МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Русинова Анна Михайловна

Динамика шайбы на наклонной плоскости с трением

Специальность: 01.02.01 — теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва, 2015

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель: Карапетян Александр Владиленович, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Иванов Александр Павлович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Московский физико-технический институт (государственный университет)"

Сумбатов Александр Сумбатович, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук"

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

Защита диссертации состоится в часов минут на заседании совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное Здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. .

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ им. М.В. Ломоносова по адресу: Ломоносовский проспект, д.27.

Автореферат разослан .

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Прошкин Владимир Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задача о движении твердого тела с плоским основанием по шероховатой плоскости является одной из фундаментальных задач механики. При определении сил и моментов, действующих на тело, предполагается, что для каждой элементарной площадки области контакта верна гипотеза Кулона. Так как сила сухого трения Кулона зависит от распределения нормального давления по пятну контакта, то принципиальным моментом при решении данной задачи является построение модели контактных напряжений.

Н.Е. Жуковский изучал условия равновесия тела на горизонтальной плоскости с трением при наличии внешних сил в случае произвольного статического распределения нормального давления. Позднее эти исследования продолжил Мак-Миллан. Впервые качественный анализ динамики плоского диска на горизонтальной плоскости с сухим трением был выполнен в совместной работе А.Ю. Ишлинского, Б.Н. Соколова и Ф.Л. Черноусько в 1981 году. Движение однородного диска было описано в случае равномерного распределения нормального давления. Позднее исследования в данном направлении продолжили В.Ф. Журавлев, А.А. Киреенков, А.П. Иванов, Д.В. Трещев и другие.

В 2009 году А.П. Иванов предложил динамически совместную модель трения, согласно которой нормальное давление есть линейная функция координат точек пятна контакта и зависит от трех независимых параметров. В рамках этой модели в статье Д.В. Трещева с соавторами было выполнено качественно-аналитическое исследование динамики шайбы на горизонтальной плоскости. В современных работах, посвященных задаче о движении осесимметричного тела по плоскости, приводятся не только теоретические и численные результаты, но также данные проведенных экспериментов. Эти данные, а также сравнение экспериментальных зависимостей с теоретическими кривыми можно найти в работах З. Фаркаша с соавторами, П.Д. Вайдмана, Ч. Мальотра.

Таким образом, исследование динамики шайбы на наклонной плоскости при наличии трения представляется весьма актуальным.

Цель работы. Диссертация посвящена качественному и аналитическому исследованию динамики шайбы на наклонной плоскости при наличии трения в рамках моделей контактных напряжений, удовлетворяющих условию динамической совместности.

Методы исследования. В работе используются методы аналитической механики, качественной теории дифференциальных уравнений, а также теории устойчивости.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы обоснованы с помощью методов аналитической механики и методов качественной теории дифференциальных уравнений. Некоторые вспомогательные гипотезы проиллюстрированы и подтверждены с помощью численного анализа.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее неизвестными. Впервые рассмотрена динамика шайбы ненулевой высоты на наклонной плоскости в рамках динамически совместных моделей трения и исследованы ее предельные движения в случае, когда отношение коэффициент трения больше, чем тангенс угла наклона плоскости, а также проведен глобальный качественный анализ динамики шайбы нулевой высоты (тонкого диска) на шероховатой наклонной плоскости при равномерном распределении давления при всех соотношениях между коэффициентом трения скольжения и тангенсом угла наклона плоскости движения.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер, полученные результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Московском физико-техническом институте (Государственный Университет) и других научно-исследовательских центрах.

Личный вклад. В совместной работе А.В.Карапетяну принадлежат постановка задачи и общее научное руководство. Все результаты получены лично автором.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Семинар по аналитической механике и устойчивости движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого и проф. А.В. Карапетяна, 2011 - 2015 гг.

- Научная конференция “Ломоносовские чтения” МГУ, 2012, 2013 г.

