Отзыв официального оппонента о диссертации Пономаревой Елизаветы Валентиновны "Двойные многообразия флагов и их применение в теории представлений", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Теория инвариантов – это одна из фундаментальных математических дисциплин, исследования в которой продолжаются вот уже почти 2 века, начиная с пионерских работ Дж. Буля. Несмотря на то, что конец теории инвариантов провозглашался неоднократно, она каждый раз возрождалась, впитывая в себя последние достижения соседних областей (теория представлений, алгебраическая геометрия, теория чисел, трансцендентные методы). Описание инвариантов действий аффинных алгебраических групп является важной частью теории алгебраических групп преобразований и это находит многочисленные применения как в чистой математике, так и в её приложениях.

Главные задачи теории представлений включают в себя разложение тензорных произведений неприводимых представлений полупростых алгебраических групп и нахождение правил ветвления для ограничений неприводимых представлений на подгруппу. Классическое правило Литтлвуда-Ричардсона (1934) описывает разложение тензорных произведений группы $SL(n)$ в терминах диаграмм Юнга. Далекое обобщение этого подхода было получено Литтельманом (1994). С другой стороны, Стейнберг получил общую формулу разложения тензорных произведений для произвольной полупростой группы G (1961) и чуть более приятную формулу вывел Климык (1968). Однако все указанные формулы малопригодны для практических вычислений; например, формула Стейнберга включает двойное суммирование по группе Вейля.

И здесь на помощь алгебре приходит геометрия. Если G/B – это многообразие флагов группы G, то все конечномерные неприводимые представления группы G реализуются в пространствах сечений линейных расслоений на G/B. Прямая сумма всех пространств сечений имеет структуру полиградуированного кольца, называемого кольцом Кокса. Для G/B это кольцо изоморфно алгебре регулярных функций на квазиаффинном многообразии G/U, где $U = (B, B)$ – максимальная унипотентная подгруппа. Описание образующих и соотношений алгебры U-инвариантов кольца Кокса для $G/B \times G/B$ позволило бы получить явные формулы для разложения всех тензорных произведений. Однако такое описание известно только для групп малых рангов и, очевидно, недостижимо в общем случае. Это приводит к идее заменить B на параболические подалгебры P и Q, что дает основные объекты, рассматриваемые в диссертации: двойное (обобщенное) многообразие флагов $X = G/P \times G/Q$ и его кольцо Кокса $R(X)$. При этом очень полезным оказывается понятие сложности действия G, введенное Э.Б. Винбергом (1985). Сложность произвольного G-многообразия – это минимальная коразмерность B-орбит на нём, и метод вычисления сложности двойного многообразия флагов был разработан Панюшевым (1993).

В диссертации Е.В. Пономаревой решена общая задача классификации двойных многообразий флагов сложности $\leqslant 1$ и получено полное описание U-инвариантов кольца Кокса в этих случаях. Различные частные случаи рассматривались ранее в работах Литтельмана, Панюшева и Стембриджа. Идея состоит в том, что чем меньше сложность многообразия X, тем больше должны быть параболические подгруппы P, Q и тем проще описывается алгебра U-инвариантов $R(X)^U$. Кроме того, имеется хорошо развитая комбинаторная теория G-многообразий сложности $\leqslant 1$.

В первой главе диссертации вводятся основные понятия и напоминаются основные факты о кольцах Кокса и структуре G-многообразий сложности $\leqslant 1$. В частности, проясняется связь между B-инвариантными дивизорами на X и структурой алгебры $R(X)^U$. Автор также показывает, что знание структуры $R(X)^U$ позволяет определить и структуру алгебры $R(G/P)^{U\cap M}$, где M подгруппа Леви в Q, согласованная с U. А это в свою очередь дает правило ветвления для ограничения на M неприводимых представлений G, встречающихся в $R(G/P)$.

В главе 2 проводится классификация двойных многообразий флагов сложности $\leqslant 1$. Задача классификации немедленно сводится к случаю простой группы G. Полученные классификационные результаты представлены в Таблице 1. Следует отметить, что получение классификации не сводится к механическому применению общих результатов, полученных другими исследователями, как это иногда бывает. Автор развивает свои собственные методы, использующие структуру многообразий сложности $\leqslant 1$, а затем уже применяет их к задаче классификации. Тем самым известные ранее частичные результаты получают независимое подтверждение.

В третьей главе автор получает явное описание полиградуированной алгебры $R(X)^U$ в терминах образующих и соотношений для всех пар P и Q, найденных в главе 2. Нахождение образующих и соотношений во всех случаях потребовало большой кропотливой работы и автор продемонстрировал прекрасное владение методами современной теории инвариантов. Полученная классификация влечет интересный факт, что в случае сложности $\leqslant 1$ алгебра $R(X)^U$ является не хуже чем гиперповерхностью. Изложение иллюстрируется хорошо подобранными примерами.

В заключение, хочу указать на некоторые недочёты диссертации. Во-первых, следовало бы сказать, что $R(G/P)$ изоморфно кольцу регулярных функций на $G/(P,P)$ и что это кольцо *факториально.* Именно поэтому можно утверждать, что $R(X)^U$ является алгеброй многочленов, если X имеет сложность 0. Во-вторых, на стр. 6 и 27 надо пояснить, что подгруппа Леви $M \subset Q$ должна быть выбрана так, что $U \cap M$ – это максимальная унипотентная подгруппа в M. В-третьих, в обычном понимании этого термина, противоположная параболическая подгруппа P^- не всегда сопряжена P. Так что изложение на стр. 18 должно быть более аккуратным! Однако отмеченные недочёты не снижают общего высокого впечатления от результатов работы.

Основные результаты диссертации являются новыми. При их получении и обосновании автор преодолел существенные технические трудности. В целом диссертация Е.В. Пономаревой написана четко и грамотно, на современном математическом языке. Она является законченным самостоятельным научным исследованием и полученные результаты дают весомый вклад в изучение двойных многообразий флагов и их колец Кокса.

Результаты диссертации докладывались на различных научных конференциях и семинарах. Они несомненно найдут применение в теории представлений и теории алгебраических групп преобразований. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Я полагаю, что диссертация полностью отвечает всем требованиям п. 9 “Положения о порядке присуждения ученых степеней” ВАК РФ, а её автор Пономарева Е.В. заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук,
доцент, ведущий научный сотрудник
Добрушинской математической лаборатории
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Д.И. Панюшев

15 февраля 2016 г.

Подпись Панюшева Д.И.
УДОСТОВЕРЯЮ
Зав. канцелярией