МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра теоретической механики и мехатроники

На правах рукописи

УДК 531.01

Русинова Анна Михайловна

Динамика шайбы на наклонной плоскости с трением

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель –

д.ф.-м.н., проф.

А.В. Карапетян

Москва – 2015

Оглавление

Введение

Исследование движения твердого тела по неподвижной плоскости с трением является одной из классических задач механики. В том случае, когда тело имеет плоское основание, ключевым и очень непростым моментом данной задачи является выбор модели распределения нормального давления по основанию тела. Даже при равномерном распределении выражения для силы и момента трения, действующих на тело с круговым основанием, имеют довольно громоздкий вид, что затрудняет исследование уравнений движения.

Настоящая диссертация посвящена качественному анализу динамики шайбы на неподвижной шероховатой плоскости в предположении, что шайба опирается о плоскость своим основанием и совершает безотрывное движение. Рассматриваются модели распределения нормального давления, удовлетворяющие условию динамической совместности. Для шайбы с ненулевой толщиной движение исследуется в случае, когда тангенс угла наклона плоскости меньше коэффициента трения скольжения. Для тонкого диска (шайбы нулевой высоты) проводится глобальное качественное исследование движения.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Сила трения является одним из основных примеров физических сил. Экспериментальные исследования закономерностей трения были проведены еще Леонардо да Винчи, который заметил, что сила трения прямо пропорциональна весу груза. В дальнейшем изучение явления трения было продолжено такими известными учеными, как Р. Гук, И. Ньютон, Амонтон, Л. Эйлер, Ш. Кулон, и другими. Первый фундаментальный научный эксперимент по изучению свойств сухого трения выполнил Ш. Кулон по инициативе Парижской академии наук. Он установил влияние различных конструктивных параметров на значение коэффициента трения и заложил основы современных представлений о трении. Отчет Кулона об этом эксперименте содержится в серии публикаций 1781-1821 годов [27, 28]. Но полную формулировку закона сухого трения Кулона привел задолго до этого Леонард Эйлер в 1748 году [29]. Эйлер также отметил, что коэффициент трения при скольжении меньше, чем коэффициент трения покоя.

Значительный вклад в развитие теории систем с трением внес Д.Х. Джеллет. Он изучил условия равновесия механических систем с трением и показал, что задача определения сил, действующих на покоящееся тело, разрешается неоднозначно. Свои результаты Джеллет изложил в трактате "Теория трения" [31]. Немногим позднее вышла в свет работа П. Пэнлеве [20], вызвавшая большую дискуссию среди ученых. Пэнлеве подвергал сомнению закон Кулона, демонстрируя примеры механических систем с трением, в которых решение задач статики и динамики не существует или не является единственным. Впоследствии данные примеры получили название "парадоксы Пэнлеве".

Закон Кулона является достаточно простой моделью сухого трения, которая успешно используется до сих пор при решении задач динамики систем с трением. Тем не менее сам Кулон отмечал, что независимость силы трения от модуля скорости скольжения выполняется не во всех случаях. В дальнейшем появилось много уточнений для закона Кулона. В своей работе Штрибек [32] привел данные эксперимента, которые показывали, что при отсутствии смазки сила сопротивления не падает сразу с уровня силы трогания до кулоновой силы, а возникает постепенное ее падение с ростом скорости. Этот факт был многократно перепроверен в дальнейшем и теперь обычно именуется Штрибек-эффектом.

На данный момент существует большое количество более сложных, чем закон Кулона, моделей трения [18]. В этих моделях коэффициент трения не является постоянной величиной, а зависит от скорости движения, нормальной нагрузки, площади контакта и других параметров. Но они построены, как правило, для достаточно частных случаев, и требуют дополнительных исследований. Подробное описание различных моделей трения, исследование систем с трением и основные результаты в этой области можно найти в работах [1, 13, 23, 24, 25].

Задача о движении твердого тела с плоским основанием по шероховатой плоскости является одной из фундаментальных задач механики. При определении сил и моментов, действующих на тело, предполагается, что для каждой элементарной площадки области контакта верна гипотеза Кулона [17, 19]. Так как сила сухого трения Кулона зависит от распределения нормального давления по пятну контакта, то принципиальным моментом при решении данной задачи является построение модели контактных напряжений.

Н.Е. Жуковский [8] изучал условия равновесия тела на горизонтальной плоскости с трением при наличии внешних сил в случае произвольного статического распределения нормального давления. Позднее эти исследования продолжил Мак-Миллан. В своей книге [19] он рассмотрел равновесие и скольжение тела при условии, что опорная плоскость незначительно деформируется под действием груза, а поверхность контакта при этом остается плоской. Мак-Миллан показал, что в случае, когда тело находится в равновесии и проекция его центра масс на плоскость движения является центром масс основания, нормальное давление распределено равномерно. Он также привел в своей работе выражения для сил и момента трения и их представления через эллиптические интегралы для тела с круговым основанием. Даже в случае, когда в основании тела лежит круг, силы и момент трения имеют довольно громоздкий вид, что затрудняет исследование уравнений движения.

Впервые качественный анализ динамики плоского диска на горизонтальной плоскости с сухим трением был выполнен в совместной работе А.Ю. Ишлинского, Б.Н. Соколова и Ф.Л. Черноусько в 1981 году [14]. Движение однородного диска было описано в случае равномерного распределения нормального давления. Было показано, что при ненулевых начальных значениях скорости центра диска v и угловой скорости ω, центр масс движется по прямолинейной траектории, при этом v и ω обращаются в нуль одновременно за конечное время. В работе было найдено предельное при приближении к моменту остановки значение отношения $\dfrac{v}{R\omega} \approx 0,71$ (R — радиус диска). Аналогичное исследование было выполнено в [14] для кругового кольца при равномерном распределении нормального давления. Было показано, что для всех движений кольца, кроме поступательного и чистого вращения, непосредственно перед остановкой выполнено равенство $\dfrac{v}{R\omega} = 1$. Позднее К. Военли и Э. Эриксен [33] также изучали предельное движение кольца и диска на горизонтальной плоскости с однородным трением. Они уточнили результат, полученный [14] для диска, показав, что предельное движение описывается формулой $\dfrac{v}{R\omega} \approx 0,65$.

Аналогичные результаты были получены А.А. Киреенковым [15] для диска на горизонтальной плоскости в предположении, что давление рапределено по закону Галина [4]. При исследовании движения диска выражения для сил и момента трения были заменены разложениями Паде [9, 10]. Было показано, что при такой постановке задачи в момент остановки мгновенный центр скоростей диска находится на его границе, т.е. $\dfrac{v}{R\omega} = 1$. Также с помощью разложений Паде В.Ф. Журавлев исследовал динамику диска на наклонной плоскости при его движении вдоль линии наибольшего ската [10]. Качественный анализ динамики диска на наклонной плоскости для симметричного распределения давления был выполнен в работах [35, 21].

Финальные движения кольцевого диска и тела, составленного из двух концентрических цилиндров, изучали П.Д. Вайдман и Ч. Мальотра [34] в предположении, что нормальное давление распределено равномерно. Они показали, что для ненулевых начальных значений линейной и угловой скоростей в зависимости от геометрических параметров рассматриваемых тел возможны три различных типа финального движения. В первом случае отношение $\dfrac{v}{R\omega}$ стремится к некоторому конечному числу, во втором — к нулю (чистое вращение), а в третьем — к бесконечности (поступательное движение). Как было отмечено ранее, второй и третий случаи не реализуются в случае однородного диска и тонкого кольца.

Нужно отметить, что для тела, не являющегося пластиной, модель симметричного распределения нормальных напряжений является динамически не согласованной, так как не выполнено условие равенства нулю проекции момента трения на плоскость движения. В 2009 году А.П. Иванов [12] предложил динамически совместную модель трения, согласно которой, нормальное давление есть линейная функция координат точек пятна контакта и зависит от трех независимых параметров. В рамках этой модели в статье Д.В. Трещева с соавторами [22] было выполнено качественно-аналитическое исследование динамики шайбы на горизонтальной плоскости. Было показано, что при ненулевых начальных значениях скорости скольжения v и угловой скорости ω скольжение и верчение шайбы прекращаются одновременно за конечное время, и существует конечное предельное значение $\dfrac{v}{R\omega}$, которое зависит только от величины $\dfrac{kh}{a}$, где k — коэффициент трения, h и a — высота и радиус цилиндра соответственно. В процессе движения вектор скорости центра масс шайбы совершает бесконечное число обротов, а ее траектория отклоняется в сторону, противоположную направлению первоначальной закрутки. Аналогичное исследование для цилиндрического тела на горизонтальной плоскости проводилось в работе [26]. В рамках модели трения, предложенной А.П. Ивановым, в работах [36, 37] рассматривалось движение шайбы по наклонной плоскости. В статье [36] при исследования динамики выражения для сил и момента трения были заменены соответствующими аппроксимациями Паде второго порядка, в [37] качественный анализ динамики шайбы был проведен для точной постановки задачи.

В современных работах, посвященных задаче о движении осесимметричного тела по плоскости, приводятся не только теоретические и численные результаты, но также данные проведенных экспериментов. Эти данные, а также сравнение экспериментальных зависимостей с теоретическими кривыми можно найти в статьях [7, 16, 22, 30, 34].

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Во введении дан обзор основных работ, посвященных движению тела с плоским основанием по шероховатой плоскости, а также приведено краткое содержание работы.

В первой главе формулируется постановка задачи и выписываются уравнения движения шайбы на наклонной плоскости с трением. Далее исследуется динамика шайбы для случая, когда функция плотности нормального давления зависит от полярных координат точек основания шайбы r и β следующим образом:

$$n(A) = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 r \cos\beta + \lambda_2 r \sin\beta}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

Данное распределение при поступательном движении шайбы имеет такой же вид, как и распределение нормального давления по основанию плоского штампа, внедряемого в упругую полуплоскость [6], а в случае вращательного движения совпадает с распределением Галина [4].

Вторая глава посвящена качественному исследованию движения шайбы в динамически совместной модели трения, предложенной А.П. Ивановым. Согласно этой модели, функция плотности линейна относительно координат точек основания шайбы и имеет вид

$$n(A) = \lambda_0 + \lambda_1 r \cos\beta + \lambda_2 r \sin\beta$$

В первых двух главах изучаются предельные движения шайбы для случая, когда коэффициент трения скольжения k больше, чем тангенс угла α наклона плоскости движения. Доказано, что в этом случае шайба останавливается за конечное время t_* при любых начальных условиях. Если же начальная угловая скорость шайбы не равна нулю, то скольжение и верчение шайбы прекращаются одновременно. В этом случае показано, что характер предельного движения при $t \to t_* - 0$ существенно зависит от параметров задачи. В случае линейной динамически совместной модели трения при определенных параметрах существуют периодические решения в переменных $z = u/\Omega$ и

$\tau = \ln(\Omega_0/\Omega)$ (u — скорость центра масс шайбы, Ω — ее угловая скорость).

При нулевой высоте шайбы (шайба в этом случае является тонким диском) функция плотности нормального давления в модели А.П. Иванова является константой, т.е. имеет место равномерное распределение нормального давления. Глобальный качественный анализ динамики диска при таком распределении давления проводится в третье главе диссертации. Здесь показано, что в случае общего положения при $\varkappa = k/\operatorname{tg}\alpha > 2$ отношение u/Ω стремится при $t \to t_* - 0$ к некоторому конечному значению $z_* > 0$, не зависящему от начальных условий, а при $1 < \varkappa \leq 2$ отношение u/Ω стремится к $+\infty$. В случае, когда коэффициент трения скольжения равен тангенсу угла наклона плоскости, предельным движением диска является раномерное скольжение вниз вдоль линии наибольшего ската. Если же это отношение меньше единицы, то предельное движение представляет собой равноускоренное скольжение вниз вдоль линии наибольшего ската. Также для случая $\varkappa \leq 1$ в данной главе приводится исследование траекторий центра диска. Доказано, что при $1/2 < \varkappa \leq 1$ траектория центра масс имеет горизонтальную асимптоту, а в случае $\varkappa \leq 1/2$ траектория не имеет асимптот.

По теме диссертации опубликовано пять статей в журналах ВАК [35, 36, 37, 38, 39]. Основные результаты были доложены на научных конференциях "Ломоносовские чтения"(Москва, апрель 2010 года, апрель 2012 года, апрель 2013 года), Всероссийском Семинаре "Аналитическая механика, устойчивости и управление движением"(Ульяновск, 9-12 июня 2011 года), Международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"(Москва, ИПУ РАН, 5 июня – 8 июня 2012 года), Международной научной конференции по механике "Шестые Поляховские чтения"(Санкт-Петербург, 31 января - 3 февраля 2012 года), 8th European Solid Mechanics

Conference (Грац, Австрия, 9-13 июля 2012 года), V International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering (Ибица, Испания, 17-19 июня 2013 года), XLI Summer School – Conference "Advanced problems in mechanics"(Санкт-Петербург, 1 – 6 июля, 2013 года), XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 20 - 24 августа 2015 года).

Глава 1

Динамика шайбы в нелинейной динамически совместной модели контактных напряжений

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении однородной круговой шайбы массы m с радиусом a и высотой $2h$ по неподвижной шероховатой наклонной плоскости в предположении, что шайба совершает безотрывное плоскопараллельное движение и опирается о плоскость своим основанием. Тогда скорость центра масс $\mathbf{u}$ шайбы параллельна наклонной плоскости, а угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярна этой плоскости.

Применяя основные теоремы динамики, выпишем уравнения движения шайбы на наклонной плоскости

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{u}} &= m\mathbf{g}+\mathbf{N}+\mathbf{F} \\ ma^2\dot{\boldsymbol{\omega}}/2 &= \mathbf{M}+\mathbf{M}_N \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения, $\mathbf{N}$ — нормальная реакция наклонной плоскости, $\mathbf{F}$ — результирующая сила трения, действующая на шайбу, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_N$ — моменты сил трения и нормальных реакций, вычисленные относительно центра масс шайбы.

Введем правый ортонормированный репер $C\mathbf{e_1e_2e_3}$, такой, что C— центр основания шайбы, орт $\mathbf{e}_1$ направлен вдоль скорости $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1$ $(u \geqslant 0)$ точки C, орт $\mathbf{e}_2$ ортогонален скорости $\mathbf{u}$ и, как и орт $\mathbf{e}_1$, лежит в наклонной плоскости, а орт $\mathbf{e}_3$ направлен по нормали к плоскости движения (см. рис.1.1). Тогда $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_3$.

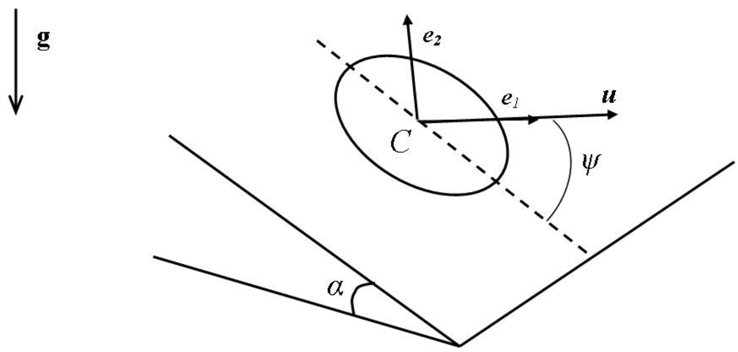

Рис. 1.1: Расположение осей репера $C\mathbf{e_1e_2e_3}$

Положение произвольной точки A основания шайбы определяется углом $\beta \in [0, 2\pi)$ между векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{CA}$ и расстоянием $r = CA$ (см. рис.1.2).

