2.4. *Пусть P и Q разложены в полуправильное произведение стандартной подгруппы Леви и унитотентного радикала: $P = L \times P_u$, $Q = M \times Q_u$. Тогда $c \geq \frac{1}{2}(\dim G - \dim L - \dim M - \dim T)$, где c — сложность действия группы G на $G/P \times G/Q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2.1 следует, что $c \geq \dim(\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u) - \dim(L \cap M \cap B)$. При этом $\dim(L \cap M \cap B) = \frac{1}{2}(\dim(L \cap M) + \dim T)$, $\dim(\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u) = \frac{1}{2}(\dim G - \dim L - \dim M + \dim(L \cap M))$. Подставляя эти равенства в неравенство, получим нужную оценку. \square

2.2. Метод классификации для классических групп

2.2.1. Способ задания параболических подгрупп классических групп. Будем считать, что SO_n сохраняет билинейную форму с матрицей, у которой на побочной диагонали стоят единицы, и остальные элементы равны 0, а Sp_n сохраняет билинейную форму с матрицей, у которой на побочной диагонали, начиная с верхнего правого угла, стоят вначале 1, потом такое же количество -1 , а элементы вне побочной диагонали равны 0. Тогда T будет подгруппой диагональных матриц, B — верхнетреугольных, U — унипотентных верхнетреугольных матриц в группе G .

Для $G = SL_n, Sp_n, SO_{2l+1}$ параболические подгруппы, содержащие B , имеют блочно-верхнетреугольный вид. Тогда параболические подгруппы можно задавать размерами диагональных блоков. Для $G = SO_{2l}$ есть еще один класс параболических подгрупп, подгруппы этого класса мы будем называть особыми. Эти параболические подгруппы соответствуют таким подмножествам I , что $\alpha_{l-1} \in I$, $\alpha_l \notin I$. При сопряжении с перестановкой двух средних базисных векторов получим подгруппу $P_{I'}$, где $I' = I \cup \{\alpha_l\} \setminus \{\alpha_{l-1}\}$, которая уже имеет блочно-верхнетреугольный вид. Особую параболическую подгруппу P_I будем задавать размерами блоков подгруппы $P_{I'}$ и помечать штрихом.

Пусть $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $i_1 < \dots < i_r$. Опишем связь между $I \subseteq \Pi$ и размерами блоков P_I в следующей таблице:

G	размеры блоков
SL_n	$(i_1, i_2 - i_1, \dots, i_r - i_{r-1}, n - i_r)$
Sp_{2l}	$(i_1, i_2 - i_1, \dots, i_r - i_{r-1}, 2(l - i_r), i_r - i_{r-1}, \dots, i_2 - i_1, i_1)$
SO_{2l+1}	$(i_1, i_2 - i_1, \dots, i_r - i_{r-1}, 2(l - i_r) + 1, i_r - i_{r-1}, \dots, i_2 - i_1, i_1)$
SO_{2l}	$(i_1, i_2 - i_1, \dots, i_r - i_{r-1}, 2(l - i_r), i_r - i_{r-1}, \dots, i_2 - i_1, i_1)$, если $\alpha_{l-1} \notin I$ или $\alpha_l \in I$ $(i_1, i_2 - i_1, \dots, l - i_{r-1}, l - i_{r-1}, \dots, i_2 - i_1, i_1)',$ если $\alpha_{l-1} \in I$ и $\alpha_l \notin I$

Отметим, что для Sp_{2l} и SO_{2l} при $i_r = l$ размер центрального блока равен 0, то есть его просто нет. Добавим, что для группы SO_{2l} подгруппа с центральным блоком размера 2 совпадает с подгруппой с двумя центральными блоками размера 1 вместо одного центрального.

Если задавать параболические подгруппы размерами блоков, то получим следующую переформулировку теоремы классификации 1 для классических групп:

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть G — классическая группа (SL_n, SO_n, Sp_n). Тогда все двойные многообразия флагов сложности 0 и 1 соответствуют парам параболических подгрупп (с точностью до перестановки, для группы SL_n и SO_{2n} — ещё с точностью до диаграммного автоморфизма G), приведённых в таблицах 1, 2, 3.

кол-ва блоков в P и Q	сложность 0		сложность 1	
	P	Q	P	Q
2,2	(p_1, p_2)	(q_1, q_2)		
2,3	(p_1, p_2)	$(1, q_2, q_3)$	$(3, p_2), p_2 \geq 3$	$(q_1, q_2, q_3), q_1, q_2, q_3 \geq 2$
	(p_1, p_2)	$(q_1, 1, q_3)$	$(p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 3$	$(2, 2, q_3), q_3 \geq 2$
	$(2, p_2)$	(q_1, q_2, q_3)	$(p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 3$	$(2, q_2, 2), q_2 \geq 2$
2,4			$(2, p_2)$	(q_1, q_2, q_3, q_4)
			$(p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 2$	$(1, 1, 1, q_4)$
			$(p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 2$	$(1, 1, q_3, 1)$
2, s	$(1, p_2)$	(q_1, q_2, \dots, q_s)		
3,3			$(1, 1, p_3)$	(q_1, q_2, q_3)
			$(1, p_2, 1)$	(q_1, q_2, q_3)

ТАБЛИЦА 1. пары параболических подгрупп, соответствующих двойным многообразиям флагов сложности 0 и 1 для группы SL_n

2.2.2. Метод оценки и вычисления сложности. При вычислении сложности мы будем пользоваться теоремой 2.1. Опишем, как устроены подгруппы Леви, касательные алгебры унипотентных радикалов и их пересечения.

Вначале будем считать, что параболические подгруппы не особые, а класс особых параболических подгрупп будем рассматривать отдельно. Подгруппа Леви L (и M) состоит из блочно-диагональных матриц, причём для групп SO_n и Sp_n блоки симметричны относительно побочной диагонали и на симметричных местах стоят матрицы A и $(A^S)^{-1}$ (где S обозначает транспонирование относительно побочной диагонали), а средний блок (он есть, если количество блоков нечетно) является ортогональной или симплектической матрицей соответственно.

кол-ва блоков в P и Q	сложность 0		сложность 1	
	P	Q	P	Q
2,2	(p, p)	(p, p)		
	(p, p)	$(p, p)'$		
2,3	(p, p)	(q_1, q_2, q_1) , $q_1 \leq 3$	$(6, 6)$	$(4, 4, 4)$
	(p, p)	$(q, 2, q)$		
2,4	(p, p)	$(1, q, q, 1)$	$(4, 4)$	$(2, 2, 2, 2)$
	(p, p)	$(1, q, q, 1)'$	$(5, 5)$	$(2, 3, 3, 2)$
	$(4, 4)$	$(2, 2, 2, 2)'$	$(5, 5)$	$(3, 2, 2, 3)$
			$(5, 5)$	$(2, 3, 3, 2)'$
			$(5, 5)$	$(3, 2, 2, 3)'$
	(p, p)	$(1, 1, q, 1, 1)$	$(4, 4)$	$(1, 2, 2, 2, 1)$
			$(4, 4)$	$(2, 1, 2, 1, 2)$
2,6			$(4, 4)$	$(1, 1, 2, 2, 1, 1)$
			$(4, 4)$	$(1, 1, 2, 2, 1, 1)'$
3,3	$(1, p, 1)$	(q_1, q_2, q_1)	$(2, 2, 2)$	$(2, 2, 2)$
	$(p, 1, p)$	$(p, 1, p)$	$(2, p, 2)$, $p > 1$	$(q, 1, q)$
3,4	$(1, p, 1)$	(q_1, q_2, q_2, q_1)	$(2, 2, 2)$	$(1, 2, 2, 1)$
3,5			$(1, p, 1)$	$(q_1, q_2, q_3, q_2, q_1)$
			$(2, 1, 2)$	$(1, 1, 1, 1, 1)$
3,6			$(1, p, 1)$	$(q_1, q_2, q_3, q_3, q_2, q_1)$
4,4			$(1, 2, 2, 1)$	$(1, 2, 2, 1)$
			$(1, 2, 2, 1)$	$(1, 2, 2, 1)'$

ТАБЛИЦА 2. пары параболических подгрупп, соответствующих двойным многообразиям флагов сложности 0 и 1 для группы SO_n

Касательная алгебра \mathfrak{sl}_n состоит из матриц со следом 0, касательная алгебра \mathfrak{so}_n в выбранном базисе состоит из матриц, кососимметричных относительно побочной диагонали, а касательная алгебра \mathfrak{sp}_n в выбранном базисе состоит из следующих матриц: разобьем матрицу на 4 равные квадратные части, тогда верхняя правая и нижняя левая часть должны быть симметричны относительно побочной диагонали, а оставшиеся две части

кол-ва блоков в P и Q	сложность 0		сложность 1	
	P	Q	P	Q
2,2	(p, p)	(p, p)		
2,3	(p, p)	$(1, q, 1)$	(p, p)	$(2, q, 2)$
2,4			$(2, 2)$	$(1, 1, 1, 1)$
3,3	$(1, p, 1)$	(q_1, q_2, q_1)		
3,4			$(1, p, 1)$	(q_1, q_2, q_2, q_1)
3,5			$(1, p, 1)$	$(q_1, q_2, q_3, q_2, q_1)$

ТАБЛИЦА 3. пары параболических подгрупп, соответствующих двойным многообразиям флагов сложности 0 и 1 для группы Sp_n

получаются друг из друга транспонированием относительно побочной диагонали и смешной знака. Матрицы из касательной алгебры к унитотентному радикалу \mathfrak{p}_u имеют нули ниже диагонали и на месте диагональных блоков.

Матрицы из $L \cap M$ состоят из некоторого количества диагональных квадратных блоков, будем обозначать их A_1, \dots, A_r , а через k_1, \dots, k_r — их размеры, причем для групп SO_n и Sp_n размеры блоков связаны соотношением $k_i = k_{r+1-i}$. Напомним, что для группы SO_n средняя пара блоков размеров 1 и 1 — это то же самое, что один центральный блок размера 2. Матрицы из $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u$ состоят из подматриц X_{ij} , где матрица X_{ij} имеет размер $k_i \times k_j$ и стоит на пересечении строк, соответствующих A_i , и столбцов, соответствующих A_j . При этом $X_{ij} = 0$ при $i \geq j$, а также нулю равны те матрицы X_{ij} , для которых найдется матрица из L или M с ненулевыми элементами на месте X_{ij} . Часто под словом “блоки” будем подразумевать ненулевые матрицы X_{ij} . Борелевской подгруппой в $L \cap M$ является $L \cap M \cap B$, т.е. пересечение $L \cap M$ с верхнетреугольными матрицами. Группа $L \cap M \cap B$ действует на $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u$ сопряжениями, при этом матрицы X_{ij} переходят в $A_i X_{ij} A_j^{-1}$.

Дальнейшая идея состоит в том, что мы будем рассматривать всевозможные расположения блоков X_{ij} и для каждого такого расположения вычислять сложность для всевозможных размеров блоков. Чтобы упростить перебор и уменьшить количество возможных вариантов, нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 2.6. Сложность не меняется при одновременном транспонировании P и Q относительно побочной диагонали.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта лемма даёт упрощение только для группы SL_n . Для SL_n транспортирование соответствует автоморфизму диаграммы Дынкина.

ЛЕММА 2.7. *Если вместо исходного действия рассмотреть действие, получающееся из исходного с помощью одной из следующих операций (или их комбинации):*

- *убрать из рассмотрения некоторые блоки X_{ij} (т.е. считать матрицы X_{ij} равными 0),*
- *убрать из рассмотрения некоторые матрицы A_i и блоки X_{ij} в соответствующих строках и столбцах,*

то для такого действия сложность не может быть больше сложности исходного действия. Другими словами, мы рассматриваем только “некоторую часть действия”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая операция соответствует ограничению действия на G -инвариантное подмногообразие. Сложность действия на G -инвариантном подмногообразии не может быть больше сложности действия на всем многообразии [2].

Вторая операция соответствует переходу к факторпредставлению, сложность для которого может быть только меньше или равна исходной. \square

ЛЕММА 2.8. *Если есть 4 ненулевых матрицы X_{pq} , стоящих в вершинах прямоугольника, т.е. матрицы с индексами ij, il, kj и kl , причём для группы SO_n ни одна из этих 4 матриц не должна стоять на побочной диагонали, то есть рациональный инвариант для действия группы $B \cap L \cap M$. Такой инвариант будет называть инвариантом типа “квадрат”.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Для группы SO_n дополнительное требование на расположение блоков возникает из-за того, что матрицы из \mathfrak{so}_n имеют нули на побочной диагонали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a_i, a_k — элементы матриц A_i, A_k соответственно, стоящие в правом нижнем углу, a_j, a_l — элементы матриц A_j, A_l , стоящие в левом верхнем углу, а $x_{ij}, x_{il}, x_{kj}, x_{kl}$ — элементы матриц $X_{ij}, X_{il}, X_{kj}, X_{kl}$, стоящие в левом нижнем углу. Тогда $x_{pq} \rightarrow a_p x_{pq} a_q^{-1}, p = i, k, q = j, l$. Легко видеть, что $x_{ij} x_{kj}^{-1} x_{kl} x_{il}^{-1}$ является инвариантом. \square

ЛЕММА 2.9. *Если есть 3 ненулевых матрицы X_{pq} , стоящие особым образом в вершинах прямоугольного треугольника, а именно имеющие индексы ij, ik, jk , причем для группы SO_n ни одна из этих 3 матриц не должна стоять на побочной диагонали, то есть рациональный инвариант для действия $B \cap L \cap M$. Такой инвариант будет называть инвариантом типа “треугольник”.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть \bar{x}_{ij} — нижняя строка матрицы X_{ij} , x_{ik} — левый нижний элемент матрицы X_{ik} , а \bar{x}_{jk} — левый столбец матрицы X_{jk} . Тогда нетрудно проверить, что $\frac{\bar{x}_{ij} \cdot \bar{x}_{jk}}{x_{ik}}$ является инвариантом. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Для групп SO_n и Sp_n инварианты типа “квадрат” и “треугольник” совпадают для блоков, получающихся друг из друга транспонированием относительно побочной диагонали.

ЛЕММА 2.10. *Если есть 3 ненулевых матрицы X_{ij} , стоящих в одной строке, высота которых не меньше 2, причем для группы SO_n ни одна из этих матриц не должна стоять на побочной диагонали, то сложность будет не меньше 1. Если таких матриц 4, то сложность не меньше 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение для группы SL_n (для остальных групп мы получим это утверждение как следствие, т.к. мы от SL_n перейдем к подгруппе). Для типичной первой матрицы нижний левый элемент и элемент над ним можно действием группы сделать равными 1 и 0 соответственно. Чтобы эти элементы не изменились, мы должны действовать слева только такими матрицами, нижняя правая подматрица размера 2×2 которых диагональна. Элементы, стоящие на таких же местах во второй матрице, для типичной матрицы можно сделать равными 1. Чтобы эти 4 элемента не менялись, мы должны слева действовать только такими матрицами, нижняя правая подматрица размера 2×2 которых имеет вид λE . Теперь посмотрим на два элемента в третьей матрице, стоящих на таких же местах (для типичной матрицы они ненулевые): они умножаются на одно и то же число. Один из них мы можем сделать равным 1, а другой изменить не можем, не изменив вид уже рассмотренных 5 элементов. Значит, типичные орбиты зависят по крайней мере от одного непрерывного параметра, т.е. $c(X) \geq 1$. Для четырех матриц рассуждения аналогичны. \square

Теперь объясним чуть более подробно, как мы будем вычислять сложность действия $L \cap M$ на $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u$. Для групп SO_n и Sp_n есть симметрия блочной структуры касательной алгебры, поэтому достаточно рассматривать только блоки, стоящие нестрого выше (или ниже) побочной диагонали. Будем постепенно действием $B \cap L \cap M$ приводить блоки к некоторому каноническому виду, и рассматривать действие стабилизатора уже полученных блоков такого вида на остальных блоках. Количество оставшихся параметров и будет сложностью. Именно такой способ применялся в доказательстве леммы 2.10.

Особые параболические подгруппы (для SO_n) получаются из неособой параболической подгруппы без среднего блока при сопряжении с перестановкой двух средних базисных

векторов. Можно считать, что ровно одна из двух параболических подгрупп особая, а вторая не содержит центрального блока (иначе применим автоморфизм G , переставляющий два средних базисных вектора). Можно получить оценку на сложность через сложность другого действия, где обе параболические неособые — если особую подгруппу сопрячь с перестановкой двух средних базисных векторов и заменить два центральных блока (можно считать, что размеры этих блоков не больше размеров соответствующих блоков для второй группы) на один центральный, то параболическая подгруппа увеличится, а значит сложность для такой пары может только уменьшиться. Другими словами, мы заменили особую подгруппу P_I на неособую $P_{I \setminus \alpha_{l-1}}$.

Теперь перейдем к разбору конкретных случаев. Рисунки обозначают расположение ненулевых блоков X_{ij} и матриц A_i ; блоки X_{ij} обозначаются серым цветом, а матрицы A_i — чёрным цветом. Сложность будем обозначать буквой c . Будем поочередно перебирать возможные расположения ненулевых блоков X_{ij} , при этом случаи, для которых леммы 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 дают оценку на сложность $c \geq 2$, рассматривать не будем. Так же не будем рассматривать случаи, симметричные рассмотренным. Лемма 2.7 позволяет сократить перебор в разбираемом случае, использовав результат разобранных случаев. Приведем результаты разбора. Будем выписывать только те случаи, в которых сложность получилась не больше 1.

2.3. Классификация для классических групп

2.3.1. Группа SL_n .

1.		k_1, k_r произвольны	$c = 0$	
2.		$k_1 \leq 2$	k_{r-1}, k_r произвольны	$c = 0$
		k_1 произвольно	$k_{r-1} = 1$ или $k_r = 1$	$c = 0$
		$k_1 \geq 3$	$k_{r-1} = k_r = 2$	$c = 1$
		$k_1 = 3$	$k_{r-1}, k_r \geq 2$	$c = 1$

Для примера разберем этот случай подробно. Без ограничения общности будем считать, что $k_{r-1} \geq k_r$. Приведем два типичных блока действием справа к следующему виду: на побочной диагонали, идущей из нижнего левого угла стоят 1, а правее стоят 0. Далее в первом блоке умножением слева можно добиться того, что и выше диагонали (побочной, идущей из левого нижнего угла) будут стоять нули. Посмотрим, каков будет стабилизатор блоков такого вида. На месте A_1 может стоять матрица, у которой все элементы

равны нулю, кроме диагональных и кроме элементов в левой верхней подматрице размера $\max(k_1 - k_{r-1}, 0) \times \max(k_1 - k_{r-1}, 0)$. Матрицы на местах A_{r-1} и A_r имеют аналогичный вид, только подматрица берется нижняя правая размеров $\max(k_i - k_1, 0) \times \max(k_i - k_1, 0)$, где $i = r-1, r$ соответственно, а диагональные элементы выбираются равными диагональным элементам матрицы A_1 (чтобы единицы в блоках сохранились). Теперь во втором блоке можно сделать элементы, стоящие в первом столбце в строках со 2-ой по $\min(k_1, k_{r-1})$ -ую снизу, равными единице. Теперь в стабилизаторе все диагональные элементы, не входящие в рассмотренные нами подматрицы, должны быть равны одному и тому же числу λ .

Если $k_1 \leq 2$ или $k_r = 1$, то элементы, стоящие в первом столбце второго блока можно сделать равными единице. После чего свободных параметров не осталось, т.е. типичные точки лежат в одной орбите с точкой описанного вида, поэтому $c = 0$.

Если $k_1 = 3, k_{r-1} \geq k_r \geq 2$, то элемент второго блока в первом столбце, третьей снизу строке можно сделать равным 1 (если мы его еще не сделали таким), после чего $A_1 = \lambda E$ и два верхних диагональных элемента A_r тоже равны λ , поэтому элемент второго блока во втором столбце третьей снизу строке мы изменить не можем. Значит, орбита зависит от одного непрерывного параметра, т.е. $c = 1$.

Теперь пусть $k_{r-1} = k_r = 2, k_1 \geq 4$. Тогда рассмотрим подматрицу второго блока, стоящую выше второй строки снизу. Слева мы можем умножать ее на произвольную верхнетреугольную, в действие справа сводится к умножению всех элементов на одно число. Нижнюю подматрицу этой матрицы мы можем сделать равной $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & * \end{pmatrix}$, а выше нее — нули. Число, стоящее на месте $*$, мы уже изменить не можем, поэтому $c = 1$.

Осталось рассмотреть случай $k_1 \geq 4, k_{r-1} \geq 3, k_r \geq 2$. Посмотрим на элементы второго блока, стоящие во втором столбце, 3 и 4 строках снизу: мы их изменить не можем, поэтому $c \geq 2$.

3.		$k_1 = 1$	k_{r-2}, k_{r-1}, k_r произвольны	$c = 0$
		$k_1 = 2$	k_{r-2}, k_{r-1}, k_r произвольны	$c = 1$
		$k_1 \geq 3$	$k_{r-2} = k_{r-1} = k_r = 1$	$c = 1$

Если мы будем добавлять блоки в первую строку, то их высота, в силу леммы 2.10, не может быть больше одного.

4.		$k_1 = 1$	$c = 0$

5a. хотя бы 2 из чисел k_1, k_2, k_3 равны 1 $c = 1$

56. $k_1 = 1$ или $k_4 = 1$ k_2, k_3 произвольны $c = 0$

$k_1 = k_4 = 2$ k_2, k_3 произвольны $c = 1$

$k_1 = 2, k_4 \geq 3$ $k_2 = 1, k_3$ произвольно $c = 1$

$k_1 \geq 3, k_4 = 2$ k_2 произвольно, $k_3 = 1$ $c = 1$

6. $k_1 = 1$ $k_2 = 1$ или $k_4 = 1$ $c = 1$

7.

Реализуется только при количестве блоков в верхней строке $s \leq 3$, а это случай 5 или 6.

8. $k_1 = k_2 = 1$ или $k_{r-1} = k_r = 1$ $c = 1$

9a. $c \geq 2$, т.к. есть независимые инварианты типа “квадрат” и “треугольник”

96. $k_1 = 1$ $k_2 = 1$ k_3 произвольно k_4, k_5 произвольны $c = 1$
 $k_1 = 1$ k_2 произвольно k_3 произвольно $k_4 = k_5 = 1$ $c = 1$

10.

Реализуется только при количестве блоков в верхней строке $s \leq 4$.

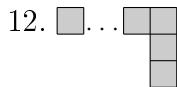
$s = 3$ — это случай 9.

$s = 4$ — $c \geq 2$, т.к. есть независимые инварианты типа “квадрат” и “треугольник”.

Если во второй строке будет хотя бы 3 блока, то будет два независимых инварианта типа “квадрат”, т.е. $c \geq 2$.

11a. $c \geq 2$, т.к. есть два инварианта типа “треугольник”

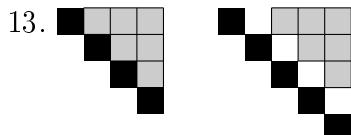
11б. $k_1 = k_5 = 1$ $c = 1$



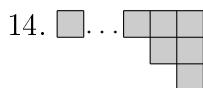
Реализуется только при количестве блоков в верхней строке $s \leq 4$.

$s = 3$ — это случай 11.

$s = 4$ — $c \geq 2$, т.к. есть два инварианта типа “треугольник”.



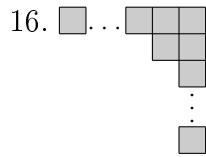
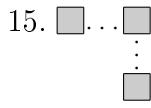
$c \geq 2$, т.к. есть “квадрат” и “треугольник”



Реализуется только при количестве блоков в верхней строке $s \leq 4$.

$s = 3$ — это случай 13.

$s = 4$ — $c \geq 2$, т.к. сводится к случаю 13 с помощью леммы 2.7



Реализуются только при $|s - m| \leq 1$ (где s, m — количество ненулевых блоков в верхней строке и количество ненулевых блоков в правом столбце). Когда $s, m \geq 4$ (а это и есть оставшиеся случаи), то сложность не меньше 2, т.к. будут либо два инварианта типа “треугольник” (случай 15), либо инварианты типа “треугольник” и “квадрат” (случай 16).

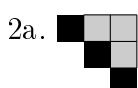
Объединив рассмотренные случаи, получим классификацию, приведенную в таблице 1 (напомним, что классификация ведется с точностью до одновременного транспонирования относительно побочной диагонали и перестановки).

2.3.2. Группа SO_n .

Рассмотрим случай, когда P и Q неособые.



$$c = 0$$

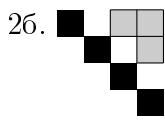


$$k_1 = 1$$

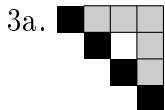
$$k_2 \text{ произвольно} \quad c = 0$$

$$k_1 \text{ произвольно} \quad k_2 = 1 \quad c = 0$$

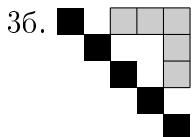
$$k_1 = 2 \quad k_2 = 2 \quad c = 1$$



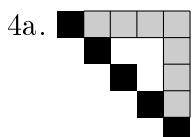
$k_1 \leq 3$	k_2 произвольно	$c = 0$
k_1 произвольно	$k_2 = 1$	$c = 0$
$k_1 = 4$	$k_2 = 2$	$c = 1$



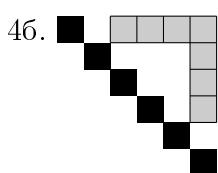
$k_1 = 1$	k_2 произвольно	$c = 0$
$k_1 = 2$	$k_2 = 1$	$c = 1$



$k_1 = 1$	k_2 произвольно	k_3 произвольно	$c = 0$
$k_1 = 2$	k_2 произвольно	$k_3 = 1$	$c = 1$



$k_1 = 1$	k_2 произвольно	k_3 произвольно	$c = 1$
-----------	-------------------	-------------------	---------



$k_1 = 1$	k_2 произвольно	k_3 произвольно	$c = 0$
-----------	-------------------	-------------------	---------

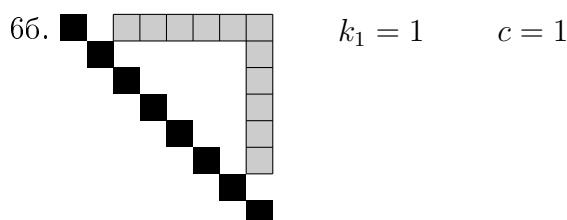
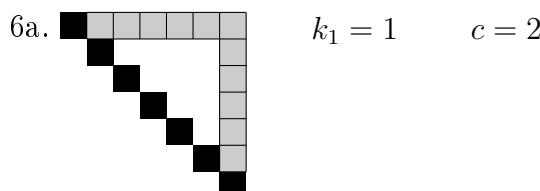
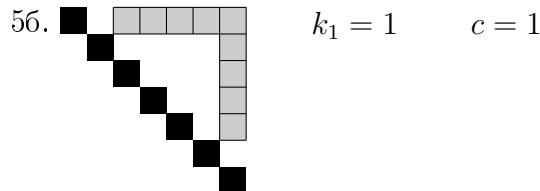
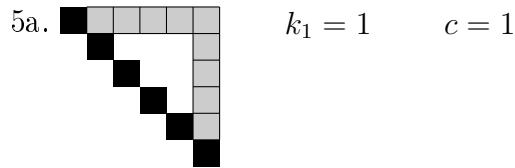
Если в первой строке стоит не меньше 5 блоков, то в силу леммы 2.10, их высота должна быть не больше единицы.

Пусть ненулевые блоки стоят только в первой строке и последнем столбце (пусть в первой строке их m штук) и пусть высота блоков в первой строке $k_1 = 1$. Обозначим сложность для такого случая как $c_{m,a}$, если $r = m + 1$, и $c_{m,b}$, если $r = m + 2$ (r — количество диагональных блоков). Тогда верна следующая лемма.

ЛЕММА 2.11. При $m \geq 4$ справедливы формулы: $c_{m,a} = c_{m-1,b} + 1$, $c_{m,b} = c_{m-1,a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Типичную пару блоков $X_{1,i}$ и $X_{1,r+1-i}$ ($i \neq \frac{r+1}{2}$) можно умножением справа привести к виду $(x, 0, \dots, 0)$ и $(t, 0, \dots, 0, y)$, если длины блоков хотя бы 2, и к виду (x) и (y) , если длина блоков равна одному, где t , x — любые ненулевые числа, а y однозначно определяется по x , а именно произведение xy не меняется. Ненулевой типичный блок $X_{1,\frac{r+1}{2}}$ (при нечетном r) умножением справа можно привести к виду $(x, 0 \dots 0, y)$, если длина блока хотя бы 2 (где x и y — как и выше). Если его длина равна единице, то элемент этого блока изменить нельзя. Слева все эти матрицы умножаются на одно и то же число. Поэтому сложность равна количеству таких пар блоков плюс количество центральных блоков (0 или 1) минус 1, откуда получается утверждение леммы. \square

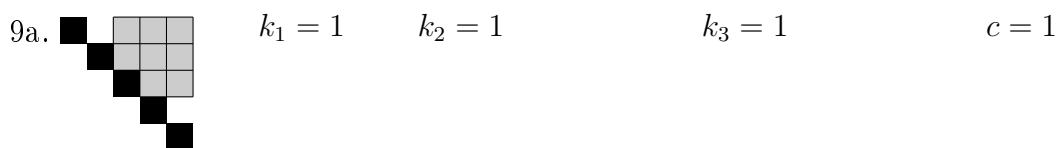
В случаях 5 и 6 сложности легко вычисляются по лемме, а при $m \geq 7$ сложность $c \geq 2$.

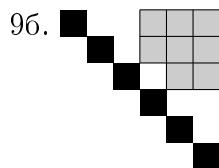


7.		$k_1 = 1$	k_2 произвольно	$c = 0$
		k_1 произвольно	$k_2 = 1$	$c = 0$
		$k_1 = 2$	$k_2 = 2$	$c = 1$
		$k_1 = 2$	$k_2 = 3$	$c = 1$
		$k_1 = 3$	$k_2 = 2$	$c = 1$

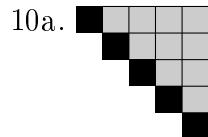
8.		$k_1 = 1$	$k_2 = 1$	$c = 0$
		$k_1 = 1$	$k_2 = 2$	$c = 1$
		$k_1 = 2$	$k_2 = 1$	$c = 1$

Если добавить блоки только в первую строку (и симметричные им относительно побочной диагонали), то такие случаи не будут реализовываться.

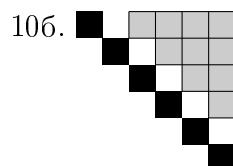




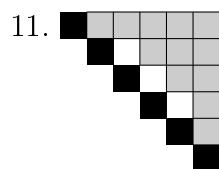
96.	$k_1 = 1$	$k_2 = 1$	k_3 произвольно	$c = 0$
	$k_1 = 1$	$k_2 = 2$	$k_3 = 1$	$c = 1$
	$k_1 = 2$	$k_2 = 1$	$k_3 = 1$	$c = 1$



10a. $c \geq 2$, т.к. есть два инварианта типа “треугольник”

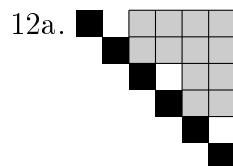


$$10b. \quad k_1 = 1 \quad k_2 = 1 \quad k_3 = 1 \quad c = 1$$

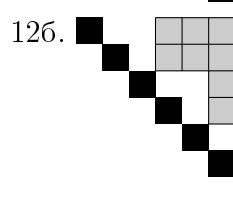


11. $c \geq 2$, т.к. есть два инварианта типа “треугольник”

Если добавить блоки только в первую строку (и симметричные им), то такие случаи не будут реализовываться.



12a. $c \geq 2$, т.к. есть инварианты типа “квадрат” и “треугольник”

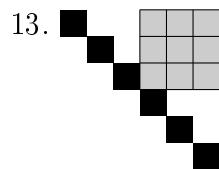


12б. $c \geq 2$, т.к. есть инварианты типа “квадрат” и “треугольник”

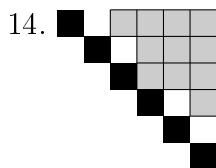
Если добавить один или два блока в первую строку (и симметричные им), то $c \geq 2$ (сводится к случаю 12).

Если добавить больше двух блоков в первую строку (и симметричные им), то случай не будет реализовываться.

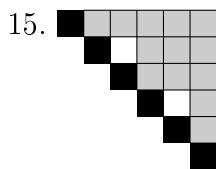
Если добавить блок во вторую строку (добавив соответственно и в первую, и симметричные им), то будет два инварианта типа “квадрат”.



13.	$k_1 = 1$	$k_2 = 1$	$k_3 = 1$	$c = 0$
	$k_1 = 1$	$k_2 = 1$	$k_3 = 2$	$c = 1$
	$k_1 = 1$	$k_2 = 2$	$k_3 = 1$	$c = 1$
	$k_1 = 2$	$k_2 = 1$	$k_3 = 1$	$c = 1$



$$k_1 = 1 \quad k_2 = 1 \quad k_3 = 1 \quad c = 1$$



$$c \geq 2, \text{ т.к. сводится к случаю 11 с помощью леммы 2.7}$$

Если добавить блоки в первую строку (и симметричные им), то случай не будет реализовываться.

Если в третьей строке 3 блока, во второй 4 блока, а в первой 4 или 5, то $c \geq 2$ из 12а, если в первой ≥ 6 блоков, то случай не реализуется.

Если во второй строке ≥ 5 блоков, то будет 2 инварианта типа “квадрат”.

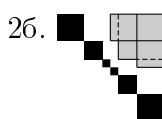
Если в третьей строке ≥ 4 блока, то тоже будет 2 инварианта типа “квадрат”.

Теперь разберем случай особых подгрупп.