- Всероссийский Семинар “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением”, Ульяновск, 2011 г.

- Международная конференция “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления”, Москва, ИПУ РАН, 2012 г.

- Международная научная конференция по механике “Шестые Поляховские чтения”, Санкт-Петербург, 2012 г.

- 8th European Solid Mechanics Conference, Грац, Австрия, 2012 г.

- V International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering, Ибица, Испания, 2013 г.

- XLI Summer School - Conference “Advanced problems in mechanics”, Санкт-Петербург, 2013 г.

- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 2015 г.

- Конференция молодых ученых Института механики МГУ, 2015г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в пяти печатных работах, которые опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. Одна из работ выполнена в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежит постановка задачи. Список работ приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации — **79** страниц текста. Список литературы содержит **39** наименований. В диссертации приведено **18** рисунков.

Содержание работы

Во введении описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан обзор работ, посвященных исследованию движения тела с плоским основанием по плоскости при наличии трения, а также приведено краткое содержание работы.

Первая глава посвящена исследованию динамики шайбы на шероховатой наклонной плоскости в рамках нелинейной динамически совместной модели трения.

Предполагается, что шайба опирается о плоскость своим основанием и совершает безотрывное плоскопараллельное движение.

В **§1.1** формулируется постановка задачи, выписываются выражения для сил и моментов, действующих на шайбу, и условия динамической совместности модели трения. Для описания движения шайбы вводится подвижный ортонормированный репер $C\mathbf{e_1e_2e_3}$, такой, что C— центр основания шайбы, орт $\mathbf{e}_1$ направлен вдоль скорости $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1$ $(u \geq 0)$ точки C, орт $\mathbf{e}_2$ ортогонален скорости $\mathbf{u}$ и, как и орт $\mathbf{e}_1$, лежит в наклонной плоскости, а орт $\mathbf{e}_3$ направлен по нормали к плоскости движения. Тогда угловая скорость шайбы $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_3$.

В **§1.2** дается описание нелинейной динамически совместной модели трения, согласно которой плотность распределения нормального давления имеет вид

$$n(A) = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 r \cos\beta + \lambda_2 r \sin\beta}{\sqrt{a^2 - r^2}},$$

где r и β — полярные координаты точки A основания шайбы, a — радиус шайбы. Коэффициенты λ_0, λ_1 и λ_2 однозначно определяются в каждый момент времени из условий безотрывности движения шайбы и зависят от отношения u/Ω и δ — одного из параметров задачи:

$$\lambda_0 = \frac{mg\cos\alpha}{2\pi a},\ \lambda_i = \lambda_i\left(\frac{u}{\Omega}, \delta\right),\ (i = 1, 2),\ \Omega = a\omega, \delta = 3kh/a$$
$$k \text{ — коэффициент трения скольжения}, 2h \text{ — высота шайбы.}$$

Далее в **§1.3** приведены некоторые свойства данной модели и показано, что в случае вращательного движения, а также для тонкого диска (шайбы нулевой высоты) в рассматриваемой модели функция плотности нормального давления совпадает с законом Галина. Отмечено, что условие $\delta \in [0, 1]$ является необходимым и достаточным условием неотрицательности плостности нормального давления на всех движениях шайбы.

В **§1.4** выписаны уравнения движения шайбы в проекциях на оси репера $C\mathbf{e_1e_2e_3}$ и описаны их основные свойства. Уравнения движения шайбы имеют вид

$$\dot{u} = \cos\psi - \varkappa f_1,\ u\dot{\psi} = -\sin\psi - \varkappa f_2,\ \dot{\Omega} = -2\varkappa f_3 \qquad (1)$$