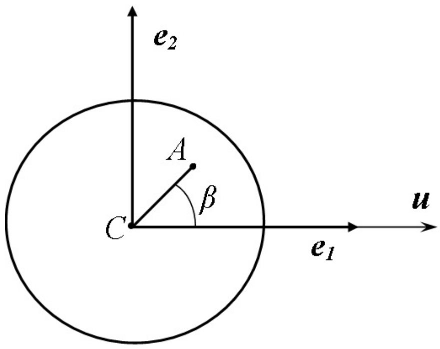

Рис. 1.2: Основание шайбы

Силы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{F}$, а также моменты $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_N$ рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned}
&\mathbf{N} = \mathbf{e}_3 \iint\limits_S n(A) dS \\
&\mathbf{F} = -\iint\limits_S kn(A) \frac{\mathbf{v}(A)}{|\mathbf{v}(A)|} dS \\
&\mathbf{M} = -\iint\limits_S \left[\mathbf{r}(A) \times kn(A) \frac{\mathbf{v}(A)}{|\mathbf{v}(A)|} \right] dS \\
&\mathbf{M}_N = \iint\limits_S n(A) \left[\mathbf{r}(A) \times \mathbf{e}_3 \right] dS
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь S — основание шайбы, $n(A)$ — плотность нормального давления в точке A, $k > 0$ — коэффициент трения скольжения, $\mathbf{r}(A)$ — радиус-вектор точки A, проведенный из центра масс шайбы, $\mathbf{v}(A)$ — скорость точки A, которая может быть вычислена по формуле Эйлера

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}(A) = \mathbf{u} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(A)] = u\mathbf{e}_1 + [\omega \mathbf{e}_3 \times r \cos\beta \mathbf{e}_1 + r \sin\beta \mathbf{e}_2 - h\mathbf{e}_3] = \\
&= (u - \omega r \sin\beta)\mathbf{e}_1 + \omega r \cos\beta \mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

Чтобы получить выражения для сил $\mathbf{N}$ и $\mathbf{F}$, а также моментов $\mathbf{M}_\mathbf{N}$ и $\mathbf{M}$ необходимо определить функцию плотности нормального давления $n(A)$. В данной работе рассматриваются модели распределения контактных напряжений [12, 38], удовлетворяющие условию динамической совместности. Для этих моделей выполнены условия, обеспечивающие безотрывность движения шайбы:

$$\begin{aligned}
&(m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}, \mathbf{e}_3) = 0 \\
&(\mathbf{M} + \mathbf{M}_N, \mathbf{e}_i) = 0 \quad (i = 1, 2)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Пусть ψ — угол между линией наибольшего ската наклонной плоскости и вектором $\mathbf{e}_1$. Учитывая, что репер $C\mathbf{e_1e_2e_3}$ совершает плоскопараллельное движение, заключаем, что его угловая скорость равна $\dot{\psi}\mathbf{e}_3$. Значит,

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{u}\mathbf{e}_1 + u\dot{\psi}\mathbf{e}_2$$

Выпишем разложения сил и моментов по осям репера $C\mathbf{e_1e_2e_3}$, учитывая условия (1.3):

$$\begin{aligned}
&m\mathbf{g} = mg\sin\alpha\cos\psi\mathbf{e}_1 - mg\sin\alpha\sin\psi\mathbf{e}_2 - mg\cos\alpha\mathbf{e}_3 \\
&\mathbf{N} = mg\cos\alpha\mathbf{e}_3 \\
&\mathbf{F} = -F_1\mathbf{e}_1 - F_2\mathbf{e}_2 \\
&\mathbf{M} + \mathbf{M}_N = -M_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнения движения шайбы (1.1) в проекциях на подвижные оси репера $C\mathbf{e_1e_2e_3}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&m\dot{u} = mg\sin\alpha\cos\psi - F_1 \\
&mu\dot{\psi} = -mg\sin\alpha\sin\psi - F_2 \\
&\frac{ma^2}{2}\dot{\omega} = -M_3
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Замечание. Система (1.4) не может быть использована для описания движения шайбы, при котором $u \equiv 0$ (чистое вращение), т.к. в этом случае невозможно однозначно определить вектор $\mathbf{e}_1$ подвижного репера $C\mathbf{e_1e_2e_3}$. Движения шайбы, для которых возможны участки $u \equiv 0$, будем рассматривать в неподвижной ортонормированной системе координат $Oxyz$, выбранной так, что что ось Ox направлена вниз вдоль линии наибольшего ската

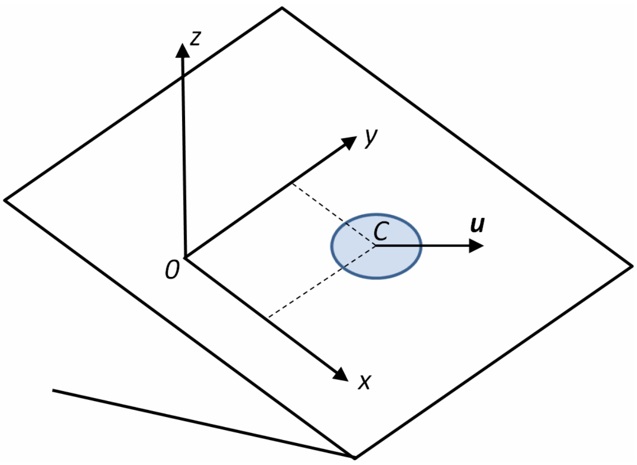

Рис. 1.3: Система координат $Oxyz$

плоскости, ось Oy также лежит в плоскости движения, а ось Oz перпендикулярна наклонной плоскости и направлена вверх (см. рис. 1.3). Единичные векторы, направленные вдоль координатных осей, обозначим $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$. Тогда уравнения движения шайбы 1.1 в проекциях на оси $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ имеют вид

$$\begin{aligned} m\dot{u}_x &= mg\sin\alpha - F_x \\ m\dot{u}_y &= -F_y \\ \frac{ma^2}{2}\dot{\omega} &= -M_z \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{e}_x + u_y\mathbf{e}_y, \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{F} = -F_x\mathbf{e}_x - F_y\mathbf{e}_y, \mathbf{M} + \mathbf{M}_N = -M_z\mathbf{e}_z$$

1.2 Модель распределения нормального давления

Рассморим функцию плотности нормального давления следующего вида:

$$n(A) = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 r \cos\beta + \lambda_2 r \sin\beta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \tag{1.6}$$

Как будет показано далее, при поступательном движении шайбы данное распределение имеет такой же вид, как и распределение нормального давления по основанию плоского штампа, внедряемого в упругую полуплоскость [6], а в случае вращательного движения совпадает с распределением Галина [4].

Коэффициенты λ_0, λ_1 и λ_2 определяются в каждый момент времени из соотношений (1.3). Первое соотношение (1.3) равносильно равенству

$$\iint\limits_S n(A)dS = mg\cos\alpha$$

Подставляя вместо $n(A)$ выражение (1.6), получаем, что $\lambda_0 = \dfrac{mg\cos\alpha}{2\pi a}$. Для нахождения коэффициентов λ_1 и λ_2 выпишем выражения для моментов $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_N$

$$\mathbf{M} = -k \iint\limits_S \frac{n(A)}{|\mathbf{v}(a)|} \left[\mathbf{r}(A) \times \mathbf{v}(A)\right] dS =$$

$$= -k \int\limits_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 + \lambda_1 r\cos\beta + \lambda_2 r \sin\beta}{D(u,\omega; r, \beta)} (h\omega r \cos\beta \mathbf{e}_1 + h(u - \omega r \sin\beta)\mathbf{e}_2 +$$

$$+ (\omega r - ur \sin\beta)\mathbf{e}_3) d\beta dr$$

$$\mathbf{M}_N = -k \iint\limits_S n(A) \left[\mathbf{r}(A) \times \mathbf{e}_3\right] dS =$$

$$= -k \int\limits_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \int\limits_0^{2\pi} \left(\lambda_0 + \lambda_1 r\cos\beta + \lambda_2 r \sin\beta\right) (r \sin\beta \mathbf{e}_1 - r \cos\beta \mathbf{e}_2) d\beta dr$$

$$D(u,\omega; r, \beta) = \sqrt{u^2 - 2u\omega r \sin\beta + \omega^2 r^2}$$

Отсюда получаем компоненты разложения векторов M и M_N по базисным векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$:

$$M^{(1)} = -kh\int\limits_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\lambda_1\omega\cos^2\beta}{D(u,\omega;r,\beta)}d\beta dr$$

$$M^{(2)} = -kh\int\limits_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(\lambda_0+\lambda_2 r\sin\beta)(u-\omega r\sin\beta)}{D(u,\omega;r,\beta)}d\beta dr$$

$$M^{(3)} = -k\int\limits_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(\lambda_0+\lambda_2 r\sin\beta)(\omega-ur\sin\beta)}{D(u,\omega;r,\beta)}d\beta dr$$

$$M_N{}^{(1)} = \int\limits_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\int\limits_0^{2\pi} \lambda_2\sin^2\beta d\beta dr = \frac{2\pi a^3}{3}\lambda_2$$

$$M_N{}^{(2)} = -\int\limits_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\int\limits_0^{2\pi} \lambda_2\cos^2\beta d\beta dr = -\frac{2\pi a^3}{3}\lambda_2$$

$$M_N{}^{(3)} = 0$$

Используя полученные равенства, можно переписать второе условие (1.3) в виде системы двух линейных уравнений относительно коэффициентов λ_1 и λ_2:

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 &= a_{10}\lambda_0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 &= a_{20}\lambda_0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь

$$a_{11} = -a^2kh\int\limits_0^1 \frac{s^3}{1-s^2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\Omega\cos^2\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds$$

$$a_{22} = a^2kh\int\limits_0^1 \frac{s^2}{1-s^2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(u-\Omega s\sin\beta)\sin\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds$$

$$a_{12} = -a_{21} = \frac{2\pi a^3}{3}$$

$$a_{10} = 0,\ \ a_{20} = -akh\int\limits_0^1 \frac{s}{1-s^2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{u-\Omega s\sin\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds$$

$$s = \frac{r}{a},\ \ \Omega = a\omega$$

Исследуем систему (1.7) на совместность. Для этого выпишем определитель этой системы:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} + \left(\frac{2\pi a^3}{3}\right)^2$$

Можно заметить, что при $\Omega \geq 0$ коэффициент $a_{11} \leq 0$. Для того, чтобы определить знак коэффициента a_{22}, преобразуем его к виду:

$$a_{22} = a^2kh\int\limits_0^1 \tfrac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\int\limits_0^{2\pi} \tfrac{(u-\Omega s\sin\beta)\sin\beta}{\sqrt{u^2-2u\Omega s\sin\beta+\Omega^2s^2}}d\beta ds =$$

$$= a^2kh\int\limits_0^1 \tfrac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\int\limits_0^{\pi} \left(\tfrac{(u-\Omega s\sin\beta)\sin\beta}{\sqrt{u^2-2u\Omega s\sin\beta+\Omega^2s^2}} - \tfrac{(u+\Omega s\sin\beta)\sin\beta}{\sqrt{u^2+2u\Omega s\sin\beta+\Omega^2s^2}}\right)d\beta ds$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при $u \geq 0$, $\Omega \geq 0$ верно

$$\frac{(u-\Omega s\sin\beta)}{\sqrt{u^2-2u\Omega s\sin\beta+\Omega^2s^2}} - \frac{(u+\Omega s\sin\beta)}{\sqrt{u^2+2u\Omega s\sin\beta+\Omega^2s^2}} \leq 0 \qquad (1.8)$$

Поэтому при $\beta \in [0,\pi]$ выполнено неравенство

$$\frac{(u-\Omega s\sin\beta)\sin\beta}{\sqrt{u^2-2u\Omega s\sin\beta+\Omega^2s^2}} - \frac{(u+\Omega s\sin\beta)\sin\beta}{\sqrt{u^2+2u\Omega s\sin\beta+\Omega^2s^2}} \leq 0$$

Следовательно, коэффициент $a_{22} \leq 0$, а значит, $\Delta > 0$, и система (1.7) имеет единственное решение

$$\lambda_1 = -a_{12}a_{20}\lambda_0/\Delta,\ \ \lambda_2 = a_{11}a_{20}\lambda_0/\Delta \tag{1.9}$$

1.3 Свойства функции плотности нормального давления

Будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\tilde{n}(s,\beta) &= 1 + \tilde{\lambda}_1 s\cos\beta + \tilde{\lambda}_2 s\sin\beta\\ \tilde{\lambda}_i &= a\lambda_i/\lambda_0,\ \ i = 1,2\end{aligned}$$

Учитывая равенства (1.9), выпишем выражения для $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$:

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{6\pi a^5 kh\tilde{a_{20}}}{9a^4k^2h^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{22}} + 4\pi^2 a^6}$$
$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{9a^4k^2h^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{20}}}{9a^4k^2h^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{22}} + 4\pi^2 a^6}$$

$$a_{11} = -a^2kh\tilde{a_{11}},\ \ a_{22} = -a^2kh\tilde{a_{22}},\ \ a_{20} = -akh\tilde{a_{20}}$$

Введем параметр $\delta = \dfrac{3kh}{a}$, тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_1 &= \frac{2\pi\delta\tilde{a_{20}}}{\delta^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{22}} + 4\pi^2}\\ \tilde{\lambda}_2 &= \frac{\delta^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{20}}}{\delta^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{22}} + 4\pi^2}\end{aligned} \tag{1.10}$$

Приведем некоторые свойства функции плотности $n(A)$ (1.6).

- Так как $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{22}, \tilde{a}_{20}$ являются функциями отношения $\dfrac{u}{\Omega}$, то, как следует из (1.10), коэффициенты $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ зависят от $\dfrac{u}{\Omega}$ и параметра δ, то есть

$$\tilde{\lambda}_i = \tilde{\lambda}_i\left(\frac{u}{\Omega}, \delta\right), \ i = 1, 2$$

- Используя соотношение (1.8), можно убедиться, что $\tilde{a}_{11} > 0$ и $\tilde{a}_{20} > 0$ при $u > 0$, $\Omega > 0$. Поэтому справедливы неравенства

$$\tilde{\lambda}_i > 0, \lambda_i > 0 (i = 1, 2) \text{ при } u > 0, \Omega > 0$$

- В случае поступательного движения шайбы $(u > 0,\ \Omega = 0)$ имеем

$$\tilde{a}_{11}|_{\Omega=0} = \tilde{a}_{22}|_{\Omega=0} = 0, \ \ \tilde{a}_{20}|_{\Omega=0} = 2\pi$$

Следовательно,

$$\tilde{\lambda}_1\Big|_{\Omega=0} = \delta, \ \ \tilde{\lambda}_2\Big|_{\Omega=0} = 0$$
$$\tilde{n}(s, \beta) = 1 + \delta s \cos\beta$$

Тогда функция плотности $n(A)$ примет вид

$$n(A) = \frac{mg\cos\alpha}{2\pi a}\frac{(1 + \delta s\cos\beta)}{\sqrt{a^2 - r^2}} \tag{1.11}$$

- При вращательном движении $(u = 0,\ \Omega > 0)$ коэффициент a_{20} обращается в нуль, поэтому

$$\lambda_1|_{u=0} = \lambda_2|_{u=0} = 0$$

Значит, функция плотности нормального давления в этом случае имеет вид

$$n(A) = \frac{mg\cos\alpha}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}} \tag{1.12}$$

Замечание. При нулевой скорости скольжения u шайбы невозможно однозначно определить вектор $\mathbf{e}_1$, поэтому в этом случае угол β можно откладывать, например, от вектора $\mathbf{e}_x$ неподвижной системы координат, введенной в параграфе 1.1. В этом случае все формулы, определяющие функции λ_1 и λ_2, сохраняют свой вид.

- Если шайба имеет нулевую высоту ($h = 0$), то параметр δ равен нулю. Как следует из равенств (1.10), в этом случае

$$\lambda_1|_{\delta=0} = \lambda_2|_{\delta=0} = 0$$

и функция плотности $n(A)$ имеет вид

$$n(A) = \frac{mg\cos\alpha}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}}$$

Как видно из равенств (1.11, 1.12), при поступательном движении шайбы распределение нормального давления по основанию шайбы имеет такой же вид, как распределение нормального давления по основанию плоского штампа, внедряемого в упругую полуплоскость [6]. В случае вращательного движения, а также для тонкого диска (шайбы нулевой высоты) в рассматриваемой модели функция плотности нормального давления совпадает с законом Галина распределения нормального давления по границе между твердым штампом с плоским основанием и упругой полуплоскостью при отсутствии сил трения [4].

Так как $n(A)$ — плотность нормального давления в точке A пятна контакта, для всех точек основания шайбы должно быть выполнено неравенство $n(A) \geq 0$. Учитывая, что в случае поступательного движения функция $n(A)$ имеет вид (1.11), $\delta \in [0, 1]$ — необходимое условие неотрицательности плотности давления во всех точках пятна контакта.

При произвольном движении шайбы выполнено следующее неравенство:

$$1 + \tilde{\lambda}_1 s\cos\beta + \tilde{\lambda}_2 s\sin\beta \geq 1 - \sqrt{\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2}$$

Поэтому достаточное условие имеет вид

$$\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2 \leq 1 \text{ для всех } u > 0, \Omega > 0 \tag{1.13}$$

Численный анализ показывает (рис. 1.4), что неравенство (1.13) выполнено

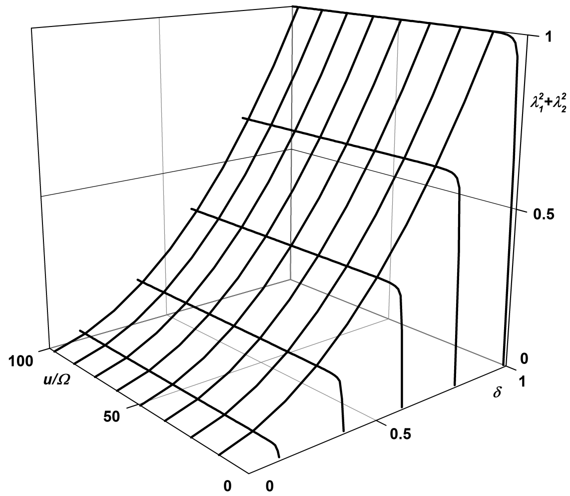

Рис. 1.4: Функция $\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2$

при всех значениях $\delta \in [0,1]$. Таким образом, для неотрицательности плотности нормального давления в каждой точке основания шайбы необходимо и достаточно, чтобы $\delta \in [0,1]$.

