Отзыв официального оппонента на диссертацию
Пономаревой Елизаветы Валентиновны
«Двойные многообразия флагов и их применение
в теории представлений»,
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел

Центральными задачами теории представлений алгебраических групп являются задача о разложении тензорного произведения редуктивной алгебраической группы в прямую сумму неприводимых подпредставлений и задача о ветвлении, т.е. о разложении на неприводимые слагаемые ограничения представления редуктивной алгебраической группы на редуктивную подгруппу. В общем случае эти задачи могут быть решены с использованием формулы Вейля для характеров, однако недостатком этого универсального подхода является трудоемкость возникающих при этом вычислений. Так что для различных конкретных ситуаций имеются более явные подходы к решению этих задач: правило Литтлвуда–Ричардсона (для групп типа A) и его частный случай — правило Пьери, принадлежащие П. Литтельману обобщения правила Литтлвуда–Ричардсона на другие классические группы, формула Стейнберга, формула Партасарати–Ранга Рао–Варадараджана и др.

В диссертации Е. В. Пономарёвой обсуждается геометрический подход к решению задач о разложении тензорного произведения и ветвлении в ряде конкретных случаев. Этот подход основывается на знаменитой теореме Бореля–Вейля–Ботта, которая даёт геометрическую интерпретацию понятия неприводимого представления. Эта теорема утверждает, что всякий неприводимый G-модуль реализуется как пространство глобальных сечений некоторого G-линейного расслоения над многообразием частичных флагов G/P, где P — некоторая параболическая подгруппа в группе G. Таким образом, тензорное произведение двух неприводимых G-модулей $H^0(G/P, \mathcal{L})$ и $H^0(G/Q, \mathcal{M})$ можно рассматривать как пространство глобальных сечений внешнего тензорного произведения расслоений $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M}$ над *двойным многообразием флагов* $G/P \times G/Q$, т.е. над прямым произведением многообразий G/P и G/Q.

При исследовании этих расслоений важную роль играет такой инвариант G-многообразия, как его *сложность*, то есть коразмерность типичной орбиты борелевской подгруппы. Многообразия сложности 0 — это в точности сферические многообразия; они допускают комбинаторное описание при помощи так называемых крашеных вееров. Эта теория во многом параллельна теории торических многообразий. Похожее комбинаторное описание есть и для многообразий сложности 1. Многообразия сложности 0 и 1 замечательны тем, что для них есть простое описание разложения пространств сечений линейных расслоений на неприводимые G-модули. Таким образом, в связи с предыдущей задачей возникает вопрос о классификации двойных многообразий флагов сложности 0 или 1. В главе 2 диссертации Е. В. Пономаревой на этот вопрос приводится полный ответ. Этот замечательный результат обобщает результаты Литтельмана и Стембриджа о классификации сферических двойных многообразий флагов, а также результат Панюшева о сложности двойных многообразий флагов для максимальных параболических подгрупп.

Глава 3 диссертации посвящена изучению колец Кокса двойных многообразий флагов. Кольцо Кокса $R(X)$ многообразия X определяется как прямая сумма пространств глобальных сечений линейных расслоений на X, со структурой умножения, отвечающей тензорному произведению соответствующих линейных расслоений. Как отмечалось выше, задача разложения тензорных произведений неприводимых представлений эквивалентна задаче разложения на G-неприводимые компоненты пространств $H^0(X, \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})$; оказывается, что для ее решения достаточно вычислить алгебру U-инвариантов $R(X)^U$ кольца Кокса, где U — максимальная унипотентная подгруппа в G. Ранее эти алгебры были вычислены лишь для случая многообразий флагов, отвечающих максимальным параболическим подгруппам (Литтельман, Панюшев). Для сферических многообразий алгебра U-инвариантов кольца Кокса оказывается свободной; этот факт напрямую следует из базовых свойств сферических многообразий.

Основной результат третьей главы состоит в том, что для многообразий сложности 1 эта алгебра оказывается либо свободной, либо гиперповерхностью (т.е. фактором свободной алгебры по единственному соотношению). Это оказывается уже значительно сложнее; в работе это утверждение доказывается явным перебором случаев для всевозможных двойных многообразий флагов сложности 1. Этот перебор оказывается весьма объемным и требующим большой аккуратности.

Резюмируя, можно сказать, что в диссертации Е. В. Пономаревой получены ответы на ряд весьма актуальных и нетривиальных вопросов теории алгебраических групп и теории представлений. Диссертация хорошо написана. Из недостатков отмечу лишь чересчур краткий обзор литературы по рассматриваемым вопросам; в исследовании, посвященном кратным многообразиям флагов, безусловно, следовало упомянуть работы на эту тематику П. Мадьяра, Е. Веймана и А. Зелевинского, В. Л. Попова, П. Ахингера и Н. Перрена и ряда других авторов. Кроме этого, у меня имеется несколько замечаний редакционного характера; серьезных недостатков по существу я не обнаружил.

Все результаты диссертации являются новыми, изложены с полными доказательствами и своевременно опубликованы в ведущих математических журналах, входящих в перечень ВАК. Они прошли апробацию на ряде научных семинаров, а также всероссийских и международных конференциях. Автореферат диссертации полно и правильно отражает ее содержание. Полученные результаты могут быть использованы в исследованиях в области алгебраической геометрии, теории алгебраических групп, теории представлений, теории инвариантов. Они представляют интерес для специалистов из Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургского отделения Математического института РАН, ИППИ РАН, мехмата МГУ, факультета математики НИУ ВШЭ, Независимого московского университета и других научных центров как в России, так и за рубежом.

На основании вышесказанного заключаю, что диссертационная работа «Двойные многообразия флагов и их применение в теории представлений» представляет собой законченное научное исследование, удовлетворяющее всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор Елизавета Валентиновна Пономарёва заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент
доцент факультета математики НИУ ВШЭ
к.ф.-м.н., Ph.D. Е.Ю.Смирнов

Е. Смирнов

15 февраля 2016 г.

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
Управление персонала
Зам. нач. отдела по
работе с НПР
Тихонова Е.Р.
15.02.2016