Здесь $\varkappa = k/\operatorname{tg}\alpha$ — второй параметр задачи. Функции f_1, f_2 и f_3 зависят от отношения u/Ω и паметра δ и заданы следующими равенствами:

$$
\begin{aligned}
&f_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\int_0^{2\pi}(1+\tilde\lambda_2 s\sin\beta)\frac{u-\Omega s\sin\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds\\
&f_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\int_0^{2\pi}\frac{\tilde\lambda_1\Omega\cos^2\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds\\
&f_3 = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\int_0^{2\pi}(1+\tilde\lambda_2 s\sin\beta)\frac{\Omega s-u\sin\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds\\
&s = r/a,\ \ ,\tilde\lambda_i = a\lambda_i/\lambda_0\ (i=1,2)\\
&D(u,\Omega;s,\beta) = \sqrt{u^2+2u\Omega s\sin\beta+\Omega^2 s^2}
\end{aligned}
$$

В **§1.5** показано, что при $\varkappa > 1$ шайба останавливается за конечное время, при этом скольжение и верчение шайбы (при $\Omega_0 \neq 0$) прекращаются в один и тот же момент времени t_*. Далее в **§1.6** для исследования предельных при $t \to t_* - 0$ движений шайбы рассматривается система уравнений движения шайбы (1) в переменных $z = \dfrac{u}{\Omega}$, $\tau = \ln\dfrac{\Omega_0}{\Omega}$:

$$
\begin{gathered}
\frac{dz}{d\tau} = \frac{\cos\psi - \varkappa q}{2\varkappa f_3},\ \ \frac{d\psi}{d\tau} = -\frac{\sin\psi + \varkappa f_2}{2\varkappa z f_3}\\
q(z,\delta) = f_1(z,\delta) - 2z f_3(z,\delta)
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Асимптотически устойчивые положения равновесия системы (2) являются аттракторами системы (1), а неустойчивые — репеллерами. Показано, что в зависимости от количества положений равновесия системы (2) и их устойчивости плоскость параметров $x = \varkappa^{-1} \in (0,1)$ и $\delta \in [0,1]$ разбивается на четыре области (рис.1):

- в области I нет положений равновесия
- II — одно асимптотически устойчивое положение равновесия
- III — одно асимптотически устойчивое и два неустойчивых
- IV— одно неустойчивое положение равновесия

На основе этих результатов сделан вывод о том, что для областей II и III параметров x и δ для некоторой области начальных данных $(u_0, \Omega_0, \psi_0) \in D$ выполнено условие

$$z(t) \to z_*,\quad \psi(t) \to \psi_* \ \text{ при } t \to t_* - 0$$

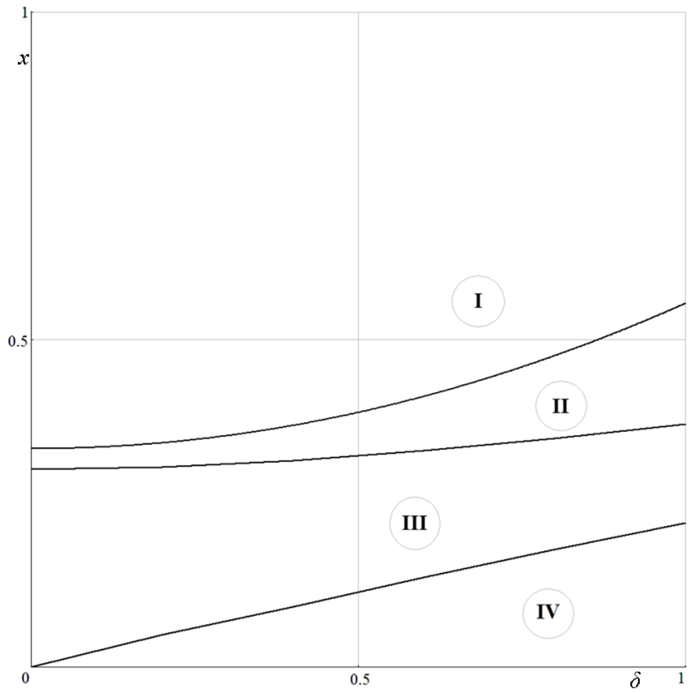

Рис. 1: Плоскось параметров x и δ

При этом значения z_* и ψ_* зависят только от параметров x и δ и не зависят от конкретных начальных улсовий u_0, Ω_0, ψ_0.