1.4 Силы и момент трения. Уравнения движения шайбы

Результирующая сила трения, действующая на шайбу, и главный момент внешних сил, вычисленный относительно ее центра, определяются по формулам

$$\mathbf{F} = -F_1\mathbf{e}_1 - F_2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{M} = -M\mathbf{e}_3$$

$$F_i = 2\pi ak\lambda_0 f_i,\ i = 1,2,\ M = 2\pi a^2 k\lambda_0 f_3$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\int\limits_0^{2\pi}(1+\tilde{\lambda}_2 s\sin\beta)\frac{u-\Omega s\sin\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds\\
f_2 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\tilde{\lambda}_1\Omega\cos^2\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds\\
f_3 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\int\limits_0^{2\pi}(1+\tilde{\lambda}_2 s\sin\beta)\frac{\Omega s-u\sin\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds
\end{aligned} \tag{1.14}$$

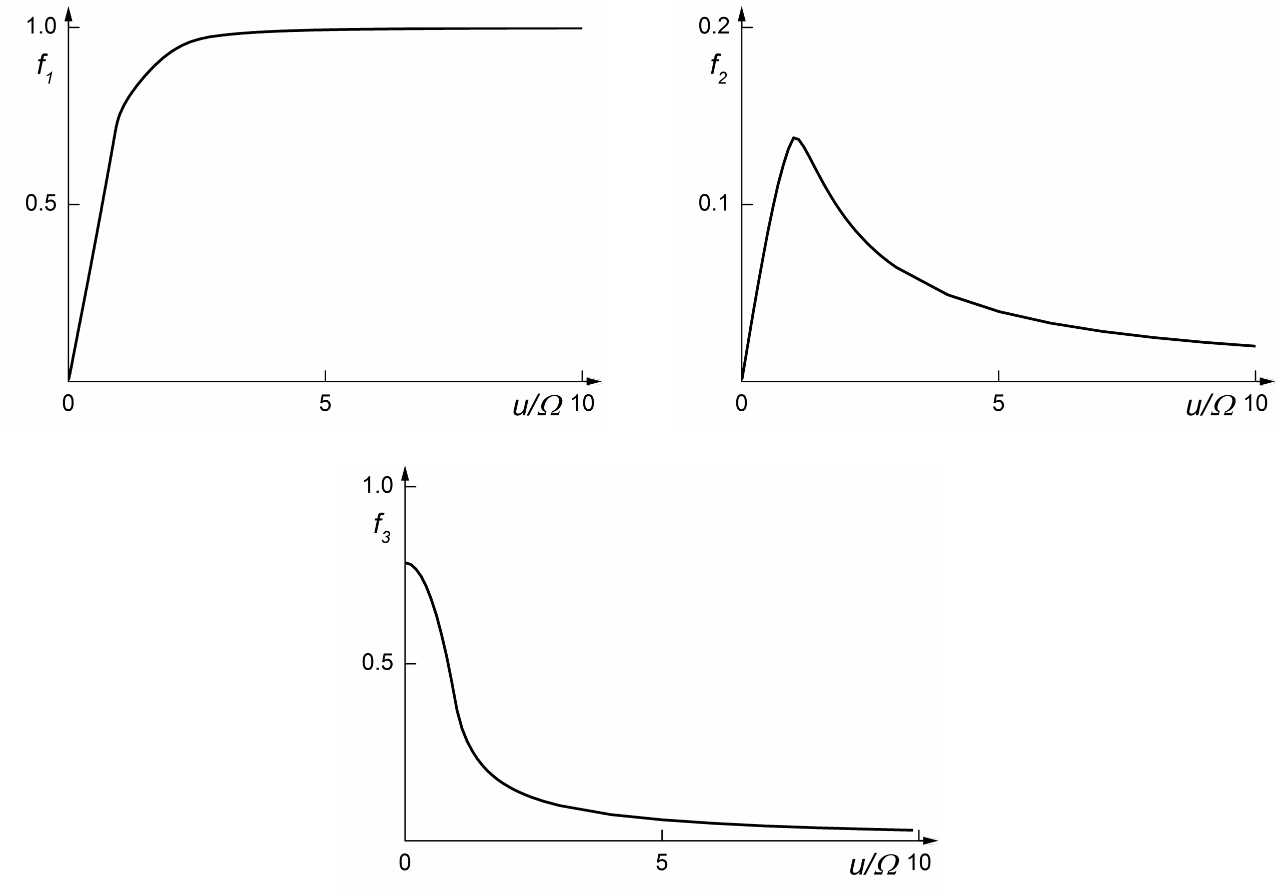

Рис. 1.5: Графики функций $f_i\,(u/\Omega)\,(i = 1,2,3)$

Функции f_1, f_2 и f_3 являются функциями отношения $\dfrac{u}{\Omega}$ и параметра δ:

$$f_i = f_i\left(\frac{u}{\Omega}, \delta\right)$$

Приведем некоторые свойства данных функций:

- $f_1|_{u=0} = 0,\ f_1|_{\Omega=0} = 1$
- $f_2|_{u=0} = 0,\ f_2|_{\Omega=0} = 0$
- $f_3|_{u=0} = \dfrac{\pi}{4},\ f_3|_{\Omega=0} = 0$

Численный анализ показывает, что качественное поведение этих функций не зависит от параметра δ. На рис. 1.5 приведены графики f_1, f_2 и f_3 при фиксированом значении $\delta = 0.6$.

Будем предполагать, что плоскость движения не является горизонтальной, то есть $\alpha \neq 0$. Тогда без уменьшения общности выберем единицы измерения массы, длины и времени так, что

$$m = 1,\ a = 1,\ g \sin\alpha = 1$$

и с учетом этого выпишем уравнения движения шайбы (1.4)

$$\dot{u} = \cos\psi - \varkappa f_1,\ u\dot{\psi} = -\sin\psi - \varkappa f_2,\ \dot{\Omega} = -2\varkappa f_3 \tag{1.15}$$

Здесь $\varkappa = \dfrac{k}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Утверждение 1.1 Система (1.15) инвариантна относительно замены переменных

$$(u, \Omega, \psi) \to (u, -\Omega, -\psi)$$

$\square$ Рассмотрим функции $\tilde{a}_{11}$, $\tilde{a}_{22}$, $\tilde{a}_{20}$. Представим функцию $\tilde{a}_{11}$ в следующем виде:

$$\tilde{a}_{11} = \int\limits_0^1 \frac{s^3}{1-s^2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\Omega\cos^2\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)} d\beta =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{s^2}{1-s^2} \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\Omega\cos^2\beta}{\sqrt{u^2 - 2u\Omega s\sin\beta + \Omega^2 s^2}} - \frac{\Omega\cos^2\beta}{\sqrt{u^2 + 2u\Omega s\sin\beta + \Omega^2 s^2}} \right) d\beta ds$$

Из данного представления видно, что при замене Ω на $-\Omega$ функция $\tilde{a}_{11}$ меняется на $-\tilde{a}_{11}$. Аналогичное свойство выполнено и для $\tilde{a}_{22}$. В отличие от этих двух функций, $\tilde{a}_{20}$ при замене Ω на $-\Omega$ не меняет своего значения. Поэтому, согласно равенствам (1.10), коэффициент $\tilde{\lambda}_2$ меняется на противоположный при замене Ω на $-\Omega$, а $\tilde{\lambda}_1$ сохраняет свое значение.

Теперь перепишем функцию f_1 в виде

$$f_1 = \int\limits_0^1 \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \int\limits_0^{2\pi} (1+\tilde{\lambda}_2 s\sin\beta) \frac{u - \Omega s\sin\beta}{\sqrt{u^2 - 2u\Omega s\sin\beta + \Omega^2 s^2}} d\beta ds =$$
$$= \int\limits_0^1 \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{(1+\tilde{\lambda}_2 s\sin\beta)(u-\Omega s\sin\beta)}{\sqrt{u^2 - 2u\Omega s\sin\beta + \Omega^2 s^2}} + \frac{(1-\tilde{\lambda}_2 s\sin\beta)(u+\Omega s\sin\beta)}{\sqrt{u^2 + 2u\Omega s\sin\beta + \Omega^2 s^2}} \right) d\beta ds$$

Значит, при замене Ω на $-\Omega$ функция f_1 остается прежней. Аналогично можно показать, что функции f_2 и f_3 меняются на противоположные. Следовательно, замена $(u, \Omega, \psi) \to (u, -\Omega, -\psi)$ переводит систему (1.15) в себя.$\blacksquare$

Также нужно отметить, что в силу того, что $f_3|_{\Omega=0} = 0$, множество $\Omega \equiv 0$ инвариантно относительно рассматриваемой системы уравнений, поэтому знак угловой скорости шайбы не меняется в процессе движения. Данный факт в совокупности с утверждением 1.1 позволяет рассматривать движение шайбы только для случая $\Omega_0 \geqslant 0$. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности будем предполагать, что $\Omega_0 \geqslant 0$ (а значит, и в процессе всего движения $\Omega(t) \geqslant 0$).

1.5 Динамика шайбы при $\varkappa > 1$

Рассмотрим кинетическую энергию шайбы

$$T = \frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{\Omega^2}{2}\right)$$

Ее производную по времени в силу системы (1.15)

$$\dot{T} = u\cos\psi - \varkappa I(u,\Omega)$$
$$I(u,\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\int_0^{2\pi} \tilde{n}(s,\beta)D(s,\beta;u,\Omega)d\beta ds$$

представим в виде

$$\dot{T} = u(\cos\psi - 1) + [u - I(u,\Omega)] + (1-\varkappa)I(u,\Omega) \qquad (1.16)$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (1.16) неположительно, последнее также неположительно при $\varkappa > 1$. Второе слагаемое можно представить в следующем виде:

$$u - I(u,\Omega) = -\frac{\Omega}{2\pi}\Phi\left(\frac{u}{\Omega},\delta\right)$$
$$\Phi\left(\frac{u}{\Omega},\delta\right) = \int_0^1 \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\int\limits_0^{2\pi}(1+\tilde{\lambda}_2 s\sin\beta)\left(\sqrt{\left(\frac{u}{\Omega}\right)^2 - 2\frac{u}{\Omega}s\sin\beta + s^2} - \frac{u}{\Omega}\right)d\beta ds$$

Вычислим частную производную функции $\Phi\left(\frac{u}{\Omega},\delta\right)$ по δ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\delta} = \frac{\partial\tilde{\lambda}_2}{\partial\delta}\int_0^1 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{u}{\Omega}\right)^2 - 2\frac{u}{\Omega}s\sin\beta + s^2}\sin\beta d\beta ds$$
$$\frac{\partial\tilde{\lambda}_2}{\partial\delta} = \frac{8\pi^2\delta\tilde{a_{11}}\tilde{a_{20}}}{(\delta^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{22}} + 4\pi^2)^2}$$

Так как $\tilde{a_{11}} > 0$, $\tilde{a_{22}} > 0$, $\tilde{a_{20}} > 0$, то $\partial\tilde{\lambda}_2/\partial\delta \geq 0$, при этом

$$\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{u}{\Omega}\right)^2 - 2\frac{u}{\Omega}s\sin\beta + s^2}\sin\beta d\beta \leq 0$$

Таким образом, $\partial\Phi/\partial\delta \leq 0$ при всех значениях $\delta \in [0,1]$. Численный анализ показывает (см. рис. 1.6), что $\Phi\left(\frac{u}{\Omega},1\right) \geq 0$. Следовательно, $\Phi\left(\frac{u}{\Omega},\delta\right) \geq 0$ при всех $\delta \in [0,1]$. Согласно предположению, в процессе движения шайбы

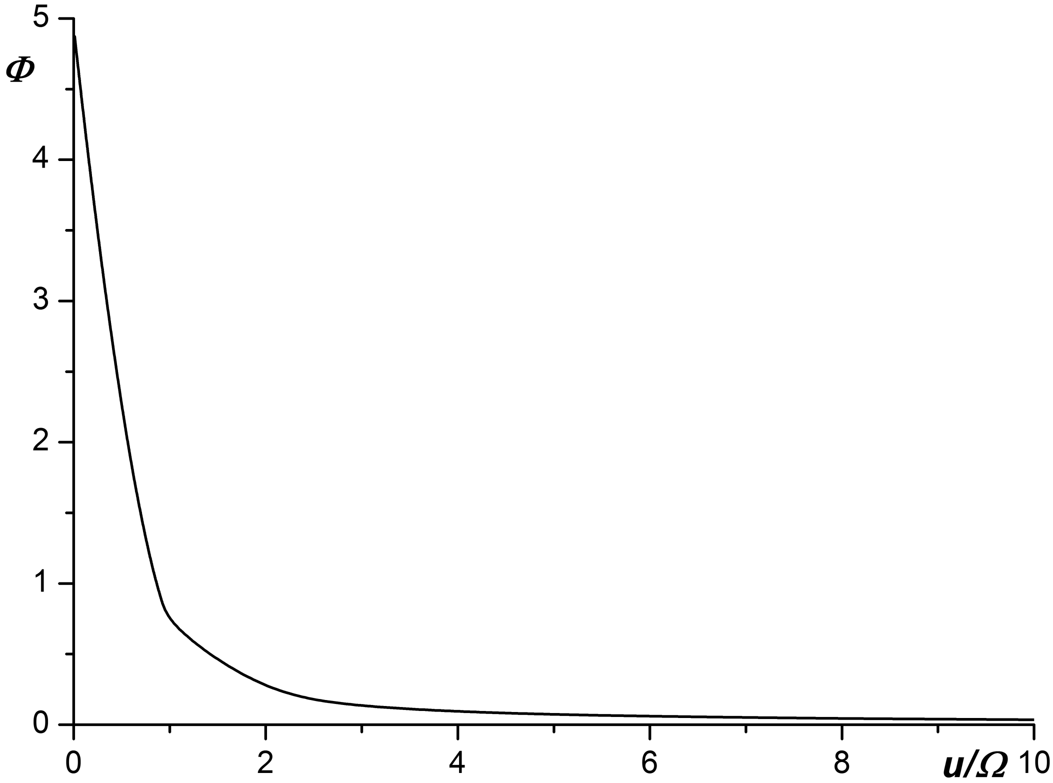

Рис. 1.6: Функция $\Phi\left(\frac{u}{\Omega}, 1\right)$

$\Omega \geq 0$, поэтому второе слагаемое в правой части соотношения (1.16) неположительно. В случае, когда коэффициент трения больше тангенса угла наклона плоскости ($\varkappa > 1$), из соотношения (1.16) следует, что

$$\dot{T} \leq (1 - \varkappa) I(u, \Omega)$$

При $0 \leq s \leq \dfrac{1}{2}$ выполняется неравенство $\tilde{n}(s, \beta) \geq \dfrac{1}{2}$, при этом $\tilde{n}(s, \beta) \geq 0$ для всех $0 \leq s \leq 1$, поэтому

$$\dot{T} \leq -\frac{\varkappa - 1}{4\pi} \int_0^{1/2} \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} \int\limits_0^{2\pi} D(u, \Omega; s, \beta) d\beta ds \tag{1.17}$$

Учитывая, что

$$D(u,\Omega;s,\beta)=\sqrt{u^2-2u\Omega s\sin\beta+\Omega^2 s^2}\geqslant\sqrt{1-|\sin\beta|}\sqrt{u^2+s^2\Omega^2}\geqslant$$
$$\geqslant s\sqrt{1-|\sin\beta|}\sqrt{u^2+\frac{\Omega^2}{2}} \tag{1.18}$$

из неравенства (1.17) имеем

$$\frac{d\left(\sqrt{2T}\right)}{dt}\leqslant -p,\quad p=\frac{(\sqrt{2}-1)(2\pi-3\sqrt{3})(\varkappa-1)}{12\pi}$$

Таким образом, $0\leqslant\sqrt{2T}\leqslant\sqrt{2T_0}-pt$, т.е. при $\varkappa>1$ шайба останавливается за конечное время

$$t_*\leqslant\frac{\sqrt{u_0^2+\Omega_0^2/2}}{p}<+\infty.$$

Скольжение и верчение шайбы (при $\Omega_0\neq 0$) прекращаются в один и тот же момент времени t_*.

Действительно, пусть существует момент времени $t_u<t_*$, такой, что

$$u(t)\equiv 0,\ \Omega(t)\neq 0 \text{ при } t\in[t_u,\ t_*)$$

Рассмотрим систему уравнений (1.5) на промежутке времени $[t_u,\ t_*)$. Скорость произвольной точки A основания шайбы в этом случае имеет вид

$$\mathbf{v}(A)=[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}(A)]=-\omega r\sin\beta\mathbf{e}_x+\omega r\cos\beta\mathbf{e}_y$$

Вычислим силу трения $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}=-\iint\limits_S kn(A)\frac{\mathbf{v}(A)}{|\mathbf{v}(A)|}dS=-k\lambda_0\iint\limits_S(-\sin\beta\mathbf{e}_x+\cos\beta\mathbf{e}_y)dS=\mathbf{0} \tag{1.19}$$

Следовательно, на промежутке времени $[t_u,\ t_*)$ не выполняется первое уравнение системы (1.5).

Если же существует момент времени $t_\Omega < t_*$, такой, что

$$\Omega(t) \equiv 0, u(t) \neq 0 \text{ при } t \in [t_\Omega,\ t_*)$$

то из последнего уравнения системы (1.15) следует, что $\Omega(t) \equiv 0$ при всех t, т.е. и при $t = 0$, что противоречит условию $\Omega_0 \neq 0$.

1.6 Предельное движение шайбы

Выясним характер предельного при $t \to t_* - 0$ движения шайбы. Для этого исследуем вопрос о существовании конечных пределов

$$z_* = \lim \frac{u(t)}{\Omega(t)},\ \psi_* = \lim \psi(t) \ \text{ при } t \to t_* - 0$$

полагая, без уменьшения общности, что $\Omega_0 > 0$ (при этом $\Omega(t) > 0$ при всех $t \in [0, t_*)$, случай $\Omega_0 < 0$ рассматривается аналогично).