Нумерация случаев будет соответствовать случаям для неособых подгрупп, полученных заменой особой подгруппы на неособую путём сопряжения с перестановкой двух средних базисных векторов и замены двух средних блоков на один центральный. При этом достаточно разобрать только те случаи, для которых размер двух центральных блоков, полученных при таком преобразовании особой подгруппы, не превосходит размера двух центральных блоков для другой подгруппы.



$$c = 0$$

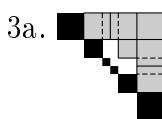


$$k_1 = 1 \quad k_2 \text{ произвольно} \quad c = 0$$

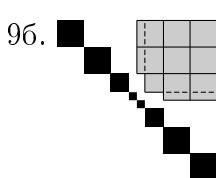
$$k_1 = 2 \quad k_2 = 1 \quad c = 0$$

$$k_1 = 2 \quad k_2 = 2 \quad c = 1$$

$$k_1 = 3 \quad k_2 = 1 \quad c = 1$$



$$k_1 = 1 \quad k_2 = 1 \quad c = 1$$



$$k_1 = 1 \quad k_2 = 1 \quad k_3 = 1 \quad c = 1$$

106. Чтобы сложность была ≤ 1 , необходимо $k_3 = 1$. Поскольку одни центральный блок размера 2 — это то же самое, что два средних блока размеров 1 и 1, то можно считать, что случай 106 (для неособых подгрупп) — это случай, где обе подгруппы имеют по два средних блока, а значит его можно не рассматривать.

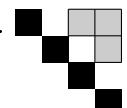
Объединив рассмотренные случаи, получим классификацию, приведенную в таблице 2.

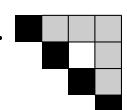
2.3.3. Группа Sp_n .

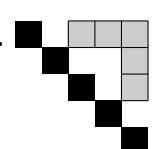
Номера случаев соответствуют нумерации случаев для группы SO_n .

1.  $c = 0$

2a.  $k_1 = 1$ k_2 произвольно $c = 0$

26.  $k_1 = 1$ k_2 произвольно $c = 0$
 $k_1 = 2$ k_2 произвольно $c = 1$

3a.  $k_1 = 1$ k_2 произвольно $c = 1$

36.  $k_1 = 1$ k_2 произвольно k_3 произвольно $c = 0$

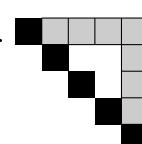
Если в первой строке стоит не меньше 4 блоков, то в силу леммы 2.10 их высота должна быть не больше единицы.

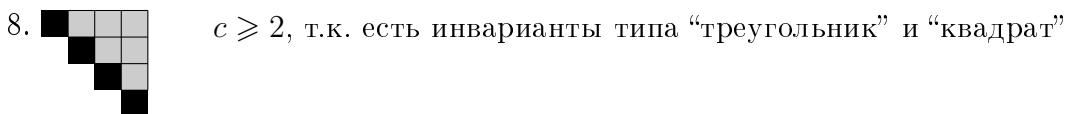
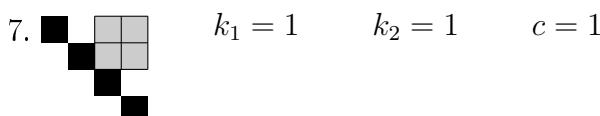
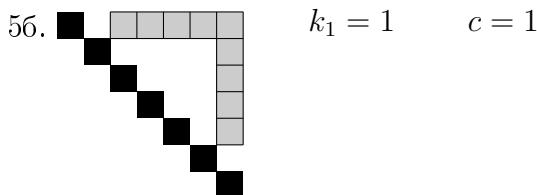
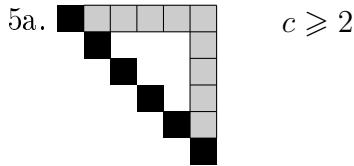
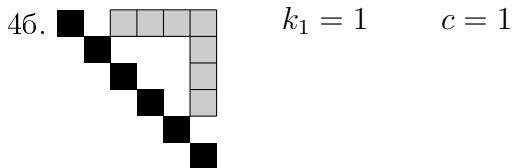
Пусть ненулевые блоки стоят только в первой строке и последнем столбце (пусть в первой строке их m штук) и пусть высота блоков в первой строке $k_1 = 1$. Обозначим сложность для такого случая как $c_{m,a}$, если $r = m + 1$, и $c_{m,b}$, если $r = m + 2$ (r — количество диагональных блоков). Тогда верна следующая лемма.

ЛЕММА 2.12. При $m \geq 3$ справедливы формулы: $c_{m,a} = c_{m-1,b} + 1$, $c_{m,b} = c_{m-1,a}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.11.

В случаях 4 и 5 сложности легко вычисляются по лемме, а при $m \geq 6$ сложность $c \geq 2$.

4a.  $k_1 = 1$ $c = 1$



Если добавить блоки в первую строку (и симметричные им), то случаи не будет реализовываться.

Если во второй строке стоит ≥ 3 блока, то $c \geq 2$, т.к. будет 2 инварианта типа “квадрат”.

Объединив рассмотренные случаи, получим классификацию, приведённую в таблице 3.

2.4. Метод классификации для особых групп

Опишем общий метод вычисления сложности линейного представления редуктивной группы [16, 1.4]. Пусть G — некоторая редуктивная группа, V — её линейное представление. Через v_λ будем обозначать вектор веса λ . Напомним, что через λ^* мы обозначаем старший вес модуля $V(\lambda)^*$. Рассмотрим младший вектор $v_{-\lambda^*}$ представления V . Пространство V можно разложить следующим образом: $V = \langle v_{-\lambda^*} \rangle \oplus W$, где W является B -инвариантным. В V рассмотрим B -инвариантное открытое подмножество $\overset{\circ}{V} = \mathbb{C}^\times v_{-\lambda^*} \oplus W$. Пусть P — параболическая подгруппа, сохраняющая $\langle v_{\lambda^*} \rangle \subseteq V^*$. Разложим P в полупрямое произведение подгруппы Леви и унитентного радикала: $P = L \times P_u$. Пусть V' — дополнительное L -инвариантное подпространство к $\mathfrak{p}_u v_{-\lambda^*}$ в W , т.е. $\mathfrak{p}_u v_{-\lambda^*} \oplus V' = W$. Подмножество $\overset{\circ}{V}$ изоморфно как многообразие с действием группы B прямому произведению $\overset{\circ}{V} = P_u \times (\mathbb{C}^\times v_{-\lambda^*} \oplus V')$, где P_u действует на первом сомножителе левыми сдвигами, а

$B \cap L$ на первом сомножителе действует сопряжением, а на втором действие индуцируется с действиями L . Значит коразмерность типичной орбиты для действия $B = (B \cap L) \times P_u : \mathring{V}$ равна коразмерности типичной орбиты для действия $B \cap L : \langle v_{-\lambda^*} \rangle \oplus V'$. Таким образом мы свели вопрос о сложности действия $G : V$ к действию меньшей группы L на меньшем пространстве $\langle v_{-\lambda^*} \rangle \oplus V'$. Так можно последовательно строить группы $L^{(i)}$ и пространства $V^{(i)}$:

$$G = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq L^{(s)}$$

$$V = V^{(0)} \supseteq V^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq V^{(s)}$$

до тех пор, пока все неприводимые $L^{(s)}$ -подмодули $V^{(s)}$ не станут одномерны. Тогда действие $L^{(s)}$ на $V^{(s)}$ задаётся весами μ_1, \dots, μ_N , а сложность действия будет равна $\dim V^{(s)} - \text{rk}\langle \mu_1, \dots, \mu_N \rangle = N - \text{rk}\langle \mu_1, \dots, \mu_N \rangle$.

Теперь поясним, как работает этот метод для нашего случая. Пересечение подгрупп Леви $L \cap M$ и пересечение касательных алгебр унипотентных радикалов $\mathfrak{p}_u \cap \mathfrak{q}_u$ задаются некоторыми подмножествами корней E_1 и F_1 , соответствующими весовым подпространствам ненулевых весов касательных алгебр. Пусть μ_1 — некоторый минимальный корень F_1 . Пусть $E'_1 = \{\alpha \in E_1 \mid \alpha + \mu_1 \in F_1\}$, $F'_1 = \{\alpha + \mu_1 \mid \alpha \in E'_1\}$. Положим $E_2 = E_1 \setminus E'_1$, $F_2 = F_1 \setminus (F'_1 \cup \{\mu_1\})$. Аналогично по E_2 и F_2 построим μ_2 и E_3, F_3 и т.д. до тех пор, пока множество F_i не станет пустым. В результате получим набор весов $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ и сложность действия вычисляется как $N - \text{rk}\langle \mu_1, \dots, \mu_N \rangle$.

Для каждой особой группы G вначале будем искать сложность для двойных многообразий флагов, соответствующих максимальным параболическим подгруппам, а потом постепенно уменьшать параболическую подгруппу. Ясно, что сложность следует вычислять только для тех случаев, когда леммы 2.3, 2.4 не дают оценки ≥ 2 .

2.5. Классификация для особых групп

Теперь перейдем к конкретным группам.

2.5.1. G_2, F_4, E_8 . Для G_2, F_4 групп нет двойных многообразий флагов, для которых оценка на сложность по лемме 2.4 не превосходит 1. Для группы E_8 для всех пар параболических подгрупп, кроме пары подгрупп, соответствующей паре корней (α_1, α_1) оценка на сложность по лемме 2.4 превышает 1, для этой пары сложность равна 2, т.е. подходящих нам случаев нет.

E_6		
I	J	сложность
α_1	α_1	0
α_1	α_2	0
α_1	α_4	0
α_1	α_5	0
α_1	α_6	0
α_2	α_5	0
α_4	α_5	0
α_5	α_5	0
α_5	α_6	0
α_6	α_6	2
α_1	α_1, α_2	1
α_1	α_1, α_5	0
α_1	α_1, α_6	1
α_1	α_4, α_5	1
α_1	α_5, α_6	1
α_5	α_1, α_2	1
α_5	α_1, α_5	0
α_5	α_1, α_6	1
α_5	α_4, α_5	1
α_5	α_5, α_6	1

E_7		
I	J	сложность
α_1	α_1	0
α_1	α_2	1
α_1	α_6	0
α_1	α_7	0
α_6	α_6	2
α_1	α_1, α_2	2
α_1	α_1, α_6	2

ТАБЛИЦА 4. Пары параболических подгрупп, для которых оценка на сложность по лемме 2.4 для соответствующего двойного многообразия флагов не превышает 1, и соответствующие сложности

2.5.2. E_6, E_7 . Наборы корней, для которых оценка на сложность по лемме 2.4 для соответствующих параболических подгрупп не превышает 1, и соответствующие сложности приведены в таблице 4.

Для примера случай группы E_6 и подмножеств $I = \{\alpha_1\}$, $J = \{\alpha_5\}$ разберем подробнее. В этом случае в обозначениях [1, таблица 1],

$$E_1 = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i, j = 2, \dots, 5; i < j\} \cup \{\varepsilon_6 + \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon \mid i, j = 2, \dots, 5; i < j\},$$

$$F_1 = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_6\} \cup \{\varepsilon_1 + \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon \mid i, j = 2, \dots, 5; i < j\} \cup \{2\varepsilon\}.$$

В качестве μ_1 возьмём $\varepsilon_1 - \varepsilon_6$. Тогда

$$E'_1 = \{\varepsilon_6 + \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon \mid i, j = 2, \dots, 5; i < j\},$$

$$F'_1 = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon \mid i, j = 2, \dots, 5; i < j\},$$

откуда

$$E_2 = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i, j = 2, \dots, 5; i < j\}, F_2 = \{2\varepsilon\}.$$

В качестве μ_2 возьмём 2ε , тогда $F_3 = \emptyset$. Сложность вычисляется как $2 - \text{rk}\langle \mu_1, \mu_2 \rangle = 0$.

Окончательный результат сформулирован в теореме 1.

Глава 3

U -инварианты колец Кокса двойных многообразий флагов

3.1. Метод поиска B -инвариантных дивизоров

3.1.1. Геометрический алгоритм поиска дивизоров. Общая идея поиска B -инвариантных дивизоров состоит в том, чтобы попробовать действием B привести произвольную точку из $X = G/P^- \times G/Q^-$ к каноническому виду и найти условия, когда этого сделать нельзя. Эти условия и будут задавать B -инвариантные дивизоры из дополнения к открытой B -орбите в случае сложности 0 и B -инвариантные дивизоры из дополнения к некоторому параметрическому семейству B -орбит (не обязательно совпадающему с семейством всех параметрических дивизоров) в случае сложности 1.

Вначале сведем задачу поиска B -инвариантных дивизоров на $G/P^- \times G/Q^-$ к задаче нахождения $(B \cap L \cap M)$ -инвариантных дивизоров на $U_P \cap U_Q$, где $L \subset P, M \subset Q$ — стандартные подгруппы Леви, а $L \cap M$ действует на $U_P \cap U_Q$ сопряжениями.

ЛЕММА 3.1. *Любой B -инвариантный дивизор на $X = G/P^- \times G/Q^-$, за исключением дивизоров Шуберта, является результатом действия группы $U_P \cdot (L \cap U_Q)$ на $(B \cap L \cap M)$ -инвариантный дивизор в $[e] \times (U_P \cap U_Q)[e] \simeq U_P \cap U_Q$. При этом $U_P \cdot (L \cap U_Q)$ -орбиты пересекают $[e] \times (U_P \cap U_Q)[e]$ трансверсально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим прямое произведение “больших клеток” $U_P[e] \times U_Q[e]$ — оно является дополнением к дивизорам Шуберта в X . Любую точку из $U_P[e] \times U_Q[e]$ можно действием U_P загнать в некоторую точку из $[e] \times U_Q[e]$, причём в единственную точку этого множества. Действуя $L \cap U_Q$, загоним точку в $[e] \times (U_P \cap U_Q)[e]$. Изобразим

описанный процесс:

$$X = G/P^- \times G/Q^- \supset U_P[e] \times U_Q[e] \xrightarrow{U_P} [e] \times U_Q[e] \xrightarrow{L \cap U_Q} [e] \times (U_P \cap U_Q)[e].$$

Таким образом, любая $U_P \cdot (L \cap U_Q)$ -орбита пересекает $[e] \times (U_P \cap U_Q)[e]$ в единственной точке. Отметим, что $L \cap M$ переводит $[e] \times (U_P \cap U_Q)[e]$ в себя. Тогда B -инвариантные дивизоры на X (за исключением дивизоров Шуберта) пересекают $[e] \times (U_P \cap U_Q)[e]$ по $(B \cap L \cap M)$ -инвариантным дивизорам, а значит B -инвариантные дивизоры на X (за исключением дивизоров Шуберта) являются результатами действия $U_P \cdot (L \cap U_Q)$ на $(B \cap L \cap M)$ -инвариантные дивизоры. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку $L \cap M \subset P^-, Q^-$, то действие $L \cap M$ на $[e] \times (U_P \cap U_Q)[e]$ при изоморфизме $[e] \times (U_P \cap U_Q)[e] \simeq U_P \cap U_Q$ превращается в действие на $U_P \cap U_Q$ сопряжениями.

Теперь опишем подробнее, как мы будем искать дивизоры на $U_P \cap U_Q$.

Введем координаты на $U_P \cap U_Q$ следующим образом: элемент $g \in U_P \cap U_Q$ будет иметь координаты $(q_{\gamma_1}, \dots, q_{\gamma_k})$, $\gamma_i \in \Delta(U_P \cap U_Q)$, если $g = \exp(q_{\gamma_1} e_{\gamma_1} + \dots + q_{\gamma_k} e_{\gamma_k})$, где e_{γ_i} — корневые векторы.

Посмотрим, как изменяются координаты на $U_P \cap U_Q$ при действии $L \cap M$. Поскольку $g \exp(\xi)g^{-1} = \exp[\text{Ad}(g)\xi]$, $\forall g \in G, \xi \in \mathfrak{g}$, и $\text{Ad} \circ \exp = \exp \circ \text{ad}$ (см., например, [1, гл.1, §2]), то при $g = \exp(\eta)$ получим следующую формулу:

$$\exp(\eta) \cdot \exp(\xi) \cdot \exp(\eta)^{-1} = \exp[\text{Ad}(\exp(\eta))\xi] = \exp(\xi + [\eta, \xi] + \frac{1}{2!}[\eta, [\eta, \xi]] + \dots).$$

В частности, при $\eta = se_\beta$, $\xi = \sum q_{\gamma_i} e_{\gamma_i}$ имеем:

$$\exp(se_\beta) \cdot \exp\left(\sum q_{\gamma_i} e_{\gamma_i}\right) \exp(-se_\beta) = \exp\left(\sum q_{\gamma_i} e_{\gamma_i} + \sum sq_{\gamma_i} [e_\beta, e_{\gamma_i}] + \sum \frac{s^2}{2!} q_{\gamma_i} [e_\beta, [e_\beta, e_{\gamma_i}]] + \dots\right). \quad (2)$$

Пусть $H_1 = B \cap L \cap M$. Возьмём какую-нибудь H_1 -полуинвариантную координату $x_1 := q_{\mu_1}$. Тогда условие $q_{\mu_1} = 0$ задаёт H_1 -инвариантный дивизор D_1 на $S_1 := U_P \cap U_Q$. Рассмотрим открытое множество, заданное условием $q_{\mu_1} \neq 0$. Действуя группой $U \cap L \cap M$, обнулим те координаты, которые можем. Рассмотрим множество S_2 , состоящее из точек полученного вида. Пусть $H_2 \subset B \cap L \cap M$ — максимальная подгруппа, переводящая S_2 в себя (то есть H_2 — нормализатор S_2). Далее возьмём какую-нибудь H_2 -полуинвариантную координату $x_2 := q_{\mu_2}$ на S_2 . Тогда условие $q_{\mu_2} = 0$ задаёт H_2 -инвариантный дивизор D_2 на S_2 . Замыкание объединения $(B \cap L \cap M)$ -орбит точек дивизора на S_2 будет $(B \cap L \cap M)$ -инвариантным дивизором на $U_P \cap U_Q$. Далее действуем аналогично: обнуляем координаты,

которые можем обнулить, получаем множество $S_3 \subset S_2$, выбираем полуинвариантную координату и т.д.

При приведении точки к последнему виду мы действовали только унитентной частью, осталось ещё действие тора. В случае сложности 0 можно сделать все x_i равными 1. В случае сложности 1 можно сделать равными 1 все x_i , кроме одного. Так мы получим канонический вид точки.

Если сложность X равна 0, то найденные таким образом дивизоры D_i будут всеми простыми B -инвариантными дивизорами. Действительно, мы выкидывали некоторые дивизоры, и вне их нам удалось привести точку к одному и тому же каноническому виду. То есть дополнение к этим дивизорам является открытой B -орбитой, а значит, других B -инвариантных дивизоров нет.

Если сложность X равна 1, то найденные дивизоры могут быть не всеми исключительными дивизорами, а некоторые из них могут быть параметрическими. Тем не менее, мы нашли такие дивизоры, что в дополнении к ним B -орбиты параметризуются числами $z := x_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$, где x_i — координата, которую мы не обращаем в 1. Замыкания этих орбит и будут оставшимися простыми B -инвариантными дивизорами.

3.1.2. Строение дивизоров для сложности 1. Теперь опишем, как найти оставшиеся исключительные дивизоры в случае сложности 1, а также как понять, какие из уже найденных являются параметрическими. Будем считать, что мы уже знаем веса и мультистепени канонических сечений найденных дивизоров. Способ их определения различается для классического и особого случая, поэтому мы опишем его позже разделах 3.2 и 3.4.

Пусть D_1, \dots, D_m — все простые B -инвариантные дивизоры, кроме дивизоров Шуберта, на двойном многообразии флагов сложности 1, найденные по описанному в разделе 3.1.1 алгоритму. Найдем такие два взаимно простых монома одного веса и мультистепени от канонических сечений дивизоров Шуберта и D_1, \dots, D_m , что параметр z (рассматриваемый как B -инвариантная рациональная функция на X) является их отношением. Такие мономы найдутся, поскольку B -орбиты в дополнении к дивизорам Шуберта и D_1, \dots, D_m параметризуются числами $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а значит, среди дивизоров Шуберта и D_1, \dots, D_m есть все простые B -инвариантные дивизоры D , для которых $z_D = 0$ или $z_D = \infty$. Тогда в качестве F и F' мы можем взять мономы $\prod_{z_D=0, h_D>0} s_D$ и $\prod_{z_D=\infty, h_D>0} s_D$.

Теперь мы можем определить, какие из дивизоров D_1, \dots, D_m параметрические — это в точности те дивизоры, вес и мультистепень которых совпадают с F и F' . Дивизор сечения $F - zF'$, ограниченный на $\Omega := X \setminus (D_{P,i_1} \cup \dots \cup D_{P,i_r} \cup D_{Q,j_1} \cup \dots \cup D_{Q,j_t} \cup D_1 \cup \dots \cup D_m)$, является замыканием орбиты, соответствующей значению параметра z . Замыкание такой

орбиты будет исключительным дивизором, если $\text{div}(F - zF')$, рассматриваемый на всем X , содержит один из дивизоров Шуберта или один из D_1, \dots, D_m , либо если $F - zF'$ имеет вдоль данной орбиты порядок не меньший 2. В противном случае замыкание орбиты будет параметрическим дивизором.

Вместо того, чтобы это явно проверять, мы либо покажем, что все замыкания орбит в Ω — параметрические дивизоры, либо найдем такой дополнительный простой B -инвариантный дивизор D_{m+1} (который естественно будет совпадать с замыканием одной из орбит параметрического семейства), что в $\Omega \setminus D_{m+1}$ все замыкания B -орбит будут параметрическими дивизорами.

Обозначим через \mathcal{D}_1 множество таких дивизоров среди дивизоров Шуберта и D_1, \dots, D_m , которые не входят в $\text{div } F$ и $\text{div } F'$. Для $D \in \mathcal{D}_1$ мы хотим понять, есть ли такое z , что $\text{div}(F - zF')$ содержит D . Воспользуемся “соображения весов и степеней”: если для некоторого z верно, что $\text{div}(F - zF')$ содержит D , то мультистепень F не меньше мультистепени s_D (покомпонентно) и разность весов F и s_D является доминантным весом. Тогда мы получим, что для некоторых $D \in \mathcal{D}_1$ искомого z не существует.

Пусть $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{D}_1$ — множество оставшихся дивизоров. Если $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, то все замыкания орбит в Ω являются простыми дивизорами, которые либо являются параметрическими, либо некоторая степень соответствующего сечения пропорциональна $F - zF'$ для некоторого z . Пусть $\mathcal{D}_2 \neq \emptyset$. Найдем новый простой B -инвариантный дивизор D_{m+1} , так чтобы некоторый моном вида $s_{D_{m+1}}^{a_{D_{m+1}}} \prod_{D \in \mathcal{D}_2} s_D^{a_D}$, где $a_{D_{m+1}}, a_D > 0$, имел такую же мультистепень и такой же вес, как F и F' . Общего объяснения того, почему такой дивизор можно найти, нет, но в каждом рассматриваемом далее случае такой дивизор находится. Данный дивизор задаётся либо некоторым геометрическим условием в терминах взаимного расположения подпространств (для классических групп), либо находится из уже известных дивизоров для “меньших многообразий флагов” (как, например, в случае 7 раздела 3.5.1), либо находится изменением выбора инвариантных и обнуляемых координат в методе поиска дивизоров (такой способ использован в случае 4 раздела 3.5.2). Данный моном будет пропорционален $F - z_0 F'$ для некоторого z_0 , и для дивизоров $D \in \mathcal{D}_2 \cup \{D_{m+1}\}$ имеем $z_D = z_0, h_D = a_D > 0$. Простые дивизоры, являющиеся замыканиями орбит в $\Omega \setminus D_{m+1}$, либо параметрические, либо некоторая степень соответствующего сечения пропорциональна $F - zF'$ для некоторого z .

Осталось проверить, что $F - zF'$ не может иметь порядка 2 и выше вдоль замыкания одной из орбит в $\Omega \setminus D_{m+1}$. Это опять будет следовать из “соображений весов и степеней”:

в рассматриваемых случаях (в разделах 3.3, 3.5) мультистепень F и F' не является некоторой кратностью другой мультистепени. Данный метод проиллюстрирован на примере 6 из раздела 3.3.1.

3.2. Метод вычисления инвариантов колец Кокса для классических групп

3.2.1. Многообразия флагов классических групп и алгоритм поиска дивизоров. Пусть P задана размерами блоков (k_1, \dots, k_s) или $(k_1, \dots, k_s)'$, причем в данной главе мы будем начинать с правого нижнего угла (то есть k_1 — размер самого правого нижнего блока). Точками многообразия флагов G/P^- являются флаги вложенных друг в друга подпространств в \mathbb{C}^n размерностей $k_1, k_1 + k_2, \dots$. Для $G = SO_n, Sp_n$ подпространства ещё должны быть изотропными или коизотропными, причём если во флаге присутствует подпространство W , то во флаге также должно быть подпространство W^\perp . Если подгруппа не особая, то подпространства во флаге из G/P^- будем обозначать через R_i , где нижний индекс обозначает размерность. Если подгруппа особая, то подпространство размерности l обозначим через R'_l , а других размерностей — как выше. Для двойных многообразий флагов $X = G/P^- \times G/Q^-$ подпространства во флагах, соответствующих точкам из G/Q^- , будем аналогичным образом обозначать S_j или S'_l .

Поясним метод поиска B -инвариантных дивизоров в случае классических групп. Будем считать, что точка не лежит в дивизорах Шуберта. Тогда точку можно привести к такому виду, где $R_i = \langle e_n, \dots, e_{n-i+1} \rangle$ для всех R_i во флаге и $R'_l = \langle e_n, \dots, e_{l+2}, e_l \rangle$ (если подпространство R'_l есть во флаге), или к виду, где $S_j = \langle e_n, \dots, e_{n-j+1} \rangle$ для всех S_j во флаге и $S'_l = \langle e_n, \dots, e_{l+2}, e_l \rangle$ (также, если оно есть во флаге). Приведем точку к одному из двух видов; будем считать, что мы привели в первому виду. Дальнейшие преобразования будем совершать таким образом, чтобы подпространства R_i (и R'_l) не изменялись.

Если во флаге нет подпространства S'_l , то в подпространствах S_j выберем базисы, как изображено на рис. 1. На рис. 1 столбцами матриц изображены базисные векторы подпространств, а вертикальные линии ограничивают справа подпространства во флаге. Если подпространство S'_l есть во флаге, то приведем к виду, полученному из рис. 1 (при наличии l -мерного подпространства во флаге) перестановкой двух средних строк. Координаты

			...
		0 . 1	.
0 .		0	0
1 0			

Рис.1

базисных векторов на месте звёздочек определены однозначно — это и будут координаты на $U_P \cap U_Q$. Далее обнуляем координаты на месте звёздочек, как описано в разделе 3.1.1.

3.2.2. Определение веса и мультистепени канонического сечения.

3.2.2.1. *О геометрической форме записи дивизоров.* Нам нужно найти веса и мультистепени канонических сечений найденных B -инвариантных дивизоров. Для этого мы запишем дивизоры в геометрической форме — в терминах взаимного расположения подпространств. Такая запись удобна тем, что во-первых, она компактнее и нагляднее, а во-вторых, из такого задания легко следует B -инвариантность.

Опишем, как будут выглядеть геометрические условия. Вначале будем считать, что $G = SL_n, Sp_n$ или SO_{2l+1} . Пусть $E_k = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ — B -инвариантное подпространство. Далее мы рекурсивно определим допустимые выражения. Подпространства R_p и S_q играют роль переменных и будут элементарными допустимыми выражениями. Если W и W' — допустимые выражения, то $W + W'$ и $W \cap E_k$ — допустимые выражения. При подстановке в допустимые выражения конкретных подпространств R_p и S_q получаются некоторые подпространства в \mathbb{C}^n . Геометрическое условие для дивизора будет иметь один из следующих видов: $W \neq 0$ или $W \perp W'$, где W, W' — допустимые выражения.

Для $G = SO_{2l}$ наряду с E_k мы будем использовать в геометрических условиях B -инвариантное подпространство $E'_l = \langle e_1, \dots, e_{l-1}, e_{l+1} \rangle$. Для особых параболических подгрупп появятся подпространства R'_l (и S'_l). В тех случаях, когда во флаге есть подпространства R_{l-1} и R_l , мы будем использовать в геометрическом задании ещё некоторое подпространство, которое тоже обозначим через R'_l , определяемое как единственное изотропное подпространство размерности l отличное от R_l , для которого $R_{l-1} \subset R'_l \subset R_{l-1}^\perp = R_{l+1}$ (для флагов из G/Q^- аналогично).

Теперь объясним, как из геометрической записи получить уравнение в координатах Плюккера. Координату Плюккера m -мерного пространства из флага, принадлежащего G/P^- , при базисном поливекторе $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ будем обозначать через r_{i_1, \dots, i_m} (и s_{i_1, \dots, i_m} — для точек G/Q^-). Мы будем сопоставлять допустимым выражениям, участвующим в геометрической записи, некоторые поливекторы, зависящие от координат Плюккера пространств R_p и S_q , по следующему правилу. Пусть вначале $G = SL_n, Sp_n$ или SO_{2l+1} . Подпространствам R_p, S_q сопоставим задающие их поливекторы $\sum r_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ и $\sum s_{j_1, \dots, j_q} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_q}$ степеней p и q соответственно. Пусть допустимому выражению W соответствует поливектор $\sum w_{i_1, \dots, i_r} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$, и E_m — такое минимальное B -инвариантное подпространство (среди E_k , $k \leq n$), что $W \subseteq E_m$ при подстановке любых значений переменных R_p, S_q в выражение W . Тогда выражению $W \cap E_k$ (геометрические условия мы

пишем таким образом, что $k < m$) сопоставим поливектор $\sum w_{m,m-1,\dots,k+1,j_1,\dots,j_r-m+k} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{r-m+k}}$, а выражению $W + W'$ — внешнее произведение поливекторов, соответствующих W и W' . Если подпространства R_p, S_q находятся в достаточно общем положении, то эти поливекторы соответствуют пересечению и сумме подпространств в смысле плюккеровых вложений соответствующих грассманнанов. Пусть геометрическое условие имеет вид $W \neq 0$. Условия подобраны таким образом, что поливектор, соответствующий W , имеет степень 0, то есть является числом, зависящим от координат Плюккера. Приравнивая это число к 0, получим уравнение дивизора в координатах Плюккера. Теперь рассмотрим другой вид условия: $W \perp W'$. Геометрические условия подобраны таким образом, что выражениям W и W' соответствуют поливекторы степени 1, т.е. векторы из \mathbb{C}^n . Записав условие ортогональности этих векторов, получим уравнение дивизора.

Теперь пусть $G = SO_{2l}$. Алгоритм аналогичен случаю $G = SL_n, Sp_n, SO_{2l+1}$, но имеет небольшие дополнения. Если E_m — такое минимальное B -инвариантное подпространство (теперь среди $E_k, k \leq n$, и E'_l), что $W \subseteq E_m$, то выражению $W \cap E_k$ сопоставим поливектор как раньше, а выражению $W \cap E'_l$ сопоставим $\sum w_{m,m-1,\dots,l+2,l,j_1,\dots,j_r-m+l} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{r-m+l}}$. Если E'_l — такое минимальные B -инвариантное подпространство (среди $E_k, k \leq n$, и E'_l), что $W \subseteq E'_l$, то выражению $W \cap E_k$ сопоставим поливектор $\sum w_{l+1,l-1,l-2,\dots,k+1,j_1,\dots,j_r-l+k} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{r-l+k}}$.

Метод построения уравнения по геометрическому условию разобран также в примере 1 из 3.3.1.

Теперь объясним, как по геометрическому условию найти мультистепень соответствующего уравнения. Чтобы найти степень по координатам Плюккера подпространства R_p , нужно посчитать количество вхождений R_p (и R_p^\perp в ортогональном и симплектическом случаях) в геометрическую запись. Степень по координатам Плюккера S_q определяется аналогично. Мультистепень по координатам Плюккера будет обозначать через $(\dots)_{Pl}$. Опишем связь между мультистепенью по плюккеровым координатам и мультистепенью по группе Пикара. Пусть m_i — степень по $D_{P,i}$ в $\text{Pic}(X)$, p_i — степень по плюккеровым координатам пространства R_i , p'_l — по плюккеровым координатам пространства R'_l . Тогда для группы SL_n имеем $m_i = p_{n-i}$. Для группы Sp_n имеем $m_i = p_i$. Для SO_{2l+1} верны следующие формулы: $m_i = p_i$ при $i < l$, $m_l = 2p_l$. Для SO_{2l} имеем $m_i = p_i$ при $i \leq l-2$, $m_{l-1} = p_{l-1} + 2p'_l$, $m_l = p_{l-1} + 2p_l$.

3.2.2.2. Методы проверки простоты дивизоров. В разделе 3.1.1 мы описали, как искать простые B -инвариантные дивизоры. Геометрическое условие (в терминах взаимного расположения подпространств) для D_i удобно находить таким образом, что на $U_i :=$

$X \setminus (D_{P,i_1} \cup \dots \cup D_{P,i_r} \cup D_{Q,j_1} \cup \dots \cup D_{Q,j_t} \cup D_1 \cup \dots \cup D_{i-1})$ множество нулей формы f_i от координат Плюккера, построенной по геометрическому условию, совпадает с D_i , то есть $\operatorname{div} f_i$ при ограничении на U_i является кратностью D_i . Мы можем найти вес и мультистепень f_i , но чтобы правильно найти вес и мультистепень s_{D_i} , нужно знать $\operatorname{div} f_i$ на всем X . Мы будем поступать следующим образом: вначале убедимся, что $\operatorname{div} f_i$ не содержит дивизоров Шуберта и D_1, \dots, D_{i-1} , а затем найдем кратность D_i в $\operatorname{div} f_i$.

Объясним, как проверять, что $\operatorname{div} f_i$ не содержит дивизоров Шуберта и D_1, \dots, D_{i-1} . Во-первых, будем пользоваться “соображениями весов и степеней”: если $\operatorname{div} f_i$ содержит D , то мультистепень f_i больше или равна мультистепени s_D (покомпонентно), а разность весов f_i и s_D является доминантным весом. Во-вторых, мы можем перебирать случаи в таком порядке, что B -инвариантные дивизоры на “меньших” двойных многообразиях флагов нам будут уже известны (“меньшими” для $X = G/P_I^- \times G/P_J^-$ мы называем такие многообразия $X' = G/P_{I'}^- \times G/P_{J'}^-$, отличные от X , что $I' \subseteq I$ и $J' \subseteq J$, то есть имеется G -эквивариантный сюръективный морфизм $X \rightarrow X'$). Таким образом мы знаем веса и мультистепени канонических сечений, соответствующих B -инвариантным дивизорам, у которых хотя бы одна компонента мультистепени нулевая.