В **§1.7** проведено численное исследование предельных движений шайбы.

Во второй главе аналогичное исследование динамики шайбы на наклонной плоскости проведено в рамках динамически совместной модели трения, предложенной А.П. Ивановым (2009). Согласно этой модели функция плотности линейна относительно координат точек основания шайбы и имеет вид

$$n(A) = \lambda_0 + \lambda_1 r \cos\beta + \lambda_2 r \sin\beta$$

В этом случае также показано, что при $k > \operatorname{tg}\alpha$ ($\varkappa > 1$) движение шайбы прекарщается за конечное время, причем скольжение и верчение шайбы прекращаются одновременно при ненулевом начальном значении угловой скорости. Затем проведено исследование предельных движений шайбы. В отличие от задачи, рассмотренной в главе 1, показано, что для некоторых значений параметров $\varkappa$ и $\delta = 4kh/a$ в зависимости от начальных условий $u_0 \neq 0$, $\Omega_0 \neq 0$, ψ_0 возможны два различных предельных значения z_* для u/Ω. Кроме того, в этом случае существуют значения параметров

$\varkappa$ и δ такие, что система (2) помимо положений равновесия допускает предельные циклы (имеет место бифуркация Пуанкаре-Андронова-Хопфа).

Третья глава посвящена важному частному случаю — динамике тонкого диска на наклонной послоскости с трением при равномерном распеределении нормального давления. Для диска выполнено глобальное исследование динамики при всех значениях отношения коэффициента трения к тангенсу угла наклона плоскости.

В **§3.1** выписаны уравнения движения диска, которые при замене $\gamma = \cos\psi$ принимают вид

$$\dot{u} = \gamma - \varkappa f_1, \quad u\dot{\gamma} = 1 - \gamma^2, \quad \dot{\Omega} = -2\varkappa f_3; \varkappa = k \operatorname{ctg}\alpha \tag{3}$$

Отмечено наличиче у системы (3) инвариантных множеств $\Omega = 0$, $\gamma = 1$ и $\gamma = -1$. В **§3.2**, **§3.3** и **§3.4** в случае общего положения ($\gamma_0 \neq -1$) проведен качественный анализ динамики диска при $\varkappa > 1$, $\varkappa = 1$ и $\varkappa < 1$ соответсвенно.

В **§3.2** показано, что при $\varkappa > 1$ движение диска прекращается за конечное время t_*, причем скольжение и верчение диска прекращаются одновременно. Далее исследуются предельные движения диска. Доказано, что в случае общего положения $\lim\limits_{t\to t_*-0} \gamma(t) = 1$ или $\gamma(t) \equiv 1\,(\gamma_0 = 1)$ при $\varkappa > 1$. Если при этом $\varkappa > 2$, то существет конечный ненулевой предел

$$z_*(\varkappa) = \lim_{t\to t_*-0} \frac{u(t)}{\Omega(t)},$$

причем

$$z_*(\varkappa) \to +\infty \text{ при } \varkappa \to 2+0, z_*(\varkappa) \to z_*^0 \approx 0,65 \text{ при } \varkappa \to +\infty.$$

Как видно из второго соотношения, для значения $z_* = z_*(\varkappa)$ выполняется предельный переход к случаю горизонтальной плоскости, где $z_* \approx 0,65$. Если же $1 < \varkappa \leq 2$, то $\lim\limits_{t\to t_*-0} \dfrac{u(t)}{\Omega(t)} = +\infty$. В этом случае найден порядок малости $\Omega(t)$ по отношению к $u(t)$ при $t \to t_* - 0$:

$$\Omega \sim u^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}} \text{ при } 1 < \varkappa < 2$$