Переходя к переменным

$$z = \frac{u}{\Omega},\ \tau = \ln \frac{\Omega_0}{\Omega}$$

перепишем уравнения движения шайбы (1.15) в виде

$$\begin{gathered} \frac{dz}{d\tau} = \frac{\cos\psi - \varkappa q}{2\varkappa f_3},\ \frac{d\psi}{d\tau} = -\frac{\sin\psi + \varkappa f_2}{2\varkappa z f_3} \\ q(z,\delta) = f_1(z,\delta) - 2z f_3(z,\delta) \end{gathered} \tag{1.20}$$

Здесь

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\int\limits_0^{2\pi}(1+\tilde{\lambda}_2 s\sin\beta)\frac{z-s\sin\beta}{D(z;s,\beta)}d\beta ds$$
$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\tilde{\lambda}_1\cos^2\beta}{D(z;s,\beta)}d\beta ds$$
$$f_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}\int\limits_0^{2\pi}(1+\tilde{\lambda}_2 s\sin\beta)\frac{s-z\sin\beta}{D(z;s,\beta)}d\beta ds$$

$$D(z;s,\beta) = \sqrt{z^2 - 2zs\sin\beta + s^2}$$

Положения равновесия (z_*, ψ_*) системы могут быть найдены как решения системы уравнений

$$\cos\psi_* = \varkappa q(z_*, \delta), \;\; \sin\psi_* = -\varkappa f_2(z_*, \delta) \tag{1.21}$$

Решение (1.21) существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$g(z,\delta) \overset{\text{def}}{=} q^2(z,\delta) + f_2^2(z,\delta) = \varkappa^{-2}$$

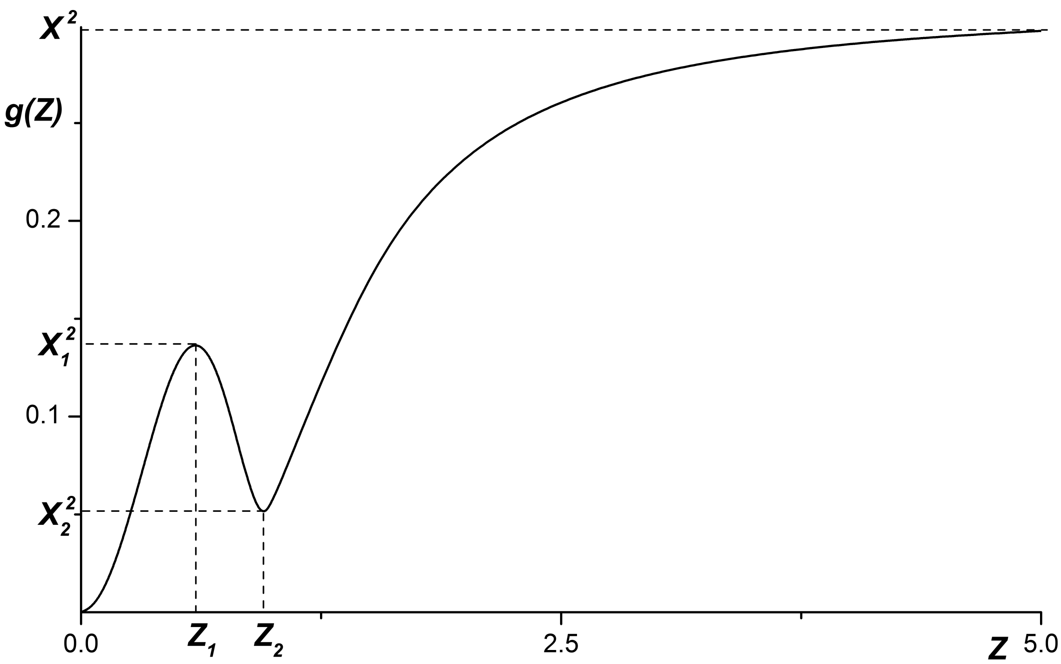

Рис. 1.7: График функции $g(z, \delta_*)$

Численный анализ показывает, что при фиксированном значении параметра $\delta = \delta_*$ функция $g(z, \delta_*)$ возрастает на промежутках $(0, z_1(\delta_*))$, $(z_2(\delta_*), +\infty)$ и убывает на промежутке $(z_1(\delta_*), z_2(\delta_*))$. На рис 1.7 приведен качественный вид графика функции $g(z, \delta_*)$.

Для того, чтобы найти $\lim\limits_{z \to +\infty} g(z, \delta)$, разложим функции $a_{11}(z, \delta)$, $a_{22}(z, \delta)$ и $a_{20}(z, \delta)$ в ряд Тейлора по степеням $l = \dfrac{1}{z}$ в окрестности точки $l = 0$:

$$a_{11} = \left(-\frac{2}{3}\pi a^2 kh\right) l + O(l^2)$$

$$a_{20} = -2\pi akh + O(l)$$

$$a_{22} = O(l)$$

Учитывая соотношения (1.9,1.14), получим следующие разложения для $\tilde{\lambda_1}$, $\tilde{\lambda_2}$ и f_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$\tilde{\lambda_1} = \delta + O(l)$$

$$\tilde{\lambda_2} = \frac{\delta^2}{3} l + O(l^2)$$

$$f_1 = 1 + O(l)$$

$$f_2 = O(l)$$

$$f_3 = \left(\frac{1}{3} - \frac{\delta^2}{9}\right) l + O(l^2)$$

Таким образом, для функции $g(z, \delta)$ при $z \to +\infty$ имеем

$$g(z, \delta) = \left(\frac{3 + 2\delta^2}{9}\right)^2 + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

Значит,

$$\lim_{z \to +\infty} g(z, \delta) = \left(\frac{3 + 2\delta^2}{9}\right)^2$$

и система (1.21) имеет решения только при $\varkappa^{-1} < \dfrac{3+2\delta^2}{9}$.

В зависимости от значений $x = \varkappa^{-1}$ и δ система (1.20) может иметь одно, два или три положения равновесия (см. рис 1.7). Пусть $x_i(\delta) = \sqrt{g(z_i)}$, тогда

- при $0 < x < x_2(\delta)$ и $x_1(\delta) < x < \dfrac{3+2\delta^2}{9}$ одно положение равновесия
- при $x_2(\delta) < x < x_1(\delta)$ — три положения равновесия
- при $x = x_1(\delta)$ и $x = x_2(\delta)$ — два положения равновесия

Исследуем положения равновесия на устойчивость. Для этого рассмотрим систему первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= -\frac{q^{'}(z_*)}{2f_3(z_*)}(z - z_*) - \frac{\sin\psi_*}{2\varkappa f_3(z_*)}(\psi - \psi_*) \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= -\frac{f_2^{'}(z_*)}{2z_* f_3(z_*)}(z - z_*) + \frac{\cos\psi_*}{2\varkappa z_* f_3(z_*)}(\psi - \psi_*) \end{aligned} \qquad (1.22)$$

Ее характеристический многочлен имеет вид

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{2z_* f_3(z_*,\delta)}\left(q(z_*,\delta) + z_* q'_z(z_*,\delta)\right)\lambda + \frac{1}{8z_* f_3^2(z_*,\delta)} g'_z(z_*,\delta) \quad (1.23)$$

При фиксированном значении $\delta = \delta_*$ можно численно построить графики коэффициентов $(q(z,\delta_*) + zq'_z(z,\delta_*))$, $g^{'}(z,\delta_*)$ и определить их знаки. На рис. 1.8 приведен качественный вид графиков указанных функций. График функции $(q(z,\delta_*) + zq'_z(z,\delta_*))$ пересекает ось Oz в точке $z_3(\delta_*)$, а $g'_z(z,\delta_*)$ — в точках $z_1(\delta_*)$ и $z_2(\delta_*)$. Численный анализ показывает, что для всех $\delta \in [0,1]$ выполнено неравенство $z_1(\delta) < z_3(\delta) < z_2(\delta)$. Следовательно, положение равновесия (z_*,ψ_*) системы (1.20) асимптотически устойчиво, если $z_* > z_2$, и неустойчиво, если $z_* < z_2$. Значит, при $x_1(\delta) < x < \dfrac{3+2\delta^2}{9}$ система имеет одно асимтотически устойчивое положение равновесия, при $x_2(\delta) < x < x_1(\delta)$ — одно асимтотически устойчивое положение равновесия и два неустойчивых, при $x < x_2(\delta)$ — одно неустойчивое.

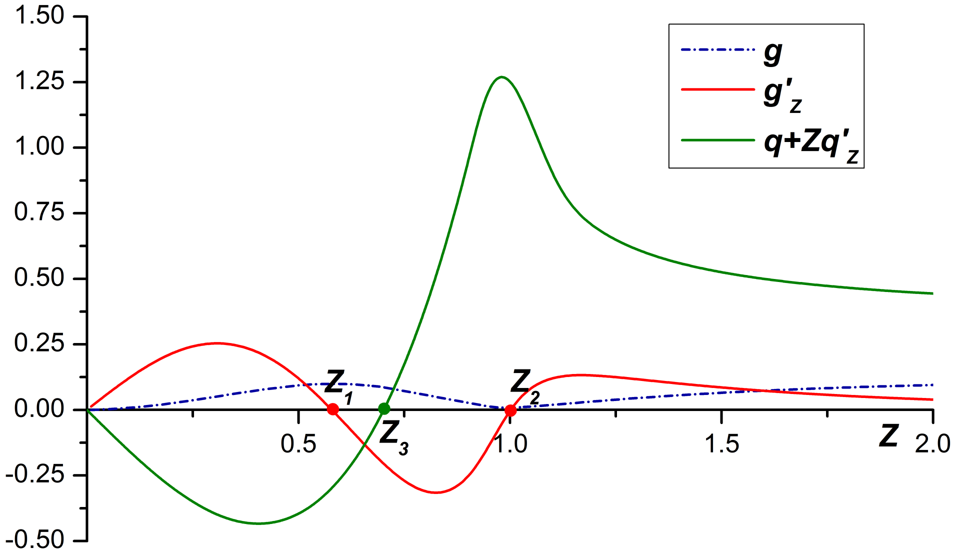

Рис. 1.8: Коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ при $\delta = 0.4$

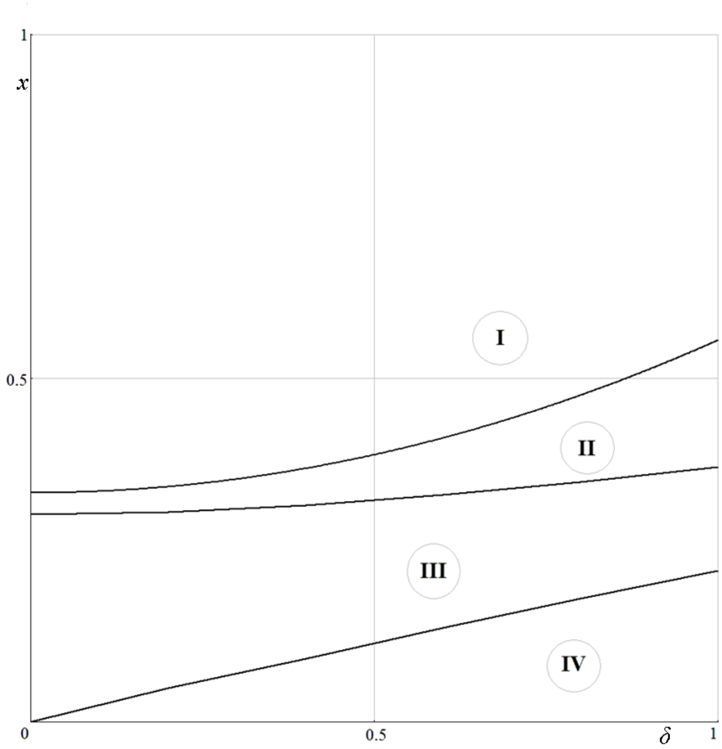

Рис. 1.9: Плоскость параметров x и δ

Удобно проиллюстрировать результаты на плоскости параметров $x \in (0, 1)$ и $\delta \in [0, 1]$ (см. рис. 1.9). Плоскость параметров разбивается на четыре области:

- в области I нет положений равновесия
- II — одно асимптотически устойчивое
- III — одно асимптотически устойчивое и два неустойчивых
- IV— одно неустойчивое

1.7 Численное исследование предельных движений шайбы

Проиллюстрируем результаты, полученные при качественно-аналитическом исследовании предельных движений шайбы, при помощи численного интегрирования уравнений движения (1.20). Так как функции f_n $(n = 1, 2, 3)$, стоящие в правой части системы (1.20), имеют очень громоздкий вид, для численного интегрирования заменим их соответствующими аппроксимациями Паде. Для функций f_1 и f_3 будем использовать разложения Паде второго порядка, а для f_2 — четвертого порядка.

Аналогично известному подходу [11] получаем следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_1 &= \frac{\phi_1}{\phi_1 + 1},\ \phi_1 = z^2 + \frac{\pi\left(64 - \pi^2\delta^2\right)}{4\left(64 + \pi^2\delta^2\right)} z \\
\tilde{f}_3 &= \frac{\pi}{4}\frac{\phi_3}{\phi_3 + z^2},\ \phi_3 = 1 + \frac{4(3 - \delta^2)}{9\pi} z
\end{aligned}$$

Для построения Паде-разложения функции f_2 представим ее в виде

$$f_2 = \tilde{\lambda}_1(z) f(z),\ f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{s^2}{\sqrt{1 - s^2}}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2\beta}{D(z; s, \beta)} d\beta ds$$

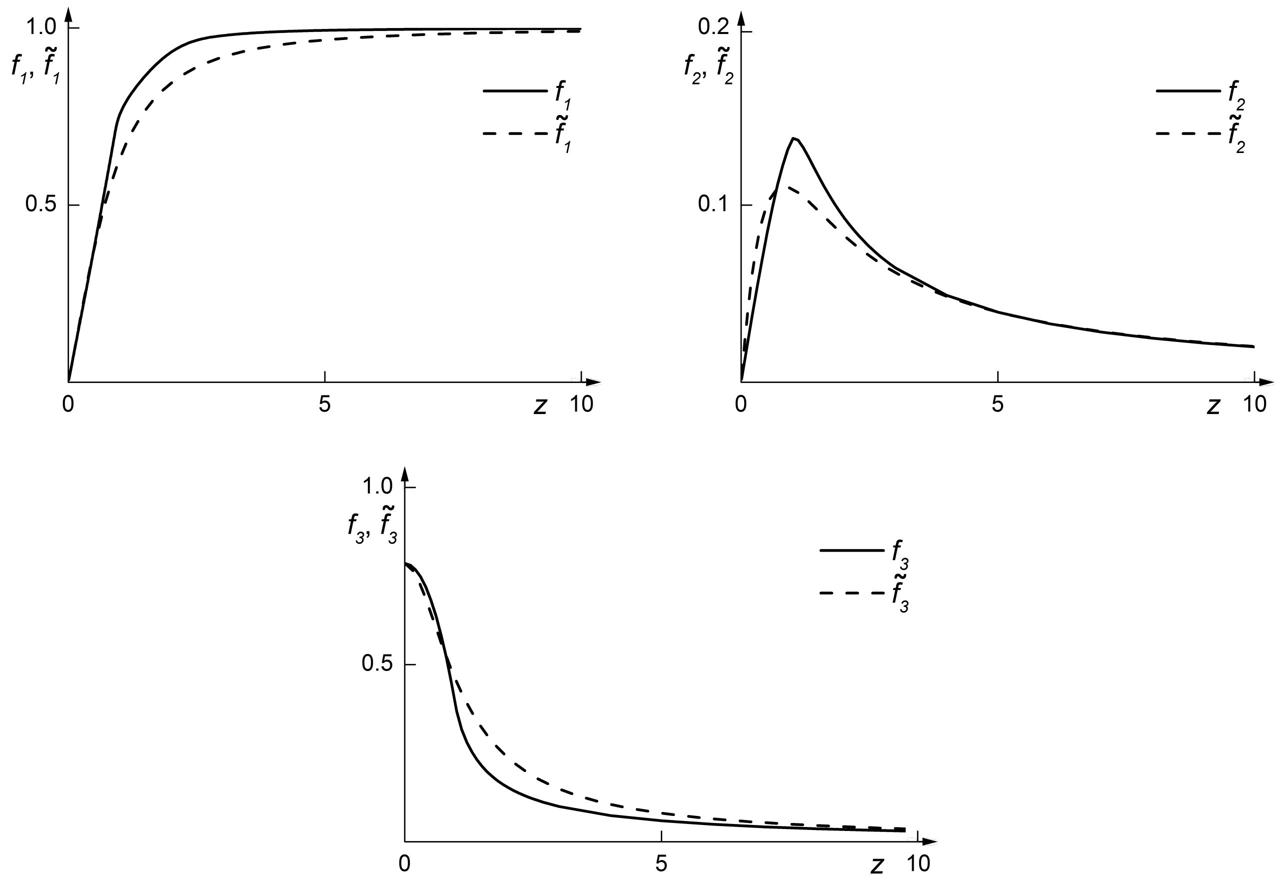

Рис. 1.10: Графики функций $f_i\,(z)\,(i = 1, 2, 3)$ и их Паде-аппроксимаций при $\delta = 0.6$

Построив Паде-аппроксимации второго порядка для функций $\tilde{\lambda}_1$ и f, получим разложение Паде четвертого порядка для функции f_2:

$$\tilde{f}_2 = \xi \frac{\left(z^2 + (2\pi/(1+\xi^2))z\right)(1 + (8/(3\pi))z)}{(z^2 + (2\pi/(1+\xi^2))z + 1)\,(1 + (8/(3\pi))z + z^2)}, \ \xi = \frac{\pi\delta}{8}$$

На рис.1.10 приведены графики функций $f_i\,(z)\,(i = 1, 2, 3)$ и их Паде-аппроксимаций при $\delta = 0.6$.