Основываясь на этих двух соображениях, получаем следующий алгоритм проверки того, что $\operatorname{div} f_i$ не содержит D , где D — дивизор Шуберта или один из D_j , $j < i$. Пусть ν — разность весов f_i и s_D , а (\bar{m}, \bar{n}) — разность мультистепеней. Если в (\bar{m}, \bar{n}) есть отрицательная компонента, или ν — не доминантный вес, то проверка закончена. Пусть теперь отрицательных компонент в (\bar{m}, \bar{n}) нет, и ν — доминантен. Предположим, что в (\bar{m}, \bar{n}) есть нулевая компонента. Тогда $\operatorname{div} f_i - D$ является прообразом дивизора на “меньшем” двойном многообразии флагов. Нужно проверить, что на соответствующем меньшем многообразии дивизоров с такой мультистепенью и весом канонического сечения нет. В большинстве случаев этого рассуждения достаточно. Этот метод, в частности, используется в случае 1 из раздела 3.3.1.

Для некоторых дивизоров D_i можно доказать, что мультистепени соответствующих канонических сечений не имеют нулевых компонент. Это доказывается исходя из того, что дивизоры на меньших многообразиях флагов нам известны. Таким образом, если мы уже нашли все такие простые дивизоры, что мультистепени их сечений имеют нулевые компоненты, то сечения, соответствующие оставшимся дивизорам, не имеют нулевых компонент. Тогда в предыдущем алгоритме проверку можно заканчивать, если (\bar{m}, \bar{n}) имеет нулевые компоненты. Такой метод используется, например, в случае 5а раздела 3.3.2.

Если этих рассуждений не хватило, то находим такую точку $x \in D_j$, что $f_i(x) \neq 0$. Такой способ использован, например, в случае 5б раздела 3.3.2.

Теперь объясним, как искать кратность D_i в $\text{div } f_i$. Пусть мы уже проверили, что дивизоры Шуберта и D_j , $j < i$ не входят в $\text{div } f_i$. Здесь тоже можно воспользоваться “соображениями весов и степеней”: если $\text{div } f_i = kD_i$, то компоненты мультистепени должны быть кратны k , а вес должен быть k -й кратностью доминантного. Таким способом в большинстве случаев можно получить, что $k = 1$.

Пусть таким способом найти кратность k не удалось. Ограничим все на множество U_i . Найдем некоторую подгруппу $H \subseteq B$ и некоторое сечение Z , трансверсально пересекающее каждую H -орбиту в одной точке и инвариантное относительно некоторой подгруппы $H' \subseteq B$, так что $B = HH'$. Тогда $U_i \simeq H \times Z$, а B -инвариантными дивизорами на U_i являются $H \times D$, где D — H' -инвариантный дивизор на Z . Найдем такое сечение, что в локальных координатах на сечении форма f_i записывалась бы максимально просто. Тогда из рассмотрения $f_i|_Z$ мы найдем кратность k . Данный метод проиллюстрирован на случаях 4 раздела 3.3.2 и случае 1 раздела 3.3.3.

3.2.3. Форма записи результата. На рисунках мы будем изображать точку из $G/P^- \times G/Q^-$. Левая картинка соответствует проекции на G/P^- , правая — на G/Q^- . Столбцы обозначают базисные векторы подпространств из флагов. Жирными линиями разделены подпространства: таким образом, столбцы до первой жирной линии образуют базис пространства наименьшей размерности во флаге, до второй — следующего по размерности пространства и т.д. Переменные x_i ставим в соответствии с алгоритмом, приведённом в 3.1.1. Для случая сложности 0 при замене всех x_i на рисунке на 1 получим точку канонического вида. Для случая сложности 1 при замене всех x_i на рисунке, кроме последнего (с наибольшим индексом), на 1, а последнего — на z , получим точку канонического вида из B -орбиты, соответствующей параметру z .

Для каждого случая информацию о дивизорах мы будем записывать в таблицу. Для удобства через $\Delta_{P,i}$ и $\Delta'_{P,l}$ будет обозначать дивизоры Шуберта многообразия флагов, точками которого являются подпространства R_i и R'_l . Таким образом, для группы SL_n имеем $D_{P,i} = \Delta_{P,n-i}$, для Sp_n и SO_{2l+1} имеем $D_{P,i} = \Delta_{P,i}$. Для SO_{2l} имеем $D_{P,i} = \Delta_{P,i}$ при $i \neq l-1$, $D_{P,l-1} = \Delta'_{P,l}$. Сечения s_{D_i} будем для краткости обозначать через F_i , а сечения $s_{\Delta_{P,i}}$ и $s_{\Delta'_{P,l}}$ — через $F_{P,i}$ и $F'_{P,l}$. Обозначения $\Delta_{Q,i}$, $\Delta'_{Q,l}$, $F_{Q,i}$ и $F'_{Q,l}$ определяются аналогичным образом. Для случаев сложности 0 будем выписывать в таблицу геометрические условия дивизоров, веса и мультистепени соответствующих им канонических сечений для всех простых B -инвариантных дивизоров, кроме дивизоров Шуберта, для которых эта

информация нам и так известна из раздела 1.1. Для случаев сложности 1 в таблицу будем выписывать информацию о всех исключительных дивизорах, кроме дивизоров Шуберта, а также мономы от сечений, соответствующих исключительным дивизорам, имеющие такие же мультистепень и вес, как F и F' . Напомним, что если монома два, то значит исключительных точек тоже две и $R(X)^U$ свободна. Если монома три, то исключительных точек три, эти мономы связаны линейным соотношением, а $R(X)^U$ является гиперповерхностью.

Для группы SO_n нам будет удобно ввести следующие обозначения: $\pi_i := \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$, $\pi'_l := \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l$. Тогда вес координаты Плюккера $r_{n,\dots,n-k+1}$ равен π_k для любого k , а вес $r_{n,\dots,l+2,l}$ равен π'_l . Данные веса выражаются через фундаментальные следующим образом: для SO_{2l+1} имеем $\pi_i = \omega_i$ при $i < l$, $\pi_l = 2\omega_l$, для группы SO_{2l} выполнено $\pi_i = \omega_i$ при $i < l-1$, $\pi_{l-1} = \omega_{l-1} + \omega_l$, $\pi_l = 2\omega_l$, $\pi'_l = 2\omega_{l-1}$.

Отметим, что для SO_n геометрическое условие, интерпретируемое как уравнение в координатах Плюккера, иногда задаёт квадрат канонического сечения. Если геометрическое условие не задаёт простой дивизор, то для этого случая вначале будем выписывать мультистепень по координатам Плюккера и вес сечения, соответствующего геометрическому условию, а затем мультистепень по группе Пикара и вес сечения, соответствующего простому дивизору. Поскольку в геометрическом условии мы используем дополнительно подпространства R'_l и S'_l , то мультистепень по координатам Плюккера имеет в этом случае дополнительную компоненту. Степень по координатам Плюккера этих дополнительных подпространств будем писать после степени по плюккеровым координатам подпространств R_{l-1} и R_l (или S_{l-1} и S_l).

3.3. Инварианты колец Кокса для классических групп

3.3.1. Группа SL_n .

сложность 0

1. $(p_1, p_2), (q_1, q_2)$

Пусть $p = p_1, q = q_1$. Без ограничения общности можно считать, что $p \leq q$.

	deg	вес	геометрическое условие
F_k	$(1, 1)$	$\omega_{p-k}^* + \omega_{q+k}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-p+k} + S_q \cap E_{n-p+k} \rangle \cap E_{n-q-k} \neq 0$, $k = 1, \dots, \min(p, n-q)$

Объясним, почему выписанные геометрические условия задают все простые B -инвариантные дивизоры, кроме дивизоров Шуберта. Рассмотрим произвольную точку (R_p, S_q) в $G/P^- \times G/Q^-$. Действием группы B будем пытаться привести её к каноническому виду

0	0
0	0
$0 \cdot 1$	$0 \cdot 1$
$1 \cdot 0$	$1 \cdot 0$

$\cdot \cdot 0$	0
$0 \cdot x_2$	x_1
0	0
$1 \cdot \cdot$	1

Рис.1.1.1

точек из открытой орбиты. Нас будут интересовать условия, когда этого сделать нельзя, т.е. условия, когда точка не лежит в открытой орбите.

Если $r_{n,\dots,n-p+1} \neq 0$, то в R_p можно выбрать такой базис, что пространство R_p имеет вид как на рис. 1.1.2а, то есть базисными векторами подпространства R_p являются столбцы матрицы на рисунке. Условие $r_{n,\dots,n-p+1} = 0$ задаёт дивизор Шуберта, геометрически такое условие означает, что $R_p \cap E_{n-p} \neq 0$. Далее будем считать, что $r_{n,\dots,n-p+1} \neq 0$. Действием борелевской подгруппы можно привести R_p к виду как на рис. 1.1.2б. При дальнейших преобразованиях будем следить, чтобы R_p больше не изменялось.

Если $s_{n,\dots,n-q+1} \neq 0$, то есть S_q лежит вне соответствующего дивизора Шуберта, то в S_q выберем базис, в котором S_q имеет вид как на рис. 1.1.2в. Действием группы B можно привести S_q к виду как на рис. 1.1.2г. Если $x_1 \neq 0$ (см. рис. 1.1.2г), то S_q можно привести к виду как на рис. 1.1.2д. Далее смотрим на элемент x_2 (см. рис. 1.1.2д) и т.д. Если все такие элементы не равны 0, то S_q можно привести к каноническому виду (1.1.2е). Теперь найдем условия равенства нулю элементов x_1, x_2 и т.д.

a)	б)	в)	г)	д)	е)	ж)

Рис.1.1.2

Равенство нулю элемента x_k влечёт равенство нулю определителя, составленного из выделенных подстолбцов на рис. 1.1.2ж. Подпространства, порождённые столбцами, получающимися из выделенных продлением вверх и вниз, равны $R_p \cap E_{n-p+k}$ и $S_q \cap E_{n-p+k}$ соответственно. Равенство нулю рассматриваемого определителя означает равенство нулю координаты Плюккера при $e_{n-p+k} \wedge \dots \wedge e_{n-q-k+1}$ в сумме этих двух подпространств, что

означает неравенство нулю пересечения:

$$\langle R_p \cap E_{n-p+k} + S_q \cap E_{n-p+k} \rangle \cap E_{n-q-k} \neq 0.$$

Подпространствам R_p и S_q соответствуют поливекторы $\sum r_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ и $\sum s_{j_1, \dots, j_q} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_q}$ соответственно. Тогда подпространству $R_p \cap E_{n-p+k}$ соответствует поливектор $\sum r_{n, \dots, n-p+k+1, i_{p-k+1}, \dots, i_p} e_{i_{p-k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$, а подпространству $S_q \cap E_{n-p+k}$ соответствует поливектор $\sum s_{n, \dots, n-p+k+1, j_{p-k+1}, \dots, j_q} e_{j_{p-k+1}} \wedge \dots \wedge e_{j_q}$, сумме подпространств соответствует поливектор

$$\sum r_{n, \dots, n-p+k+1, i_{p-k+1}, \dots, i_p} s_{n, \dots, n-p+k+1, j_{p-k+1}, \dots, j_q} e_{i_{p-k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_{p-k+1}} \wedge \dots \wedge e_{j_q}.$$

Приравнивая координату Плюккера при $e_{n-q-k+1} \wedge \dots \wedge e_{n-p+k}$ к нулю, получим следующее уравнение дивизора:

$$\sum \text{sgn} \begin{pmatrix} i_{p-k+1} & \dots & i_p & j_{p-k+1} & \dots & j_q \\ n-q-k+1 & \dots & n-q & n-q+1 & \dots & n-p+k \end{pmatrix} r_{n, \dots, n-p+k+1, i_{p-k+1}, \dots, i_p} s_{n, \dots, n-p+k+1, j_{p-k+1}, \dots, j_q} = 0,$$

где сумма берется по всем наборам индексов, для которых множества $\{i_{p-k+1}, \dots, i_p, j_{p-k+1}, \dots, j_q\}$ и $\{n-q-k+1, n-q-k+2, \dots, n-p+k\}$ совпадают. Из вида уравнения видно, что его вес равен $\omega_{p-k}^* + \omega_{q+k}^*$, а мультистепень равна $(1, 1)$.

Теперь проверим, что форма f_k , построенная по геометрическому условию для D_k , задает простой дивизор. Для этого проверим, что $\text{div } f_k$ не содержит дивизоров $\Delta_{P,p}$, $\Delta_{Q,q}$, D_1, \dots, D_{k-1} и что f_k задаёт простой дивизор на $U_k = X \setminus (\Delta_{P,p} \cup \Delta_{Q,q} \cup D_1 \cup \dots \cup D_{k-1})$. Тогда мы получим, что f_k пропорционально F_k .

Первое утверждение следует из того, что разности весов f_k и канонических сечений, отвечающих этим дивизорам, не являются доминантными весами. Форма f_k не может задавать некоторую кратность D_k , поскольку мультистепень f_k не является кратностью другой мультистепени.

В остальных случаях сложности 0 мы будем опускать подробности рассуждений.

2. $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), (\mathbf{1}, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$

Пусть $p = p_1, q = q_2$.

a) $p < 1 + q$

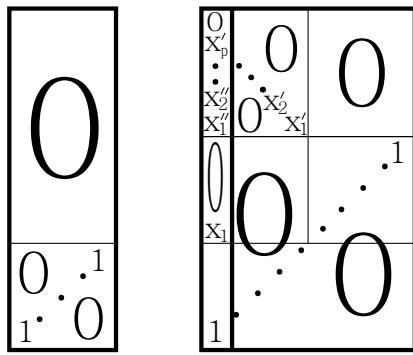


Рис.1.2а

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	(1, 1, 0)	ω_{p+1}^*	$\langle R_p + S_1 \rangle \cap E_{n-p-1} \neq 0$
F'_k	(1, 0, 1)	$\omega_{p-k}^* + \omega_{1+q+k}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-p+k} + S_{1+q} \cap E_{n-p+k} \rangle \cap E_{n-(1+q)-k} \neq 0,$ $k = 1, \dots, \min(p, n - q - 1)$
F''_k	(1, 1, 1)	$\omega_{p-k+1}^* + \omega_{1+q+k}^*$	$\langle\langle R_p + S_1 \rangle \cap E_{n-p+k-1} + S_{1+q} \cap E_{n-p+k-1} \rangle \cap E_{n-(1+q)-k} \neq 0,$ $k = 1, \dots, \min(p - 1, n - q - 1)$

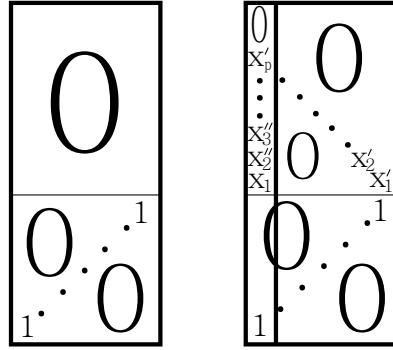
б) $p = 1 + q$ 

Рис.1.2б

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	(1, 1, 0)	ω_{p+1}^*	$\langle R_p + S_1 \rangle \cap E_{n-p-1} \neq 0$
F'_k	(1, 0, 1)	$\omega_{p-k}^* + \omega_{1+q+k}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-p+k} + S_{1+q} \cap E_{n-p+k} \rangle \cap E_{n-(1+q)-k} \neq 0,$ $k = 1, \dots, \min(p, n - q - 1)$
F''_k	(1, 1, 1)	$\omega_{p-k+1}^* + \omega_{1+q+k}^*$	$\langle\langle R_p + S_1 \rangle \cap E_{n-p+k-1} + S_{1+q} \cap E_{n-p+k-1} \rangle \cap E_{n-(1+q)-k} \neq 0,$ $k = 2, \dots, \min(p - 1, n - q - 1)$

в) $p > 1 + q$

Рис.1.2в

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	(1, 1, 0)	ω_{p+1}^*	$\langle R_p + S_1 \rangle \cap E_{n-p-1} \neq 0$
F'_k	(1, 0, 1)	$\omega_{p+k}^* + \omega_{1+q-k}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-(1+q)+k} + S_{1+q} \cap E_{n-(1+q)+k} \rangle \cap E_{n-p-k} \neq 0,$ $k = 1, \dots, \min(q+1, n-p)$
F''_k	(1, 1, 1)	$\omega_{p+k}^* + \omega_{2+q-k}^*$	$\langle \langle R_p + S_1 \rangle \cap E_{n-(1+q)+k-1} + S_{1+q} \cap E_{n-(1+q)+k-1} \rangle \cap E_{n-p-k} \neq 0,$ $k = 2, \dots, \min(q, n-p)$

3. $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), (\mathbf{q}_1, \mathbf{1}, \mathbf{q}_3)$

Пусть $p = p_1, q = q_1$. Можно считать, что $p \geq 1 + q$.

Рис.1.3

	deg	вес	геометрическое условие
F_k	(1, 1, 0)	$\omega_{p+k}^* + \omega_{q-k}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-p+k} + S_q \cap E_{n-p+k} \rangle \cap E_{n-p-k} \neq 0,$ $k = 1, \dots, \min(q, n-p)$
F'_k	(1, 0, 1)	$\omega_{p+k}^* + \omega_{q+1-k}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-(q+1)+k} + S_{q+1} \cap E_{n-(q+1)+k} \rangle \cap E_{n-p-k} \neq 0,$ $k = 1, \dots, \min(q+1, n-p)$

4. $(\mathbf{2}, \mathbf{p}), (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$

Можно считать, что $q_1, q_2, q_3 \geq 2$, иначе это случай 2 или 3.

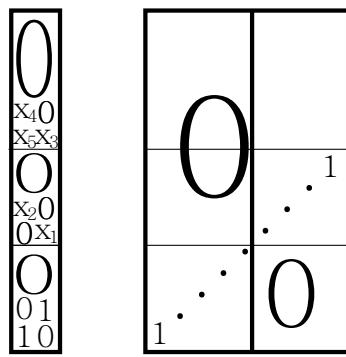


Рис.1.4

	deg	вес	геометрическое условие
F_k	(1, 1, 0)	$\omega_{2-k}^* + \omega_{q_1+k}^*$	$\langle R_2 \cap E_{n-2+k} + S_{q_1} \cap E_{n-2+k} \rangle \cap E_{n-q_1-k} \neq 0, \quad k = 1, 2$
F_{2+k}	(1, 0, 1)	$\omega_{2-k}^* + \omega_{q_1+q_2+k}^*$	$\langle R_2 \cap E_{n-2+k} + S_{q_1+q_2} \cap E_{n-2+k} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-k} \neq 0, \quad k = 1, 2$
F_5	(1, 1, 1)	$\omega_{q_1+1}^* + \omega_{q_1+q_2+1}^*$	$\langle\langle R_2 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-1} + S_{q_1+q_2} \cap E_{n-q_1-1} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-1} \neq 0$

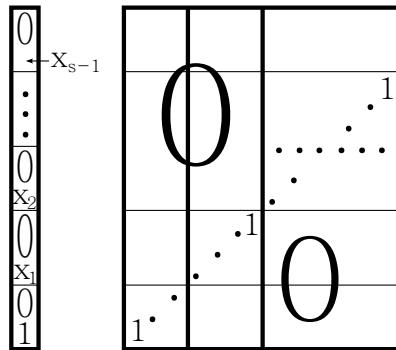
5. $(\mathbf{1}, \mathbf{p}), (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_s)$ 

Рис.1.5

	deg	вес	геометрическое условие
F_k	$(1, 0, \dots, 1, \dots, 0)$	$\omega_{q_1+\dots+q_k+1}^*$	$\langle R_1 + S_{q_1+\dots+q_k} \rangle \cap E_{n-(q_1+\dots+q_k)-1} \neq 0, \quad k = 1, \dots, s-1$

сложность 16. $(\mathbf{2}, \mathbf{p}), (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)$ a) $q_1, q_2, q_3, q_4 \geq 2$.

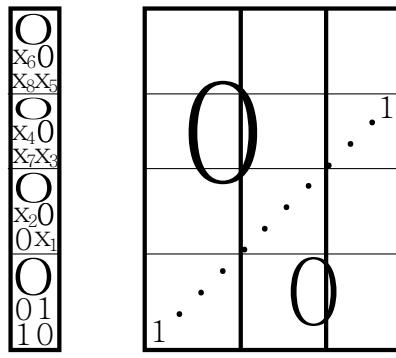


Рис.1.6

	deg	вес	геометрическое условие
F_k	$(1, 1, 0, 0)$	$\omega_{2-k}^* + \omega_{q_1+k}^*$	$\langle R_2 \cap E_{n-2+k} + S_{q_1} \cap E_{n-2+k} \rangle \cap E_{n-q_1-k} \neq 0,$ $k = 1, 2$
F_{2+k}	$(1, 0, 1, 0)$	$\omega_{2-k}^* + \omega_{q_1+q_2+k}^*$	$\langle R_2 \cap E_{n-2+k} + S_{q_1+q_2} \cap E_{n-2+k} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-k} \neq 0,$ $k = 1, 2$
F_{4+k}	$(1, 0, 0, 1)$	$\omega_{2-k}^* + \omega_{q_1+q_2+q_3+k}^*$	$\langle R_2 \cap E_{n-2+k} + S_{q_1+q_2+q_3} \cap E_{n-2+k} \rangle \cap$ $\cap E_{n-(q_1+q_2+q_3)-k} \neq 0, \quad k = 1, 2$
F_7	$(1, 1, 1, 0)$	$\omega_{q_1+1}^* + \omega_{q_1+q_2+1}^*$	$\langle (R_2 + S_{q_1}) \cap E_{n-q_1-1} + S_{q_1+q_2} \cap E_{n-q_1-1} \rangle$ $\cap E_{n-(q_1+q_2)-1} \neq 0$
F_8	$(1, 1, 0, 1)$	$\omega_{q_1+1}^* + \omega_{q_1+q_2+q_3+1}^*$	$\langle (R_2 + S_{q_1}) \cap E_{n-q_1-1} + S_{q_1+q_2+q_3} \cap E_{n-q_1-1} \rangle$ $\cap E_{n-(q_1+q_2+q_3)-1} \neq 0$
F_9	$(1, 0, 1, 1)$	$\omega_{q_1+q_2+1}^* + \omega_{q_1+q_2+q_3+1}^*$	$\langle \langle R_2 + S_{q_1+q_2} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-1} + S_{q_1+q_2+q_3} \cap$ $\cap E_{n-(q_1+q_2)-1} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2+q_3)-1} \neq 0$
$F_3 F_8$			
$F_5 F_7$	$(2, 1, 1, 1)$	$\omega_1^* + \omega_{q_1+1}^* +$	
$F_1 F_9$		$+ \omega_{q_1+q_2+1}^* + \omega_{q_1+q_2+q_3+1}^*$	

Объясним, как мы нашли все исключительные дивизоры и такие мономы, что линейное соотношение между ними порождает идеал соотношений в $R(X)^U$. Обозначим через Ω множество $X \setminus \{\Delta_{P,2}, \Delta_{Q,q_1}, \Delta_{Q,q_1+q_2}, \Delta_{Q,q_1+q_2+q_3}, D_1, \dots, D_8\}$. Тогда любую точку из Ω можно привести к каноническому виду, то есть к виду, изображенному на рисунке 1.6, где значения всех x_i равны 1, кроме x_8 ; пусть $x_8 = z$. Это число z и будет параметризовать орбиты. В открытом множестве Ω орбиты будут взаимно-однозначно соответствовать точкам $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Формы $F_3 F_8$ и $F_5 F_7$ имеют одинаковые вес и степень, их можно нормировать

так, чтобы параметр z выражался через них как $z = (F_3F_8 : F_5F_7)$. Параметрические дивизоры будут задаваться формами $F_3F_8 - zF_5F_7$. Тогда $z_{D_5} = z_{D_7} = \infty$, $z_{D_3} = z_{D_8} = 0$, а $h_{D_5} = h_{D_7} = h_{D_3} = h_{D_8} = 1$.

Теперь надо понять, каким значениям z соответствуют исключительные дивизоры. Для этого достаточно проверить, делится ли форма $F_3F_8 - zF_5F_7$ при некоторых значениях z на формы оставшихся дивизоров из $X \setminus \Omega$, т.е. на формы дивизоров из множества $\mathcal{D}_1 := \{\Delta_{P,2}, \Delta_{Q,q_1}, \Delta_{Q,q_1+q_2}, \Delta_{Q,q_1+q_2+q_3}, D_1, D_2, D_4, D_6\}$. Вес формы $F_3F_8 - zF_5F_7$ равен $\omega_1^* + \omega_{q_4+1}^* + \omega_{q_4+q_3+1}^* + \omega_{q_4+q_3+q_2+1}^*$, поэтому на формы всех дивизоров из \mathcal{D}_1 , кроме D_1 , данная форма не делится ни при каких значениях z из соображений весов. Найдем дивизор D_9 , так что F_1F_9 имеет ту же вес и степень, что и форма, задающая параметрический дивизор. Нормировав F_1F_9 , можно добиться того, что $z-1 = (F_1F_9 : F_5F_7)$. Тогда найденные формы связаны соотношением $F_3F_8 - F_5F_7 = F_1F_9$. Получаем, что $z_{D_1} = z_{D_9} = 1$ и $h_{D_1} = h_{D_9} = 1$. В данном случае будет 3 исключительных точки: $1, 0, \infty$. Тогда алгебра $R(X)^U$ будет порождаться формами $F_{P,2}, F_{Q,q_1}, F_{Q,q_1+q_2}, F_{Q,q_1+q_2+q_3}, F_1, \dots, F_9$, а $F_3F_8 - F_5F_7 = F_1F_9$ является определяющим соотношением.

В остальных случаях сложности 1 мы будем опускать подобные рассуждения.

б) Не все q_1, q_2, q_3, q_4 больше или равны 2.

Если $q_1 = 1$, то $f_1 = F_{P,2}F_{Q,1}$. Тогда $\text{div } f_1$ не прост, нужно убрать F_1 из образующих, а в соотношение вместо F_1 подставить $F_{P,2}F_{Q,1}$.

Если $q_2 = 1$, то $f_7 = F_2F_{Q,q_1+1}$. Тогда $\text{div } f_7$ не прост, нужно убрать F_7 из образующих, а в соотношение вместо F_7 подставить F_2F_{Q,q_1+1} .

Если $q_3 = 1$, то $f_9 = F_4F_{Q,q_1+q_2+1}$. Тогда $\text{div } f_9$ не прост, нужно убрать F_9 из образующих, а в соотношение вместо F_9 подставить F_4F_{Q,q_1+q_2+1} .

Если $q_4 = 1$, то дивизора D_6 нет.

7. $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{q})$, $p_1, p_2 \geq 2$

Можно считать, что $p_1, p_2 \geq 3$. Пусть $p = p_1$.

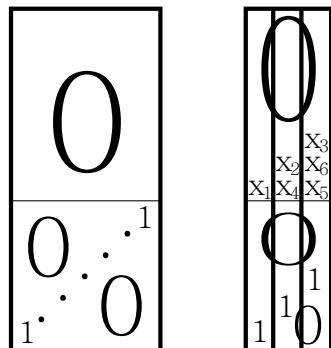


Рис.1.7

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	(1, 1, 0, 0)	ω_{p+1}^*	$\langle R_p + S_1 \rangle \cap E_{n-p-1} \neq 0$
F_2	(1, 0, 1, 0)	ω_{p+2}^*	$\langle R_p + S_2 \rangle \cap E_{n-p-2} \neq 0$
F_3	(1, 0, 0, 1)	ω_{p+3}^*	$\langle R_p + S_3 \rangle \cap E_{n-p-3} \neq 0$
F_4	(1, 0, 1, 0)	$\omega_1^* + \omega_{p+1}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-1} + S_2 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{n-p-1} \neq 0$
F_5	(1, 0, 0, 1)	$\omega_2^* + \omega_{p+1}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-2} + S_3 \cap E_{n-2} \rangle \cap E_{n-p-1} \neq 0$
F_6	(1, 1, 0, 1)	$\omega_2^* + \omega_{p+2}^*$	$\langle \langle R_p + S_1 \rangle \cap E_{n-2} + S_3 \cap E_{n-2} \rangle \cap E_{n-p-2} \neq 0$
F_7	(1, 0, 0, 1)	$\omega_1^* + \omega_{p+2}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-1} + S_3 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{n-p-2} \neq 0$
$F_{Q,1}F_2F_5$			
$F_{Q,2}F_1F_7$	(2, 1, 1, 1)	$\omega_1^* + \omega_2^* +$	
F_4F_6		$+ \omega_{p+1}^* + \omega_{p+2}^*$	

8. $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{q}, \mathbf{1})$, $p_1, p_2 \geq 2$

Можно считать, что $p_1, p_2 \geq 3$. Пусть $p = p_1$.

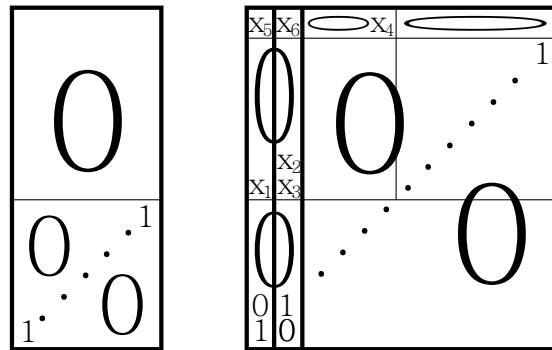


Рис.1.8

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	(1, 1, 0, 0)	ω_{p+1}^*	$\langle R_p + S_1 \rangle \cap E_{n-p-1} \neq 0$
F_2	(1, 0, 1, 0)	ω_{p+2}^*	$\langle R_p + S_2 \rangle \cap E_{n-p-2} \neq 0$
F_3	(1, 0, 1, 0)	$\omega_1^* + \omega_{p+1}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-1} + S_2 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{n-p-1} \neq 0$
F_4	(1, 0, 0, 1)	ω_{p-1}^*	$\langle R_p \cap E_{n-p+1} + S_{q+2} \cap E_{n-p+1} \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_5	(1, 1, 0, 1)	ω_p^*	$\langle \langle R_p + S_1 \rangle \cap E_{n-p} + S_{q+2} \cap E_{n-p} \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_6	(1, 0, 1, 1)	$\omega_1^* + \omega_p^*$	$\langle \langle R_p \cap E_{n-1} + S_2 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{n-p} + S_{q+2} \cap E_{n-p} \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_7	(1, 0, 1, 1)	ω_{p+1}^*	$\langle \langle R_p + S_2 \rangle \cap E_{n-p-1} + S_{q+2} \cap E_{n-p-1} \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_1F_6			
F_3F_5	(2, 1, 1, 1)	$\omega_1^* + \omega_p^* +$	
$F_{P,p}F_{Q,1}F_7$		$+ \omega_{p+1}^*$	

9. $(\mathbf{3}, \mathbf{p}), (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$, $q_1, q_2, q_3 \geq 2$

a) $q_1, q_2, q_3 \geq 3$

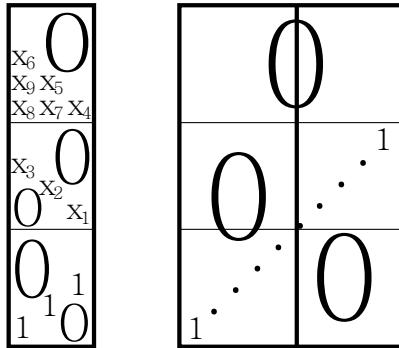


Рис.1.9

	deg	вес	геометрическое условие
F_k	$(1, 1, 0)$	$\omega_{3-k}^* + \omega_{q_1+k}^*$	$\langle R_3 \cap E_{n-3+k} + S_{q_1} \cap E_{n-3+k} \rangle \cap E_{n-q_1-k} \neq 0,$ $k = 1, 2, 3$
F_{3+k}	$(1, 0, 1)$	$\omega_{3-k}^* + \omega_{q_1+q_2+k}^*$	$\langle R_3 \cap E_{n-3+k} + S_{q_1+q_2} \cap E_{n-3+k} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-k} \neq 0,$ $k = 1, 2, 3$
F_7	$(1, 1, 1)$	$\omega_1^* + \omega_{q_1+1}^* + \omega_{q_1+q_2+1}^*$	$\langle \langle R_3 \cap E_{n-1} + S_{q_1} \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{n-q_1-1} + S_{q_1+q_2} \cap E_{n-q_1-1} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-1} \neq 0$
F_8	$(1, 1, 1)$	$\omega_{q_1+2}^* + \omega_{q_1+q_2+1}^*$	$\langle \langle R_3 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-2} + S_{q_1+q_2} \cap E_{n-q_1-2} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-1} \neq 0$
F_9	$(2, 1, 1)$	$\omega_2^* + \omega_{q_1+2}^* + \omega_{q_1+q_2+2}^*$	$\langle \langle R_3 \cap E_{n-2} + S_{q_1+q_2} \cap E_{n-2} \rangle \cap E_{n-q_1-2} + \langle R_3 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-2} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-2} \neq 0$
F_{10}	$(1, 1, 1)$	$\omega_{q_1+1}^* + \omega_{q_1+q_2+2}^*$	$\langle \langle R_3 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-1} + S_{q_1+q_2} \cap E_{n-q_1-1} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-2} \neq 0$
$F_1 F_5 F_8$ $F_7 F_9$ $F_2 F_4 F_{10}$	$(3, 2, 2)$	$\omega_1^* + \omega_2^* + \omega_{q_1+1}^* + \omega_{q_1+2}^* + \omega_{q_1+q_2+1}^* + \omega_{q_1+q_2+2}^*$	

б) Не все $q_1, q_2, q_3 \geq 3$.

Если $q_1 = 2$, то $f_1 = F_{P,3}F_{Q,2}$. Тогда $\operatorname{div} f_1$ не прост, нужно убрать F_1 из образующих, а в соотношение вместо F_1 подставить $F_{P,3}F_{Q,2}$.