В **§3.3**, доказано, что в случае общего положения при $\varkappa = 1$ движение диска происходит на бесконечном интервале времени и стремится при $t \to +\infty$ к равномерному скольжению без верчения вдоль линии наибольшего ската наклонной плоскости:

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = u_* > 0, \lim_{t\to+\infty} \Omega(t) = 0$$
$$\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = 1 \ (\gamma(t) \equiv 1 \text{ при } \gamma_0 = 1)$$

Случай $\varkappa < 1$ рассмотрен в **§3.4**, где показано, что в этом случае движение диска продолжается бесконечно долго и стремится при $t \to +\infty$ к равноускоренному скольжению вниз вдоль линии наибольшего ската:

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty, \lim_{t\to+\infty} \dot{u}(t) = 1 - \varkappa$$
$$\lim_{t\to+\infty} \Omega(t) = 0, \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = 1 \ (\gamma(t) \equiv 1 \text{ при } \gamma_0 = 1)$$

Последний параграф главы 3 (**§3.5**) посвящен исследованию траекторий центра масс диска при $\varkappa \leq 1$. Здесь доказано, что при $0.5 < \varkappa \leq 1$ траектория центра масс диска имеет асимптоту, которая является линией наибольшего ската плоскости движения. В случае $\varkappa \leq 0.5$ траектория центра масс асимптот не имеет, т.е. центр масс неограниченно движется не только вниз вдоль линии наибольшего ската, но и ортогонально этой линии, при этом, как и в предыдущем случае, проекция его скорости на это направление стремится к нулю.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

- Рассмотрена динамика шайбы на наклонной плоскости в линейной и нелинейной моделях контактных напряжений в случае, когда коэффициент трения скольжения больше, чем тангенс угла наклона плоскости. Доказано, что в этом случае шайба останавливается за конечное время при любых начальных условиях. Если же начальная угловая скорость шайбы не равна нулю, то скольжение и верчение шайбы прекращаются одновременно. В этом случае исследованы предельные движения шайбы и показано, что характер предельного движения зависит от двух параметров задачи.

- Для шайбы в нелинейной динамически совместной модели трения проведен численный анализ динамики: построены типичные фазовые траектории приведенной системы уравнений движения для различных областей параметров задачи.

- Для частного случая шайбы — плоского диска с равномерным распределением давления — выполнено глобальное исследование динамики при всех значениях отношения коэффициента трения к тангенсу угла наклона плоскости. Если отношение коэффициента трения к тангенсу угла наклона плоскости движения больше единицы, то в случае общего положения исследованы предельные движения диска: показано, что если эта величина больше двух, то отношение скорости скольжения к величине угловой скорости диска стремится к некоторому конечному ненулевому значению, не зависящему от начальных условий, в остальных случаях отношение скорости скольжения к величине угловой скорости стремится к бесконечности.

- Доказано, что в случае, когда отношение коэффициента трения к тангенсу угла наклона плоскости меньше либо равно единице, движение диска продолжается бесконечно долго. Если это отношение равно единице, то предельным движением диска является равномерное скольжение вниз вдоль линии наибольшего ската, если же оно меньше единицы, то предельное движение диска — это равноускоренное скольжение вниз вдоль линии наибольшего ската.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Карапетян А. В., Русинова А. М.* Качественныий анализ динамики диска на наклонноий плоскости с трением // ПММ, 2011, Т. 75, Вып. 5, С. 731-737.

2. *Русинова А.М.* О динамике диска на наклонной плоскости с трением в рамках динамически совместной модели трения. // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 3. С.396-401.

3. *Русинова А.М.* О динамике однородной шайбы на наклонной плоскости с трением // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 538-544.

4. *Русинова А.М.* О динамике шайбы на наклонной плоскости с трением при несимметричном распределении нормальных напряжений// ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 768-777.

5. *Русинова А.М.* О динамике диска на наклонной плоскости с трением// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. №4. Часть 5. С. 2468-2469.