Рассмотрим фазовые траектории системы (1.20) для случая, когда параметры x и δ принадлежат области II (рис. 1.9). Численное интегрирование системы проводилось при $x = 0.4$, $\delta = 0.8$ и разных начальных условиях. Характерные результаты приведены на рис. 1.11 а, откуда видно, что фазовые траектории при $\tau \to +\infty$ сходятся в одной точке. Следовательно, для некоторой области начальных данных $(u_0,\, \Omega_0,\, \psi_0) \in D$ выполнено условие

$$z(t) \to z_*, \quad \psi(t) \to \psi_* \ \text{при } t \to t_* - 0$$

При этом значения z_* и ψ_* зависят только от значений параметров x и δ и не зависят от конкретных начальных данных u_0, Ω_0, ψ_0. Аналогичные результаты получаются в случае, когда параметры x и δ лежат в области III.

Иная картина наблюдается для областей I и IV. На рис. 1.11 b) изображены фазовые траектории системы при $x = 0.8, \delta = 0.05$, т.е. в случае, когда x и δ лежат в области IV. Видно, что в этом случае $\psi(\tau) \to -\infty$ при $\tau \to +\infty$, а значит, $\psi(t) \to -\infty$ при $t \to t_* - 0$. При исследовании фазовых траекторий для области I параметров $\varkappa$ и δ численный анализ показывает (рис. 1.11 c), что

$$z(\tau) \to +\infty \text{ при } \tau \to +\infty$$

Следовательно,

$$z(t) \to +\infty \text{ при } t \to t_* - 0$$

Таким образом, численные расчеты показывают, что при наличии у системы (1.20) асимптотически устойчивого положения равновесия (области II и III параметров x, δ), фазовые траектории системы стягиваются к точке (z_*, ψ_*). В случае, когда положения равновесия у системы отсутствуют (облась I), численный анализ показывает, что $\lim\limits_{\tau \to +\infty} z(\tau) = +\infty$, а значит, $\lim\limits_{t \to t_* - 0} z(t) = +\infty$. Если же система (1.20) имеет только неустойчивое положение равновесия (область IV), то $\lim\limits_{t \to t_* - 0} \psi(t) = -\infty$. Надо отметить, что область IV соответствует значениям x, близким к нулю, то есть малым значениям угла α (плоскость движения близка к горизонтальной). В случае горизонтальной плоскости в работе [22] было доказано, что угол поворота

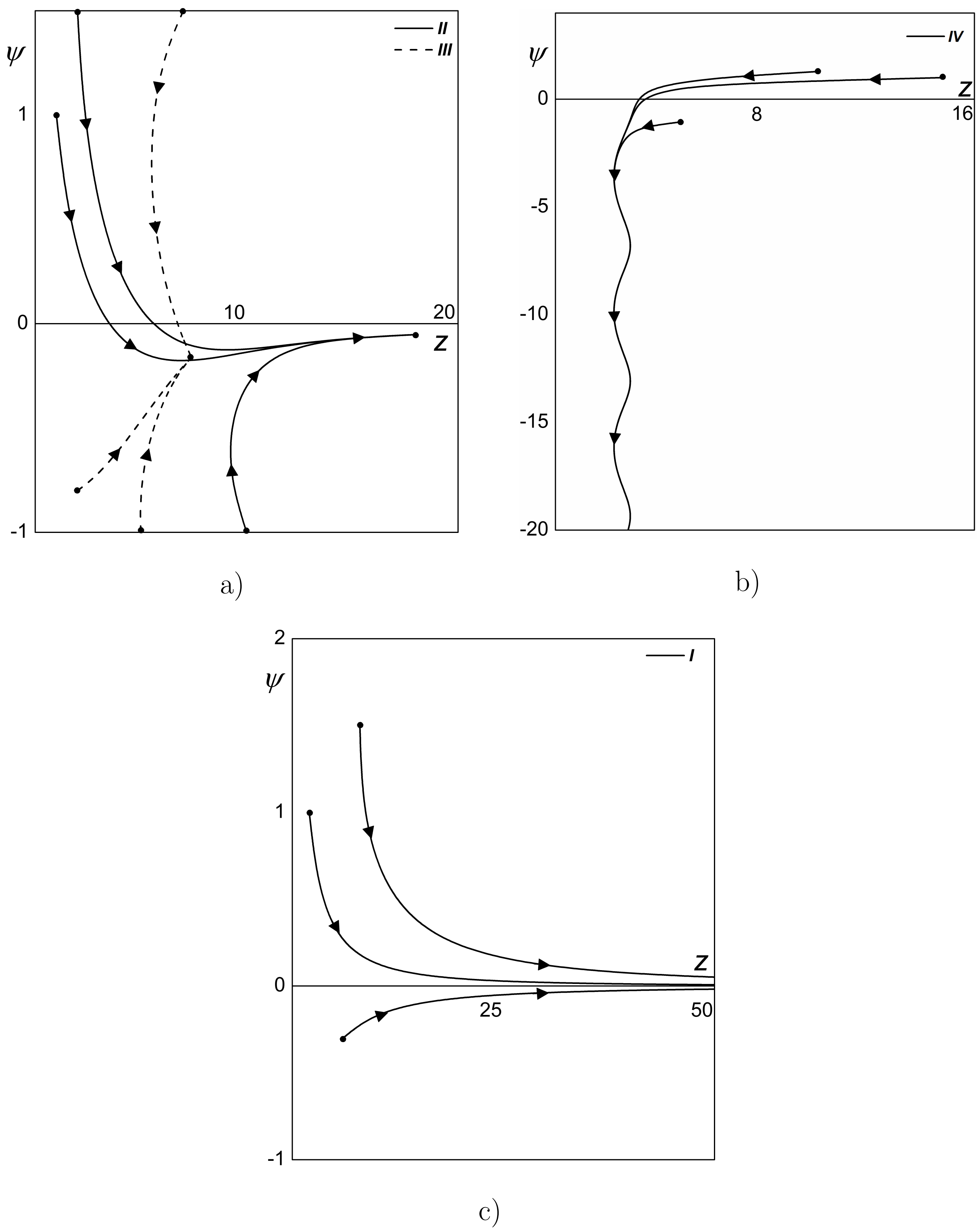

Рис. 1.11: Фазовые траектории системы (1.20)

вектора скорости центра масс стремится к $-\infty$ при $t \to t_* - 0$. Поэтому то обстоятельство, что $\lim\limits_{t \to t_* - 0} \psi(t) = -\infty$ при $(x, \delta) \in IV$ согласуется с результатами, полученными в [22].

Глава 2

Динамика шайбы в линейной динамически совместной модели трения

2.1 Постановка задачи. Описание модели

Рассмотрим задачу, описанную в параграфе 1.1, используя динамически совместную модель трения, предложенную А. П. Ивановым [12]. Согласно данной модели, функция плотности нормального давления линейна относительно координат точек основания шайбы:

$$n(A) = \lambda_0 + \lambda_1 r \cos\beta + \lambda_2 r \sin\beta \tag{2.1}$$

причем коэффициенты λ_0, λ_1, λ_2 определяются в каждый момент времени из соотношений (1.3).

Как было показано [12, 37], $\lambda_0 = \dfrac{mg\cos\alpha}{\pi a^2}$, а коэффициенты λ_1, λ_2 находятся как решение системы двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 &= a_{10}\lambda_0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 &= a_{20}\lambda_0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$a_{11} = -kha^3\int\limits_0^1 s^3\int\limits_0^{2\pi}\frac{\Omega\cos^2\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds$$

$$a_{22} = \ kha^3\int\limits_0^1 s^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{(u-\Omega s\sin\beta)\sin\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds$$

$$a_{12} = -a_{21} = \frac{\pi a^4}{4},\ a_{10} = 0$$

$$a_{20} = -kha^2\int\limits_0^1 s\int\limits_0^{2\pi}\frac{u-\Omega s\sin\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds$$

Система (2.2) имеет единственное решение

$$\begin{gathered} \lambda_1 = -\frac{a_{12}a_{20}\lambda_0}{\Delta},\ \lambda_2 = \frac{a_{11}a_{20}\lambda_0}{\Delta} \\ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

В дальнейшем будет удобно использовать следующие обозначения:

$$\tilde{n}(s,\beta) = 1 + \tilde{\lambda}_1 s\cos\beta + \tilde{\lambda}_2 s\sin\beta$$

$$n(A) = \lambda_0\tilde{n}(s,\beta)$$

$$\tilde{\lambda}_i = a\lambda_i/\lambda_0,\ i = 1,2$$

Выпишем выражения для $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$:

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{4\pi a^7 kh\tilde{a_{20}}}{16a^6k^2h^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{22}} + \pi^2 a^8}$$
$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{16a^6k^2h^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{20}}}{16a^6k^2h^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{22}} + \pi^2 a^8}$$

$$a_{11} = -a^3kh\tilde{a_{11}},\ a_{22} = -a^3kh\tilde{a_{22}},\ a_{20} = -a^2kh\tilde{a_{20}}$$

Введем параметр $\delta = \dfrac{4kh}{a}$, тогда

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\pi\delta\tilde{a_{20}}}{\delta^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{22}} + \pi^2}$$
$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\delta^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{20}}}{\delta^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{22}} + \pi^2}$$

Опишем некоторые свойства функции $n(A)$ [12].

- При вращательно-поступательном движении коэффициенты λ_i, $(i = 1, 2)$ положительны:

$$\lambda_i > 0, (i = 1, 2) \text{ при } u > 0, \Omega > 0$$

- При вращательном движении ($u = 0$, $\Omega > 0$) коэффициент a_{20} обращается в нуль, поэтому

$$\lambda_1|_{u=0} = \lambda_2|_{u=0} = 0$$

  Значит, $n(A) = \dfrac{mg\cos\alpha}{\pi a^2}$, то есть нормальное давление распределено равномерно по основанию шайбы.

- В случае поступательного движения шайбы ($u > 0$, $\Omega = 0$) имеем

$$\tilde{a_{11}}|_{\Omega=0} = \tilde{a_{22}}|_{\Omega=0} = 0,\ \ \tilde{a_{20}}|_{\Omega=0} = \pi$$

Следовательно,

$$\tilde{\lambda}_1\Big|_{\Omega=0} = \delta, \quad \tilde{\lambda}_2\Big|_{\Omega=0} = 0$$

$$\tilde{n}(s, \beta) = 1 + \delta s \cos\beta$$

Таким образом, в случае поступательного движения шайбы функция плотности нормального давления $n(A)$ имеет вид

$$n(A) = \frac{mg\cos\alpha}{\pi a^2}(1 + \delta s\cos\beta)$$

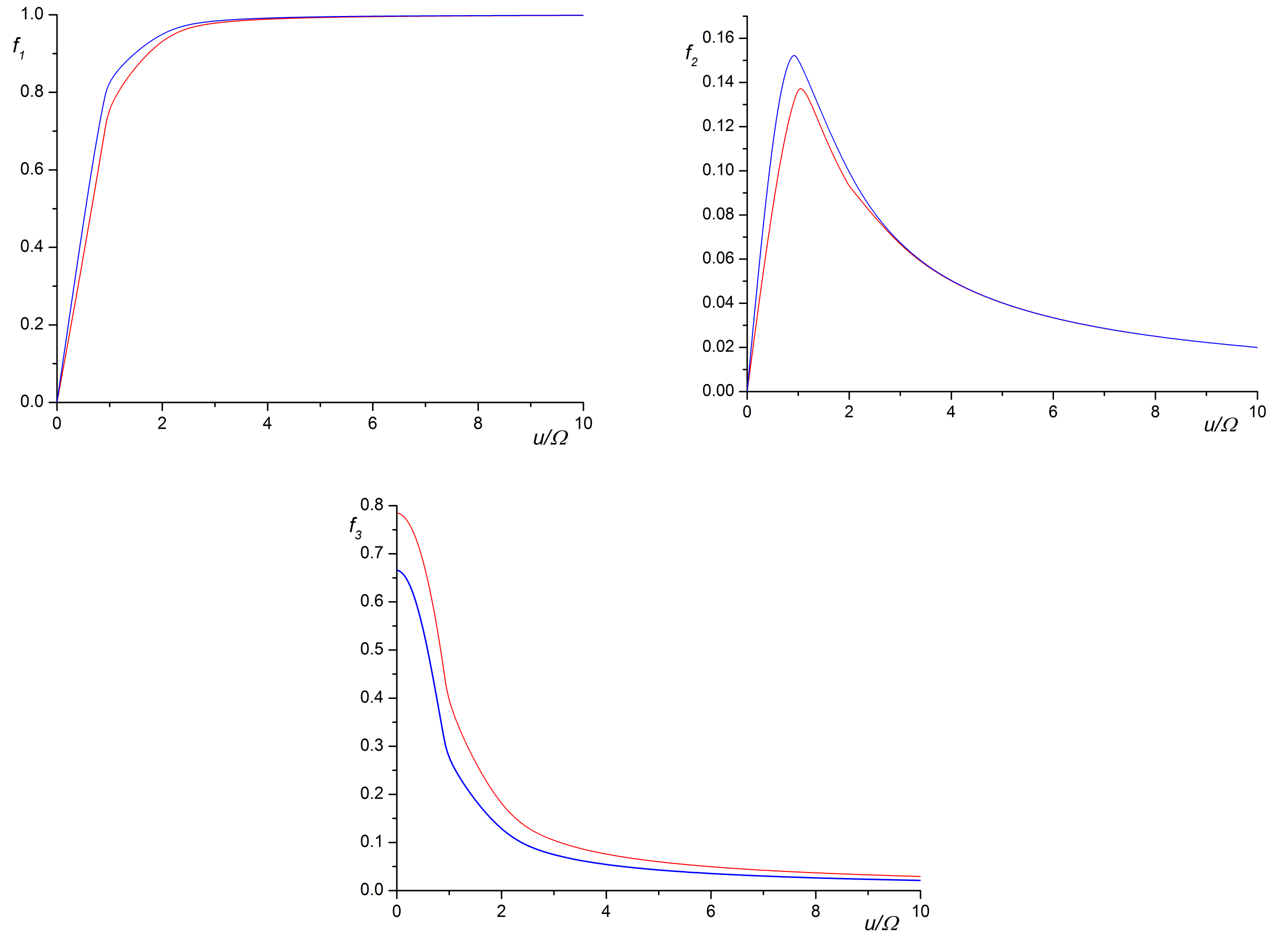

Рис. 2.1: Графики функций $f_i\,(u/\Omega)\,(i = 1, 2, 3)$ для линейной (синие кривые) и нелинейной (красные кривые) моделей трения

- Условие $\delta \in [0, 1]$ является необходимым и достаточным для неотрицательности функции $n(A)$ на всех движениях шайбы [12, 22].

Заметим, что условие неотрицательности функции плотности нормального давления $n(A)$ накладывает различные ограничения на отношение kh/a для линейной и нелинейной моделей трения. Как было показано в главе 1, в случае нелинейной модели должно выполняться условие $\frac{kh}{a} \in [0, 1/3]$, для линейной модели $\frac{kh}{a} \in [0, 1/4]$. Также различие линейной и нелинейной моделей трения отражается на поведении функций f_i, $(i = 1, 2, 3)$. На рис.2.1 приведены графики функций для фиксированного значения $\frac{kh}{a} = 0,2$, где красным построены кривые для нелинейной модели трения, а синим — для линейной.

2.2 Уравнения движения

Подставляя (2.1) в выражения для сил и моментов (1.2), получим результирующую силу трения, действующую на шайбу, и главный момент внешних сил, вычисленный относительно центра масс

$$\mathbf{F} = -F_1\mathbf{e}_1 - F_2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{M} = -M\mathbf{e}_3$$

Здесь

$$F_i = \pi k a^2 \lambda_0 f_i,\ i = 1, 2,\ M = \pi k a^3 \lambda_0 f_3$$

$$f_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 s \int\limits_0^{2\pi} (1 + \tilde{\lambda}_2 s \sin\beta) \frac{u - \Omega s \sin\beta}{D(u, \Omega; s, \beta)} d\beta ds$$

$$f_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 s^3 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\tilde{\lambda}_1 \Omega \cos^2\beta}{D(u, \Omega; s, \beta)} d\beta ds$$

$$f_3 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 s^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 + \tilde{\lambda}_2 s \sin\beta) \frac{\Omega s - u \sin\beta}{D(u, \Omega; s, \beta)} d\beta ds$$

Без ограничения общности выберем единицы измерения массы, длины и времени так, что

$$m = 1,\ a = 1,\ g\sin\alpha = 1$$

Тогда уравнения движения шайбы (1.4) примут вид

$$\dot{u} = \cos\psi - \varkappa f_1,\ u\dot{\psi} = -\sin\psi - \varkappa f_2, \dot{\Omega} = -2\varkappa f_3 \tag{2.4}$$
$$\varkappa = \frac{k}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Можно заметить, что $f_3|_{\Omega=0} = 0$, поэтому множество $\Omega = 0$ инвариантно относительно системы (2.4). Значит, знак угловой скорости не меняется в процессе движения шайбы. Далее будем предполагать, что $\Omega \geq 0$ (случай $\Omega \leq 0$ рассматривается аналогично).