Если $q_2 = 2$, то $f_8 = F_3 F_{Q,q_1+2}$. Тогда $\operatorname{div} f_8$ не прост, нужно убрать F_8 из образующих, а в соотношение вместо F_8 подставить $F_3 F_{Q,q_1+2}$.

Если $q_3 = 2$, то дивизора D_6 нет.

10. $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{q})$, $p_1, p_2 \geq 3$

Можно считать, что $p_1, p_2 \geq 4$. Пусть $p = p_1$.

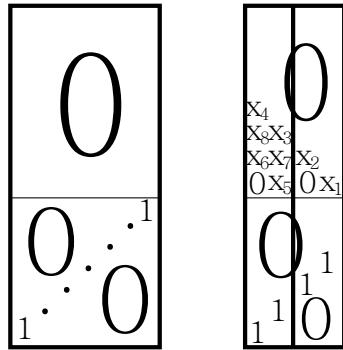


Рис.1.10

	deg	вес	геометрическое условие
F_k	(1, 0, 1)	$\omega_{4-k}^* + \omega_{p+k}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-4+k} + S_4 \cap E_{n-4+k} \rangle \cap E_{n-p-k} \neq 0,$ $k = 1, \dots, 4$
F_{4+k}	(1, 1, 0)	$\omega_{2-k}^* + \omega_{p+k}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-2+k} + S_2 \cap E_{n-2+k} \rangle \cap E_{n-p-k} \neq 0$ $k = 1, 2$
F_7	(1, 1, 1)	$\omega_1^* + \omega_3^* + \omega_{p+2}^*$	$\langle\langle R_p \cap E_{n-1} + S_2 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{n-3} + S_4 \cap E_{n-3} \rangle \cap E_{n-p-2} \neq 0$
F_8	(2, 1, 1)	$\omega_2^* + \omega_{p+1}^* + \omega_{p+3}^*$	$\langle\langle R_p + S_2 \rangle \cap E_{n-p-1} + \langle R_p \cap E_{n-2} + S_4 \cap E_{n-2} \rangle \cap E_{n-p-1} \rangle \cap E_{n-p-3} \neq 0$
F_9	(1, 1, 1)	$\omega_3^* + \omega_{p+3}^*$	$\langle\langle R_p + S_2 \rangle \cap E_{n-3} + S_4 \cap E_{n-3} \rangle \cap E_{n-p-3} \neq 0$
F_7F_8			
$F_{Q,2}F_1F_3F_6$	(3, 2, 2)	$\omega_1^* + \omega_2^* + \omega_3^* +$ $+ \omega_{p+1}^* + \omega_{p+2}^* + \omega_{p+3}^*$	
$F_2F_5F_9$			

$$11. (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), (\mathbf{2}, \mathbf{q}, \mathbf{2}), p_1, p_2 \geqslant 3$$

Можно считать, что $p_1, p_2 \geq 4$. Пусть $p = p_1$.

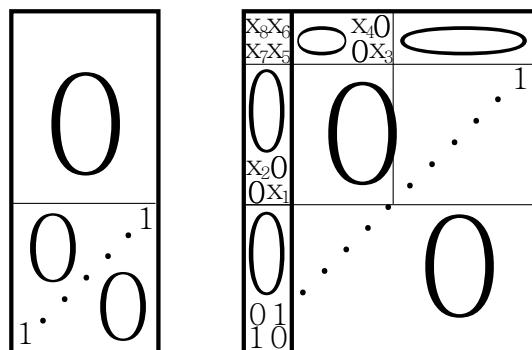


Рис.1.11

	deg	вес	геометрическое условие
F_k	(1, 1, 0)	$\omega_{2-k}^* + \omega_{p+k}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-2+k} + S_2 \cap E_{n-2+k} \rangle \cap E_{n-p-k} \neq 0, \quad k = 1, 2$
F_{2+k}	(1, 0, 1)	$\omega_{p-k}^* + \omega_{(q+2)+k}^*$	$\langle R_p \cap E_{n-p+k} + S_{2+q} \cap E_{n-p+k} \rangle \cap E_{n-(2+q)-k} \neq 0, \quad k = 1, 2$
F_5	(1, 1, 1)	$\omega_1^* + \omega_p^* + \omega_{n-1}^*$	$\langle\langle R_p \cap E_{n-1} + S_2 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{n-p} + S_{2+q} \cap E_{n-p} \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_6	(1, 1, 1)	$\omega_1^* + \omega_{p-1}^*$	$\langle\langle R_p \cap E_{n-1} + S_2 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{n-p+1} + S_{2+q} \cap E_{n-p+1} \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_7	(1, 1, 1)	$\omega_{p+1}^* + \omega_{n-1}^*$	$\langle\langle R_p + S_2 \rangle \cap E_{n-p-1} + S_{2+q} \cap E_{n-p-1} \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_8	(2, 1, 1)	$\omega_{p-1}^* + \omega_{p+1}^*$	$\langle\langle R_p + S_2 \rangle \cap E_{n-p-1} + \langle S_{2+q} \cap E_{n-p+1} + R_p \cap E_{n-p+1} \rangle \cap E_{n-p-1} \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_9	(1, 1, 1)	ω_p^*	$\langle\langle R_p + S_2 \rangle \cap E_{n-p} + S_{2+q} \cap E_{n-p} \rangle \cap E_0 \neq 0$
$F_{P,p}F_6F_7$			
F_5F_8	(3, 2, 2)	$\omega_1^* + \omega_{p-1}^* + \omega_p^* + \omega_{p+1}^* + \omega_{n-1}^*$	
$F_1F_3F_9$			

12. $(p_1, p_2, p_3), (1, 1, q)$

a) $p_1, p_2, p_3 \geq 2$

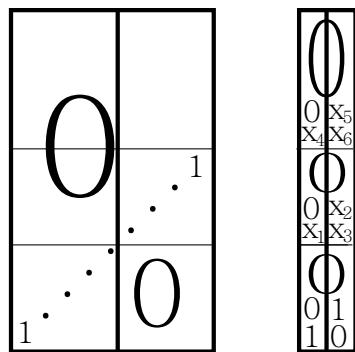


Рис.1.12

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	(1, 0, 1, 0)	$\omega_{p_1+1}^*$	$\langle R_{p_1} + S_1 \rangle \cap E_{n-p_1-1} \neq 0$
F_2	(1, 0, 0, 1)	$\omega_{p_1+2}^*$	$\langle R_{p_1} + S_2 \rangle \cap E_{n-p_1-2} \neq 0$
F_3	(1, 0, 0, 1)	$\omega_1^* + \omega_{p_1+1}^*$	$\langle R_{p_1} \cap E_{n-1} + S_2 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{n-p_1-1} \neq 0$
F_4	(0, 1, 1, 0)	$\omega_{p_1+p_2+1}^*$	$\langle R_{p_1+p_2} + S_1 \rangle \cap E_{n-(p_1+p_2)-1} \neq 0$
F_5	(0, 1, 0, 1)	$\omega_{p_1+p_2+2}^*$	$\langle R_{p_1+p_2} + S_2 \rangle \cap E_{n-(p_1+p_2)-2} \neq 0$
F_6	(0, 1, 0, 1)	$\omega_1^* + \omega_{p_1+p_2+1}^*$	$\langle R_{p_1+p_2} \cap E_{n-1} + S_2 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{n-(p_1+p_2)-1} \neq 0$
F_7	(1, 1, 0, 1)	$\omega_{p_1+1}^* + \omega_{p_1+p_2+1}^*$	$\langle\langle R_{p_1} + S_2 \rangle \cap E_{n-p_1-1} + S_{p_1+p_2} \cap E_{n-p_1-1} \rangle \cap E_{n-p_1-p_2-1} \neq 0$
F_3F_4			
F_1F_6	(1, 1, 1, 1)	$\omega_1^* + \omega_{p_1+1}^* + \omega_{p_1+p_2+1}^*$	
$F_{Q,1}F_7$			

б) не все $p_1, p_2, p_3 \geq 2$

Если $p_1 = 1$, то $f_3 = F_{P,1}F_{Q,2}$. Тогда $\text{div } f_3$ не прост, нужно убрать F_3 из образующих, а в соотношение вместо F_3 подставить $F_{P,1}F_{Q,2}$.

Если $p_2 = 1$, то $f_7 = F_2F_{P,p_1+1}$. Тогда $\text{div } f_7$ не прост, нужно убрать F_7 из образующих, а в соотношение вместо F_7 подставить F_2F_{P,p_1+1} .

Если $p_3 = 1$, то дивизора D_5 нет.

13. ($\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$), ($\mathbf{1}, \mathbf{q}, \mathbf{1}$)

a) $p_1, p_2, p_3 \geq 2$

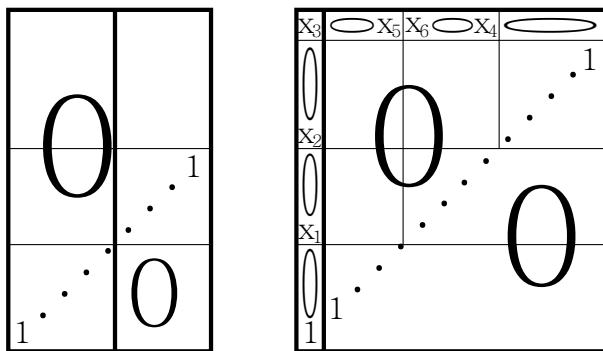


Рис.1.13

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	$(1, 0, 1, 0)$	$\omega_{p_1+1}^*$	$\langle R_{p_1} + S_1 \rangle \cap E_{n-p_1-1} \neq 0$
F_2	$(0, 1, 1, 0)$	$\omega_{p_1+p_2+1}^*$	$\langle R_{p_1+p_2} + S_1 \rangle \cap E_{n-(p_1+p_2)-1} \neq 0$
F_3	$(0, 1, 1, 1)$	$\omega_{p_1+p_2}^*$	$\langle\langle R_{p_1+p_2} + S_1 \rangle \cap E_{n-(p_1+p_2)} + S_{1+q} \cap E_{n-(p_1+p_2)} \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_4	$(0, 1, 0, 1)$	$\omega_{p_1+p_2-1}^*$	$\langle R_{p_1+p_2} \cap E_{n-(p_1+p_2)+1} + S_{1+q} \cap E_{n-(p_1+p_2)+1} \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_5	$(1, 0, 0, 1)$	$\omega_{p_1-1}^*$	$\langle R_{p_1} \cap E_{n-p_1+1} + S_{1+q} \cap E_{n-p_1+1} \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_7	$(1, 0, 1, 1)$	$\omega_{p_1}^*$	$\langle\langle R_{p_1} + S_1 \rangle \cap E_{n-p_1} + S_{1+q} \cap E_{n-p_1} \rangle \cap E_0 \neq 0$
$F_{P,p_1} F_3$	$(1, 1, 1, 1)$	$\omega_{p_1}^* + \omega_{p_1+p_2}^*$	
$F_{P,p_1+p_2} F_7$			

Дивизор D_6 , задаваемый в локальных координатах уравнением $x_6 = 0$, является параметрическим.

В данном случае мы не задали D_6 геометрическим условием и тем самым немного отклонились от описанного в п.б алгоритма; поэтому дадим небольшой комментарий. Вместо дивизора, задающегося условием $x_6 = 0$, мы нашли дивизор D_7 , который задается условием $x_6 = 1$. Дальнейшие рассуждения аналогичны описанному алгоритму, только теперь орбиты в $X \setminus (\Delta_{P,p_1} \cup \Delta_{P,p_1+p_2} \cup \Delta_{Q,1} \cup \Delta_{Q,1+q} \cup D_1 \cup \dots \cup D_5 \cup D_7)$ параметризуются числами $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ (а не $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Отметим, что в данном случае $R(X)^U$ свободна.

б) не все $p_1, p_2, p_3 \geq 2$

Если $p_1 = 1$, то $f_7 = F_5 F_{Q,1}$. Тогда $\text{div } f_7$ не прост, нужно убрать F_7 из образующих, а в произведение вместо F_7 подставить $F_5 F_{Q,1}$.

Если $p_2 = 1$, то исключительных точек будет 3, появится еще одно произведение форм $F_1 F_4$ того же веса и мультистепени, что F и F' , и $R(X)^U$ окажется гиперповерхностью.

Если $p_3 = 1$, то $f_3 = F_2 F_{Q,1+q}$. Тогда $\text{div } f_3$ не прост, нужно убрать F_3 из образующих, а в произведение вместо F_3 подставить $F_2 F_{Q,1+q}$.

3.3.2. Группа Sp_n .

Обозначим $l = \frac{n}{2}$.

сложность 0

1. $(\mathbf{p}, \mathbf{p}), (\mathbf{p}, \mathbf{p})$ ($p = l$)

	deg	вес	геометрическое условие
F_k	$(1, 1)$	$2\omega_{l-k}$	$\langle R_l \cap E_{l+k} + S_l \cap E_{l+k} \rangle \cap E_{l-k} \neq 0, k = 1, \dots, l$

2. $(\mathbf{p}, \mathbf{p}), (\mathbf{1}, \mathbf{q}, \mathbf{1})$ ($p = l$)

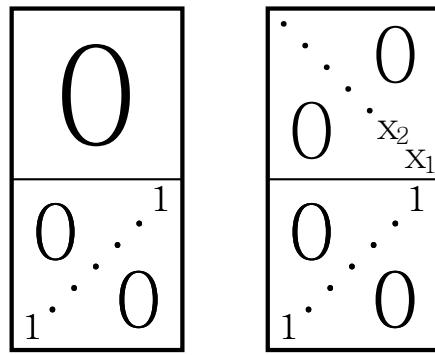


Рис.2.1

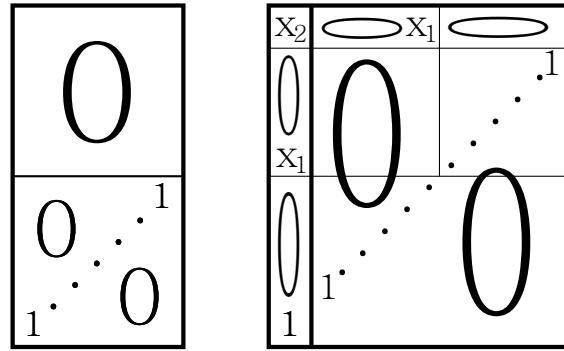


Рис.2.2

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	(1, 1)	ω_{l-1}	$\langle R_l + S_1 \rangle \cap E_{l-1} \neq 0$
F_2	(1, 2)	ω_l	$\langle R_l + S_1 \rangle \cap E_l \perp S_1$

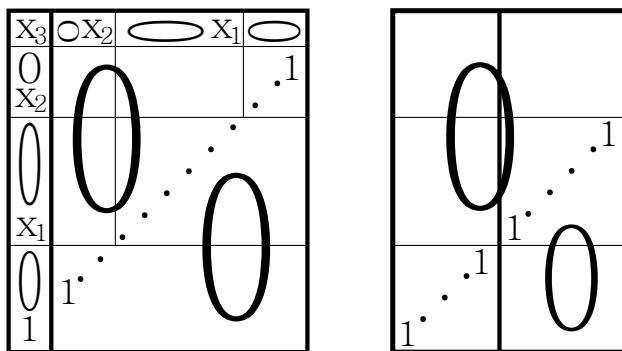
3. $(1, p, 1), (q_1, q_2, q_1)$ a) $q_1 > 1$ 

Рис.2.3

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	(1, 1)	ω_{q_1+1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{q_1+q_2-1} \neq 0$
F_2	(1, 1)	ω_{q_1-1}	$\langle R_1 + S_{q_1+q_2} \rangle \cap E_{q_1-1} \neq 0$
F_3	(2, 1)	ω_{q_1}	$\langle R_1 + S_{q_1+q_2} \rangle \cap E_{q_1} \perp R_1$

b) $q_1 = 1$

Если $q_1 = 1$, то $f_3 = F_2 F_{P,1}$. Тогда $\operatorname{div} f_3$ не прост, нужно убрать F_3 из образующих.

сложность 1

4. (p, p), (2, q, 2) ($p = l$)

a) $p \geq 4$

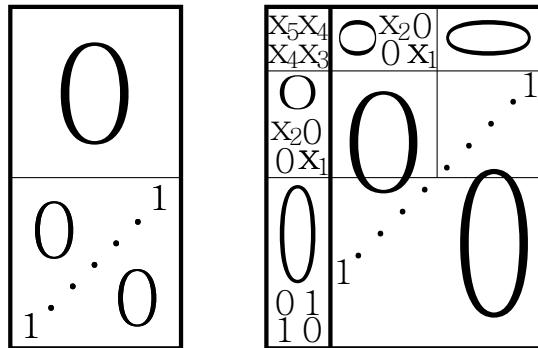
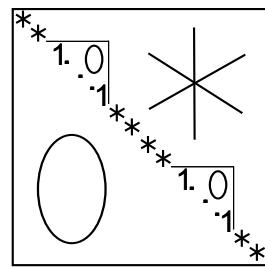


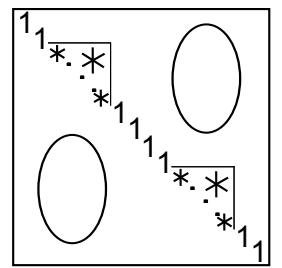
Рис.2.4.1

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	(1, 1)	$\omega_1 + \omega_{l-1}$	$\langle R_l \cap E_{n-1} + S_2 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{l-1} \neq 0$
F_2	(1, 1)	ω_{l-2}	$\langle R_l + S_2 \rangle \cap E_{l-2} \neq 0$
F_3	(1, 2)	$2\omega_1 + \omega_l$	$\langle R_l \cap E_{n-1} + S_2 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_l \perp S_2 \cap E_{n-1}$
F_4	(1, 2)	$\omega_1 + \omega_{l-1}$	$\langle R_l + S_2 \rangle \cap E_{l-1} \perp S_2 \cap E_{n-1}$
F_5	(2, 2)	$2\omega_{l-1}$	$\langle \langle R_l + S_2 \rangle \cap E_{l-1} + \langle R_l \cap E_{l+1} + S_{n-2} \cap E_{l+1} \rangle \cap E_{l-1} \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_6	(1, 2)	ω_l	$\langle \langle R_l + S_2 \rangle \cap E_l + S_{n-2} \cap E_l \rangle \cap E_0 \neq 0$
$F_3 F_5$			
$F_4^2 F_{P,p}$	(3, 4)	$2\omega_1 + 2\omega_{l-1} +$	
$F_6 F_1^2$		$+ \omega_l$	

Покажем, что $\operatorname{div} f_5 = D_5$, а не $2D_5$ (что было бы теоретически возможно по соображениям весов и степеней), где f_5 — форма, построенная по геометрическому условию для D_5 . Для этого покажем, что $\operatorname{div} f_5$ прост на открытом множестве $U_5 = X \setminus \{\Delta_{P,p}, \Delta_{Q,2}, D_1, \dots, D_4\}$. Любую точку из U_5 можно действием группы $H \subseteq B$, изображенной на рис. 2.4.2а привести в виду, изображенном на рисунке 2.4.1, где $x_1 = \dots = x_4 = 1$. Рассмотрим сечение Z , состоящее из точек такого вида. Тогда $U_5 \simeq H \times Z$, а B -инвариантные дивизоры на U_5 являются произведениями H и H' -инвариантных дивизоров на Z , где H' имеет вид, изображенный



а) подгруппа H



б) подгруппа H'

Рис.2.4.2

на рис. 2.4.26. Локальной координатой на данном сечении является x_5 . В таких локальных координатах f_5 равно x_5 . Значит, $\operatorname{div} f_5$ прост на U_5 .

b) $p = 3$

Если $p = 3$, то $F_4 = F_2 F_{Q,2}$. Тогда D_4 не прост, нужно убрать F_4 из образующих, а в соотношение вместо F_4 подставить $F_2 F_{Q,2}$.

5. (1, p, 1), ($\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1$)

a) $q_1, q_2 > 1$

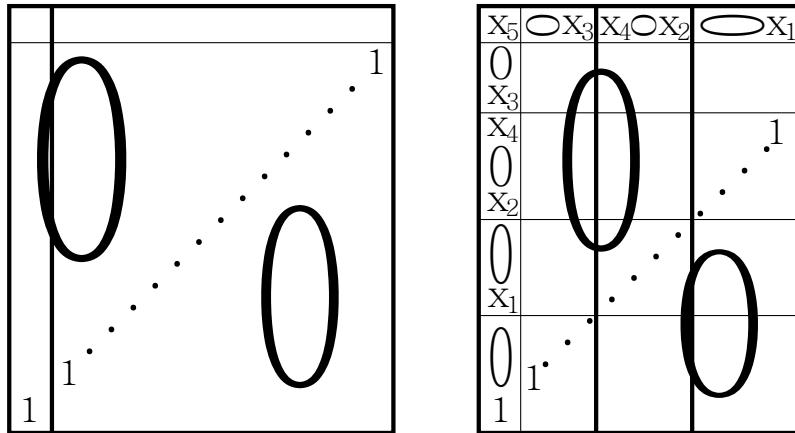


Рис.2.5

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	(1, 1, 0)	ω_{q_1+1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-1} \neq 0$
F_2	(1, 0, 1)	ω_{l-1}	$\langle R_1 + S_l \rangle \cap E_{l-1} \neq 0$
F_3	(1, 1, 0)	ω_{q_1-1}	$\langle R_1 + S_{n-q_1} \rangle \cap E_{q_1-1} \neq 0$
F_5	(2, 1, 0)	ω_{q_1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp R_1$
F_6	(2, 0, 1)	ω_l	$\langle R_1 + S_l \rangle \cap E_l \perp R_1$
$F_6 F_{Q,q_1}$	(2, 1, 1)	$\omega_{q_1} + \omega_l$	
$F_5 F_{Q,l}$			

Дивизор D_4 , задающийся условием $\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp \langle R_1 + S_l \rangle \cap E_l$, является параметрическим (и поэтому мы его не вносим в таблицу).

Здесь $R(X)^U$ свободна.

Объясним, почему форма f_4 , построенная по геометрическому условию для D_4 , задает простой дивизор. Заметим, что мультистепень F_4 не должна иметь нулевых компонент, поскольку дивизоры Шуберта и D_1, D_2, D_3, D_5, D_6 — это все дивизоры, которые имеют нулевые компоненты мультистепени (это мы знаем из случаев 2,3). Из соображений весов $\operatorname{div} f_4$ не содержит $\Delta_{P,1}$. Поэтому $\operatorname{div} f_4 = D_4$.

б) Не все $q_1, q_2 > 1$

Если $q_1 = 1$, то $f_5 = F_3 F_{P,1}$. Тогда $\operatorname{div} f_5$ не прост, нужно убрать F_5 из образующих, а в произведение вместо F_5 подставить $F_3 F_{P,1}$.

При $q_1 = 1$ тот факт, что $\operatorname{div} f_4$ не содержит $\Delta_{P,1}$, теперь не следует из соображений весов. Для проверки этого факта найдем такую точку $x \in \Delta_{P,1}$, что $f_4(x) \neq 0$. Такой точкой будет $x = (R_1, S_1, S_l)$, где $R_1 = \langle e_{n-1} \rangle$, $S_1 = \langle e_n \rangle$, $S_l = \langle e_n, e_{n-1} + e_2, e_{n-2}, \dots, e_{l+1} \rangle$.

Если $q_2 = 1$, то $f_4 = F_1 F_2$. Тогда исключительных точек будет 3, появится еще одно произведение форм $F_1 F_2$ того же веса и мультистепени, что F и F' , и $R(X)^U$ окажется гиперповерхностью.

6. $(1, p, 1), (q_1, q_2, q_3, q_2, q_1)$

a) $q_1, q_2 > 1$

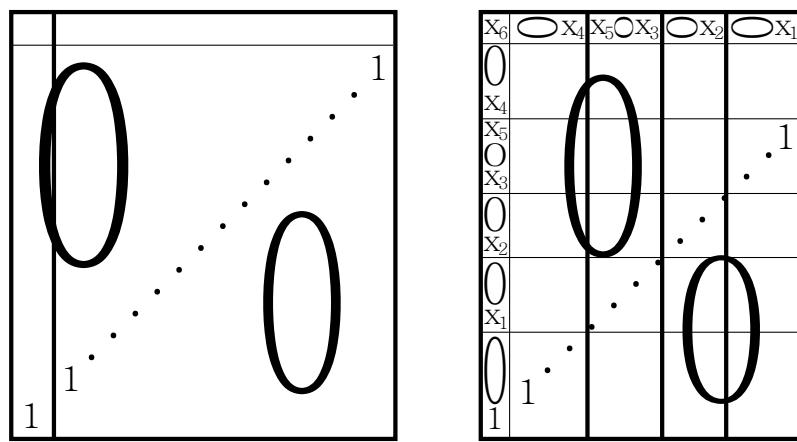


Рис.2.6

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	$(1, 1, 0)$	ω_{q_1+1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-1} \neq 0$
F_2	$(1, 0, 1)$	$\omega_{q_1+q_2+1}$	$\langle R_1 + S_{q_1+q_2} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-1} \neq 0$
F_3	$(1, 0, 1)$	$\omega_{q_1+q_2-1}$	$\langle R_1 + S_{n-(q_1+q_2)} \rangle \cap E_{q_1+q_2-1} \neq 0$
F_4	$(1, 1, 0)$	ω_{q_1-1}	$\langle R_1 + S_{n-q_1} \rangle \cap E_{q_1-1} \neq 0$
F_6	$(2, 1, 0)$	ω_{q_1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp R_1$
F_7	$(2, 0, 1)$	$\omega_{q_1+q_2}$	$\langle R_1 + S_{q_1+q_2} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)} \perp R_1$
$F_7 F_{Q,q_1}$	$(2, 1, 1)$	$\omega_{q_1} + \omega_{q_1+q_2}$	
$F_6 F_{Q,q_1+q_2}$			

Дивизор D_5 , задающийся условием $\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp \langle R_1 + S_{q_1+q_2} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)}$, является параметрическим.

Здесь $R(X)^U$ свободна.

б) Не все $q_1, q_2 > 1$

Если $q_1 = 1$, то $f_6 = F_4 F_{P,1}$. Тогда $\operatorname{div} f_6$ не прост, нужно убрать F_6 из образующих, а в произведение вместо F_6 подставить $F_4 F_{P,1}$.

Если $q_2 = 1$, то $f_5 = F_1 F_3$. Тогда исключительных точек будет 3, появится еще одно произведение форм $F_1 F_3$ того же веса и мультистепени, что F и F' , и $R(X)^U$ окажется гиперповерхностью.

7. $(2, 2), (1, 1, 1, 1)$

Рис.2.7

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	$(1, 1, 0)$	ω_1	$\langle R_2 + S_1 \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_2	$(1, 0, 1)$	$2\omega_1$	$\langle R_2 \cap E_3 + S_2 \cap E_3 \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_3	$(1, 2, 0)$	ω_2	$\langle R_2 + S_1 \rangle \cap E_2 \perp S_1$
F_4	$(1, 0, 1)$	0	$\langle R_2 + S_2 \rangle \cap E_0 \neq 0$
$F_2 F_3$			
$F_1^2 F_{Q,2}$	$(2, 1, 1)$	$2\omega_1 + \omega_2$	
$F_4 F_{P,2} F_{Q,1}^2$			

3.3.3. Группа SO_n .

Обозначим $l = [\frac{n}{2}]$.

сложность 0

1. $(\mathbf{p}, \mathbf{p}), (\mathbf{p}, \mathbf{p}) \quad (p = l)$

Рис.3.1.1

	deg	вес	геометрическое условие
F_k^2	$(1, 1)_{Pl}$	$2\pi_{l-2k}$	$\langle R_l \cap E_{l+2k} + S_l \cap E_{l+2k} \rangle \cap E_{l-2k} \neq 0, k = 1, \dots, [\frac{l}{2}]$
F_k	$(1, 1)$	ω_{l-2k}	

Объясним, почему формы, полученные из выписанных геометрических условий, задают удвоенные дивизоры. Будем действовать не подгруппой B , а меньшей подгруппой H_1 (см. рис. 3.1.2а)). Тогда вне $\Delta_{P,p}, \Delta_{Q,p}$ подпространство R_p можно привести к виду, как на левом рисунке 3.1.1, а подпространство S_p можно привести к виду как на рисунке 3.1.2б). Рассмотрим сечение Z , состоящее из точек такого вида. Тогда $U_1 := X \setminus \{\Delta_{P,p}, \Delta_{Q,p}\} \simeq H_1 \times Z$. Отметим, что $B = H_1 H'_1$, где подгруппа H'_1 изображена на рис.3.1.2в). B -инвариантные дивизоры на U_1 являются произведениями H_1 и H'_1 -инвариантных дивизоров на Z . Локальными координатами на сечении Z являются x_1 и элементы на месте звёздочек на рис. 3.1.2б). В таких локальных координатах форма, соответствующая геометрическому условию для $k = 1$, записывается как x_1^2 . Значит, эта форма задаёт удвоенный дивизор $2D_1$.

Далее действуем похожим образом. Рассмотрим точки из $U_1 := X \setminus \{\Delta_{P,p}, \Delta_{Q,p}, D_1\}$. Действуя группой H_2 (см. рис. 3.1.2г)), можно привести точку в виду, как на рис. 3.1.2д). В локальных координатах форма, соответствующая геометрическому условию для $k = 2$, равна x_2^2 , и значит задаёт $2D_2$. Для остальных k действуем аналогично.

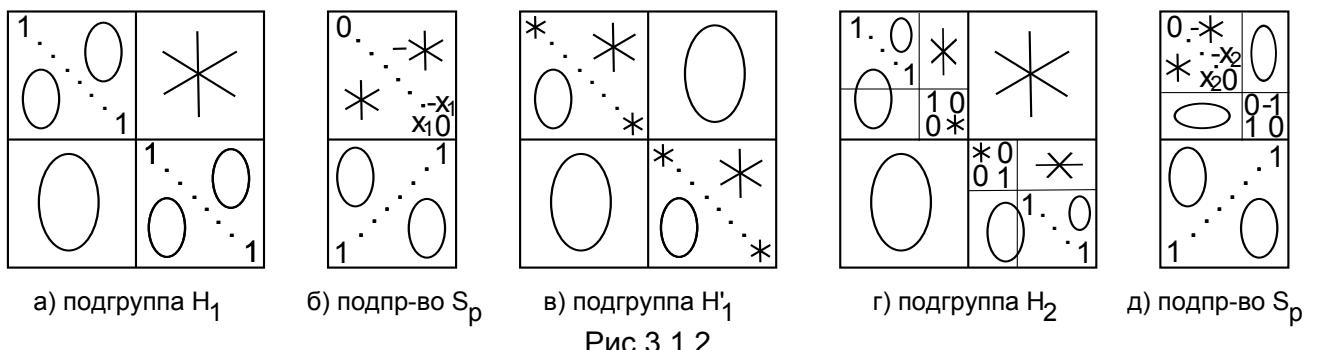


Рис.3.1.2

2. $(\mathbf{p}, \mathbf{p}), (\mathbf{p}, \mathbf{p})'$ ($p = l$)

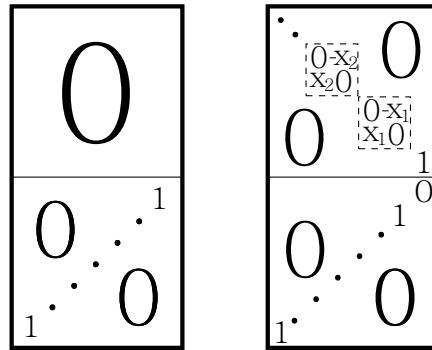


Рис.3.2

	deg	вес	геометрическое условие
F_k^2	$(1, 1)_{Pl}$	$2\pi_{l-1-2k}$	$\langle R_l \cap E_{l+1+2k} + S'_l \cap E_{l+1+2k} \rangle \cap E_{l-1-2k} \neq 0, k = 1, \dots, [\frac{l-1}{2}]$
F_k	$(1, 1)$	ω_{l-1-2k}	

3. $(\mathbf{p}, \mathbf{p}), (\mathbf{1}, \mathbf{q}, \mathbf{1})$ ($p = l$)

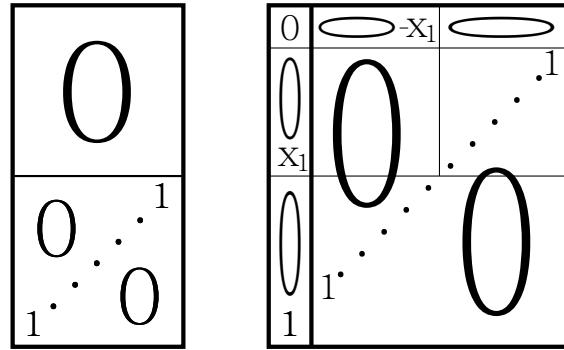


Рис.3.3

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 2)_{Pl}$	π'_l	$\langle R_l + S_1 \rangle \cap E'_l \perp S_1$
F_1	$(1, 1)$	ω_{l-1}	

4. $(\mathbf{p}, \mathbf{p}), (\mathbf{2}, \mathbf{q}, \mathbf{2})$ ($p = l$)

a) $p \geq 4$

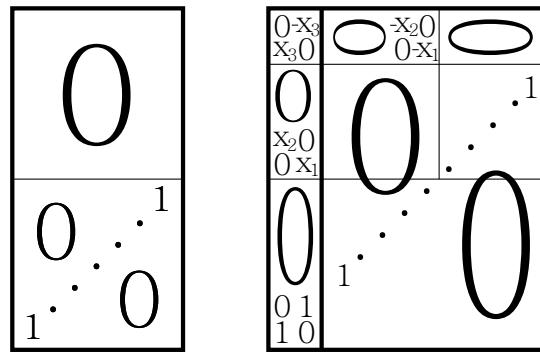


Рис.3.4

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 2)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi'_l$	$\langle R_l \cap E_{n-1} + S_2 \cap E_{n-1} \rangle \cap E'_l \perp S_2 \cap E_{n-1}$
F_1	$(1, 1)$	$\omega_1 + \omega_{l-1}$	
F_2	$(1, 1)_{Pl}$	π_{l-2}	$\langle R_l + S_2 \rangle \cap E_{l-2} \neq 0$
F_2	$(2, 1)$	ω_{l-2}	
F_3^2	$(1, 2)_{Pl}$	π_l	$\langle \langle R_l + S_2 \rangle \cap E_l + S_{n-2} \cap E_l \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_3	$(1, 1)$	ω_l	

б) $p = 3$

Такой случай можно не разбирать, поскольку SO_6 локально изоморфна SL_4 .

