

**ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ**  
на диссертационную работу  
**Пономаревой Елизаветы Валентиновны**  
**«Двойные многообразия флагов и их применение в**  
**теории представлений»,**  
представленную на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.06 — математическая логика,  
алгебра и теория чисел

В теории представлений полупростых алгебраических групп имеются две фундаментальные задачи — разложение тензорного произведения двух неприводимых представлений в прямую сумму неприводимых представлений, и разложение на неприводимые слагаемые ограничения неприводимого представления полупростой группы на полупростую или редуцированную подгруппу (т.н. *проблема ветвления*). В некотором смысле они решены — имеются общие формулы для подобных разложений в терминах стандартной комбинаторики корней, весов, действия на них группы Вейля и т.п. Однако, хотя с помощью этих формул можно найти интересующие разложения для любых конкретных неприводимых представлений за конечное время (которое, впрочем, быстро растёт с ростом размерности представлений), их трудно использовать для теоретических целей, например, при анализе того, как меняются вышеуказанные разложения при вариации неприводимых представлений. Поэтому упомянутые задачи теории представлений несомненно остаются актуальными в следующей постановке: получение эффективных формул или правил разложения на неприводимые слагаемые для тензорных произведений и ограничений некоторых достаточно хороших классов неприводимых представлений полупростых групп. Эти задачи исследовались давно многими специалистами у нас в стране и за рубежом, из известных результатов достаточно упомянуть формулы Пьери в теории представлений полной линейной группы.

Диссертация Е. В. Пономаревой внесла новый значительный вклад в решение вышеуказанных задач, основанный на геометрическом подходе. Хорошо известно, что все неприводимые представления полупростой алгебраической группы  $G$  реализуются в пространствах сечений линейных расслоений над обобщёнными многообразиями флагов  $G/P$ , где  $P \subset G$  — параболическая подгруппа. Соответственно, тензорные произведения неприводимых представлений реализуются в пространствах сечений линейных расслоений над *двойными многообразиями флагов*  $X = G/P \times G/Q$ . Все такие пространства для данного двойного многообразия флагов  $X$  можно организовать в градуированную коммутативную алгебру  $R(X)$  — *кольцо Кокса* многообразия  $X$ . Понятие кольца Кокса является далеко идущим обобщением однородного координатно-

го кольца проективного многообразия и активно изучается в настоящее время. Для решения задачи разложения на неприводимые слагаемые тех тензорных произведений неприводимых представлений, которые реализуются над данным двойным многообразием флагов  $X$ , достаточно знать структуру (а точнее, задание образующими и соотношениями) подалгебры  $R(X)^U$  инвариантов кольца Кокса относительно максимальной унитарной подгруппы  $U \subset G$ . К структуре этой же алгебры сводится, как показано в диссертации, и проблема ветвления для представлений, реализуемых над  $G/P$ , при ограничении на подгруппу Леви в  $Q$  (или наоборот).

Эффективное задание алгебры  $R(X)^U$ , а значит, и решение поставленных задач теории представлений может быть получено не для всех двойных многообразий флагов, а только для многообразий  $X$  сложности не выше 1, где под сложностью понимается коразмерность типичной орбиты в  $X$  для действия борелевской подгруппы  $B \subset G$ . Возникает проблема классификации двойных многообразий флагов  $X$  сложности не выше 1 и описания в каждом случае алгебры  $R(X)^U$  унитарных инвариантов кольца Кокса. Все эти задачи успешно решены в диссертации.

Таким образом, диссертация Е. В. Пономаревой представляет собой законченное исследование высокого научного уровня, в котором решены актуальные задачи теории представлений и эквивариантной алгебраической геометрии. Результаты диссертации получены автором полностью самостоятельно и прошли всестороннюю апробацию на научных семинарах и конференциях, а также опубликованы в ведущих научных журналах. Проведённые исследования и полученные результаты вызвали значительный интерес у специалистов, на них уже ссылаются авторы новых работ.

В своей работе Е. В. Пономарева продемонстрировала отличное знание таких областей математики как алгебраическая геометрия, теория алгебраических групп и алгебр Ли, теория представлений, творческое владение методами перечисленных математических теорий, научную фантазию и изобретательность. Хотелось бы отдельно отметить, что в результатах классификационного характера, которые в числе прочих имеются в диссертации, помимо нетривиальных идей и научных догадок необходима большая кропотливая работа, свободная от ошибок, которая автором была блестяще проделана.

Считаю, что диссертация Е. В. Пономаревой полностью отвечает всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Кандидат физико-математических наук  
доцент кафедры высшей алгебры  
механико-математического факультета МГУ

02.03.15г



Д. А. Тимащев

2  
Подпись доцента Д. А. Тимащев завершено