2.3 Динамика шайбы при $\varkappa > 1$

Вычислим производную от кинетической энергии шайбы $T = \dfrac{1}{2}\left(u^2 + \dfrac{\Omega^2}{2}\right)$ по времени в силу системы (2.4):

$$\dot{T} = u\cos\psi - \frac{\varkappa}{\pi}\int_0^1 s\int_0^{2\pi} \tilde{n}(s,\beta)D(u,\Omega;s,\beta)d\beta ds$$

Введем обозначение

$$I(u,\Omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 s\int_0^{2\pi} \tilde{n}(s,\beta)D(u,\Omega;s,\beta)d\beta ds \tag{2.5}$$

и представим $\dot{T}$ в виде

$$\dot{T} = u(\cos\psi - 1) + [u - J(u,\Omega)] + \frac{1-\varkappa}{\pi}\int_0^1 s\int_0^{2\pi} \tilde{n}(s,\beta)D(u,\Omega;s,\beta)d\beta ds \tag{2.6}$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (2.6) неположительно. Второе слагаемое можно представить в виде

$$u - I(u,\Omega) = -\frac{\Omega}{\pi}\Phi\left(\frac{u}{\Omega},\delta\right)$$
$$\Phi\left(\frac{u}{\Omega},\delta\right) = \int_0^1 s\int_0^{2\pi}(1+\tilde{\lambda}_2 s\sin\beta)\left(\sqrt{(\frac{u}{\Omega})^2 - 2\frac{u}{\Omega}s\sin\beta + s^2} - \frac{u}{\Omega}\right)$$

Производная от функции $\Phi\left(\frac{u}{\Omega},\delta\right)$ по δ имеет вид:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\delta} = \frac{\partial\tilde{\lambda}_2}{\partial\delta}\int_0^1 s^2\int_0^{2\pi}\sqrt{(\frac{u}{\Omega})^2 - 2\frac{u}{\Omega}s\sin\beta + s^2}\sin\beta d\beta ds$$
$$\frac{\partial\tilde{\lambda}_2}{\partial\delta} = \frac{2\delta\tilde{a_{11}}\tilde{a_{20}}}{(\delta^2\tilde{a_{11}}\tilde{a_{22}}+\pi^2)^2}$$

При $\delta\in[0,1]$ производная $\frac{\partial\tilde{\lambda}_2}{\partial\delta}\geq 0$, при этом справедливо неравенство

$$\int_0^1 s^2\int_0^{2\pi}\sqrt{(\frac{u}{\Omega})^2 - 2\frac{u}{\Omega}s\sin\beta + s^2}\sin\beta d\beta ds \leq 0$$

Таким образом, $\frac{\partial\Phi}{\partial\delta}\leq 0$ при всех допустимых значениях δ. Численный анализ показывает, что функция $\Phi\left(\frac{u}{\Omega},1\right)\geq 0$. Следовательно, $\Phi\left(\frac{u}{\Omega},\delta\right)\geq 0$ при всех $\delta\in[0,1]$. Так как в процессе движения цилиндра $\Omega\geq 0$, второе слагаемое в правой части соотношения (2.6) неположительно.

Пусть коэффициент трения больше тангенса угла наклона плоскости. Из соотношения (2.6) следует, что

$$\dot{T}\leq -\frac{\varkappa-1}{\pi}\int_0^1 s\int_0^{2\pi}\tilde{n}(s,\beta)D(u,\Omega;s,\beta)d\beta ds \leq$$
$$\leq -\frac{\varkappa-1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} s\int_0^{2\pi}\tilde{n}(s,\beta)D(u,\Omega;s,\beta)d\beta ds$$

При $0\leq s\leq\frac{1}{2}$ выполняется неравенство $\tilde{n}(s,\beta)\geq\frac{1}{2}$, поэтому

$$\dot{T}\leq -\frac{\varkappa-1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} s\int_0^{2\pi}D(u,\Omega;s,\beta)d\beta ds$$

Учитывая неравенство (1.18), получим

$$\frac{d\left(\sqrt{2T}\right)}{dt} \leqslant -p, \quad p = \frac{(\sqrt{2}-1)(\varkappa-1)}{6\pi}$$

Таким образом, $0 \leqslant \sqrt{2T} \leqslant \sqrt{2T_0} - pt$, т.е. при $\varkappa > 1$ цилиндр останавливается за конечное время

$$t_* \leqslant \left(u_0^2 + \Omega_0^2/2\right)^{1/2}/p < +\infty.$$

Точно так же, как это было сделано в параграфе 1.5, можно показать, что скольжение и верчение шайбы (при $\Omega_0 \neq 0$) прекращаются в один и тот же момент времени t_*.

2.4 Предельные движения шайбы в случае $\varkappa > 1$

Для исследования характера предельных движений шайбы воспользуемся подходом, описанным в параграфе 1.6. В переменных $z = \dfrac{u}{\Omega}$ и $\tau = \ln\dfrac{\Omega_0}{\Omega}$ система (2.4) примет вид (1.20):

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\cos\psi - \varkappa q}{2\varkappa f_3}, \ \frac{d\psi}{d\tau} = -\frac{\sin\psi + \varkappa f_2}{2\varkappa z f_3} \qquad (2.7)$$
$$q(z,\delta) = f_1(z,\delta) - 2z f_3(z,\delta),$$

где функции f_1, f_2 и f_3 определяются формулами

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 s\int\limits_0^{2\pi}(1+\tilde{\lambda}_2 s\sin\beta)\frac{z-s\sin\beta}{D(z;s,\beta)}d\beta ds \\
f_2 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 s^3\int\limits_0^{2\pi}\frac{\tilde{\lambda}_1\cos^2\beta}{D(z;s,\beta)}d\beta ds \\
f_3 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 s^2\int\limits_0^{2\pi}(1+\tilde{\lambda}_2 s\sin\beta)\frac{s-z\sin\beta}{D(z;s,\beta)}d\beta ds
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

$$
D(z;s,\beta) = \sqrt{z^2 - 2zs\sin\beta + s^2}
$$

Нахождение положений равновесия системы (2.7) и исследование их устойчивости проводится тем же способом, что и в параграфе 1.6. В рассматриваемом случае поведение функции $g(z,\delta)$ качественно не меняется. Следовательно, при фиксированном значении $\delta = \delta_*$ функция $g(z,\delta_*)$ возрастает на промежутках $(0, z_1(\delta_*))$, $(z_2(\delta_*), +\infty)$ и убывает на промежутке $(z_1(\delta_*), z_2(\delta_*))$. Таким образом, система (2.7) в зависимости от параметра $\varkappa$ имеет одно, два или три положения равновесия, либо не имеет их вовсе.

Исследуем поведение функции $g(z,\delta)$ при $z \to +\infty$. Для этого разложим функции $a_{11}(z,\delta)$, $a_{22}(z,\delta)$ и $a_{20}(z,\delta)$ в ряд Тейлора по степеням $l = \dfrac{1}{z}$ в окрестности точки $l = 0$:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \left(-\frac{\pi a^2 kh}{4}\right) l + O(l^2) \\
a_{20} &= -\pi a^2 kh + O(l) \\
a_{22} &= O(l)
\end{aligned}
$$

Используя формулы (2.3, 2.8) получим следующие разложения для $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$ и

f_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$\tilde{\lambda}_1 = \delta + O(l)$$
$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\delta^2}{3} l + O(l^2)$$

$$f_1 = 1 + O(l)$$
$$f_2 = O(l)$$
$$f_3 = \left(\frac{1}{4} - \frac{\delta^2}{16}\right) l + O(l^2)$$

Значит,

$$\lim_{z \to +\infty} g(z, \delta) = \left(\frac{4 + \delta^2}{8}\right)^2$$

и система (2.7) имеет решения только при $\varkappa^{-1} < \dfrac{4 + \delta^2}{8}$.

Для исследования положений равновесия $(z_*,\ \psi_*)$ рассмотрим систему первого приближения для (2.7), которая имеет вид (1.22), и ее характерисический многочлен (1.23). В отличие от задачи, рассмотренной в параграфе 1.6, возможны две качественно различные ситуации:

- При $0 \leq \delta < \delta_0$ $(\delta_0 \approx 0.77)$ точки z_1, z_2, z_3 расположены в следующем порядке (см. рис. 2.2):

  $$z_1(\delta) < z_3(\delta) < z_2(\delta)$$

  Поэтому в этом случае положение равновесия (z_*, ψ_*) системы (2.7) асимптотически устойчиво, если $z_* > z_2$, и неустойчиво, если $z_* < z_2$. То есть при $x_1(\delta) < x < \dfrac{4 + \delta^2}{8}$ система имеет одно асимтотически устойчивое положение равновесия, при $x_2(\delta) < x < x_1(\delta)$ — одно асимтотически устойчивое положение равновесия и два неустойчивых, при $x < x_2(\delta)$ — одно неустойчивое.

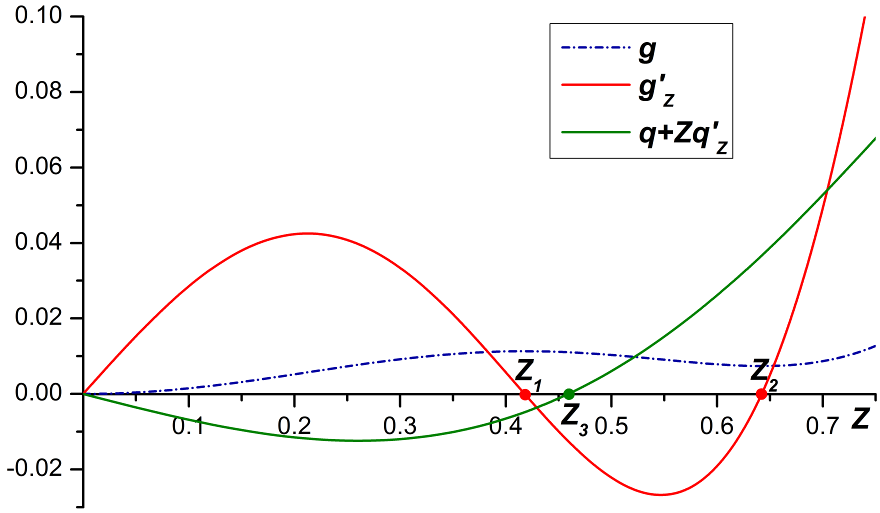

Рис. 2.2: Коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ при $\delta = 0.5$

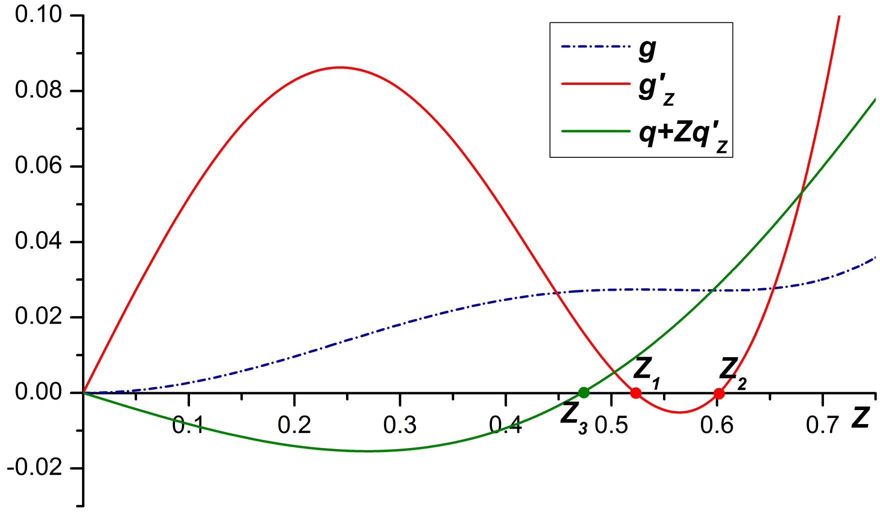

Рис. 2.3: Коэффициенты характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ при $\delta = 1$

- При $\delta_0 < \delta \leq 1$ имеет место неравенство

$$z_3(\delta) < z_1(\delta) < z_2(\delta)$$

При этом для точек x_i $(i = 1, 2, 3)$ при δ, близких к δ_0, выполнено соотношение

$$x_2(\delta) < x_3(\delta) < x_1(\delta),$$

а при δ, близких к 1, выполнено (см. рис. 2.3)

$$x_3(\delta) < x_2(\delta) < x_1(\delta)$$

Удобно проиллюстрировать все результаты на плоскости параметров $x \in (0, 1)$ и $\delta \in [0, 1]$ (см. рис. 2.4). В области I нет положений равновесия, II — одно асимптотически устойчивое, III — одно асимптотически устойчивое и два неустойчивых, IV — два асимптотически устойчивых и одно неустойчивое, V — одно асимптотически устойчивое, VI— одно неустойчивое.

Так как в случае, когда параметры x и δ принадлежат области IV, система (2.7) имеет два различных асимптотически устойчивых положения равновесия, то в зависимости от начальных условий $u_0 \neq 0$, $\Omega_0 \neq 0$, ψ_0 возможны два различных предельных значения z_* для $\dfrac{u}{\Omega}$. Это обстоятельство является существенным отличием данной задачи от рассмотренной ранее в главе 1, а также от задачи о движении шайбы по горизонтальной плоскости [22].

Необходимо отметить, что на границах между областями III и IV, а также V и VI характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ имеет пару чисто мнимых корней. Значит, при этих значениях параметров x, δ в системе (2.7) имеет место бифуркация Пуанкаре-Андронова-Хопфа и рождение периодических решений в переменных z, τ. Данный факт был численно подтвержден в работе [3]. Все остальные границы соответствуют случаю, когда один из корней многочлена $\chi(\lambda)$ нулевой. При этом в случае одного нулевого корня характеристического многочлена новые положения появлются не в точке уже существующего равновесия. Это проиллюстрировано на бифуркационной диаграмме (рис. 2.5), построенной при фиксированном $\delta = 0.6$.