5. $(\mathbf{p}, \mathbf{p}), (\mathbf{3}, \mathbf{q}, \mathbf{3})$ ($p = l$)

a) $p \geq 6$

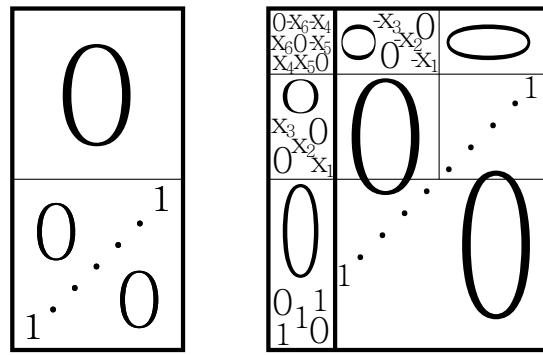


Рис.3.5

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 2)_{Pl}$	$2\pi_2 + \pi'_l$	$\langle R_l \cap E_{n-2} + S_3 \cap E_{n-2} \rangle \cap E'_l \perp S_3 \cap E_{n-2}$
F_1	$(1, 1)$	$\omega_2 + \omega_{l-1}$	
F_2	$(1, 1)_{Pl}$	$\pi_1 + \pi_{l-2}$	$\langle R_l \cap E_{n-1} + S_3 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{l-2} \neq 0$
F_2	$(2, 1)$	$\omega_1 + \omega_{l-2}$	
F_3	$(1, 1)_{Pl}$	π_{l-3}	$\langle R_l + S_3 \rangle \cap E_{l-3} \neq 0$
F_3	$(2, 1)$	ω_{l-3}	
F_4	$(1, 2)_{Pl}$	$\pi_2 + \pi_{l-2}$	$\langle R_l + S_3 \rangle \cap E_{l-2} \perp S_3 \cap E_{n-2}$
F_4	$(2, 2)$	$\omega_2 + \omega_{l-2}$	
F_5^2	$(1, 2)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi_l$	$\langle \langle R_l \cap E_{n-1} + S_3 \cap E_{n-1} \rangle \cap E_l + S_{n-3} \cap E_l \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_5	$(1, 1)$	$\omega_1 + \omega_l$	
F_6^2	$(1, 2)_{Pl}$	π'_l	$\langle \langle R_l + S_3 \rangle \cap E'_l + S_{n-3} \cap E'_l \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_6	$(1, 1)$	ω_{l-1}	

6) $p = 5$ Если $p = 5$, то $f_4 = F_3 F_{Q,3}$. Тогда $\operatorname{div} f_4$ не прост, нужно убрать F_4 из образующих.в) $p = 4$

Данный случай является частным случаем случая 6.

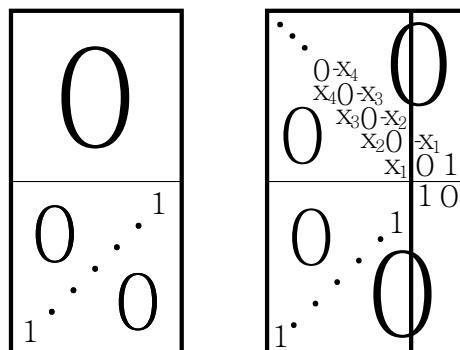
6. $(\mathbf{p}, \mathbf{p}), (\mathbf{q}, \mathbf{2}, \mathbf{q})$ ($p = l$)

Рис.3.6

	deg	вес	геометрическое условие
F_{2k-1}^2	$(1, 0, 1, 0)_{Pl}$	$2\pi_{l-2k}$	$\langle R_l \cap E_{l+2k} + S_l \cap E_{l+2k} \rangle \cap E_{l-2k} \neq 0, k = 1, \dots, [\frac{l}{2}]$
F_{2k-1}	$(1, 0, 1)$	ω_{l-2k}	
F_{2k}^2	$(1, 0, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_{l-2k-1}$	$\langle R_l \cap E_{l+2k+1} + S'_l \cap E_{l+2k+1} \rangle \cap E_{l-2k-1} \neq 0, k = 1, \dots, [\frac{l-1}{2}]$
F_{2k}	$(1, 1, 0)$	ω_{l-2k-1}	

7. $(\mathbf{p}, \mathbf{p}), (\mathbf{1}, \mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{1})$ ($p = l$)

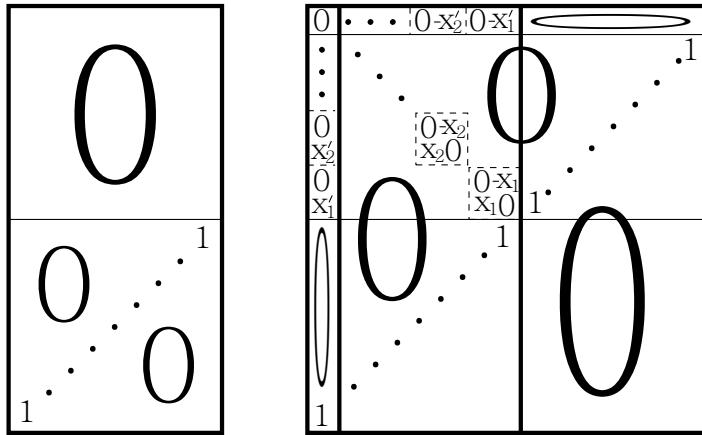


Рис.3.7

	deg	вес	геометрическое условие
F_k^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_{l-2k}$	$\langle R_l \cap E_{l+2k} + S_l \cap E_{l+2k} \rangle \cap E_{l-2k} \neq 0, k = 1, \dots, [\frac{l}{2}]$
F_k	$(1, 0, 1)$	ω_{l-2k}	
$F_1'^2$	$(1, 1, 0)_{Pl}$	π'_l	$\langle R_l + S_1 \rangle \cap E'_l \perp S_1$
F_1'	$(1, 1, 0)$	ω_{l-1}	
$F_k'^2$	$(1, 2, 1)_{Pl}$	$2\pi_{l-2k+1}$	$\langle \langle R_l + S_1 \rangle \cap E_{l+2k-1} + S_l \cap E_{l+2k-1} \rangle \cap E_{l-2k+1} \perp S_1, k = 2, \dots, [\frac{l-1}{2}]$
F_k'	$(1, 1, 1)$	ω_{l-2k+1}	

8. $(\mathbf{p}, \mathbf{p}), (\mathbf{1}, \mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{1})'$ ($p = l$)

	deg	вес	геометрическое условие
F_k^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_{l-1-2k}$	$\langle R_l \cap E_{l+1+2k} + S'_l \cap E_{l+1+2k} \rangle \cap E_{l-1-2k} \neq 0, k = 1, \dots, [\frac{l-1}{2}]$
F_k	$(1, 0, 1)$	ω_{l-1-2k}	
$F_1'^2$	$(1, 2, 0)_{Pl}$	π'_l	$\langle R_l + S_1 \rangle \cap E'_l \perp S_1$
F_1'	$(1, 1, 0)$	ω_{l-1}	
$F_k''^2$	$(1, 2, 1)_{Pl}$	$2\pi_{l-2k}$	$\langle \langle R_l + S_1 \rangle \cap E_{l+2k} + S'_l \cap E_{l+2k} \rangle \cap E_{l-2k} \perp S_1, k = 1, \dots, [\frac{l-2}{2}]$
F_k''	$(1, 1, 1)$	ω_{l-2k}	

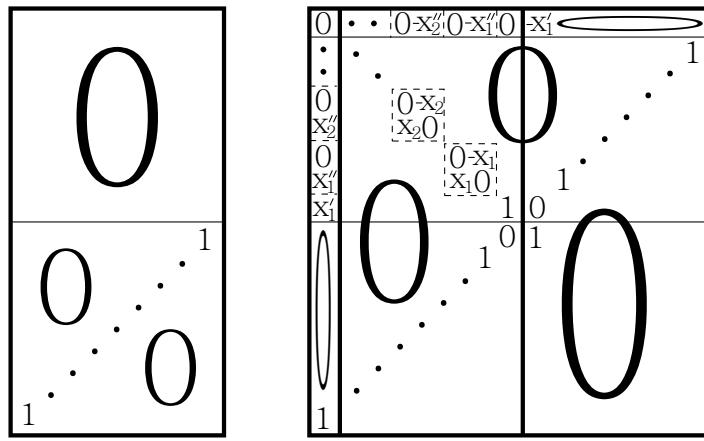


Рис.3.8

9. $(\mathbf{p}, \mathbf{p}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{q}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ ($p = l$)

Можно считать, что $p \geq 4$ (случай $p = 3$ не нужно разбирать по той же причине, что и в п. 4).

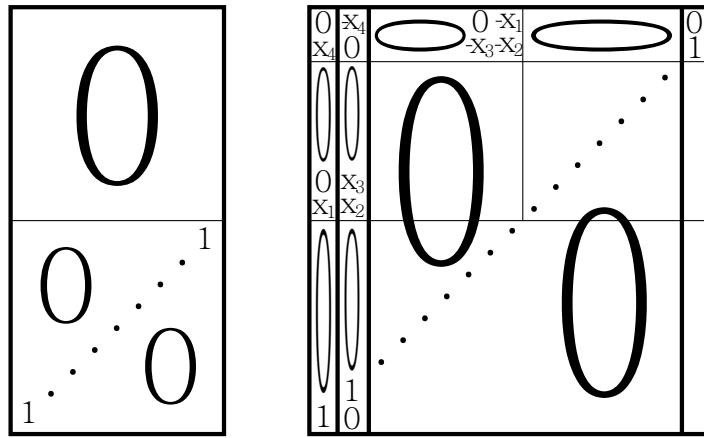


Рис.3.9

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	π'_l	$\langle R_l + S_1 \rangle \cap E'_l \perp S_1$
F_1	$(1, 1, 0)$	ω_{l-1}	
F_2^2	$(1, 0, 2)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi'_l$	$\langle R_l \cap E_{n-1} + S_2 \cap E_{n-1} \rangle \cap E'_l \perp S_2 \cap E_{n-1}$
F_2	$(1, 0, 1)$	$\omega_1 + \omega_{l-1}$	
F_3	$(1, 0, 1)_{Pl}$	π_{l-2}	$\langle R_l + S_2 \rangle \cap E_{l-2} \neq 0$
F_3	$(2, 0, 1)$	ω_{l-2}	
F_4^2	$(1, 0, 2)_{Pl}$	π_l	$\langle \langle R_l + S_2 \rangle \cap E_l + S_{n-2} \cap E_l \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_4	$(1, 0, 1)$	ω_l	

10. $(\mathbf{p}, \mathbf{1}, \mathbf{p}), (\mathbf{p}, \mathbf{1}, \mathbf{p})$ ($p = l$)

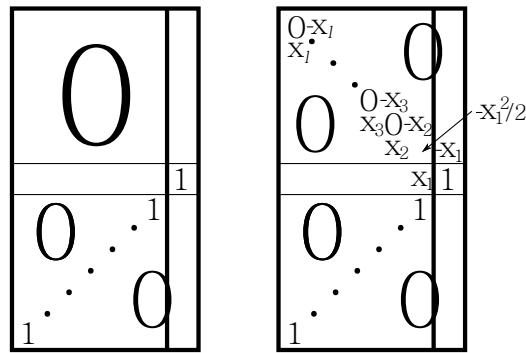


Рис.3.10

	deg	вес	геометрическое условие
F_k^2	$(1, 1)_{Pl}$	$2\pi_{l-k}$	$\langle R_{l+1} \cap E_{l+k+1} + S_l \cap E_{l+k+1} \rangle \cap E_{l-k} \neq 0, k = 1, \dots, l$
F_k	$(1, 1)$	ω_{l-k}	

11. $(1, p, 1), (q_1, q_2, q_1)$

Случаи $q_1 = 1, q_2 = 1, 2$ можно не рассматривать, поскольку SO_3 и SO_4 локально изоморфны SL_2 и $SL_2 \times SL_2$ соответственно.

a) $q_1 > 1, q_2 > 2$

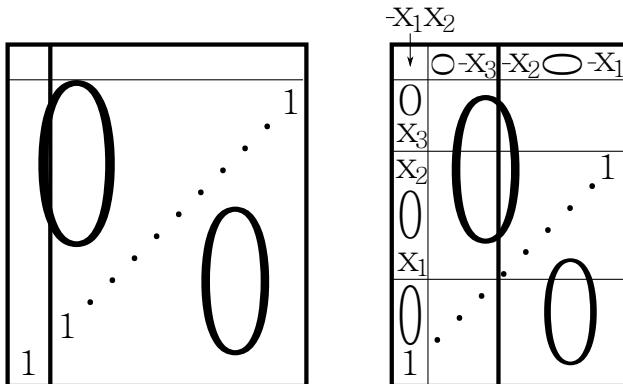


Рис.3.11а

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	$(1, 1)$	π_{q_1+1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-1} \neq 0$
F_2	$(2, 1)$	ω_{q_1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp R_1$
F_3	$(1, 1)$	ω_{q_1-1}	$\langle R_1 + S_{n-q_1} \rangle \cap E_{q_1-1} \neq 0$

б) $q_1 = 1, q_2 > 2$

В данном случае $f_2 = F_3 F_{P,1}$. Тогда $\operatorname{div} f_2$ не прост, нужно убрать F_2 из образующих.

в) $q_1 > 1, q_2 = 1$ ($q_1 = l$)

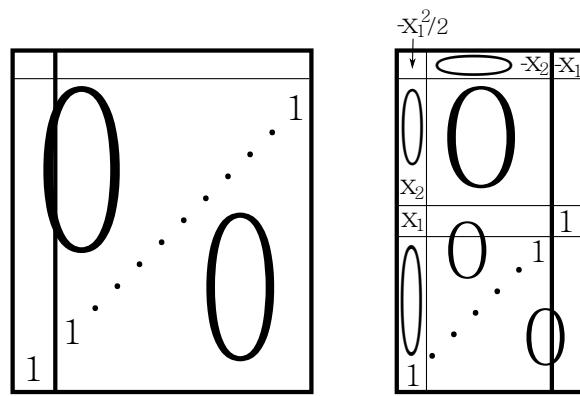


Рис.3.11в

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(2, 1)_{Pl}$	π_l	$\langle R_1 + S_l \rangle \cap E_{l+1} \perp R_1$
F_1	$(1, 1)$	ω_l	
F_3	$(1, 1)_{Pl}$	π_{l-1}	$\langle R_1 + S_{l+1} \rangle \cap E_{l-1} \neq 0$
F_3	$(1, 2)$	ω_{l-1}	

г) $q_1 > 1, q_2 = 2$

Данный случай совпадает со случаем 12в.

12. $(1, p, 1), (q_1, q_2, q_2, q_1)$ Отметим, что случай $q_1 = 1, q_2 = 1$ можно не рассматривать.

a) $q_1, q_2 > 1$

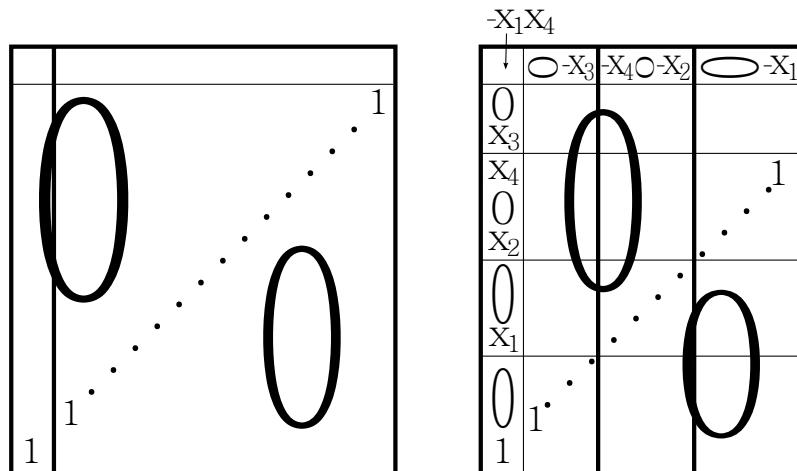


Рис.3.12а

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	$(1, 1, 0)_{Pl}$	π_{q_1+1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-1} \neq 0$
F_1	$(1, 1, 0)$	π_{q_1+1}	
F_2^2	$(2, 0, 1)_{Pl}$	π'_l	$\langle R_1 + S_l \rangle \cap E'_l \perp R_1$
F_2	$(1, 0, 1)$	ω_{l-1}	
F_3	$(1, 1, 0)_{Pl}$	π_{q_1-1}	$\langle R_1 + S_{n-q_1} \rangle \cap E_{q_1-1} \neq 0$
F_3	$(1, 1, 0)$	ω_{q_1-1}	
F_4	$(2, 1, 0)_{Pl}$	π_{q_1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp R_1$
F_4	$(2, 1, 0)$	ω_{q_1}	

6) $q_1 = 1, q_2 > 1$

В данном случае $f_4 = F_3 F_{P,1}$. Тогда $\operatorname{div} f_4$ не прост, нужно убрать F_4 из образующих.

в) $q_1 > 1, q_2 = 1$

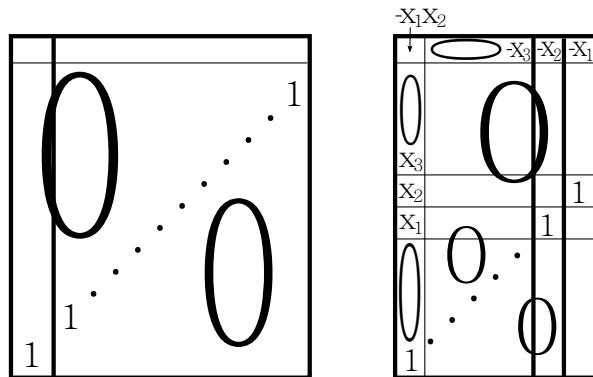


Рис.3.12в

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(2, 0, 0, 1)_{Pl}$	π_l	$\langle R_1 + S'_l \rangle \cap E_l \perp R_1$
F_1	$(1, 1, 0)$	ω_l	
F_2^2	$(2, 0, 1, 0)_{Pl}$	π'_l	$\langle R_1 + S_l \rangle \cap E'_l \perp R_1$
F_2	$(1, 0, 1)$	ω_{l-1}	
F_3	$(1, 1, 0, 0)_{Pl}$	π_{l-2}	$\langle R_1 + S_{n-q_1} \rangle \cap E_{q_1-1} \neq 0$
F_3	$(1, 1, 1)$	ω_{l-2}	

13. $(4, 4), (2, 2, 2, 2)'$

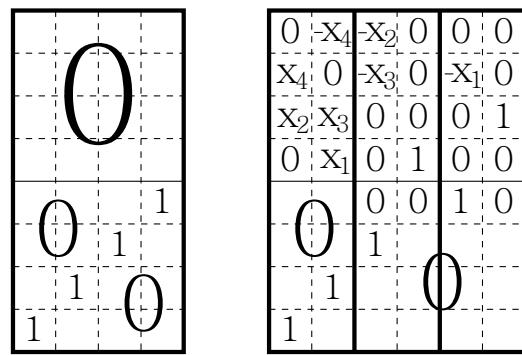


Рис.3.13

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi'_4$	$\langle R_4 \cap E_7 + S_2 \cap E_7 \rangle \cap E'_4 \perp S_2 \cap E_7$
F_1	$(1, 1, 0)$	$\omega_1 + \omega_3$	
F_2	$(1, 1, 0)_{Pl}$	π_2	$\langle R_4 + S_2 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_2	$(2, 1, 0)$	ω_2	
F_3^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_1$	$\langle R_4 \cap E_7 + S_4 \cap E_7 \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_3	$(1, 0, 1)$	ω_1	
F_4^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	π_4	$\langle \langle R_4 + S_2 \rangle \cap E_4 + S_6 \cap E_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_4	$(1, 1, 0)$	ω_4	

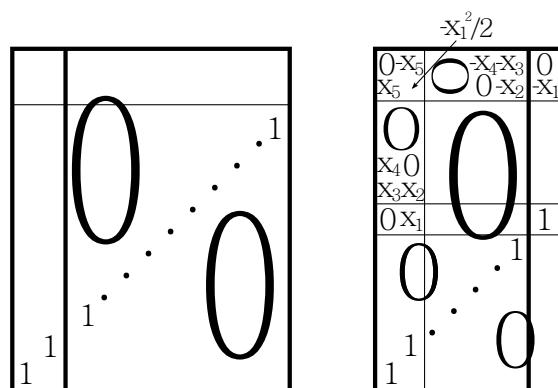
сложность 114. $(2, p, 2), (q, 1, q)$ ($q = l$)a) $p \geq 5$ 

Рис.3.14

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(2, 1)_{Pl}$	$2\pi_1 + \omega_l$	$\langle R_2 \cap E_{n-1} + S_l \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{l+1} \perp R_2 \cap E_{n-1}$
F_1	$(1, 1)$	$\omega_1 + \omega_l$	
F_2	$(1, 1)_{Pl}$	$\pi_1 + \pi_{l-1}$	$\langle R_2 \cap E_{n-1} + S_{l+1} \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{l-1} \neq 0$
F_2	$(1, 2)$	$\omega_1 + \omega_{l-1}$	
F_3	$(1, 1)_{Pl}$	π_{l-1}	$\langle R_2 + S_l \rangle \cap E_{l-1} \neq 0$
F_3	$(1, 2)$	ω_{l-1}	
F_4	$(1, 1)_{Pl}$	π_{l-2}	$\langle R_2 + S_{l+1} \rangle \cap E_{l-2} \neq 0$
F_4	$(1, 2)$	ω_{l-2}	
F_5^2	$(2, 1)_{Pl}$	π_l	$\langle \langle R_2 + S_l \rangle \cap E_{l+1} + R_{n-2} \cap E_{l+1} \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_5	$(1, 1)$	ω_l	
F_6	$(2, 1)_{Pl}$	$\pi_1 + \pi_{l-1}$	$\langle \langle R_2 \cap E_{n-1} + S_l \cap E_{n-1} \rangle \cap E_{l+2} + R_{n-2} \cap E_{l+2} \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_6	$(2, 2)$	$\omega_1 + \omega_{l-1}$	
$F_1 F_3$			
$F_2 F_5$	$(2, 3)$	$\omega_1 + \omega_{l-1} +$	
$F_6 F_{Q,l}$		$+ \omega_l$	

6) $p = 3$

Если $p = 3$, то $f_6 = F_4 F_{P,2}$. Тогда $\operatorname{div} f_6$ не прост, нужно убрать F_6 из образующих, а в соотношение вместо F_6 подставить $F_4 F_{P,2}$.

15. $(1, p, 1), (q_1, q_2, q_3, q_2, q_1)$

a) $q_1, q_2 > 1, q_3 > 2$

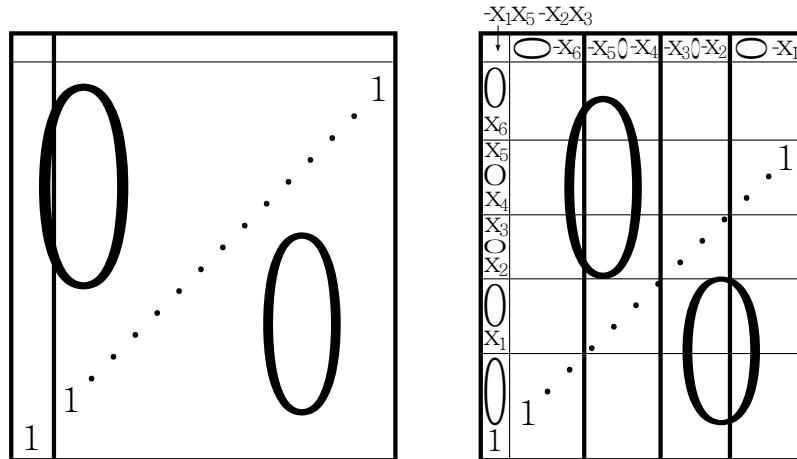


Рис.3.15

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	(1, 1, 0)	ω_{q_1+1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-1} \neq 0$
F_2	(1, 0, 1)	$\pi_{q_1+q_2+1}$	$\langle R_1 + S_{q_1+q_2} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-1} \neq 0$
F_3	(2, 0, 1)	$\omega_{q_1+q_2}$	$\langle R_1 + S_{q_1+q_2} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)} \perp R_1$
F_4	(1, 0, 1)	$\omega_{q_1+q_2-1}$	$\langle R_1 + S_{n-(q_1+q_2)} \rangle \cap E_{q_1+q_2-1} \neq 0$
F_6	(1, 1, 0)	ω_{q_1-1}	$\langle R_1 + S_{n-q_1} \rangle \cap E_{q_1-1} \neq 0$
F_7	(2, 1, 0)	ω_{q_1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp R_1$
$F_3 F_{Q,q_1}$	(2, 1, 1)	$\omega_{q_1} +$	
$F_7 F_{Q,q_1+q_2}$		$+ \omega_{q_1+q_2}$	

Дивизор D_5 , задающийся условием $\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp \langle R_1 + S_{n-(q_1+q_2)} \rangle \cap E_{q_1+q_2}$, является параметрическим.

Здесь $R(X)^U$ свободна.

б) $q_1 = 1$ или $q_2 = 1$, $q_3 > 2$

Если $q_1 = 1$, то $f_7 = F_6 F_{P,1}$. Тогда $\operatorname{div} f_7$ не прост, нужно убрать F_7 из образующих, а в произведение вместо F_7 подставить $F_6 F_{P,1}$.

Если $q_2 = 1$, то $f_5 = F_4 F_1$. Тогда исключительных точек будет 3, появится еще одно произведение форм $F_4 F_1$ того же веса и мультистепени, что F и F' , и $R(X)^U$ окажется гиперповерхностью.

в) $q_3 = 2$

Данный случай является частным случаем п.16.

г) $q_1, q_2 > 1$, $q_3 = 1$

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	$(1, 1, 0)_{Pl}$	π_{q_1+1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-1} \neq 0$
F_1	$(1, 1, 0)$	ω_{q_1+1}	
F_2^2	$(2, 0, 1)_{Pl}$	π_l	$\langle R_1 + S_l \rangle \cap E_{l+1} \perp R_1$
F_2	$(1, 0, 1)$	ω_l	
F_4	$(1, 0, 1)_{Pl}$	π_{l-1}	$\langle R_1 + S_{l+1} \rangle \cap E_{l-1} \neq 0$
F_4	$(1, 0, 2)$	ω_{l-1}	
F_6	$(1, 1, 0)_{Pl}$	π_{q_1-1}	$\langle R_1 + S_{n-q_1} \rangle \cap E_{q_1-1} \neq 0$
F_6	$(1, 1, 0)$	ω_{q_1-1}	
F_7	$(2, 1, 0)_{Pl}$	π_{q_1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp R_1$
F_7	$(2, 1, 0)$	ω_{q_1}	
$F_2^2 F_{Q, q_1}$	$(2, 1, 2)$	$\omega_{q_1} + 2\omega_l$	
$F_7 F_{Q, l}^2$			

Дивизор D_5 , задающийся условием $\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp \langle R_1 + S_{l+1} \rangle \cap E_l$, является параметрическим.

Здесь $R(X)^U$ свободна.

д) $q_1 = 1$ или $q_2 = 1$, и $q_3 = 1$

Если $q_1 = 1$, то $f_7 = F_6 F_{P,1}$. Тогда $\text{div } f_7$ не прост, нужно убрать F_7 из образующих, а в произведение вместо F_7 подставить $F_6 F_{P,1}$.

Если $q_2 = 1$, то $f_5 = F_4 F_1$. Тогда исключительных точек будет 3, появится еще одно произведение форм $F_4 F_1$ того же веса и мультистепени, что F и F' , и $R(X)^U$ окажется гиперповерхностью.

16. $(1, p, 1), (q_1, q_2, q_3, q_3, q_2, q_1)$

а) $q_1, q_2, q_3 > 1$

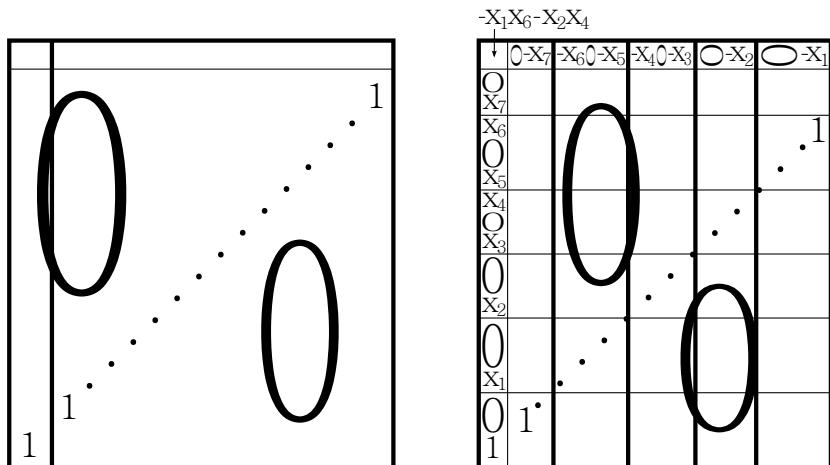


Рис.3.16

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	$(1, 1, 0, 0)_{Pl}$	π_{q_1+1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-1} \neq 0$
F_1	$(1, 1, 0, 0)$	ω_{q_1+1}	
F_2	$(1, 0, 1, 0)_{Pl}$	$\pi_{q_1+q_2+1}$	$\langle R_1 + S_{q_1+q_2} \rangle \cap E_{n-(q_1+q_2)-1} \neq 0$
F_2	$(1, 0, 1, 0)$	$\pi_{q_1+q_2+1}$	
F_3^2	$(2, 0, 0, 1)_{Pl}$	π'_l	$\langle R_1 + S_l \rangle \cap E'_l \perp R_1$
F_3	$(1, 0, 0, 1)$	ω_{l-1}	
F_4	$(2, 0, 1, 0)_{Pl}$	$\pi_{q_1+q_2}$	$\langle R_1 + S_{q_1+q_2} \rangle \cap E_{n-q_1-q_2} \perp R_1$
F_4	$(2, 0, 1, 0)$	$\omega_{q_1+q_2}$	
F_5	$(1, 0, 1, 0)_{Pl}$	$\pi_{q_1+q_2-1}$	$\langle R_1 + S_{n-(q_1+q_2)} \rangle \cap E_{q_1+q_2-1} \neq 0$
F_5	$(1, 0, 1, 0)$	$\omega_{q_1+q_2-1}$	
F_7	$(1, 1, 0, 0)_{Pl}$	π_{q_1-1}	$\langle R_1 + S_{n-q_1} \rangle \cap E_{q_1-1} \neq 0$
F_7	$(1, 1, 0, 0)$	ω_{q_1-1}	
F_8	$(2, 1, 0, 0)_{Pl}$	π_{q_1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp R_1$
F_8	$(2, 1, 0, 0)$	ω_{q_1}	
$F_4 F_{Q, q_1}$	$(2, 1, 1, 0)$	$\omega_{q_1} + \omega_{q_1+q_2}$	
$F_8 F_{Q, q_1+q_2}$			

Дивизор D_6 , задающийся условием $\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp \langle R_1 + S_{n-(q_1+q_2)} \rangle \cap E_{q_1+q_2}$, является параметрическим.

Здесь $R(X)^U$ свободна.

б) $q_1 = 1$ или $q_2 = 1$, и $q_3 > 1$

Если $q_1 = 1$, то $f_8 = F_7 F_{P,1}$. Тогда $\text{div } f_8$ не прост, нужно убрать F_8 из образующих, а в произведение вместо F_8 подставить $F_7 F_{P,1}$.

Если $q_2 = 1$, то $f_6 = F_5 F_1$. Тогда исключительных точек будет 3, появится еще одно произведение форм $F_5 F_1$ того же веса и мультистепени, что F и F' , и $R(X)^U$ окажется гиперповерхностью.

в) $q_1, q_2 > 1, q_3 = 1$

	deg	вес	геометрическое условие
F_1	$(1, 1, 0, 0, 0)_{Pl}$	π_{q_1+1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1-1} \neq 0$
F_1	$(1, 1, 0, 0)$	ω_{q_1+1}	
F_2^2	$(2, 0, 0, 0, 1)_{Pl}$	π_l	$\langle R_1 + S'_l \rangle \cap E_l \perp R_1$
F_2	$(1, 0, 1, 0)$	ω_l	
F_3^2	$(2, 0, 0, 1, 0)_{Pl}$	π'_l	$\langle R_1 + S_l \rangle \cap E'_l \perp R_1$
F_3	$(1, 0, 0, 1)$	ω_{l-1}	
F_5	$(1, 0, 1, 0, 0)_{Pl}$	π_{l-2}	$\langle R_1 + S_{l+1} \rangle \cap E_{l-2} \neq 0$
F_5	$(1, 0, 1, 1)$	ω_{l-2}	
F_7	$(1, 1, 0, 0, 0)_{Pl}$	π_{q_1-1}	$\langle R_1 + S_{n-q_1} \rangle \cap E_{q_1-1} \neq 0$
F_7	$(1, 1, 0, 0)$	ω_{q_1-1}	
F_8	$(2, 1, 0, 0, 0)_{Pl}$	π_{q_1}	$\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp R_1$
F_8	$(2, 1, 0, 0)$	ω_{q_1}	
$F_2 F_3 F_{Q,q_1}$	$(2, 1, 1, 1)$	$\omega_{q_1} + \omega_{l-1} +$	
$F_8 F'_{Q,l} F_{Q,l}$		$+ \omega_l$	

Дивизор D_6 , задающийся условием $\langle R_1 + S_{q_1} \rangle \cap E_{n-q_1} \perp \langle R_1 + S_{l+1} \rangle \cap E_{l-1}$, является параметрическим.

Здесь $R(X)^U$ свободна.

г) $q_1 = 1$ или $q_2 = 1$, и $q_3 = 1$

Если $q_1 = 1$, то $f_8 = F_7 F_{P,1}$. Тогда $\text{div } f_8$ не прост, нужно убрать F_8 из образующих, а в произведение вместо F_8 подставить $F_7 F_{P,1}$.