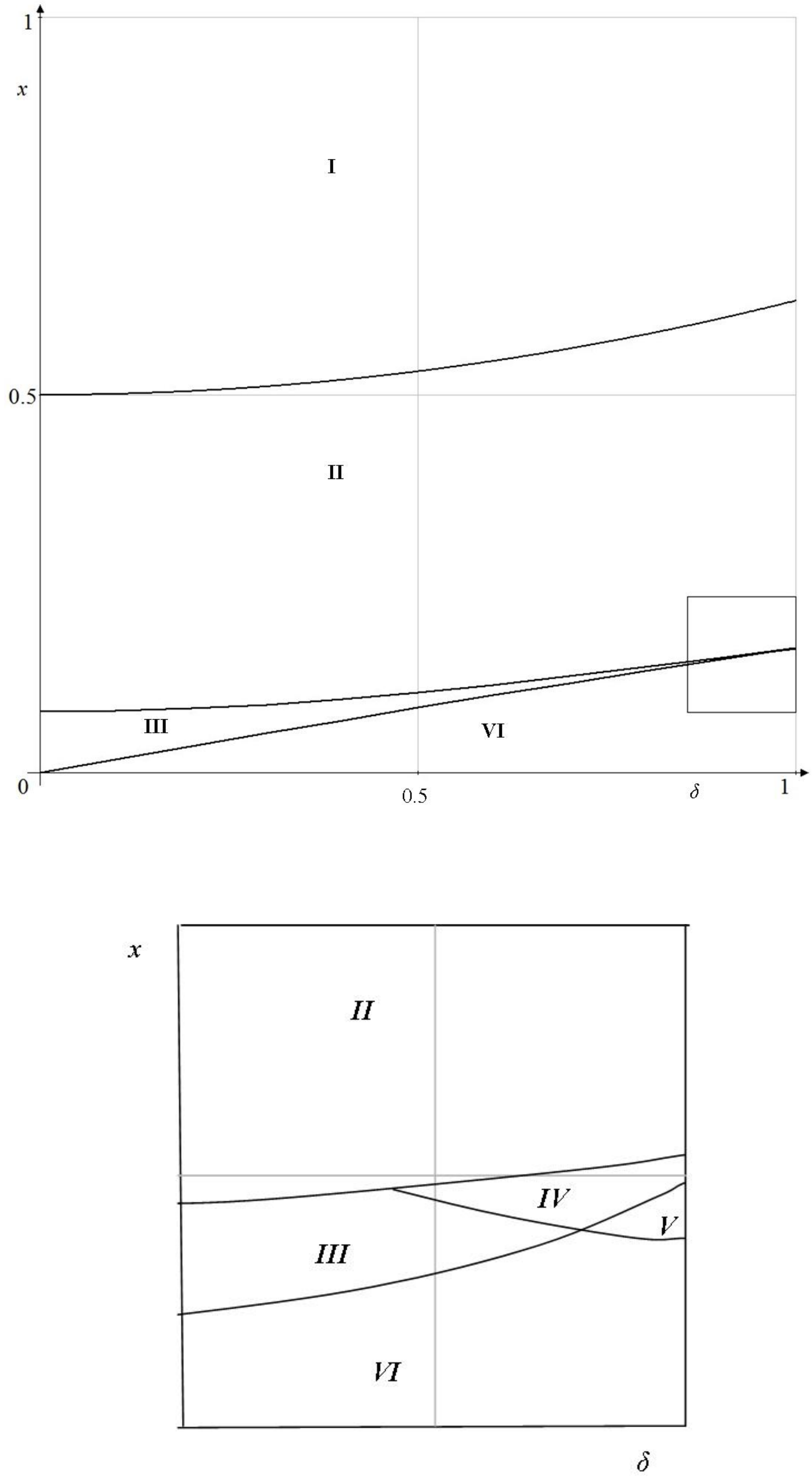

Рис. 2.4: Плоскость параметров x и δ

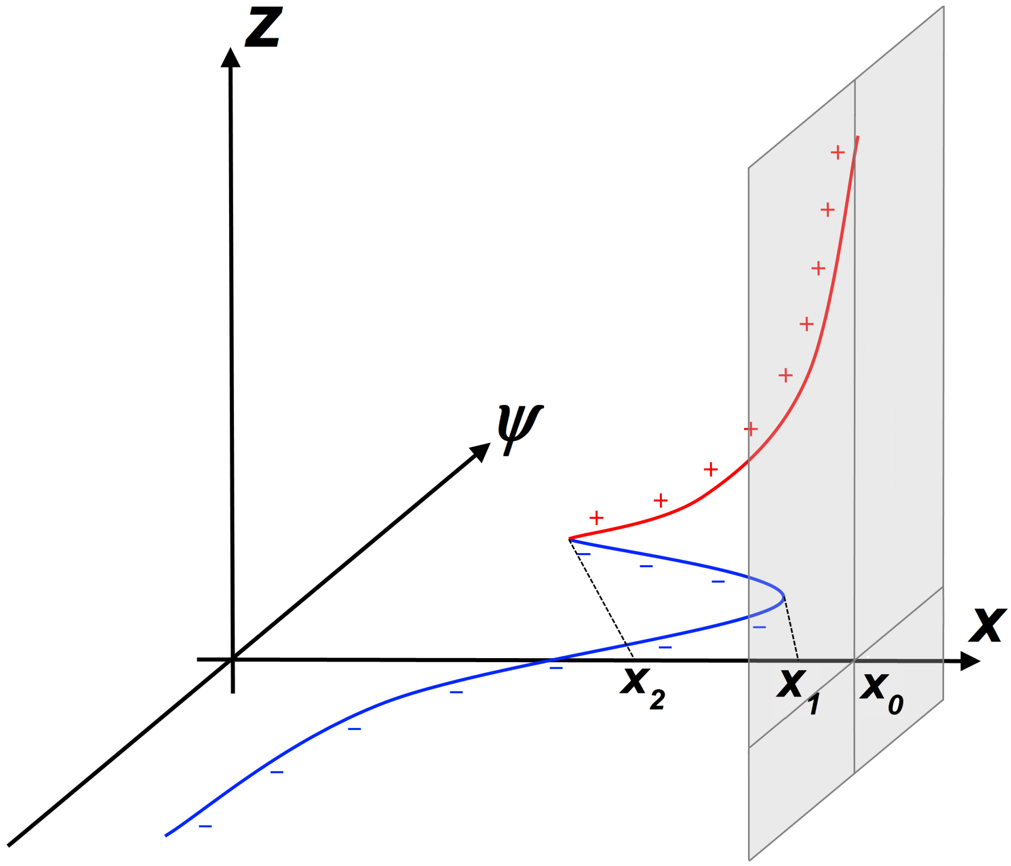

Рис. 2.5: Бифуркационная диаграмма

Глава 3

Динамика диска на наклонной плоскости с трением

3.1 Уравнения движения диска и их свойства

Рассмотрим шайбу нулевой высоты и радиуса a (в дальнейшем — диск) на шероховатой наклонной плоскости в рамках динамически совместной модели трения А.П. Иванова. Подставляя $h = 0$ в выражения для коэффициентов λ_1 и λ_2 (2.3), получим

$$\lambda_1|_{h=0} = 0, \quad \lambda_2|_{h=0} = 0 \tag{3.1}$$

Следовательно, нормальное давление распределено равномерно по диску, и функция плотности постоянна:

$$n(A) = \frac{mg\cos\alpha}{\pi a^2}$$

Тогда выражения для силы и момента трения, действующих на диск, примут вид

$$\mathbf{F} = -kmg\cos\alpha f_1\mathbf{e_1},\ \mathbf{M} = -kmga\cos\alpha f_3\mathbf{e_3}$$
$$f_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^1 s\int_0^{2\pi}\frac{u-\Omega s\sin\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds \tag{3.2}$$
$$f_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^1 s^2\int_0^{2\pi}\frac{\Omega s-u\sin\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds$$

Выбирая единицы измерения массы, длины и времени так, что $m = 1$, $a = 1$, $g\sin\alpha = 1$, преобразуем уравнения (1.4) к виду

$$\dot{u} = \cos\psi - \varkappa f_1,\quad u\dot{\psi} = -\sin\psi,\quad \dot{\Omega} = -2\varkappa f_3 \tag{3.3}$$
$$\varkappa = \frac{k}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Преобразуем функции f_1 и f_3, определенные соотношениями (3.2), следующим образом:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 s\int_0^{2\pi}\frac{u-\Omega s\sin\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta ds = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 s\left(\int_0^{2\pi}\frac{u}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta + \int_0^{2\pi}\frac{\Omega s d\cos\beta}{D(u,\Omega;s,\beta)}\right)ds = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 s\left(\int_0^{2\pi}\frac{u}{D(u,\Omega;s,\beta)}d\beta - \int_0^{2\pi}\frac{u\Omega^2 s^2\cos^2\beta}{D^3(u,\Omega;s,\beta)}\right)ds = \\
&= \frac{u}{\pi}\int_0^1 s\int_0^{2\pi}\frac{(u-\Omega s\sin\beta)^2}{D^3}d\beta ds
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Аналогично

$$f_3 = \frac{\Omega}{\pi}\int_0^1 s^3\int_0^{2\pi}\frac{(\Omega s-u\sin\beta)^2}{D^3}d\beta ds$$

Возвращаясь к исходным формулам (3.2), получаем

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 s\int_0^{2\pi}\frac{(1-(\Omega/u)s\sin\beta)}{\sqrt{(1-(\Omega/u)s\sin\beta)^2+(\Omega/u)^2 s^2\cos^2\beta}}d\beta ds \\
f_3 &= \frac{\operatorname{sgn}\Omega}{\pi}\int_0^1 s^3\int_0^{2\pi}\frac{(s-(u/\Omega)\sin\beta)}{\sqrt{(s-(u/\Omega)\sin\beta)^2+(u/\Omega)^2 s^2\cos^2\beta}}d\beta ds
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Из равенств (3.4, 3.5) видно, что функции f_1 и f_3 удовлетворяют соотношениям

$$
\begin{gathered}
0 \leqslant f_1 \leqslant 1, \ -2/3 \leqslant f_3 \leqslant 2/3 \\
f_1|_{u=0} = 0, \quad f_3|_{\Omega=0} = 0
\end{gathered} \tag{3.6}
$$

Последнее соотношение (3.6) означает, что система (3.3) допускает инвариантное множество $\Omega \equiv 0$, т.е. если начальная угловая скорость диска равна нулю ($\Omega_0 = 0$), то диск движется поступательно. В этом случае динамика диска совпадает с динамикой материальной точки на наклонной плоскости с сухим трением (см. [5]). Также система (3.3) инвариантна относительно замены $(u, \Omega, \psi \to (u, -\Omega, -\psi)$ (см. утверждение 1.1), поэтому в дальнейшем будем полагать без уменьшения общности, что $\Omega_0 \geq 0$ (тогда в процессе всего движения $\Omega(t) \geq 0$). Кроме того, система (3.3) допускает инвариантные множества $\psi = 0$ и $\psi = \pi$.

Для анализа уравнений движения (3.3) удобно сделать замену $\gamma = \cos\psi$ и переписать уравнения (3.3) в новых переменных u, Ω, γ:

$$
\dot{u} = \gamma - \varkappa f_1, \quad u\dot{\gamma} = 1 - \gamma^2, \quad \dot{\Omega} = -2\varkappa f_3 \tag{3.7}
$$

В этих переменных инвариантные множества $\psi = 0$ и $\psi = \pi$ соответствуют множествам $\gamma = 1$ и $\gamma = -1$. Множество $\gamma = 1$ отвечает движению диска вниз вдоль линии наибольшего ската, а $\gamma = -1$ — вверх вдоль линии наибольшего ската.

Рассмотрим производную от кинетической энергии диска $T = \dfrac{1}{2}\left(u^2 + \dfrac{\Omega^2}{2}\right)$ по времени в силу системы (3.7):

$$
\begin{gathered}
\dot{T} = u(\gamma - 1) + \left[u - \frac{1}{\pi}\int_0^1 sds \int_0^{2\pi} D(u, \Omega; s, \beta) d\beta\right] + \\
+\frac{1-\varkappa}{\pi}\int_0^1 sds \int_0^{2\pi} D(u, \Omega; s, \beta) d\beta
\end{gathered} \tag{3.8}
$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (3.8) неположительно. Этим же свойством обладает и второе слагаемое, поскольку после несложных преобразований его можно представить в виде

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1 s\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{u^2-2u\Omega s\sin\beta+\Omega^2 s^2}-u\right)d\beta ds =$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^1 s\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{(u-\Omega s\sin\beta)^2+\Omega^2 s^2\cos^2\beta}-(u-\Omega s\sin\beta)\right)d\beta ds \leqslant 0$$

Третье слагаемое неположительно при $\varkappa \geqslant 1$, т.е. в случае, когда коэффициент трения не меньше тангенса угла наклона плоскости, кинетическая энергия диска не возрастает на всех его движениях.

3.2 Динамика диска при $\varkappa > 1$

Как было показано в главе 2, в случае $\varkappa > 1$ диск останавливается за конечное время, причем при $\Omega_0 \neq 0$ его скольжение и верчение прекращаются одновременно. Воспользуемся равенством (3.8) для оценки времени остановки t_*.

Как следует из (3.8),

$$\dot{T} \leq \frac{1-\varkappa}{\pi}\int_0^1 sds\int_0^{2\pi} D(u,\Omega;s,\beta)d\beta$$

Пользуясь неравенством (1.18), получим

$$\frac{d\left(\sqrt{2T}\right)}{dt} \leqslant -p, \quad p=\frac{8(\sqrt{2}-1)(\varkappa-1)}{3\pi}$$

Следовательно, для времени остановки t_* верна оценка сверху

$$t_* \leqslant \left(u_0^2+\Omega_0^2/2\right)^{1/2}/p$$

Выясним характер предельного при $t \to t_*$ движения диска. Для этого исследуем вопрос о существовании конечных пределов $z_* = \lim\limits_{t\to t_*-0}\dfrac{u(t)}{\Omega(t)}$ и $\gamma_* = \lim\limits_{t\to t_*-0}\gamma(t)$, полагая, без уменьшения общности, что $\Omega_0 > 0$ (при этом

$\Omega(t) > 0$ при всех $t \in [0, t_*))$. В дальнейшем будем предполагать, что $\gamma_0 \neq -1$ (случай $\gamma_0 = -1$ рассмотрен в [3]).

Как следует из второго уравнения системы (3.7), $\gamma(t)$ — неубывающая функция времени, причем $\gamma \in [-1, 1]$. Поэтому существует $\lim\limits_{t \to t_* - 0} \gamma(t) = \gamma_*$. Покажем, что $\gamma_* = 1$.

Рассмотрим для этого функцию $\varphi(t) = u \left(\dfrac{1+\gamma}{1-\gamma} \right)^{(\varkappa+1)/2}$ и вычислим ее производную по времени в силу системы (3.7):

$$\dot{\varphi} = \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right)^{\frac{\varkappa-1}{2}} \left[\dot{u} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) + u\dot{\gamma} \frac{\varkappa+1}{(1-\gamma)^2} \right] = \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right)^{\frac{\varkappa+1}{2}} (\gamma - \varkappa f_1 + \varkappa + 1)$$

Так как $f_1 \leq 1$, а $\gamma > -1$, то $(\gamma - \varkappa f_1 + \varkappa + 1) \geq 0$, поэтому функция $\varphi(t)$ не убывает вдоль решений системы (3.7). В начальный момент времени значение $\varphi(0) > 0$, поэтому $\varphi(t) \geq \varphi(0) > 0$ при $t \in [0, t_*)$. Учитывая, что $\lim\limits_{t \to t_* - 0} u(t) = 0$, это возможно только при $\gamma_* = 1$. Таким образом, при $\varkappa > 1$ выполнено

$$\begin{gathered} \lim_{t \to t_* - 0} u(t) = \lim_{t \to t_* - 0} \Omega(t) = 0, \\ \lim_{t \to t_* - 0} \gamma(t) = 1 \ \ (\gamma_0 \neq -1) \,, \gamma(t) \equiv 1 \, (\gamma_0 = 1) \end{gathered} \tag{3.9}$$

Рассмотрим теперь вопрос о существовании конечного предела отношения $\dfrac{u(t)}{\Omega(t)}$ при $t \to t_* - 0$. Учитывая соотношения (3.9), имеем

$$z_* = \lim_{t \to t_* - 0} \frac{u(t)}{\Omega(t)} = \lim_{t \to t_* - 0} \frac{\dot{u}(t)}{\dot{\Omega}(t)} = \lim \frac{\gamma(t) - \varkappa f_1}{-2\varkappa f_3} = \frac{1 - \varkappa \lim\limits_{t \to t_* - 0} f_1}{-2\varkappa \lim\limits_{t \to t_* - 0} f_3} \tag{3.10}$$

При этом выполнены равенства (см. равенства (3.4))

$$\lim_{t\to t_*-0} f_1 = \lim_{t\to t_*-0} \frac{1}{\pi}\int_0^1 sds\int_0^{2\pi} \frac{u(u-\Omega s\sin\beta)^2/\Omega^3}{D^3/\Omega^3}d\beta = f_{1*}$$
$$\lim_{t\to t_*-0} f_3 = \lim_{t\to t_*-0} \frac{1}{\pi}\int_0^1 s^3ds\int_0^{2\pi} \frac{\Omega(\Omega s-u\sin\beta)^2/\Omega^3}{D^3/\Omega^3}d\beta = f_{3*}$$

$$f_{1*} = \frac{z_*}{\pi}\int_0^1 sds\int_0^{2\pi} \frac{(z_*-s\sin\beta)^2}{D_*^3}d\beta$$
$$f_{3*} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 s^3ds\int_0^{2\pi} \frac{(s-z_*\sin\beta)^2}{D_*^3}d\beta$$
$$D_* = \sqrt{z_*^2-2z_*s\sin\beta+s^2}$$

Таким образом, соотношение (3.10) можно представить в виде

$$z_* = \frac{1-\varkappa f_{1*}}{-2\varkappa f_{3*}} \tag{3.11}$$

Значит, предел z_* удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\varkappa} = f(z_*) = \frac{z_*}{\pi}\int_0^1 sds\int_0^{2\pi} \frac{(z_*-s\sin\beta)^2-2s^2(s-z_*\sin\beta)^2}{D_*^3}d\beta \tag{3.12}$$

Численный анализ функции $f(z_*)$ показывает (см. рис. 3.1), что функция $f(z_*)$ обращается в нуль в единственной точке z_*^0 ($z_*^0 \approx 0,65$), причем

$$f(z_*) < 0 \text{ при } z_* \in (0, z_*^0),\ 0 < f(z_*) < 1/2 \text{ при } z_* \in (z_*^0, +\infty)$$
$$f'(z_*) > 0 \text{ при } z_* \in (z_*^0, +\infty),\ f(z_*) \to 1/2 \text{ при } z_* \to +\infty$$

Можно убедиться в том, что $\lim\limits_{z\to+\infty} f(z_*) = \dfrac{1}{2}$, разложив функцию f в ряд Тейлора по степеням $l = \dfrac{1}{z_*}$ в окрестности точки $l = 0$:

$$f_{1*} = 1 + O(l) \tag{3.13}$$
$$f_{3*} = \frac{1}{4}l + O(l^2)$$
$$f = f_{1*} - 2z_*f_{3*} = \frac{1}{2} + O(l)$$

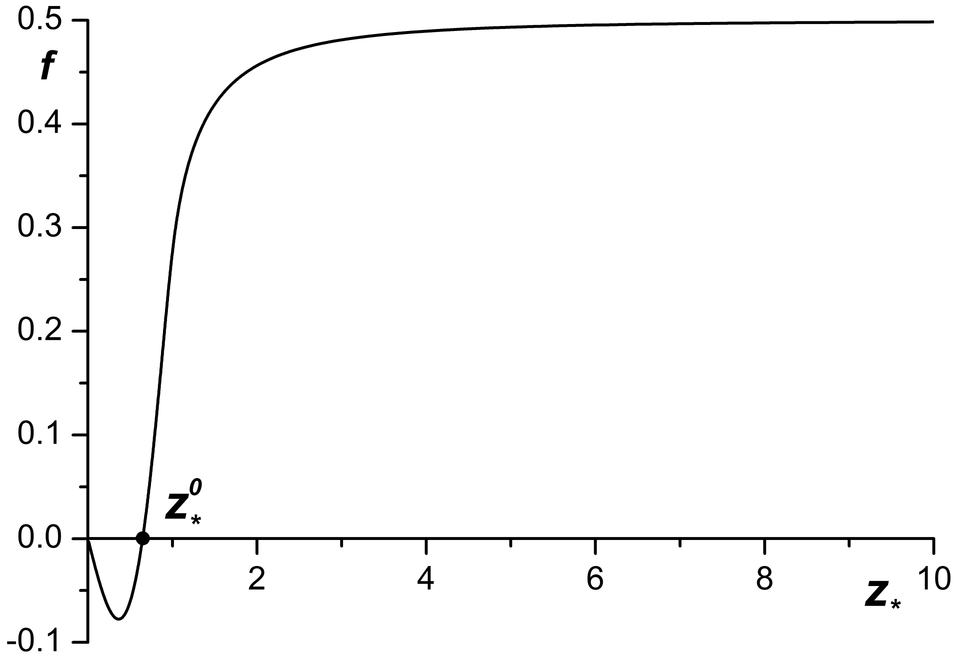

Рис. 3.1: График функции $f(z_*)$

Следовательно, при $\varkappa > 2$ уравнение (3.12) всегда имеет единственное положительное решение $z_* = z_*(\varkappa)$, причем

$$z_*(\varkappa) \to +\infty \text{ при } \varkappa \to 2+0, z_*(\varkappa) \to z_*^0 \approx 0,65 \text{ при} \varkappa \to +\infty.$$

Как видно из второго соотношения, для значения $z_* = z_*(\varkappa)$ выполняется предельный переход к случаю горизонтальной плоскости, где $z_* \approx 0,65$ [14, 33, 22].