Если $q_2 = 1$, то $f_6 = F_5 F_1$. Тогда исключительных точек будет 3, появится еще одно произведение форм $F_5 F_1$ того же веса и мультистепени, что F и F' , и $R(X)^U$ окажется гиперповерхностью.

17. $(4, 4), (2, 2, 2, 2)$

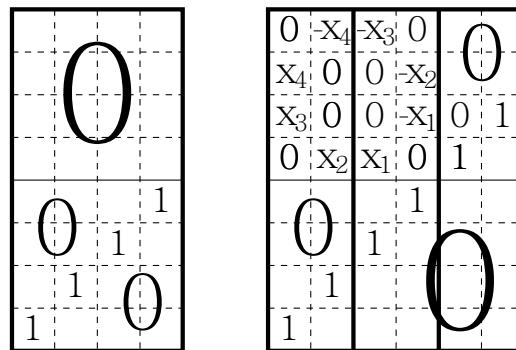


Рис.3.17

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_2$	$\langle R_4 \cap E_6 + S_4 \cap E_6 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_1	$(1, 0, 1)$	ω_2	
F_2^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi'_4$	$\langle R_4 \cap E_7 + S_2 \cap E_7 \rangle \cap E'_4 \perp S_2 \cap E_7$
F_2	$(1, 1, 0)$	$\omega_1 + \omega_3$	
F_3	$(1, 1, 0)_{Pl}$	π_2	$\langle R_4 + S_2 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_3	$(2, 1, 0)$	ω_2	
F_4^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	π_4	$\langle \langle R_4 + S_2 \rangle \cap E_4 + S_6 \cap E_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_4	$(1, 1, 0)$	ω_4	
F_5^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	0	$\langle R_4 + S_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_5	$(1, 0, 1)$	0	
$F_1 F_4$ $F_3 F_{Q,4}$ $F_5 F_{P,4} F_{Q,2}$	$(2, 1, 1)$	$\omega_2 + \omega_4$	

18. $(4, 4), (1, 2, 2, 2, 1)$

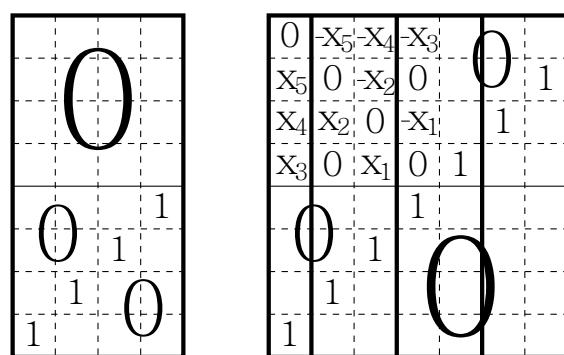


Рис.3.18

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 0, 0, 1, 0)_{Pl}$	$2\pi_2$	$\langle R_4 \cap E_6 + S_4 \cap E_6 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_1	$(1, 0, 0, 1)$	ω_2	
F_2^2	$(1, 0, 0, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_1$	$\langle R_4 \cap E_7 + S'_4 \cap E_7 \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_2	$(1, 0, 1, 0)$	ω_1	
F_3^2	$(1, 2, 0, 0, 0)_{Pl}$	π'_4	$\langle R_4 + S_1 \rangle \cap E'_4 \perp S_1$
F_3	$(1, 1, 0, 0)$	ω_3	
F_4^2	$(1, 2, 0, 0, 1)_{Pl}$	π_2	$\langle \langle R_4 + S_1 \rangle \cap E_6 + S'_4 \cap E_6 \rangle \cap E_2 \perp S_1$
F_4	$(1, 1, 1, 0)$	ω_2	
F_6^2	$(1, 0, 0, 1, 0)_{Pl}$	0	$\langle R_4 + S_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_6	$(1, 0, 0, 1)$	0	
$F_2 F_3 F_{Q,4}$	$(2, 1, 1, 1)$	$\omega_1 + \omega_3 +$	
$F_6 F_{P,4} F_{Q,1} F'_{Q,4}$		$+ \omega_4$	

Дивизор D_5 , задающийся условием $\langle R_4 \cap E_7 + S_3 \cap E_7 \rangle \cap E_3 \perp S_1$, является параметрическим.

19. $(4, 4), (2, 1, 2, 1, 2)$

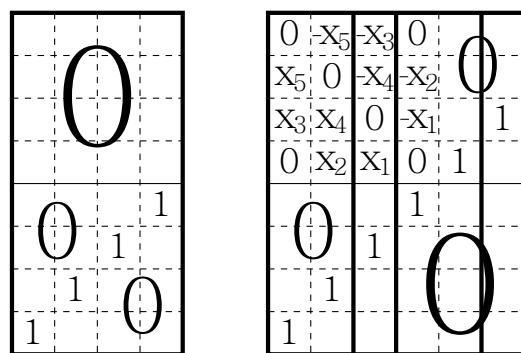


Рис.3.19

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 0, 0, 1, 0)_{Pl}$	$2\pi_2$	$\langle R_4 \cap E_6 + S_4 \cap E_6 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_1	$(1, 0, 0, 1)$	ω_2	
F_2^2	$(1, 2, 0, 0, 0)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi'_4$	$\langle R_4 \cap E_7 + S_2 \cap E_7 \rangle \cap E'_4 \perp S_2 \cap E_7$
F_2	$(1, 1, 0, 0)$	$\omega_1 + \omega_3$	
F_3	$(1, 1, 0, 0, 0)_{Pl}$	π_2	$\langle R_4 + S_2 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_3	$(2, 1, 0, 0)$	ω_2	
F_4^2	$(1, 0, 0, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_1$	$\langle R_4 \cap E_7 + S'_4 \cap E_7 \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_4	$(1, 0, 1, 0)$	ω_1	
F_5^2	$(1, 2, 0, 0, 0)_{Pl}$	π_4	$\langle \langle R_4 + S_2 \rangle \cap E_4 + S_6 \cap E_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_5	$(1, 1, 0, 0)$	ω_4	
F_6^2	$(1, 0, 0, 1, 0)_{Pl}$	0	$\langle R_4 + S_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_6	$(1, 0, 0, 1)$	0	
$F_1 F_5$			
$F_3 F_{Q,4}$	$(2, 1, 0, 1)$	$\omega_2 + \omega_4$	
$F_6 F_{P,4} F_{Q,2}$			

20. $(4, 4), (1, 1, 2, 2, 1, 1)$

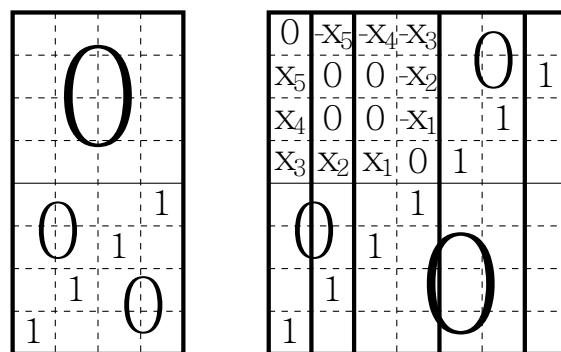


Рис.3.20

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 0, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_2$	$\langle R_4 \cap E_6 + S_4 \cap E_6 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_1	$(1, 0, 0, 1)$	ω_2	
F_2^2	$(1, 0, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi'_4$	$\langle R_4 \cap E_7 + S_2 \cap E_7 \rangle \cap E'_4 \perp S_2 \cap E_7$
F_2	$(1, 0, 1, 0)$	$\omega_1 + \omega_3$	
F_3^2	$(1, 2, 0, 0)_{Pl}$	π'_4	$\langle R_4 + S_1 \rangle \cap E'_4 \perp S_1$
F_3	$(1, 1, 0, 0)$	ω_3	
F_4	$(1, 0, 1, 0)_{Pl}$	π_2	$\langle R_4 + S_2 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_4	$(2, 0, 1, 0)$	ω_2	
F_5^2	$(1, 0, 2, 0)_{Pl}$	π_4	$\langle \langle R_4 + S_2 \rangle \cap E_4 + S_6 \cap E_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_5	$(1, 0, 1, 0)$	ω_4	
F_6^2	$(1, 0, 0, 1)_{Pl}$	0	$\langle R_4 + S_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_6	$(1, 0, 0, 1)$	0	
$F_1 F_5$			
$F_4 F_{Q,4}$	$(2, 0, 1, 1)$	$\omega_2 + \omega_4$	
$F_6 F_{P,4} F_{Q,2}$			

21. $(4, 4), (1, 1, 2, 2, 1, 1)'$

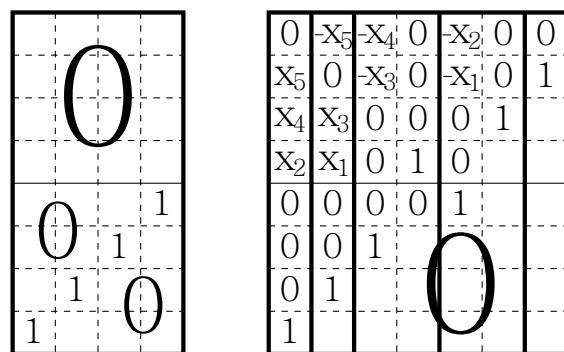


Рис.3.21

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 0, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi'_4$	$\langle R_4 \cap E_7 + S_2 \cap E_7 \rangle \cap E'_4 \perp S_2 \cap E_7$
F_1	$(1, 0, 1, 0)$	$\omega_1 + \omega_3$	
F_2^2	$(1, 2, 0, 0)_{Pl}$	π'_4	$\langle R_4 + S_1 \rangle \cap E'_4 \perp S_1$
F_2	$(1, 1, 0, 0)$	ω_3	
F_3^2	$(1, 0, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_1$	$\langle R_4 \cap E_7 + S'_4 \cap E_7 \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_3	$(1, 0, 0, 1)$	ω_1	
F_4^2	$(1, 2, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_2$	$\langle \langle \langle R_4 + S_1 \rangle \cap E_6 + S'_4 \cap E_6 \rangle \cap E_2 + S_7 \cap E_2 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_4	$(1, 1, 0, 1)$	ω_2	
F_5^2	$(1, 0, 2, 0)_{Pl}$	π_4	$\langle \langle R_4 + S_2 \rangle \cap E_4 + S_6 \cap E_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_5	$(1, 0, 1, 0)$	ω_4	
F_6	$(1, 0, 1, 0)_{Pl}$	π_2	$\langle R_4 + S_2 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_6	$(2, 0, 1, 0)$	ω_2	
$F_1 F_4$			
$F_2 F_3 F_{Q,2}$	$(2, 1, 1, 1)$	$\omega_1 + \omega_2 +$	
$F_6 F_{Q,1} F'_{Q,4}$		$+ \omega_3$	

22. $(5, 5), (2, 3, 3, 2)$

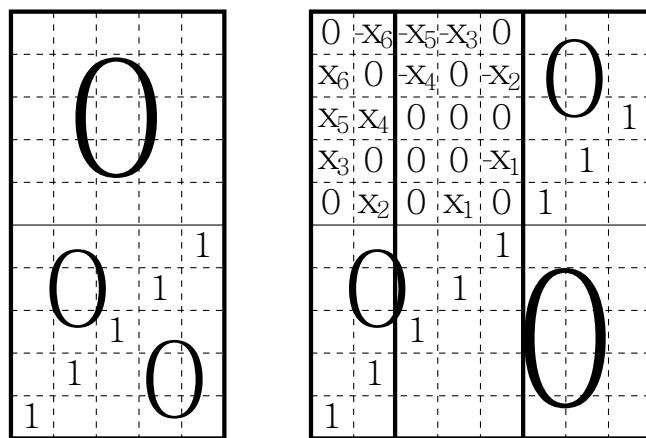


Рис.3.22.1

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_3$	$\langle R_5 \cap E_7 + S_5 \cap E_7 \rangle \cap E_3 \neq 0$
F_1	$(1, 0, 1)$	ω_3	
F_2^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi'_5$	$\langle R_5 \cap E_9 + S_2 \cap E_9 \rangle \cap E'_5 \perp S_2 \cap E_9$
F_2	$(1, 1, 0)$	$\omega_1 + \omega_4$	
F_3	$(1, 1, 0)_{Pl}$	π_3	$\langle R_5 + S_2 \rangle \cap E_3 \neq 0$
F_3	$(2, 1, 0)$	ω_3	
F_4^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_1$	$\langle R_5 \cap E_9 + S_5 \cap E_9 \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_4	$(1, 0, 1)$	ω_1	
$F_5 F_{Q,5}$	$(1, 1, 1)_{Pl}$	$\pi_2 + \pi_4$	$\langle \langle R_5 \cap E_8 + S_5 \cap E_8 \rangle \cap E_4 + S_8 \cap E_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_5	$(2, 1, 1)$	$\omega_2 + \omega_4$	
F_6^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	π_5	$\langle \langle R_5 + S_2 \rangle \cap E_5 + S_8 \cap E_5 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_6	$(1, 1, 0)$	ω_5	
F_7^2	$(1, 2, 1)_{Pl}$	$2\pi_3$	$\langle \langle \langle R_5 + S_2 \rangle \cap E_7 + S_5 \cap E_7 \rangle \cap E_3 + S_8 \cap E_3 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_7	$(1, 1, 1)$	ω_3	
$F_1 F_6$			
$F_3 F_{Q,5}$	$(2, 1, 1)$	$\omega_3 + \omega_5$	
$F_7 F_{P,5}$			

Объясним, почему форма f_5 , соответствующая геометрическому условию $\langle \langle R_5 \cap E_8 + S_5 \cap E_8 \rangle \cap E_4 + S_8 \cap E_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$, задаёт дивизор $D_5 + \Delta_{Q,5}$. Во-первых, форма F_5 должна зависеть от плюккеровых координат всех трёх пространств, поскольку дивизоры, зависящие от координат меньшего числа подпространств известны из случаев 1 и 4, а прообразы дивизоров из этих случаев (кроме дивизоров Шуберта) при канонической проекции — это D_1 , D_4 и D_2 , D_3 , D_6 соответственно. Покажем, что форма f_5 делится на $F_{Q,5}$. Тогда частное и будет равняться F_5 . Действительно, мультистепень и вес частного будут равны $(2, 1, 1)$ и $\omega_2 + \omega_4$, на $F_{P,5}$ частное не делится из соображений весов, а мультистепень F_5 не должна иметь нулевых компонент.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 \\ * & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Рис.3.22.2

Будем действовать группой H_1 , как на рисунке 3.1.2а) в случае 1 для группы SO_n , тогда R_5 можно привести к каноническому виду (будем считать, что точка не лежит в $\Delta_{P,5}$). В карте $s_{10,9,8,5,4} \neq 0$ подпространства S_2, S_5, S_8 можно привести к виду, как на рисунке 3.22.2. $\langle R_5 \cap E_8 + S_5 \cap E_8 \rangle \cap E_4$ задаёт подпространство, натянутое на два первых выделенных серым вектора. Если точка лежит в $\Delta_{Q,5}$, то $S_8 \cap E_4$ задаёт подпространство, натянутое на 2-й и 3-й выделенные серым векторы на рис. 3.22.2. Определитель матрицы,

составленной из базисных векторов этих двух подпространств, равен нулю. Это и означает, что форма равна нулю на точках дивизора $\Delta_{Q,5}$.

23. $(5, 5), (2, 3, 3, 2)'$

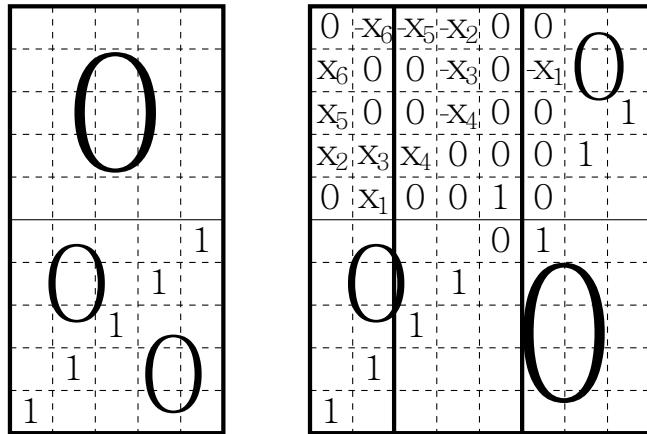


Рис.3.23

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi'_5$	$\langle R_5 \cap E_9 + S_2 \cap E_9 \rangle \cap E'_5 \perp S_2 \cap E_9$
F_1	$(1, 1, 0)$	$\omega_1 + \omega_4$	
F_2	$(1, 1, 0)_{Pl}$	π_3	$\langle R_5 + S_2 \rangle \cap E_3 \neq 0$
F_2	$(2, 1, 0)$	ω_3	
F_3^2	$(1, 2, 1)_{Pl}$	$2\pi_1 + 2\pi_3$	$\langle \langle \langle R_5 \cap E_9 + S_2 \cap E_9 \rangle \cap E_7 + S'_5 \cap E_7 \rangle \cap E_3 + S_8 \cap E_3 \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_3	$(1, 1, 1)$	$\omega_1 + \omega_3$	
F_4^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_2$	$\langle R_5 \cap E_8 + S'_5 \cap E_8 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_4	$(1, 0, 1)$	ω_2	
F_6^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	π_5	$\langle \langle R_5 + S_2 \rangle \cap E_5 + S_8 \cap E_5 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_6	$(1, 1, 0)$	ω_5	
F_7^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	0	$\langle R_5 + S'_5 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_7	$(1, 0, 1)$	0	
$F_4 F_6$	$(2, 1, 1)$	$\omega_2 + \omega_5$	
$F_7 F_{P,5} F_{Q,2}$			

Есть ещё параметрический дивизор D_5 , такой что форма $F_5 F'_{Q,5}$ задаётся геометрическим условием $\langle \langle R_5 \cap E_8 + S'_5 \cap E_8 \rangle \cap E_4 + S_8 \cap E_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$. Объяснение того, что это геометрическое условие задаёт дивизор $D_5 + \Delta'_{Q,5}$, аналогично предыдущему случаю.

24. $(5, 5), (3, 2, 2, 3)$

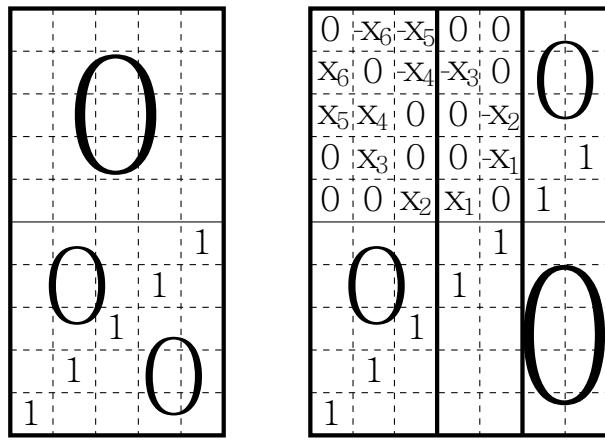


Рис.3.24

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_3$	$\langle R_5 \cap E_7 + S_5 \cap E_7 \rangle \cap E_3 \neq 0$
F_1	$(1, 0, 1)$	ω_3	
F_2^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_2 + \pi'_5$	$\langle R_5 \cap E_8 + S_3 \cap E_8 \rangle \cap E'_5 \perp S_3 \cap E_8$
F_2	$(1, 1, 0)$	$\omega_2 + \omega_4$	
F_3	$(1, 1, 0)_{Pl}$	$\pi_1 + \pi_3$	$\langle R_5 \cap E_9 + S_3 \cap E_9 \rangle \cap E_3 \neq 0$
F_3	$(2, 1, 0)$	$\omega_1 + \omega_3$	
F_4^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi_5$	$\langle\langle R_5 \cap E_9 + S_3 \cap E_9 \rangle \cap E_5 + S_7 \cap E_5 \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_4	$(1, 1, 0)$	$\omega_1 + \omega_5$	
F_5	$(1, 1, 0)_{Pl}$	π_2	$\langle R_5 + S_3 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_5	$(2, 1, 0)$	ω_2	
F_6^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	π'_5	$\langle\langle R_5 + S_3 \rangle \cap E'_5 + S_7 \cap E'_5 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_6	$(1, 1, 0)$	ω_4	
F_7^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_1$	$\langle R_5 \cap E_9 + S_5 \cap E_9 \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_7	$(1, 0, 1)$	ω_1	
$F_1 F_4$			
$F_3 F_{Q,5}$	$(2, 1, 1)$	$\omega_1 + \omega_3 +$	
$F_7 F_{Q,3} F_{P,5}$		$+ \omega_5$	

25. $(5, 5), (3, 2, 2, 3)'$

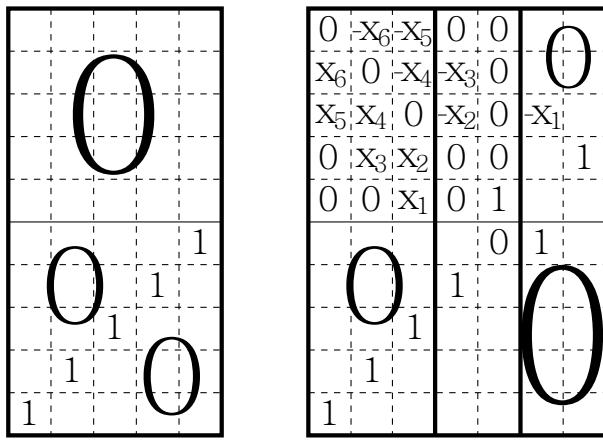


Рис.3.25

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_2 + \pi'_5$	$\langle R_5 \cap E_8 + S_3 \cap E_8 \rangle \cap E'_5 \perp S_3 \cap E_8$
F_1	$(1, 1, 0)$	$\omega_2 + \omega_4$	
F_2^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	$2\pi_2$	$\langle R_5 \cap E_8 + S'_5 \cap E_8 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_2	$(1, 0, 1)$	ω_2	
F_3	$(1, 1, 0)_{Pl}$	$\pi_1 + \pi_3$	$\langle R_5 \cap E_9 + S_3 \cap E_9 \rangle \cap E_3 \neq 0$
F_3	$(2, 1, 0)$	$\omega_1 + \omega_3$	
F_4^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi_5$	$\langle \langle R_5 \cap E_9 + S_3 \cap E_9 \rangle \cap E_5 + S_7 \cap E_5 \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_4	$(1, 1, 0)$	$\omega_1 + \omega_5$	
F_5	$(1, 1, 0)_{Pl}$	π_2	$\langle R_5 + S_3 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_5	$(2, 1, 0)$	ω_2	
F_6^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	π'_5	$\langle \langle R_5 + S_3 \rangle \cap E'_5 + S_7 \cap E'_5 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_6	$(1, 1, 0)$	ω_4	
F_7^2	$(1, 0, 1)_{Pl}$	0	$\langle R_5 + S'_5 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_7	$(1, 0, 1)$	0	
$F_2 F_6$			
$F_5 F'_{Q,5}$	$(2, 1, 1)$	$\omega_2 + \omega_4$	
$F_1 F_7$			

26. (6, 6), (4, 4, 4)

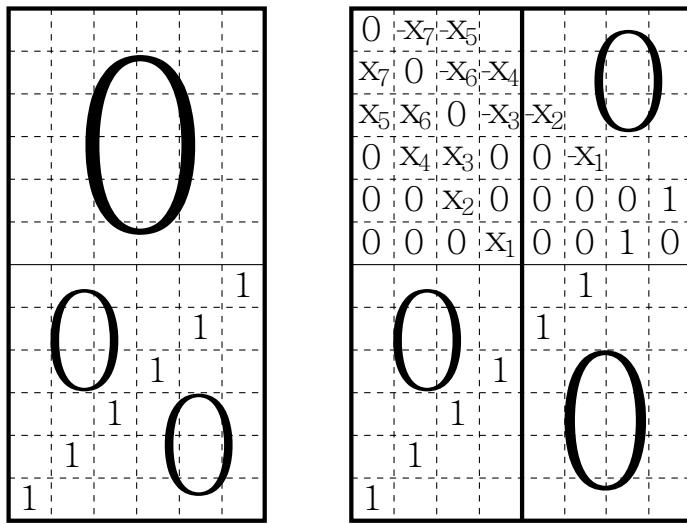


Рис.3.26

	deg	вес	геометрическое условие
F_1^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_3 + \pi'_6$	$\langle R_6 \cap E_9 + S_4 \cap E_9 \rangle \cap E'_6 \perp S_4 \cap E_9$
F_1	$(1, 1)$	$\omega_3 + \omega_5$	
F_2	$(1, 1, 0)_{Pl}$	$\pi_2 + \pi_4$	$\langle R_6 \cap E_{10} + S_4 \cap E_{10} \rangle \cap E_4 \neq 0$
F_2	$(2, 1)$	$\omega_2 + \omega_4$	
F_3^3	$(1, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_2 + \pi_6$	$\langle \langle R_6 \cap E_{10} + S_4 \cap E_{10} \rangle \cap E_6 + S_8 \cap E_6 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_3	$(1, 1)$	$\omega_2 + \omega_6$	
F_4	$(1, 1, 0)_{Pl}$	$\pi_1 + \pi_3$	$\langle R_6 \cap E_{11} + S_4 \cap E_{11} \rangle \cap E_3 \neq 0$
F_4	$(2, 1)$	$\omega_1 + \omega_3$	
F_5	$(1, 1, 0)_{Pl}$	π_2	$\langle R_6 + S_4 \rangle \cap E_2 \neq 0$
F_5	$(2, 1)$	ω_2	
F_6^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_1 + \pi'_6$	$\langle \langle R_6 \cap E_{11} + S_4 \cap E_{11} \rangle \cap E'_6 + S_8 \cap E'_6 \rangle \cap E_1 \neq 0$
F_6	$(1, 1)$	$\omega_1 + \omega_5$	
F_7^2	$(2, 2, 0)_{Pl}$	$2\pi_4$	$\langle \langle R_6 + S_4 \rangle \cap E_4 + \langle R_6 \cap E_8 + S_8 \cap E_8 \rangle \cap E_4 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_7	$(2, 1)$	ω_4	
F_8^2	$(1, 2, 0)_{Pl}$	π_6	$\langle \langle R_6 + S_4 \rangle \cap E_6 + S_8 \cap E_6 \rangle \cap E_0 \neq 0$
F_8	$(1, 1)$	ω_6	
$F_3 F_7$			
$F_5 F_{P,6} F_{Q,4}$	$(3, 2)$	$\omega_2 + \omega_4 +$	
$F_2 F_8$		$+ \omega_6$	

Оставшиеся случаи можно не рассматривать, поскольку SO_6 и SO_5 локально изоморфны группам SL_4 и Sp_4 соответственно.

3.4. Метод вычисления инвариантов колец Кокса для особых групп

3.4.1. Определение веса и мультистепени канонического сечения. Ранее мы описали, как находить все B -инвариантные дивизоры. Чтобы определить, какие из них будут исключительными дивизорами и задать семейство параметрических дивизоров в случае сложности 1, а также для того, чтобы впоследствии описать образующие и соотношения в $R(X)^U$, нам нужно знать мультистепени и веса канонических сечений $s_{D_i} \in H^0(X, \mathcal{O}(D_i))$.

Эту задачу мы разделим на 2 части. Вначале мы найдем вес регулярной $(B \cap L \cap M)$ -полуинвариантной функции f_i на $U_P \cap U_Q$, задающей дивизор D_i . U -инвариантное продолжение \tilde{f}_i функции f_i с $U_P \cap U_Q$ на $U_P[e] \times U_Q[e]$ будет регулярной функцией того же веса. Затем найдем кратности полюсов $m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, n_{j_1}, \dots, n_{j_t}$ функции \tilde{f}_i вдоль дивизоров Шуберта D_{P,i_k}, D_{Q,j_l} , которые составят мультистепень s_{D_i} , а вес сечения будет равен

$$\text{wt } s_{D_i} = \text{wt } \tilde{f}_i + \sum m_{i_k} \omega_{i_k} + \sum n_{j_l} \omega_{j_l}.$$

Объясним, как найти вес регулярной на $U_P \cap U_Q$ функции f_i , задающей дивизор D_i . Мы задавали дивизор D_i некоторой координатной функцией x_i на некотором сечении S_i открытого в $U_P \cap U_Q$ множества (полученного выкидыванием некоторых дивизоров). Её $(B \cap L \cap M)$ -инвариантное продолжение g_i на $U_P \cap U_Q$ может не быть регулярным и иметь полюса вдоль ранее найденных дивизоров. Тогда f_i можно записать в виде $f_i = g_i f_1^{l_1} \dots f_{i-1}^{l_{i-1}}, l_j \geq 0$, а тогда и в виде $f_i = g_i \cdot g_1^{k_1} \cdot \dots \cdot g_{i-1}^{k_{i-1}}, k_j \geq 0$. Утверждая, что $l_j \geq 0$ (а тогда и $k_j \geq 0$), мы пользуемся тем, что g_i не может иметь нулей вдоль D_1, \dots, D_{i-1} — это мы объясним позже.

Найдем условия на числа k_j . Во-первых, можно воспользоваться тем, что вес канонического сечения s_{D_i} должен быть доминантным. Пусть $\lambda_i = -\text{wt } f_i$. То есть к весу $-\lambda_i = -(\mu_i + k_1 \mu_1 + \dots + k_{i-1} \mu_{i-1})$ можно так добавить кратности фундаментальных весов, соответствующих простым корням из множеств I и J , задающих P и Q , что получится доминантный вес.

Теперь объясним, как получить оценки на k_j сверху, а также объясним, почему $k_j \geq 0$. Пусть $x \in U_P \cap U_Q$, и, обнуляя некоторые координаты действием элемента $u \in U \cap L \cap M$, мы привели точку x к точке $ux \in S_i$. Посмотрим, какой вид имеет выражение координаты x_i точки ux через координаты точки x и через x_j ($j < i$). Для этого будем следить за видом выражений новых координат через исходные и через x_j при приведении

точки x к некоторому виду. Из формулы (2) следует, что при действии элементом $\exp(se_\beta)$ координаты изменяются следующим образом:

$$q_\gamma \rightsquigarrow q_\gamma + sc(\beta, \gamma)q_{\gamma-\beta} + \frac{s^2}{2!}c(\beta, \gamma)c(\beta, \gamma - \beta)q_{\gamma-2\beta} + \dots,$$

где $c(\beta, \gamma)$ — нормировочные коэффициенты, то есть такие константы, что $[e_\beta, e_\gamma] = c(\beta, \gamma)e_{\beta+\gamma}$, и мы считаем $q_{\gamma-k\beta} = 0$ при $\gamma - k\beta \notin \Delta(U_P \cap U_Q)$.

При обнулении координаты q_α в процессе приведения к сечению S_2 мы будем действовать подгруппой $U_{\alpha-\mu_1}$. Действительно, при действии элементом $\exp(se_{\alpha-\mu_1})$ координата q_α изменяется следующим образом:

$$q_\alpha \rightsquigarrow q_\alpha + sc(\alpha - \mu_1, \alpha)q_{\mu_1}.$$

Отметим, что $\alpha - k(\alpha - \mu_1) = \mu_1 - (k-1)(\alpha - \mu_1) \notin \Delta(U_P \cap U_Q)$ при $k > 1$, поскольку $q_{\mu_1} = (L \cap M \cap U)$ -инвариантная координата. Тогда при $s = \frac{-q_\alpha}{q_{\mu_1}c(\alpha - \mu_1, \alpha)}$ координата q_α обнуляется. При этом другие координаты изменяются следующим образом:

$$q_\gamma \rightsquigarrow q_\gamma + c_1 \frac{q_\alpha}{x_1} q_{\gamma-(\alpha-\mu_1)} + c_2 \left(\frac{q_\alpha}{x_1} \right)^2 q_{\gamma-2(\alpha-\mu_1)} + \dots \quad (3)$$

где c_1, c_2, \dots — некоторые константы, зависящие от нормировочных коэффициентов. Отметим, что выражение координат, участвующих в этой формуле, через исходные может содержать x_1 в знаменателе.

При приведении к сечению S_3 мы будем действовать элементами вида $\exp(se_{\alpha-\mu_2})$. При этом в формуле изменения координат (3) вместо x_1 будет x_2 , а вместо μ_1 будет μ_2 . Выражение участвующих в этой формуле координат через исходные может содержать x_1 или x_2 в знаменателе. Продолжая таким образом, мы получим вид выражения x_i через исходные координаты и x_j и оценки на k_j сверху. Эти рассуждения продемонстрированы на случаях 1 и 2 из раздела 3.5.1.

Рассуждения выше показывают, что $g_i = q_{\mu_i} + f$, где f — рациональная функция от других координат точки x . Поскольку q_{μ_i} может принимать любые значения на точках дивизоров D_1, \dots, D_{i-1} , то g_i не может иметь нулей вдоль этих дивизоров.

Теперь опишем метод решения второй части задачи и объясним, как найти кратности полюсов U -инвариантного продолжения f_i с $U_P \cap U_Q$ на $U_P[e] \times U_Q[e]$ вдоль дивизоров Шуберта прямым вычислением.

Пусть $U' \subset G$ — некоторая унипотентная подгруппа, нормализуемая тором T . Опишем, какими естественными способами можно вводить координаты на U' . Пусть \mathcal{A} — пересечение Δ и некоторого замкнутого относительно сложения подмножества решетки

характеров T , лежащего по одну сторону от некоторой гиперплоскости. Тогда произведение $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ будет подгруппой, которую мы будем обозначать через $U_{\mathcal{A}}$. Пусть $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ — такие непересекающиеся замкнутые относительно сложения подмножества $\Delta(U')$, что $\bigsqcup \mathcal{B}_i = \Delta(U')$. Тогда U' можно разложить в произведение $U' = U_{\mathcal{B}_1} \cdot \dots \cdot U_{\mathcal{B}_k}$, а элемент $g \in U'$ можно представить в виде $g = \exp(\sum_{\alpha \in \mathcal{B}_1} x_\alpha e_\alpha) \cdot \dots \cdot \exp(\sum_{\alpha \in \mathcal{B}_k} x_\alpha e_\alpha)$. Числа x_α будут координатами g . Отметим, что порядок множеств \mathcal{B}_i важен.

Пусть f — регулярная функция на $U_Q[e]$. Опишем, как найти $\text{ord}_{D_{Q,j}} f$. Для этого запишем f в координатах открытого множества, пересекающего дивизор Шуберта. Рассмотрим в G/B^- два открытых подмножества $U_{\Delta^+ \setminus \alpha_j} U_{\alpha_j}[e]$ и $U_{\Delta^+ \setminus \alpha_j} U_{-\alpha_j}[r_{\alpha_j}]$, где r_{α_j} — отражение относительно простого корня α_j . Второе из них пересекает дивизор Шуберта $D_{B,j}$. Поднимем f до функции $\hat{f} = \pi^* f$ на $U[e] \subset G/B^-$, где $\pi : G/B^- \rightarrow G/Q^-$ — естественная проекция. Тогда $\text{ord}_{D_{Q,j}} f = \text{ord}_{D_{B,j}} \hat{f}$. Введем на $U_{\Delta^+ \setminus \alpha_j} U_{\alpha_j}$ и $U_{\Delta^+ \setminus \alpha_j} U_{-\alpha_j}$ координаты, заданные такими наборами множеств $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k, \mathcal{B}'_1, \dots, \mathcal{B}'_k$, что $\mathcal{B}'_i = \mathcal{B}_i$ ($i = 1, \dots, k-1$), $\mathcal{B}_k = \{\alpha_j\}$, $\mathcal{B}'_k = \{-\alpha_j\}$. Координаты на $U_{\Delta^+ \setminus \alpha_j} U_{\alpha_j}[e]$ и $U_{\Delta^+ \setminus \alpha_j} U_{-\alpha_j}[r_{\alpha_j}]$ будем обозначать через q_γ и q'_γ соответственно. Координаты связаны следующим образом: $q_\gamma = q'_\gamma$ для $\gamma \in \Delta^+ \setminus \alpha_j$ и $q'_{-\alpha_j} = q_{\alpha_j}^{-1}$. Действительно, рассмотрим в G простую подгруппу G_{α_j} с системой корней $\{\pm \alpha_j\}$, локально изоморфную SL_2 . В G/B^- есть открытое подмножество, изоморфное $U_{\Delta^+ \setminus \alpha_j} \times G_{\alpha_j}/(B^- \cap G_{\alpha_j})$, содержащее $U_{\Delta^+ \setminus \alpha_j} U_{\alpha_j}[e]$ и $U_{\Delta^+ \setminus \alpha_j} U_{-\alpha_j}[r_{\alpha_j}]$. Тогда координаты на $U_{\Delta^+ \setminus \alpha_j}$ не изменяются, а связь координат $q'_{-\alpha_j}$ и q_{α_j} устанавливается из следующего матричного соотношения:

$$\begin{pmatrix} 1 & q_{\alpha_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q_{\alpha_j} & 0 \\ 1 & -q_{\alpha_j}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{\alpha_j}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

На множестве $U_{\Delta^+ \setminus \alpha_j} U_{-\alpha_j}[r_{\alpha_j}]$ дивизор Шуберта $D_{B,j}$ задаётся условием $q'_{\alpha_j} = 0$. Тогда $-\text{ord}_{D_{B,j}} \hat{f}$ равен степени \hat{f} по координате q_{α_j} .

Теперь пусть f — регулярная $(U \cap L \cap M)$ -инвариантная функция на $[e] \times (U_P \cap U_Q)[e]$. Опишем, как найти порядок её U -инвариантного продолжения на X вдоль $D_{Q,j}$. Вначале продолжим f до $(U \cap L)$ -инвариантной функции на $[e] \times U_Q[e]$. При этом если дописать новые координаты слева, то есть рассмотреть на $U_Q[e]$ такие координаты, что последнее множество $\mathcal{B}_k = \Delta(U_P \cap U_Q)$, то выражение f через координаты от этого не изменится. Далее поднимем f на $[e] \times U[e] \subset G/P^- \times G/B^-$, получим \hat{f} . Если рассмотреть такие координаты на $[e] \times U[e]$, что новые координаты добавляются справа, то выражение \hat{f} через координаты будет совпадать с выражением f . Порядок U -инвариантного продолжения \hat{f} на $U_P[e] \times U[e] \subset G/P^- \times G/B^-$ вдоль дивизора Шуберта $D_{B,j}$ (на двойном многообразии

флагов) будет равен порядку \widehat{f} вдоль дивизора Шуберта $D_{B,j}$ (на одинарном многообразии флагов). Мы уже знаем, что кратность полюса \widehat{f} равна степени по q_{α_j} , где координаты на $U[e]$ выбраны таким образом, что последнее \mathcal{B}_k равно $\{\alpha_j\}$. Таким образом для вычисления степени \widehat{f} по q_{α_j} нужно выразить 2 рассмотренных набора координат на $U[e]$ друг через друга.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо того, чтобы поднимать f на G/B^- , можно поднимать на G/Q'^- , где $Q' \subseteq Q$ и $\Delta(U_{Q'}) \setminus \{\alpha_j\}$ замкнуто относительно r_{α_j} . В качестве Q' можно взять, например, $P_{J'}$, где $J' = J \cup \{\alpha_i | \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \neq 0\}$.

Кратность полюса U -инвариантного продолжения на X регулярной $(U \cap L \cap M)$ -инвариантной функции на $[e] \times (U_P \cap U_Q)[e] \simeq (U_P \cap U_Q)[e] \times [e]$ вдоль дивизора $D_{P,j}$ находится аналогично.

Теперь приведем оценки снизу и сверху на порядки полюсов f вдоль дивизоров Шуберта. Эти оценки в некоторых случаях позволяют избежать прямых вычислений.

ЛЕММА 3.2. *Пусть f — уравнение B -инвариантного дивизора на $U_P[e] \times U_Q[e]$, $k_P = -\text{ord}_{D_{P,i}} f$, $k_Q = -\text{ord}_{D_{Q,i}} f$ (то есть k_P и k_Q — кратности полюсов), при этом если дивизора $D_{P,i}$ или $D_{Q,i}$ нет, то считаем $k_P = 0$ или $k_Q = 0$ соответственно. Пусть $\lambda = -\text{wt}(f)$. Тогда:*

- (a) $k_P + k_Q \geq \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle$
- (b) $k_P, k_Q \leq \langle \lambda, \omega_i^\vee \rangle$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Домножим f на сечения, соответствующие дивизорам Шуберта, в степенях, равных кратностям полюсов вдоль дивизоров Шуберта. Вес полученного сечения должен быть доминантным, то есть $-\lambda + (k_P + k_Q)\omega_i + \sum_{j \neq i} m_j \omega_j$ — доминантен. Тогда $\langle -\lambda + (k_P + k_Q)\omega_i + \sum_{j \neq i} m_j \omega_j, \alpha_i^\vee \rangle = \langle -\lambda, \alpha_i^\vee \rangle + k_P + k_Q \geq 0$, то есть $k_P + k_Q \geq \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle$

(b) Мы знаем, что k_Q равно степени поднятия f на $U_P[e] \times U[e]$ по q_{α_i} при определенном выборе координат на $U[e]$. Тогда $\lambda = k_Q \alpha_i + \sum m_\gamma \gamma, \gamma \in \Delta^+ \Rightarrow \langle \lambda, \omega_i^\vee \rangle = \langle k_Q \alpha_i + \sum m_\gamma \gamma, \omega_i^\vee \rangle \geq k_Q$. Для k_P всё аналогично. \square

Отметим, что если мы пользуемся оценками, то нам не нужно знать саму функцию f , а нужен только ее вес.

3.4.2. Форма записи результата. Группу $U_P \cap U_Q$ мы будем схематично изображать на рисунках (разделы 3.5.1 и 3.5.2). Клетки соответствуют координатам $U_P \cap U_Q$. Соседние по горизонтали клетки будут соответствовать координатам q_γ (левая клетка) и $q_{\gamma+\alpha_i}$ (правая), где i — число, стоящее снизу на горизонтальной разделяющей клетки прямой.

Аналогично с соседними клетками по вертикали (если некоторой клетке соответствует q_γ , то соседней сверху — $q_{\gamma+\alpha_j}$). Теперь осталось сопоставить координату одной клетке. Для этого вначале заметим, что I или J совпадают с $\{\alpha_1\}$ для всех двойных многообразий флагов $G/P_I \times G/P_J$ особых групп сложности не больше 1. Поэтому $U_P \cap U_Q \subseteq U_{P_{\alpha_1}}$. Таким образом, у нас есть стандартная картинка для $U_{P_{\alpha_1}}$ (своя для E_6 и E_7), а картинка для $U_P \cap U_Q$ является ее подкартинкой. Для стандартной картинки самый левый нижний квадрат соответствует координате q_{α_1} . Чтобы в стандартной картинке выделить нужную подкартинку, мы будем некоторые клетки рисовать пунктиром: клетки, соответствующие координатам $U_P \cap U_Q$, будут иметь сплошную границу, остальные клетки (дополняющие до стандартной картинки) — пунктирную границу. Жирными линиями будем разделять координаты, отвечающие неприводимым подпредставлениям группы $L \cap M$.

Для краткости для группы E_6 координату $q_{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_6\alpha_6}$ будем обозначать через $q_{k_1 k_2 \dots k_6}$.

Переменные x_i на рисунках ставим в соответствии с алгоритмом, приведённым в 3.1.1. Для случая сложности 0 при замене всех x_i на рисунке на 1 получим точку канонического вида. Для случая сложности 1 при замене всех x_i на рисунке кроме одного на 1, а оставшегося (его клетку мы на рисунке будем закрашивать серым) — на z , получим точку канонического вида из B -орбиты, соответствующей параметру z .

Для каждого случая информацию о дивизорах мы будем записывать в таблицу. Для краткости введем следующие обозначения для сечений: $F_i = s_{D_i}$, $F_{P,i} = s_{D_{P,i}}$, $F_{Q,i} = s_{D_{Q,i}}$. Для случаев сложности 0 для всех простых B -инвариантных дивизоров, кроме дивизоров Шуберта, будем выписывать веса и мультистепени соответствующих им канонических сечений, координаты весов μ_i и λ_i в разложении по простым корням и фундаментальным весам, выражение f_i через g_1, \dots, g_i . Для случаев сложности 1 в таблицу будем выписывать аналогичную информацию для всех дивизоров, соответствующих некоторым x_i . Для остальных исключительных дивизоров, кроме дивизоров Шуберта, будем выписывать только вес и мультистепень соответствующего канонического сечения. Также для случаев сложности 1 будем выписывать мономы от сечений, соответствующих исключительным дивизорам, имеющие такие же мультистепень и вес, как F и F' , а также их вес и мультистепень. Напомним, что если таких мономов два, то значит исключительных точек тоже две и $R(X)^U$ свободна. Если мономов три, то исключительных точек три, соответствующие мономы связаны линейным соотношением с ненулевыми коэффициентами (которые можно считать равными 1 за счет выбора канонических сечений), а $R(X)^U$ является гиперповерхностью.

3.5. Инварианты колец Кокса для особых групп

3.5.1. Алгебры U -инвариантов колец Кокса для группы E_6 .

Приведем результаты разбора случаев. Несколько случаев разберем для примера подробно. Напомним, что двойное многообразие флагов мы задаём парой подмножеств $(I; J)$.

Напомним, что для всех двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 для группы E_6 либо I , либо J совпадает с $\{\alpha_1\}$. Поэтому во всех случаях $L \cap M$ будет подгруппой L_{α_1} , где L_{α_1} — подгруппа Леви в $P_{\{\alpha_1\}}$, а $U_P \cap U_Q \subseteq U_{P_{\{\alpha_1\}}}$. Опишем, как устроено действие L_{α_1} на $U_{P_{\{\alpha_1\}}}$.

Группа L_{α_1} локально изоморфна $D_5 \times \mathbb{C}^\times$. Её диаграмма Дынкина получается из диаграммы Дынкина для E_6 выкидыванием вершины, соответствующей простому корню α_1 . Для группы D_5 есть стандартное задание корней через веса ε_i (см. [1, табл.

1]) — подпишем корни на рис. 1.0.1. Веса в $U_{P_{\{\alpha_1\}}}$ (относительно тора в E_6) имеют вид $\alpha_1 + \sum_{i=2}^6 k_i \alpha_i$. Проекция α_1 на пространство весов D_5 равна $\frac{1}{2}(-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5)$. Таким образом, представление $[L_{\alpha_1}, L_{\alpha_1}]$ в $U_{P_{\{\alpha_1\}}}$ — это полуспинорное представление ортогональной группы. Весами этого представления будут веса вида $\frac{1}{2}(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4 \pm \varepsilon_5)$ с чётным числом минусов. Изобразим веса представления на рис. 1.0.2, изображая вес $\frac{1}{2}(\pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4 \pm \varepsilon_5)$ столбцом из плюсов и минусов.

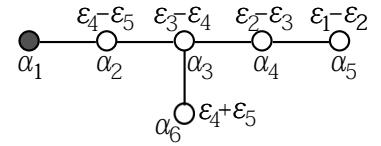


Рис.1.0.1

			$\begin{smallmatrix} \pm \\ \pm \\ \pm \\ \pm \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \pm \\ \pm \\ \pm \\ \pm \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \pm \\ \pm \\ \pm \\ \pm \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \pm \\ \pm \\ \pm \\ \pm \\ + \end{smallmatrix}$	
			$\begin{smallmatrix} + \\ - \\ - \\ - \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \\ - \\ - \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \\ - \\ - \\ + \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} + \\ - \\ - \\ - \\ + \end{smallmatrix}$	
			$\begin{smallmatrix} - \\ + \\ + \\ + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ + \\ + \\ + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ + \\ + \\ + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ + \\ + \\ + \\ - \end{smallmatrix}$	
			$\begin{smallmatrix} - \\ - \\ + \\ + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ - \\ + \\ + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ - \\ + \\ + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ - \\ + \\ + \\ - \end{smallmatrix}$	
			$\begin{smallmatrix} - \\ - \\ - \\ + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ - \\ - \\ + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ - \\ - \\ + \\ - \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} - \\ - \\ - \\ + \\ - \end{smallmatrix}$	
							4
							5
							4

Рис.1.0.2

сложность 0

1. $E_6, (\alpha_1; \alpha_1)$

Вначале мы найдем геометрически $(B \cap L \cap M)$ -инвариантные дивизоры на $U_P \cap U_Q$. Условие $x_1 := q_{\alpha_1} = 0$ задает инвариантный дивизор на $S_1 = U_P \cap U_Q$. Рассмотрим открытое множество, заданное условием $q_{\alpha_1} \neq 0$. Действуя группой $U \cap L \cap M$ на точки этого открытого множества, обнулим координаты $q_{110000}, q_{111000}, q_{111001}, q_{111100}, q_{111101}, q_{112101}, q_{111110}, q_{111111}, q_{112111}, q_{112211}$. Обозначим множество соответствующих корней через \mathcal{A}_1 . Для того, чтобы обнулить координату q_γ , $\gamma \in \mathcal{A}_1$ мы действовали подгруппой $U_{\gamma-\alpha_1}$.

0	$*$	$*$	$*$				4
0	0	0	$*$				5
0	0	0	x_2				4
x_1	0	0	0				
2	3	6	3	2	3	6	

Рис.1.1.1

Обозначим множество коней $\{\gamma - \alpha_1 \mid \gamma \in \mathcal{A}_1\}$ через $\mathcal{A}_1 - \alpha_1$. Рассмотрим сечение S_2 , состоящее из точек полученного вида. Оно схематично изображено на рисунке 6.1.1.

Обозначим через $\mu_2 := \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$. Координату $x_2 := q_{\mu_2}$ мы обнулить на всем сечении S_2 не можем. Действительно, чтобы обнулить q_{μ_2} , оставаясь внутри S_2 , нужно подействовать группой $U_{\mu_2 - \alpha_1}$, но $\mu_2 - \alpha_1 \notin \Delta(U \cap L \cap M)$. Условие $x_2 = 0$ задаёт на S_2 дивизор. Отметим, что $U_{\mathcal{A}_1 - \alpha_1}$ -орбиты в $S_1 \setminus D_1$ пересекают S_2 трансверсально. Замыкание объединения $(B \cap L \cap M)$ -орбит точек из S_2 с $x_2 = 0$ будет $(B \cap L \cap M)$ -инвариантным дивизором на $U_P \cap U_Q$.

При приведении точки к сечению S_2 мы действовали подгруппой $U_{\mathcal{A}_1 - \alpha_1} \subset U \cap L \cap M$, осталось действие $U_{\Delta(U \cap L \cap M) \setminus \mathcal{A}_1 - \alpha_1}$. Подгруппа $H_2 := U_{\Delta(U \cap L \cap M) \setminus \mathcal{A}_1 - \alpha_1}$ сохраняет S_2 . Действуя H_2 , мы можем обнулить оставшиеся координаты (на местах *): $q_{122111}, q_{122211}, q_{123211}, q_{123212}$.

Таким образом, вне дивизоров D_1, D_2 любая точка из $U_P \cap U_Q$ действием группы $U \cap L \cap M$ приводится к виду, схематично изображенному на рисунке 1.1.2. Если подействовать еще тором T , то можно сделать $x_1 = x_2 = 1$. Значит, любая точка (из $U_P \cap U_Q$) вне D_1 и D_2 лежит в открытой B -орбите, а значит D_1, D_2 — все $(B \cap L \cap M)$ -инвариантные дивизоры на $U_P \cap U_Q$.

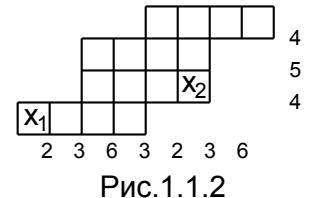


Рис.1.1.2

Теперь найдем веса регулярных функций f_1, f_2 на $U_P \cap U_Q$, задающих D_1 и D_2 . Дивизор D_1 задаётся условием $q_{\alpha_1} = 0$ на всем $U_P \cap U_Q$, поэтому $f_1 = g_1 = q_{\alpha_1}$ и $\text{wt } f_1 = -\alpha_1$ (а тогда по определению $\lambda_1 := -\text{wt } f_1 = \alpha_1$). Дивизор D_2 задаётся условием $q_{122101} = 0$, но не на $U_P \cap U_Q$, а только на сечении S_2 . Продолжим эту функцию до рациональной $(U \cap L \cap M)$ -инвариантной функции g_2 на $U_P \cap U_Q$. Напомним, что $\mu_2 := -\text{wt } g_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$. Функция g_2 может иметь полюс вдоль D_1 , тогда $f_2 = g_2 \cdot f_1^k$ для некоторого k . Найдем данное k .

Во первых, мы знаем, что существует такое l , что $\text{wt } f_2 + l\omega_1 = (-\mu_2 - k\lambda_1) + l\omega_1$ будет доминантным. Поэтому $\langle \mu_2 + k\lambda_1, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0, \forall i \neq 1$. В частности, при $i = 2$ имеем $\langle \mu_2 + k\lambda_1, \alpha_2^\vee \rangle = 1 - k \cdot 1 \leq 0$, а значит $k \geq 1$.

Теперь получим оценку с другой стороны. Пусть $x \in U_P \cap U_Q \setminus D_1$. Возьмём такое $u \in U \cap L \cap M$, что $ux \in S_2$. Посмотрим, как выражается координата x_2 точки ux через координаты точки x . При обнулении координат $q_{110000}, q_{111000}, q_{111001}$ к координате q_{122101} прибавляются $c_1 \frac{q_{112101}}{x_1}, c_2 \frac{q_{111101}}{x_1}$ и $c_3 \frac{q_{111100}}{x_1}$ соответственно (константы c_1, c_2, c_3 зависят от выбора корневых векторов). Тогда $x_2 = q_{122101} + \frac{f}{x_1}$, где f — многочлен от координат точки x . Это выражение и будет продолжением координатной функции x_2 на сечении S_2 .

до $(U \cap L \cap M)$ -инвариантной функции g_2 на $U_P \cap U_Q$. Таким образом, $k = -\text{ord}_{D_1} g_2 \leq 1$. Из двух неравенств получаем, что $k = 1$. Значит $f_2 = g_1 g_2$ и $\lambda_2 = -\text{wt } f_2 = \lambda_1 + \mu_2$.

Теперь найдем мультистепени и веса D_1 и D_2 .

Пусть порядки f_1 вдоль дивизоров Шуберта равны k_P и k_Q . Тогда по лемме 3.2а имеем $k_P + k_Q \geq \langle \lambda_1, \alpha_1^\vee \rangle = 2$.

С другой стороны, по лемме 3.2б мы знаем, что $k_P \leq \langle \lambda_1, \omega_1^\vee \rangle = 1$. Аналогично $k_Q \leq 1$.

Из этих двух оценок получаем, что $k_P = k_Q = 1$.

Теперь разберемся с D_2 . Вначале получим явное выражение f_2 через координаты $U_P \cap U_Q$. Для краткости обозначим через $e_{i_1 i_2 \dots i_k} := [\dots [e_{\alpha_{i_1}}, e_{\alpha_{i_2}}], \dots, e_{\alpha_{i_k}}]$. Найдем выражение g_2 от координат при $e_1, e_{12}, e_{123}, e_{1236}, e_{1234}, e_{12346}, e_{123463}, e_{1234632}$. В качестве корневых векторов $e_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}_1 - \alpha_1$ возьмём $e_2, e_{23}, e_{236}, e_{234}, e_{2346}, e_{23463}$. Выпишем в таблицу 1 значения коммутаторов данных корневых векторов, которые находятся с помощью правил Якоби.

v_2	e_2	e_{23}	e_{236}	e_{234}	e_{2346}	e_{23463}
v_1						
e_1	e_{12}	e_{123}	e_{1236}	e_{1234}	e_{12346}	e_{123463}
e_{12}	0	0	0	0	0	$e_{1234632}$
e_{123}	0	0	0	0	$-e_{1234632}$	0
e_{1236}	0	0	0	$e_{1234632}$	0	0
e_{1234}	0	0	$e_{1234632}$	0	0	0
e_{12346}	0	$-e_{1234632}$	0	0	0	0
e_{123463}	$e_{1234632}$	0	0	0	0	0
$e_{1234632}$	0	0	0	0	0	0

ТАБЛИЦА 1. Значения коммутаторов $[v_1, v_2]$

Теперь будем приводить точку к сечению S_2 и обнулять координаты. Чтобы обнулить координату q_{110000} , мы действуем на точку x элементом $\exp(\frac{q_{110000}}{q_{100000}}e_2)$. Действительно:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{q_{110000}}{q_{100000}}e_2\right) \exp(q_{100000}e_1 + q_{110000}e_{12} + \dots) \exp\left(\frac{q_{110000}}{q_{100000}}e_2\right)^{-1} = \\ = \exp\left((q_{100000}e_1 + q_{100000}\frac{q_{110000}}{q_{100000}}[e_2, e_1]) + q_{110000}e_{12} + \dots\right). \end{aligned}$$

Поскольку $[e_2, e_1] = -e_{12}$, то коэффициент при e_{12} обнуляется. При этом к q_{122101} прибавляется $-\frac{q_{112101}}{q_{100000}}$ ($[e_2, e_{123463}] = -e_{1234632}$). Далее при обнулении q_{111000} к координате q_{122101}

прибавляется $\frac{q_{111101}}{q_{100000}}$ (со знаком “+”, поскольку $[e_{23}, e_1] = -e_{123}$ и $[e_{23}, e_{12346}] = e_{1234632}$). При обнулении q_{111001} к координате q_{122101} прибавляется $-\frac{q_{111100}}{q_{100000}}$ (со знаком “-”, поскольку $[e_{236}, e_1] = -e_{1236}$ и $[e_{236}, e_{1234}] = -e_{1234632}$). При обнулении остальных координат (при приведении к сечению S_2) координата q_{122101} больше не изменяется. Таким образом,

$$g_2 = q_{122101} - \frac{q_{110000} \cdot q_{112101}}{q_{100000}} + \frac{q_{111000} \cdot q_{111101}}{q_{100000}} - \frac{q_{111001} \cdot q_{111100}}{q_{100000}},$$

а тогда

$$f_2 = g_1 g_2 = q_{100000} \cdot q_{122101} - q_{110000} \cdot q_{112101} + q_{111000} \cdot q_{111101} - q_{111001} \cdot q_{111100}.$$

Теперь найдем кратность полюса f_2 вдоль дивизора Шуберта $D_{Q,1}$. Для этого вначале нужно продолжить f_2 на $[e] \times U_Q[e]$, но в нашем случае $U_Q = U_P \cap U_Q$, поэтому продолжать не нужно. Возьмём $Q' = P_{\{\alpha_1, \alpha_2\}}$, тогда $\Delta(U_{Q'}) \setminus \{\alpha_1\}$ замкнуто относительно r_{α_1} . Поднимем f_2 на $[e] \times G/Q'^-$. Рассмотрим координаты (на $[e] \times U_{Q'}$), заданные набором подмножеств $\mathcal{B}_1 = \Delta(U_Q)$, $\mathcal{B}_2 = \Delta(U_{Q'}) \setminus \Delta(U_Q)$. Тогда в таких координатах выражение f_2 не изменится. Рассмотрим другие координаты (будем помечать их штрихами), соответствующие разбиению $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}_1 \setminus \{\alpha_1\}$, $\mathcal{B}'_2 = \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}'_3 = \{\alpha_1\}$. Тогда согласно рассуждению в разделе 3.4.1 кратность полюса вдоль дивизора $D_{Q,1}$ равна степени f_2 по координате q'_{α_1} . Покажем, что исходные координаты выражаются через штрихованные следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{100000} &= q'_{\alpha_1} \\ q_{110000} &= q'_{110000} - q'_{\alpha_1} q'_{010000} \\ q_{111000} &= q'_{111000} - q'_{\alpha_1} q'_{011000} \\ q_{111001} &= q'_{111001} - q'_{\alpha_1} q'_{011001} \\ q_{111100} &= q'_{111100} - q'_{\alpha_1} q'_{011100} \\ q_{111101} &= q'_{111101} - q'_{\alpha_1} q'_{011101} \\ q_{112101} &= q'_{112101} - q'_{\alpha_1} q'_{012101} \\ q_{122101} &= q'_{122101} + q'_{\alpha_1} (q'_{010000} q'_{012101} - q'_{011000} q'_{011101} + q'_{011001} q'_{011100}) \end{aligned} \tag{4}$$

Действительно, пусть $\xi = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}'_2} q'_\gamma e_\gamma$. Тогда

$$\exp(\xi) \exp(q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1}) = \exp \left(q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1} + [\xi, q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1}] + \frac{1}{2} [\xi, [\xi, q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1}]] + \dots \right) \exp(\xi)$$

Найдем коэффициенты при $e_1, \dots, e_{1234632}$ в выражении $q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1} + [\xi, q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1}] + \frac{1}{2} [\xi, [\xi, q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1}]] + \dots$. Коэффициент при e_1 очевидно равен q'_{α_1} . В выражении $[\xi, q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1}]$ коэффициенты при

$e_{12}, \dots, e_{123463}$ равны $-q'_{\alpha_1} q'_{010000}, \dots, -q'_{\alpha_1} q'_{012101}$ соответственно. В выражениях $[\xi, [\xi, q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1}]], [\xi, [\xi, [\xi, q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1}]]], \dots$ коэффициенты при $e_{12}, \dots, e_{123463}$ равны нулю.

Теперь найдем коэффициент при $e_{1234632}$. Он может быть ненулевым только в выражении $\frac{1}{2}[\xi, [\xi, q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1}]]$. Вычислим его:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} ([q'_{010000} e_2, [q'_{012101} e_{23463}, q'_{\alpha_1} e_1]] + [q'_{011000} e_{23}, [q'_{011101} e_{2346}, q'_{\alpha_1} e_1]] + \dots + \\ & \quad + [q'_{012101} e_{23463}, [q'_{010000} e_2, q'_{\alpha_1} e_1]]) = \\ & = q'_{\alpha_1} (q'_{010000} q'_{012101} - q'_{011000} q'_{011101} + q'_{011001} q'_{011100}) e_{1234632} \end{aligned}$$

Поскольку коммутатор корневых векторов, соответствующих корням из $\Delta(U_{P_{\{\alpha_1\}}})$, равен нулю, то для нахождения исходных координат при $e_1, \dots, e_{1234632}$ нужно сложить соответствующие штрихованные координаты и коэффициенты в выражении $q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1} + [\xi, q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1}] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, q'_{\alpha_1} e_{\alpha_1}]] + \dots$. Таким образом получим требуемое выражение координат (4).

Если выразить f_2 через штрихованные координаты (то есть координаты на U_Q'), то коэффициент при $q'^2_{\alpha_1}$ сокращается, степень f по q'_{α_1} равна 1. То есть $k_Q = 1$. Аналогично $k_P = 1$.

Таким образом, F_1 имеет мультистепень $(1, 1)$ и вес $-\lambda_1 + 2\omega_1 = -\alpha_1 + 2\omega_1 = \omega_2$, а F_2 имеет мультистепень $(1, 1)$ и вес $-\lambda_2 + 2\omega_1 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_6 + 2\omega_1 = \omega_5$. Результат отображен в таблице:

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	$(1, 1)$	ω_2	100000	2-1 0 0 0 0	g_1	100000	2-1 0 0 0 0
F_2	$(1, 1)$	ω_5	122101	0 1 0 0 -1 0	$g_1 g_2$	222101	2 0 0 0 -1 0

2. $E_6, (\alpha_1; \alpha_2)$

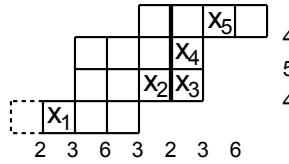


Рис.1.2.1

Разберем еще один пример подробно.

Найдем веса функций на $U_P \cap U_Q$, задающих дивизоры. Веса f_1 и f_2 находятся аналогично предыдущему случаю. Найдем вес f_3 . Для этого отметим, что q_{122101} — инвариантная относительно $U \cap M \cap L$ координата, а значит, она задает дивизор не только на соответствующем сечении, а и на всем $U_P \cap U_Q$. Тогда g_3 не имеет полюсов вдоль D_1 и D_2 , а значит, $f_3 = g_3$.

Найдем вес f_4 . Пусть $f_4 = g_4 g_1^{k_1} g_2^{k_2} g_3^{k_3}$. Пусть $x \in (U_P \cap U_Q) \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$, $u \in U \cap L \cap M$, $ux \in S_4$. Посмотрим, как выражается координата x_4 точки ux через координаты точки x . Вначале загоним точку x в сечение S_2 (то есть рассмотрим такое $u_1 x$, что $u_1 \in U \cap L \cap M$, $u_1 x \in S_2$). Тогда к координатам, соответствующим серым клеткам на рис. 1.2.2, прибавляется выражение вида $\frac{f}{x_1}$, где f — многочлен от координат точки x . Остальные координаты (кроме обнуленных и соответствующих серым клеткам) не изменились. Теперь загоним точку в сечение S_3 . При этом координаты, соответствующие серым клеткам на рис. 1.2.3 изменились следующим образом:

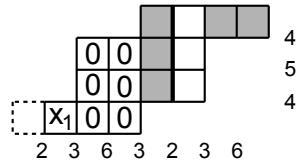


Рис.1.2.2

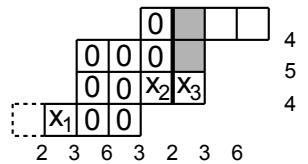


Рис.1.2.3

$$q_\gamma \rightsquigarrow q_\gamma + c \frac{q'_{\gamma-\alpha_2} x_3}{x_2} = q_\gamma + c \frac{(q_{\gamma-\alpha_2} + \frac{f}{x_1}) q_{122101}}{x_2},$$

где c — некоторая константа, штихованные координаты — координаты точки u_1x . Остальные координаты не изменились. Отметим, что $S_4 = S_3$ и тем самым мы уже привели точку к сечению S_4 . Таким образом, $g_4 = q_{122111} + \frac{f}{g_1 g_2}$, где f — многочлен от координат точки x . Отметим, что g_3 в знаменателе нет. Таким образом, мы получили оценку $k_1, k_2 \leq 1, k_3 = 0$.

Теперь воспользуемся тем, что к весу f_4 можно прибавить кратности ω_1 и ω_2 так, что получится доминантный вес. Тогда коэффициенты $\mu_4 + k_1\mu_1 + k_2\mu_2$ при весах $\omega_3, \dots, \omega_6$ должны быть неположительны. Посмотрим на разложение весов μ_1, μ_2, μ_4 по фундаментальным весам:

$$\mu_1 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$$

$$\mu_2 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_5$$

$$\mu_4 = \omega_2 - \omega_4 + \omega_5$$

Заметим, что μ_4 имеет положительный коэффициент при ω_5 . Тогда $k_2 \geq 1$. Поскольку мы уже знаем, что $k_2 \leq 1$, то $k_2 = 1$. Вес $\mu_4 + \mu_2$ имеет положительный коэффициент при ω_3 , тогда $k_1 \geq 1$, а значит $k_1 = 1$. То есть мы получили, что $f_4 = g_1g_2g_4$.

Похожими рассуждениями получаем, что $f_5 = g_1g_5$.

Кратности полюсов вдоль дивизоров Шуберта находятся аналогично случаю 1. Ответ отображен в таблице:

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	(1, 1)	ω_3	110000	1 1-1 0 0 0	g_1	110000	1 1-1 0 0 0
F_2	(2, 1)	$\omega_2 + \omega_5$	112101	1-1 1 0-1 0	g_1g_2	222101	2 0 0 0-1 0
F_3	(1, 1)	$\omega_1 + \omega_5$	122101	0 1 0 0-1 0	g_3	122101	0 1 0 0-1 0
F_4	(2, 1)	ω_4	122111	0 1 0-1 1 0	$g_1g_2g_4$	344212	2 1 0-1 0 0
F_5	(1, 1)	ω_6	123211	0 0 1 0 0-1	g_1g_5	233211	1 1 0 0 0-1

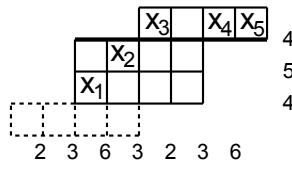
3. $E_6, (\alpha_1; \alpha_4)$ 

Рис.1.3

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	(1, 1)	$\omega_5 + \omega_6$	111100	1 0 0 1-1-1	g_1	111100	1 0 0 1-1-1
F_2	(2, 1)	ω_3	111111	1 0-1 0 1 1	g_1g_2	222211	2 0-1 1 0 0
F_3	(1, 1)	ω_2	112211	1-1 0 1 0 0	g_3	112211	1-1 0 1 0 0
F_4	(2, 1)	ω_6	123211	0 0 1 0 0-1	$g_1g_2g_4$	345422	2 0 0 1 0-1
F_5	(1, 1)	ω_5	123212	0 0 0 0 0 1	g_1g_5	234312	1 0 0 1-1 0

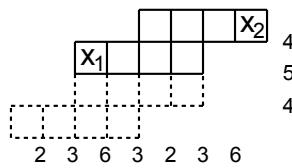
4. $E_6, (\alpha_1; \alpha_5)$ 

Рис.1.4

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	(1, 1)	ω_6	111110	1 0 0 0 1-1	g_1	111110	1 0 0 0 1-1
F_2	(1, 1)	0	123212	0 0 0 0 0 1	g_1g_2	234322	1 0 0 0 1 0

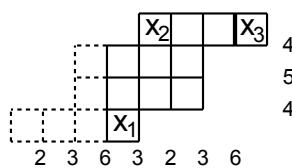
5. $E_6, (\alpha_1; \alpha_6)$ 

Рис.1.5

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	(1, 1)	ω_4	111001	1 0 0 -1 0 1	g_1	111001	1 0 0 -1 0 1
F_2	(2, 1)	ω_2	112211	1 -1 0 1 0 0	$g_1 g_2$	223212	2 -1 0 0 0 1
F_3	(1, 1)	ω_1	123212	0 0 0 0 0 1	g_3	123212	0 0 0 0 0 1

6. $E_6, (\alpha_1; \alpha_1, \alpha_5)$

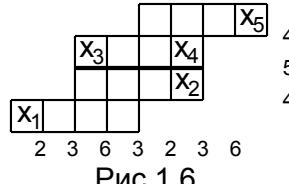


Рис.1.6

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	(1, 1, 0)	ω_2	100000	2 -1 0 0 0 0	g_1	100000	2 -1 0 0 0 0
F_2	(1, 1, 0)	ω_5	122101	0 1 0 0 -1 0	$g_1 g_2$	222101	2 0 0 0 -1 0
F_3	(1, 0, 1)	ω_6	111110	1 0 0 0 1 -1	g_3	111110	1 0 0 0 1 -1
F_4	(1, 1, 1)	ω_4	122111	0 1 0 -1 1 0	$g_1 g_4$	222111	2 0 0 -1 1 0
F_5	(1, 0, 1)	0	123212	0 0 0 0 0 1	$g_3 g_5$	234322	1 0 0 0 1 0

сложность 1

7. $E_6, (\alpha_1; \alpha_1, \alpha_2)$

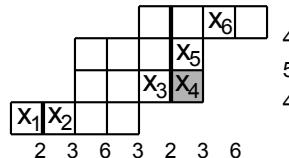


Рис.1.7

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	(1, 1, 0)	ω_2	100000	2 -1 0 0 0 0	g_1	100000	2 -1 0 0 0 0
F_2	(1, 0, 1)	ω_3	110000	1 1 -1 0 0 0	g_2	110000	1 1 -1 0 0 0
F_3	(2, 0, 1)	$\omega_2 + \omega_5$	112101	1 -1 1 0 -1 0	$g_2 g_3$	222101	2 0 0 0 -1 0
F_4	(1, 0, 1)	$\omega_1 + \omega_5$	122101	0 1 0 0 -1 0	g_4	122101	0 1 0 0 -1 0
F_5	(2, 0, 1)	ω_4	122111	0 1 0 -1 1 0	$g_2 g_3 g_5$	344212	2 1 0 -1 0 0
F_6	(1, 0, 1)	ω_6	123211	0 0 1 0 0 -1	$g_2 g_6$	233211	1 1 0 0 0 -1
F_7	(1, 1, 0)	ω_5					
$F_1 F_4$							
$F_3 F_{Q,1}$	(2, 1, 1)	$\omega_1 + \omega_2 + \omega_5$					
$F_7 F_{P,1} F_{Q,2}$							

Поясним, как мы ищем соотношения и как мы нашли D_7 . Действием группы $U \cap L \cap M$ мы привели любую точку из открытого множества $(U_P \cap U_Q) \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_6)$ к виду как на рисунке 1.7. Единственное соотношение между весами x_i имеет вид: $\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4 = 0$. Тогда действием тора мы можем сделать все x_i равными единице, кроме x_4 . При этом на месте x_4 будет стоять $\frac{x_1 x_4}{x_2 x_3}$. Это число и будет параметризовать орбиты в открытом множестве. Таким образом, для точек из орбиты в $U_P \cap U_Q$, соответствующей числу z , будет верно $\frac{g_1 g_4}{g_2 g_3} = z$. Перепишем в другом виде:

$$0 = g_1 g_4 - z g_2 g_3 = f_1 f_4 - z f_3 \Rightarrow 0 = (f_1 F_{P,1} F_{Q,1})(f_4 F_{P,1} F_{Q,2}) - z(f_3 F_{P,1}^2 F_{Q,2}) F_{Q,1} = F_1 F_4 - z F_3 F_{Q,1}.$$

Замыкание в $G/P^- \times G/Q^-$ орбиты, соответствующей параметру z , будет задаваться уравнением $F_1 F_4 - z F_3 F_{Q,1} = 0$.

На F_2, F_5, F_6 сечение $F_1 F_4 - z F_3 F_{Q,1}$ не делится ни при каком z из соображений весов. Но она может делиться на $F_{P,1}$ и $F_{Q,2}$. Вспомним, что из случая 1 мы знаем, что есть еще дивизор D_7 мультистепени $(1, 1, 0)$ и веса ω_5 . Тогда для некоторого z_0 верно $F_1 F_4 - z_0 F_3 F_{Q,1} = F_7 F_{P,1} F_{Q,2}$.

8. $E_6, (\alpha_1; \alpha_1, \alpha_6)$

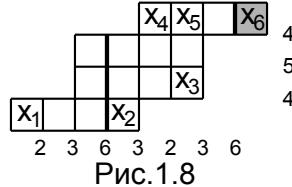


Рис.1.8

	\deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	$(1, 1, 0)$	ω_2	100000	2-1 0 0 0 0	g_1	100000	2-1 0 0 0 0
F_2	$(1, 0, 1)$	ω_4	111001	1 0 0 -1 0 1	g_2	111001	1 0 0 -1 0 1
F_3	$(1, 1, 0)$	ω_5	122101	0 1 0 0 -1 0	$g_1 g_3$	222101	2 0 0 0 -1 0
F_4	$(2, 0, 1)$	ω_2	112211	1 -1 0 1 0 0	$g_2 g_4$	223212	2 -1 0 0 0 1
F_5	$(2, 1, 1)$	ω_3	122211	0 1 -1 1 0 0	$g_1 g_2 g_5$	333212	3 0 -1 0 0 1
F_6	$(1, 0, 1)$	ω_1	123212	0 0 0 0 0 1	g_6	123212	0 0 0 0 0 1
$F_1 F_6$	$(2, 1, 1)$	$\omega_1 + \omega_2$					
$F_4 F_{Q,1}$							

9. $E_6, (\alpha_1; \alpha_4, \alpha_5)$

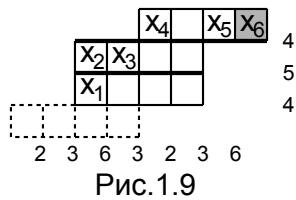


Рис.1.9

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	(1, 1, 0)	$\omega_5 + \omega_6$	111100	1 0 0 1-1-1	g_1	111100	1 0 0 1-1-1
F_2	(1, 0, 1)	ω_6	111110	1 0 0 0 1-1	g_2	111110	1 0 0 0 1-1
F_3	(2, 1, 0)	ω_3	111111	1 0-1 0 1 1	$g_1 g_3$	222211	2 0-1 1 0 0
F_4	(1, 1, 0)	ω_2	112211	1-1 0 1 0 0	g_4	112211	1-1 0 1 0 0
F_5	(2, 1, 0)	ω_6	123211	0 0 1 0 0-1	$g_1 g_3 g_5$	345422	2 0 0 1 0-1
F_6	(1, 1, 0)	ω_5	123212	0 0 0 0 0 1	$g_1 g_6$	234312	1 0 0 1-1 0
F_7	(1, 0, 1)	0					
$F_5 F_{Q,5}$							
$F_2 F_6$	(2, 1, 1)	$\omega_5 + \omega_6$					
$F_1 F_7$							

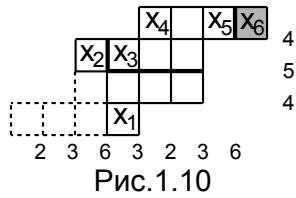
10. $E_6, (\alpha_1; \alpha_5, \alpha_6)$ 

Рис.1.10

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	(1, 0, 1)	ω_4	111001	1 0 0 -1 0 1	g_1	111001	1 0 0 -1 0 1
F_2	(1, 1, 0)	ω_6	111110	1 0 0 0 1-1	g_2	111110	1 0 0 0 1-1
F_3	(1, 1, 1)	ω_3	111111	1 0-1 0 1 1	g_3	111111	1 0-1 0 1 1
F_4	(2, 0, 1)	ω_2	112211	1-1 0 1 0 0	$g_1 g_4$	223212	2-1 0 0 0 1
F_5	(1, 1, 0)	0	123211	0 0 1 0 0-1	$g_3 g_5$	234322	1 0 0 0 1 0
F_6	(1, 0, 1)	ω_1	123212	0 0 0 0 0 1	g_6	123212	0 0 0 0 0 1
$F_2 F_6$	(2, 1, 1)	$\omega_1 + \omega_6$					
$F_5 F_{P,1} F_{Q,6}$							

3.5.2. Алгебры U -инвариантов колец Кокса для группы E_7 .

Напомним, что для всех двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 для группы E_7 либо I , либо J совпадает с $\{\alpha_1\}$. Поэтому во всех случаях $L \cap M$ будет подгруппой L_{α_1} , где

L_{α_1} — подгруппа Леви в $P_{\{\alpha_1\}}$, а $U_P \cap U_Q \subseteq U_{P_{\{\alpha_1\}}}$. Опишем, как устроено действие L_{α_1} на $U_{P_{\{\alpha_1\}}}$.

Группа L_{α_1} локально изоморфна $E_6 \times \mathbb{C}^\times$. Её диаграмма

Дынкина получается из диаграммы Дынкина для E_7 вы-

кидыванием вершины, соответствующей простому кор-

ню α_1 . Для группы E_6 есть стандартное задание корней

через веса ε_i и ε (см. [1, табл. 1]) — подпишем корни на

рис. 2.0.1. Веса в $U_{P_{\{\alpha_1\}}}$ (относительно тора в E_7) имеют вид $\alpha_1 + \sum_{i=2}^7 k_i \alpha_i$. Проекция α_1 на

пространство весов E_6 равна $-\varepsilon_1 - \varepsilon$. Таким образом, представление $[L_{\alpha_1}, L_{\alpha_1}]$ в $U_{P_{\{\alpha_1\}}}$ —

это минимальное представление E_6 . Весами этого представления будут веса вида $-\varepsilon_i \pm \varepsilon$,

$\varepsilon_i + \varepsilon_j$. Изобразим веса представления на рис. 2.0.2.

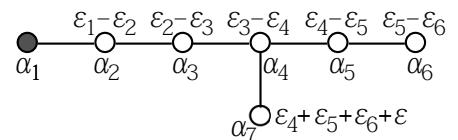


Рис.2.0.1

$-\varepsilon_1 + \varepsilon$	$-\varepsilon_2 + \varepsilon$	$-\varepsilon_3 + \varepsilon$	$-\varepsilon_4 + \varepsilon$	$-\varepsilon_5 + \varepsilon$	$-\varepsilon_6 + \varepsilon$		7
$\varepsilon_2 + \varepsilon_3$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_3$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$					4
$\varepsilon_3 + \varepsilon_4$	$\varepsilon_2 + \varepsilon_4$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_4$					5
$-\varepsilon_6 - \varepsilon$	$\varepsilon_4 + \varepsilon_5$	$\varepsilon_3 + \varepsilon_5$	$\varepsilon_2 + \varepsilon_5$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_5$			6
$-\varepsilon_5 - \varepsilon$	$\varepsilon_4 + \varepsilon_6$	$\varepsilon_3 + \varepsilon_6$	$\varepsilon_2 + \varepsilon_6$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_6$			5
$-\varepsilon_1 - \varepsilon$	$-\varepsilon_2 - \varepsilon$	$-\varepsilon_3 - \varepsilon$	$-\varepsilon_4 - \varepsilon$	$\varepsilon_5 + \varepsilon_6$			

Рис.2.0.2

сложность 0

1. $E_7, (\alpha_1; \alpha_1)$

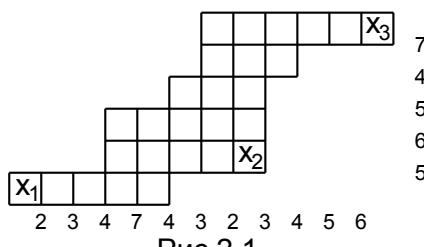


Рис.2.1

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	(1, 1)	ω_2	1000000	2-1 0 0 0 0 0	g_1	1000000	2-1 0 0 0 0 0 0
F_2	(1, 1)	ω_6	1222101	0 1 0 0 0 -1 0	$g_1 g_2$	2222101	2 0 0 0 0 -1 0
F_3	(1, 1)	0	1234322	0 0 0 0 0 1 0	$g_1 g_2 g_3$	3456423	2 0 0 0 0 0 0 0

2. $E_7, (\alpha_1; \alpha_6)$

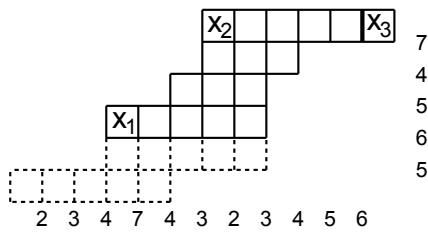


Рис.2.2

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	(1, 1)	ω_7	1111110	1 0 0 0 0 1-1	g_1	1111110	1 0 0 0 0 1-1
F_2	(2, 1)	ω_2	1123212	1-1 0 0 0 0 1	$g_1 g_2$	2234322	2-1 0 0 0 1 0
F_3	(1, 1)	ω_1	1234322	0 0 0 0 0 1 0	g_3	1234322	0 0 0 0 0 1 0

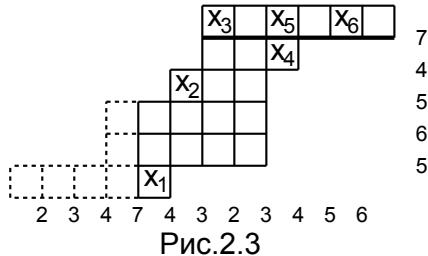
3. $E_7, (\alpha_1; \alpha_7)$ 

Рис.2.3

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	(1, 1)	ω_5	1111001	1 0 0 0 -1 0 1	g_1	1111001	1 0 0 0 -1 0 1
F_2	(2, 1)	ω_3	1112211	1 0 -1 0 1 0 0	$g_1 g_2$	2223212	2 0 -1 0 0 0 1
F_3	(1, 1)	ω_2	1123212	1-1 0 0 0 0 1	g_3	1123212	1-1 0 0 0 0 1
F_4	(2, 1)	ω_7	1233211	0 0 1 0 0 0 -1	$g_1 g_2 g_4$	3456423	2 0 0 0 0 0 0
F_5	(2, 2)	ω_4	1233212	0 0 1 -1 0 0 1	$g_1 g_2 g_5$	3456424	2 0 0 -1 0 0 2
F_6	(1, 1)	ω_6	1234312	0 0 0 0 1 -1 0	$g_1 g_6$	2345313	1 0 0 0 0 -1 1

сложность 1

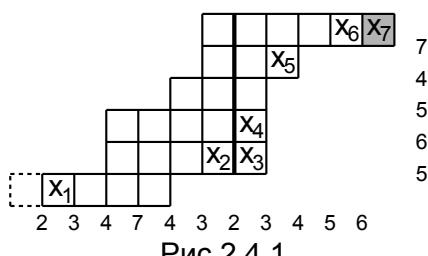
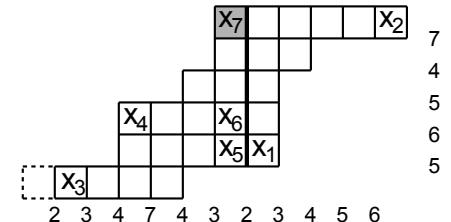
4. $E_7, (\alpha_1; \alpha_2)$ 

Рис.2.4.1

	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F_1	(1, 1)	ω_3	1100000	1 1-1 0 0 0 0	g_1	1100000	1 1-1 0 0 0 0
F_2	(2, 1)	$\omega_2 + \omega_6$	1122101	1-1 1 0 0 -1 0	g_1g_2	2222101	2 0 0 0 0 -1 0
F_3	(1, 1)	$\omega_1 + \omega_6$	1222101	0 1 0 0 0 -1 0	g_3	1222101	0 1 0 0 0 -1 0
F_4	(2, 1)	ω_5	1222111	0 1 0 0 -1 1 0	$g_1g_2g_4$	3444212	2 1 0 0 -1 0 0
F_5	(1, 1)	ω_7	1233211	0 0 1 0 0 0 -1	g_1g_5	2333211	1 1 0 0 0 0 -1
F_6	(2, 1)	ω_6	1234312	0 0 0 0 1 -1 0	$g_1g_2g_4g_6$	4678524	2 1 0 0 0 -1 0
F_7	(2, 1)	ω_2	1234322	0 0 0 0 0 1 0	$g_1g_2g_7$	3456423	2 0 0 0 0 0 0
F_8	(1, 1)	ω_1					
$F'_6 F_{P,1} F_{Q,2}$							
$F_3 F_7$	(3, 2)	$\omega_1 + \omega_2 + \omega_6$					
$F_2 F_8$							

Поясним, как мы нашли D_8 . Будем действовать в соответствии с общей схемой поиска оставшихся (кроме D_1, \dots, D_7) исключительных дивизоров, описанной в разделе 3.1.2. В качестве F и F' мы возьмем $F_6 F_{P,1} F_{Q,2}$ и $F_3 F_7$. Из соображений весов и степеней $F - zF'$ может делиться на F_2 . Тогда нам хотелось бы найти такой D_8 , чтобы

$F - z_0 F' = F_2 F_8$ для некоторого z_0 . Для этого мы будем приводить точку к другому каноническому виду — изображеному на рис. 2.4.2. Тогда дивизоры D'_i , соответствующие переменным x_i на рис. 2.4.2 будут иметь следующие веса и мультистепени:



	deg	вес s_{D_i}	μ_i по α_j	μ_i по ω_j	f_i	λ_i по α_j	λ_i по ω_j
F'_1	(1, 1)	$\omega_1 + \omega_6$	1222101	0 1 0 0 0 -1 0	g_1	1222101	0 1 0 0 0 -1 0
F'_2	(1, 1)	ω_1	1234322	0 0 0 0 0 1 0	g_1g_2	2456423	0 1 0 0 0 0 0
F'_3	(1, 1)	ω_3	1100000	1 1-1 0 0 0 0	g_3	1100000	1 1-1 0 0 0 0
F'_4	(1, 1)	ω_7	1111110	1 0 0 0 0 1 -1	g_1g_4	2333211	1 1 0 0 0 0 -1
F'_5	(2, 1)	$\omega_2 + \omega_6$	1122101	1-1 1 0 0 -1 0	g_3g_5	2222101	2 0 0 0 0 -1 0
F'_6	(2, 1)	ω_5	1122111	1-1 1 0 -1 1 0	$g_1g_3g_6$	3444212	2 1 0 0 -1 0 0
F'_7	(2, 1)	ω_2	1123212	1-1 0 0 0 0 1	$g_1g_4g_7$	3456423	2 0 0 0 0 0 0

Отметим, что дивизора D'_2 нет среди D_1, \dots, D_7 — он и будет новым дивизором D_8 .

3.6. Примеры разложений тензорных произведений представлений и ограничений представлений на подгруппу

ПРИМЕР 1. Рассмотрим двойное многообразие флагов для группы E_6 , соответствующее подмножествам $\{\alpha_1\}$ и $\{\alpha_1, \alpha_5\}$. Данное многообразие флагов имеет сложность 0, алгебра $R(X)^U$ порождается элементами мультистепеней $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 1)$ и весов $\omega_1, \omega_1, \omega_5, \omega_2, \omega_5, \omega_6, \omega_4, 0$ соответственно. Для данного многообразия флагов согласно теореме 1.4а имеем следующую формулу разложения тензорных произведений:

$$V(m_1\omega_1) \otimes V(n_1\omega_1 + n_5\omega_5) \simeq \bigoplus V((k_1 + k_2)\omega_1 + k_4\omega_2 + k_7\omega_4 + (k_3 + k_5)\omega_5 + k_6\omega_6),$$

где сумма берется по таким k_i , что

$$\begin{aligned} k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) + k_4(1, 1, 0) + k_5(1, 0, 1) + k_6(1, 0, 1) + k_7(1, 1, 1) + k_8(1, 0, 1) = \\ = (m_1, n_1, n_5). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим двойное многообразие флагов для группы SO_{2l} , соответствующее подмножествам $\{\alpha_1\}$ и $\{\alpha_i, \alpha_{i+1}\}$, где $1 < i < l - 3$. Данное многообразие флагов имеет сложность 1, алгебра $R(X)^U$ порождается элементами мультистепеней $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 1), (2, 0, 1)$ и весов $\omega_1, \omega_i, \omega_{i+1}, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \omega_i, \omega_i, \omega_{i+2}, \omega_{i+1}$ соответственно, а определяющее соотношение имеет мультистепень $(2, 1, 1)$ и вес $\omega_i + \omega_{i+1}$. Для данного многообразия флагов согласно теореме 1.5 а имеем следующую формулу разложения тензорных произведений:

$$\begin{aligned} V(m_1\omega_1) \otimes V(n_i\omega_i + n_{i+1}\omega_{i+1}) \simeq \bigoplus V(k_1\omega_1 + k_4\omega_{i-1} + (k_2 + k_6 + k_7)\omega_i + (k_3 + k_5 + k_9)\omega_{i+1} + \\ + k_8\omega_{i+2}) - \\ - V(l_1\omega_1 + l_4\omega_{i-1} + (l_2 + l_6 + l_7 + 1)\omega_i + (l_3 + l_5 + l_9 + 1)\omega_{i+1} + l_8\omega_{i+2}) \end{aligned}$$

где сумма берется по таким k_i, l_i , что

$$\begin{aligned} k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) + k_4(1, 1, 0) + k_5(1, 1, 0) + k_6(2, 1, 0) + k_7(1, 0, 1) + k_8(1, 0, 1) + \\ + k_9(2, 0, 1) = (m_1, n_i, n_{i+1}) \\ l_1(1, 0, 0) + l_2(0, 1, 0) + l_3(0, 0, 1) + l_4(1, 1, 0) + l_5(1, 1, 0) + l_6(2, 1, 0) + l_7(1, 0, 1) + l_8(1, 0, 1) + \\ + l_9(2, 0, 1) = (m_1 - 2, n_i - 1, n_{i+1} - 1). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим двойное многообразие флагов для группы E_7 , соответствующее подмножествам $\{\alpha_1\}$ и $\{\alpha_2\}$. Данное многообразие флагов имеет сложность 1, алгебра $R(X)^U$ порождается элементами мультистепеней $(1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (1, 1), (2, 1), (1, 1)$ и весов $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_2 + \omega_6, \omega_1 + \omega_6, \omega_5, \omega_7, \omega_6, \omega_2, \omega_1$ соответственно, определяющее соотношение имеет мультистепень $(3, 2)$ и вес $\omega_1 + \omega_2 + \omega_6$.

Пользуясь теоремой 1.10, найдем образующие $R(G/Q^-)^{U \cap L}$. Таким образом мы найдем правила ветвления неприводимых представлений E_7 вида $V(n_2\omega_2)$ на подгруппу E_6 .

Алгебра $R(G/Q^-)^{U \cap L}$ порождается элементами мультистепеней $(1), \dots, (1)$ весов $\omega_2, \omega_3 - \omega_1, \omega_2 + \omega_6 - 2\omega_1, \omega_6, \omega_5 - 2\omega_1, \omega_7 - \omega_1, \omega_6 - 2\omega_1, \omega_2 - 2\omega_1, 0$, определяющее соотношение имеет мультистепень (2) и вес $\omega_2 + \omega_6 - 2\omega_1$.

Тогда имеем следующее разложение:

$$\begin{aligned} \text{Res}_L^G V_G(n_2\omega_2) &\simeq \\ &\simeq \bigoplus V_L((k_1 + k_3 + k_8)\omega_2 + k_2\omega_3 + k_5\omega_5 + (k_3 + k_4 + k_7)\omega_6 + k_6\omega_7 - \\ &\quad - (k_2 + 2k_3 + 2k_5 + k_6 + 2k_7 + 2k_8)\omega_1) \\ &\quad - \bigoplus V_L((l_1 + l_3 + l_8 + 1)\omega_2 + l_2\omega_3 + l_5\omega_5 + (l_3 + l_4 + l_7 + 1)\omega_6 + l_6\omega_7 - \\ &\quad - (l_2 + 2l_3 + 2l_5 + l_6 + 2l_7 + 2l_8 + 2)\omega_1), \quad (5) \end{aligned}$$

где сумма берется по таким k_i, l_i , что

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 + k_8 + k_9 &= n_2 \\ l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 + l_7 + l_8 + l_9 &= n_2 - 2. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь выразим фундаментальные веса $\tilde{\omega}_i$ группы E_6 через фундаментальные веса ω_i группы E_7 и базисный вес ω' тора \mathbb{C}^\times . Будем считать, что нумерация корней для диаграммы Дынкина E_6 , вложенной в диаграмму Дынкина E_7 , начинается со второго простого корня для E_7 .

Поскольку фундаментальные веса E_6 являются проекциями соответствующих фундаментальных весов E_7 на пространство весов E_6 , и вес ω_1 ортогонален этому пространству, то

$$\tilde{\omega}_i = \omega_{i+1} - \frac{(\omega_1, \omega_{i+1})}{(\omega_1, \omega_1)} \omega_1.$$

Воспользовавшись выражением весов через веса ε_i , получим следующие формулы:

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_2 - \frac{4}{3}\omega_1$$

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_3 - \frac{5}{3}\omega_1$$

$$\tilde{\omega}_3 = \omega_4 - 2\omega_1$$

$$\tilde{\omega}_4 = \omega_5 - \frac{4}{3}\omega_1$$

$$\tilde{\omega}_5 = \omega_6 - \frac{2}{3}\omega_1$$

$$\tilde{\omega}_6 = \omega_7 - \omega_1$$

Из этих выражений получим, что $\omega' = \frac{1}{3}\omega_1$.

Формулу (5) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{Res}_L^G V_G(n_2\omega_2) &\simeq \\ &\simeq \bigoplus V_L((k_1 + k_3 + k_8)\tilde{\omega}_1 + k_2\tilde{\omega}_2 + k_5\tilde{\omega}_4 + (k_3 + k_4 + k_7)\tilde{\omega}_5 + k_6\tilde{\omega}_6 + \\ &\quad + (4k_1 + 2k_2 + 2k_4 - 2k_5 - 4k_7 - 2k_8)\omega') \\ &\quad - \bigoplus V_L((l_1 + l_3 + l_8 + 1)\tilde{\omega}_1 + l_2\tilde{\omega}_2 + l_5\tilde{\omega}_4 + (l_3 + l_4 + l_7 + 1)\tilde{\omega}_5 + l_6\tilde{\omega}_6 + \\ &\quad + (4l_1 + 2l_2 + 2l_4 - 2l_5 - 4l_7 - 2l_8 + 4)\omega'), \end{aligned}$$

где сумма берется по таким k_i, l_i , как в (6).

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты.

Получена классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 единым концептуальным методом. Таким образом, проверены уже известные результаты Литтельмана, Стембриджа и Панюшева (для сложности 0; для сложности 1, когда обе параболические подгруппы, задающие двойное многообразие флагов, максимальны) и получены новые результаты для случая сложности 1 (когда хотя бы одна из параболических подгрупп не максимальна).

Найдено задание с помощью образующих и соотношений алгебр унипотентных инвариантов колец Кокса двойных многообразий флагов сложности 0 и 1. Таким образом, проверены уже известные результаты Литтельмана и Панюшева (для случая, когда параболические подгруппы, задающие двойное многообразие флагов, максимальны) и получены новые результаты для случая, когда хотя бы одна из параболических подгрупп не максимальна. Это даёт новые правила разложения тензорных произведений некоторых серий неприводимых представлений.

Доказано, что либо алгебра унипотентных инвариантов кольца Кокса двойного многообразия флагов сложности 1 свободна, либо её образующие связаны единственным определяющим соотношением. Таким образом, обобщён результат Панюшева на случай, когда хотя бы одна из параболических подгрупп, задающих двойное многообразие флагов, не максимальна.

Получены новые правила ветвления, которые следуют из доказанного диссидентом обобщения результата Литтельмана о связи между структурой алгебры унипотентных инвариантов кольца Кокса многообразия флагов относительно действия подгруппы Леви и структурой алгебры унипотентных инвариантов кольца Кокса двойного многообразия флагов.

В диссертации рассмотрены применения двойных многообразий флагов к задаче разложения тензорных произведений неприводимых представлений. В качестве следствия,

возникло применение к задаче разложения ограничения неприводимого представления связной редуктивной группы G на подгруппу Леви параболической подгруппы. Естественно рассмотреть более общую задачу ограничения неприводимого представления на произвольную связную редуктивную подгруппу. Следуя геометрическому подходу, решение задачи разложения ограничений неприводимых представлений, реализующихся в пространствах сечений линейных расслоений над многообразием флагов G/P , на подгруппу H вытекает из описания структуры алгебры $(U \cap H)$ -инвариантов кольца Кокса $R(G/P)$, где U и $U \cap H$ — максимальные унитентные подгруппы в G и H соответственно. В случае, когда сложность действия подгруппы H на многообразии флагов G/P мала, данная алгебра допускает относительно простое описание.

Отметим, что задача разложения тензорных произведений неприводимых представлений является частным случаем задачи разложения ограничения неприводимого представления на подгруппу, где в качестве подгруппы рассматривается диагональ $\text{diag}(G) \subset G \times G$.

Таким образом, дальнейшая разработка темы диссертации включает в себя следующие задачи: классификация действий сложности 0 и 1 редуктивных подгрупп $H \subset G$ на обобщённых многообразиях флагов G/P редуктивных групп G , и описание инвариантов соответствующих колец Кокса $R(G/P)$ относительно максимальной унитентной подгруппы в H .

Литература

- [1] Винберг Э.Б., Онищик А.Л., Семинар по группам Ли и алгебраическим группам, Наука, Москва, 1988.
- [2] Винберг Э.Б., Сложность действий редуктивных групп, Функциональный анализ и его приложения, 20 (1986), № 1, 1-13.
- [3] Желобенко Д.П., Компактные группы Ли и их представления, Наука, Москва, 1970.
- [4] Тимашёв Д.А., Классификация G -многообразий сложности 1, Изв. РАН, сер. мат. 61 (1997), № 2, 127-162.
- [5] Arzhantsev I.V., Derenthal U., Hausen J., and Lafaille A., Cox rings, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, No. 144, Cambridge University Press, 2015.
- [6] Billey S., Lakshmibai V., Singular loci of Schubert varieties, Progress in Mathematics, 182. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000.
- [7] Brion M., Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques, Duke Math. J. 58 (1989), 397-424.
- [8] Cox D., Little J., Schenck H., Toric varieties, Graduate Studies in Mathematics, 124, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [9] Fulton W., Harris J., Representation theory: A first course, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Velag, New-York, 1991.
- [10] Jantzen J.C., Representations of algebraic groups, Academic Press, Boston, 1987.
- [11] Knop F., The Luna-Vust theory of spherical embeddings, Proc. Hyderabad Conf. on Algebraic Groups (S. Ramanan ed.), 225-249, Manoj Prakashan, Madras, 1991.
- [12] Littelmann P., On spherical double cones, J. Algebra, 166 (1994), 142-157.
- [13] Littelmann P., A generalization of the Littlewood-Richardson rule, J. Algebra, 130 (1990), 328-368.
- [14] Luna D., Vust Th., Plongements d'espaces homogènes, Comment. Math. Helv. 58 (1983), no. 2, 186-245.
- [15] Panyushev D.I., Complexity and rank of double cones and tensor product decompositions, Comment. Math. Helv. 68 (1993), no. 3, 455-468.

- [16] Panyushev D.I., Complexity and rank of actions in Invariant theory, J.Math.Sci. New York 95 (1999), no. 1, 1925-1985.
- [17] Parthasarathy K.R., Ranga Rao R., Varadarajan V.S., Representations of complex semisimple Lie groups and Lie algebras, Ann. Math, vol. 85, №3 383-429, 1967.
- [18] Stembridge J., Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters, Represent. Theory 7 (2003), 404-439.
- [19] Timashev D.A., Homogeneous spaces and equivariant embeddings, Encyclopedia of Mathematical Science, vol. 138, Springer (2011).
- [20] Timashev D.A., Cartier divisors and geometry of normal G -varieties, Transform. Groups 5 (2000), no. 2, 181-204.

Публикации автора по теме диссертации

- [21] Пономарева Е.В., Классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1, Изв. РАН. Сер. матем., 77:5 (2013), 155–178.
- [22] Пономарева Е.В., Инварианты колец Кокса двойных многообразий флагов малой сложности классических групп, Тр. ММО., 76, № 1, МЦНМО, М., 2015, 85-150.
- [23] Пономарева Е.В., Инварианты колец Кокса двойных многообразий флагов малой сложности особых групп, депонировано в ВИНТИ РАН, №72-В2015 от 31.03.2015, 40 стр.
- [24] Пономарева Е.В., Классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1, тезисы XVIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2011”.
- [25] Пономарева Е.В., Инварианты колец Кокса двойных многообразий флагов малой сложности классических групп, тезисы докладов четвертой школы-конференции “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов”, 2014, с. 41.