Аналогично можно показать, что если $\gamma_0 \neq -1$, то при $1 < \varkappa \leqslant 2$ существует $\lim\limits_{t\to t_*-0}(\Omega(t)/u(t)) = 0$. Определим в этом случае порядок малости $\Omega(t)$ по отношению к $u(t)$ при $t \to t_* - 0$. Для этого найдем ν ($\nu > 1$), при котором предел $c = \lim\limits_{t\to t_*-0}(\Omega(t)/u^\nu(t))$ конечен и отличен от нуля. Применяя правило Лопиталя для нахождения предела отношения двух бесконечно малых функций, имеем

$$c = \lim_{t\to t_*-0} \frac{\Omega(t)}{u^\nu(t)} = \lim_{t\to t_*-0} \frac{\dot\Omega}{\dot u} \frac{1}{\nu u^{\nu-1}} \tag{3.14}$$

Согласно первому и третьему уравнениям системы (3.7), получим

$$\frac{\dot{\Omega}}{\dot{u}} = -\frac{2\varkappa f_3}{\gamma - \varkappa f_1}$$

Воспользуемся разложениями (3.13) и перепишем (3.14) в виде

$$c = -\lim_{t \to t_* - 0} \frac{2\varkappa f_3}{\gamma - \varkappa f_1} \frac{1}{\nu u^{\nu-1}} = \lim_{t \to t_* - 0} \frac{\varkappa \Omega}{2(\varkappa - 1) u} \frac{1}{\nu u^{\nu-1}} =$$
$$= \lim_{t \to t_* - 0} \frac{\varkappa}{2(\varkappa - 1)} \frac{1}{\nu} \frac{\Omega}{u^{\nu}}$$

Отсюда получаем, что $\nu = \dfrac{\varkappa}{2(\varkappa - 1)}$ при $1 < \varkappa < 2$, то есть

$$\Omega \sim u^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}} \text{ при } 1 < \varkappa < 2$$

Таким образом, если отношение коэффициента трения к тангенсу угла наклона плоскости больше единицы, но не больше двух, то при $\gamma_0 \neq -1$ предельное движение диска — поступательное. В случае $\varkappa > 2$ предельное движение — мгновенно вращательное, причем мгновенный центр скоростей находится на расстоянии $az_*(\varkappa)$ от центра диска.

3.3 Динамика диска при $\varkappa = 1$

Пусть коэффициент трения скольжения равен тангенсу угла наклона плоскости. Из соотношения (3.8) следует, что $\dot{T} \leqslant 0$,т.е.

$$\frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{\Omega^2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(u_0^2 + \frac{\Omega_0^2}{2}\right)$$

Это означает, что, как и в случае $\varkappa > 1$, $u(t)$ и $\Omega(t)$ — ограниченные функции времени. Сформулируем основные свойства динамики диска в виде теоремы.

Теорема 3.1 При $\varkappa = 1$ в случае общего положения $\gamma_0 \neq -1$ движение диска продолжается бесконечно долго, при этом

1. $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = u_* > 0$

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = 1$ ($\gamma(t) \equiv 1$ при $\gamma_0 = 1$)

3. $\lim\limits_{t\to+\infty} \Omega(t) = 0$

$\square$ Действительно, рассмотрим функцию $u(t)(1+\gamma(t))$. Производная по времени от этой функции в силу системы (3.7) равна $(1+\gamma(t))(1-f_1) \geqslant 0$. Следовательно,

$$u(1+\gamma) \geqslant u_0(1+\gamma_0) > 0$$

откуда $u(t) > 0$ при $t \geqslant 0$. Это означает, что движение диска продолжается бесконечно долго.

В силу системы (3.7), функция $\gamma(t)$ — неубывающая, то есть $gamma(t) \geq \gamma_0$, и при этом $\gamma(t) \leq 1$. Значит, существует $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = \gamma_*$, причем $\gamma_* \leqslant 1$.

Покажем, что $\gamma_* = 1$. Пусть $\gamma_* < 1$, тогда из уравнений (3.7) и соотношения (3.6) следует, что

$$\frac{d\,(u(t)\gamma(t))}{dt} = 1 - \gamma f_1 \geqslant 1 - \gamma_* > 0$$

Значит, функция $u(t)\gamma(t)$ неограниченна, что противоречит ограниченности функций $u(t)$ и $\gamma(t)$. Таким образом, $\gamma_* = 1$.

Так как функция $u(t)(1+\gamma(t))$ не убывает и ограниченна сверху, то существует $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)(1+\gamma(t)) > 0$ при $t \to +\infty$. При этом, как уже было показано, существует $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = 1$ при $t \to +\infty$. Следовательно, существует $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = u_* > 0$ при $t \to +\infty$.

Теперь рассмотрим функцию $\Omega(t)$, полагая без ограничения общности, что $\Omega_0 > 0$ (случай $\Omega_0 < 0$ рассматривается аналогично). В силу системы (3.7), $\Omega(t)$ не возрастает. При этом $\Omega(t) \geqslant 0$. Значит, существует
$\lim\limits_{t\to+\infty} \Omega(t) = \Omega_* \geqslant 0$. Предположим, что $\Omega_* > 0$. Тогда функции $u(t)$ и $\Omega(t)$

ограниченны и отделены от нуля. Поэтому функция $f_3(t)$ тоже отделена от нуля, т.е. $f_3(t) \geqslant b > 0$ при всех $t \in [0, \infty)$. Но тогда $\Omega(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$ (см. третье уравнение системы (3.7)),что противоречит неравенству $\Omega_* > 0$. ■

Таким образом, если $\gamma_0 \neq -1$, то при $\varkappa = 1$ движение диска происходит на бесконечном интервале времени и стремится при $t \to +\infty$ к равномерному скольжению без верчения вдоль линии наибольшего ската наклонной плоскости:

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = 1 \ (\gamma(t) \equiv 1), \ \ \lim_{t\to+\infty} u(t) = u_* > 0, \ \ \lim_{t\to+\infty} \Omega(t) = 0$$

3.4 Динамика диска при $\varkappa < 1$

Пусть коэффициент трения скольжения меньше тангенса угла наклона плоскости. Прежде всего заметим, что в этом случае, как и в двух предыдущих, $\Omega(t)$ — ограниченная функцией времени, так как из третьего уравнения системы (3.7) следует, что функция $\Omega(t)$ не возрастает по модулю: $|\Omega(t)| \leqslant |\Omega_0|$. Сформулируем в виде теремы свойства динамики диска.

Теорема 3.2 При $\varkappa < 1$ в случае общего положения $\gamma_0 \neq -1$ движение диска продолжается бесконечно долго, при этом

1. $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$
2. $\lim\limits_{t\to+\infty} \dot{u}(t) = 1 - \varkappa$
3. $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = 1 \ (\gamma(t) \equiv 1$ при $\gamma_0 = 1)$
4. $\lim\limits_{t\to+\infty} \Omega(t) = 0$

$\square$ Из первого и второго уравнений системы (3.7) имеем

$$\begin{gathered}\frac{d(u\gamma)}{dt} = 1 - \varkappa\gamma f_1 \geqslant 1 - \varkappa > 0 \\ u(t)\gamma(t) \geqslant (1-\varkappa)t + u_0\gamma_0\end{gathered} \tag{3.15}$$

Следовательно, $u(t) \to +\infty$ (т.к. $|\gamma| \leq 1$) и существует момент времени t_1, такой, что $\gamma_1 = \gamma(t_1) > 0$; при этом (см. второе уравнение системы (3.7)) $\gamma(t) \geq \gamma_1$ при $t \geq t_1$. Таким образом, при $t \geq t_1$, имеют место неравенства, вытекающие из (3.15)

$$u(t) \geqslant (1-\varkappa)t + const \tag{3.16}$$

С другой стороны, из первого уравнения системы (3.7) имеем

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{u}(t) = \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) - \varkappa \lim_{t\to+\infty} f_1 = \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) - \varkappa = \gamma_* - \varkappa \tag{3.17}$$

поскольку $\lim\limits_{t\to+\infty} f_1 = 1$ (так как $|\Omega(t)| \leqslant |\Omega_0|$, а $u(t)$ неограниченно возрастает при $t \to +\infty$), $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma(t) = \gamma_*$ (так как $\gamma(t)$ ограниченная и неубывающая функция). Сравнивая соотношения (3.16) и (3.17), заключаем, что $\gamma_* \geqslant \varkappa$.

Покажем, что $\gamma_* = 1$.

Допустим, $\gamma_* < 1$. Выберем некоторое $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1-\gamma_*}{1-\varkappa}\right)$ и обозначим $\xi = \dfrac{\gamma_* - \varkappa}{1-\varepsilon} > 0$. Из равенства (3.17) следует, что найдется $t_2 > t_1$, такое, что $\dot{u}(t) \leqslant \xi$ при $t \geqslant t_2$. Тогда

$$u(t) \leqslant \xi(t-t_2) + u(t_2) \text{ при } t \geqslant t_2$$

Сопоставляя полученное неравенство с неравенством (3.15), имеем

$$\xi(t-t_2) + u(t_2) \geqslant (1-\varkappa)(t-t_2) + u(t_2)\gamma(t_2) \text{ при } t \geqslant t_2$$

Отсюда следует

$$\frac{\gamma_* - 1 + (1-\varkappa)\varepsilon}{1-\varepsilon}(t-t_2) \geqslant u(t_2)(\gamma(t_2)-1) \text{ при } \ t \geqslant t_2 \tag{3.18}$$

В силу выбора ε, множитель при $(t-t_2)$ отрицателен, поэтому неравенство (3.18) не выполняется при достаточно больших t. Таким образом, получаем

$$\lim \gamma(t) = 1, \;\; \lim \dot{u}(t) = 1 - \varkappa \;\; \text{при } t \to +\infty \tag{3.19}$$

Заметим, что если $\gamma_0 = 1$, то первое соотношение в (3.19) следует заменить на тождество $\gamma(t) \equiv 1$, а второе останется справедливым.

Докажем теперь, что $\Omega(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Прежде всего заметим, что $\Omega(t)$ не может обратиться в нуль за конечное время (при $\gamma_0 \neq -1$,
$\Omega_0 \neq 0$), так как $u(t) \neq 0$. Умножая левую и правую части третьего уравнения системы (3.7) на Ω и учитывая формулы (3.4), имеем

$$\dot{\Omega}^2 = -\frac{4\varkappa}{u}\Omega^2 \frac{1}{\pi} \int_0^1 s^3 \left(\int_0^{2\pi} (\sin^2\beta + \eta) d\beta \right) ds \tag{3.20}$$

$$\eta = \left[\sin^2\beta \left(1 - \left(\frac{D}{u} \right)^3 \right) - 2\frac{\Omega}{u} s \sin\beta + \frac{\Omega^2 s^2}{u^2} \right] \left(\frac{D}{u} \right)^{-3}$$

Для η выполнены следующие неравенства:

$$\left|\eta\right| \leq \frac{\sin^2\beta \left| 1 - \left(\frac{D}{u} \right)^3 \right| + 2\left|\frac{\Omega}{u}\right| \left|\sin\beta\right| s + \frac{\Omega^2 s^2}{u^2}}{\left(\frac{D}{u} \right)^3} \leq \frac{\left| 1 - \left(\frac{D}{u} \right)^3 \right| + 2\left|\frac{\Omega}{u}\right| + \frac{\Omega^2}{u^2}}{\left(\frac{D}{u} \right)^3} \tag{3.21}$$

$$\frac{D}{u} = \sqrt{1 - 2\frac{\Omega}{u} s \sin\beta + \frac{\Omega}{u}^2 s^2} \geq \sqrt{1 - 2\frac{\Omega}{u} s + \frac{\Omega}{u}^2 s^2} = \left| 1 - \frac{\Omega}{u} \right| \geq 1 - \left| \frac{\Omega_0}{u} \right| \tag{3.22}$$

Так как $u(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, то $|\Omega_0| < u(t)$ при достаточно больших t. Поэтому из неравенств (3.21, 3.22) получаем

$$\left|\eta\right| \leq \frac{1 + 2\left|\frac{\Omega_0}{u}\right| + \frac{\Omega_0^2}{u^2}}{\left(1 - \left|\frac{\Omega_0}{u}\right|^3 \right)}$$

Отсюда видно, что η стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по Ω, s и β. Следовательно, существует момент времени t_3, такой, что $|\eta| < 1/4$, т.е.

$$\int\limits_0^{2\pi} (\sin^2\beta + \eta)d\beta \ \geqslant \frac{\pi}{2} \text{ при всех } t \geqslant t_3$$

Кроме того, из второго соотношения (3.19) следует, что существует момент времени t_4, такой, что при $t \geqslant t_4$

$$\dot{u}(t) \leqslant 3(1-\varkappa)/2, \quad u(t) \leqslant 2(1-\varkappa)t$$

Таким образом, из уравнения (3.20) имеем

$$\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega^2} \leqslant -\frac{\varkappa}{4(1-\varkappa)t}\ , \quad \frac{\Omega^2(t)}{\Omega^2(t_5)} \leqslant \left(\frac{t_5}{t}\right)^{\frac{\varkappa}{4(1-\varkappa)}} \text{ при } t \geqslant t_5 = \max(t_3, t_4)$$

Последнее неравенство означает, что $\Omega\ (t) \to 0$ при $t \to +\infty$. ■

3.5 Исследование траекторий центра масс диска

Введем неподвижную ортогональную систему координат Oxy в плоскости движения диска, так, что ось Ox направлена вниз вдоль линии наибольшего ската, а точка O совпадает с начальным положением центра диска (см. рис. 3.2). При $\varkappa \leq 1$ исследуем траекторию центра масс диска на наличие асимптоты $y = y_*$, являющейся линией наибольшего ската. Будем рассматривать случай $\gamma_0 \neq \pm 1$, т.к. при $\gamma_0 = \pm 1$ траектория прямолинейна.

Для координат x и y центра масс диска имеем

$$\dot{x} = u\cos\psi, \dot{y} = u\sin\psi \tag{3.23}$$

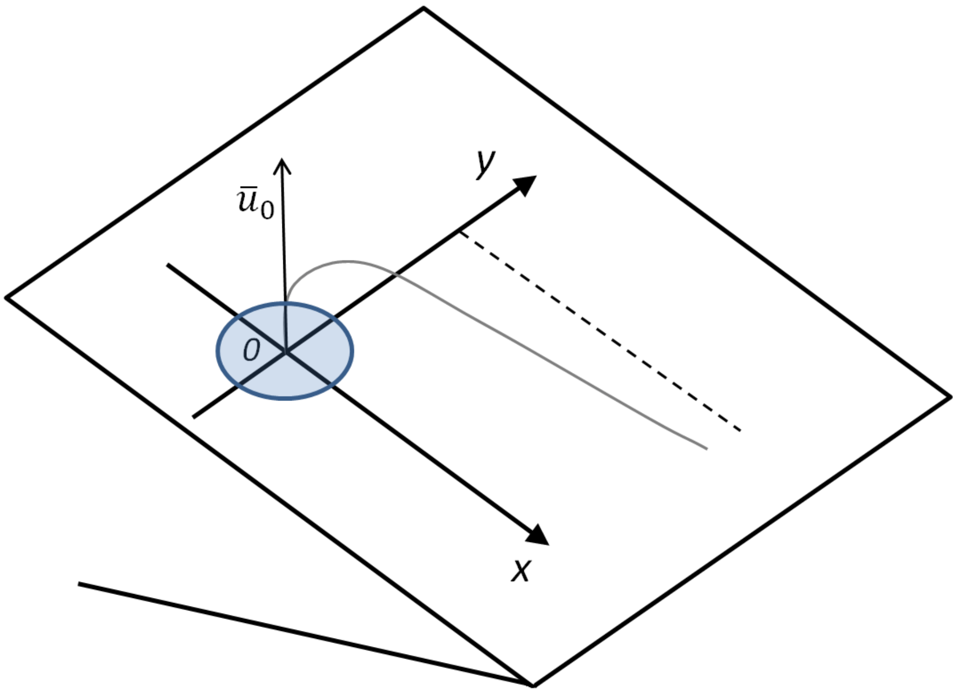

Рис. 3.2: Система координат Oxy

Без ограничения общности будем считать, что $\psi_0 \in (0, \pi)$, а значит, в процессе всего движения $\psi \in (0, \pi)$. Тогда, исходя из второго уравнения системы (3.3), функция $\psi(t)$ монотонно убывает. Отметим некоторые свойтсва траектории центра диска, заданной уравнениями (3.23).

Так как производная $dy/dx = \operatorname{tg}\psi$, то при $\psi \in (0, \pi/2)$ функция $y(x)$ возрастает, а при $\psi \in (\pi/2, \pi)$ убывает. Согласно уравнениям (3.23), имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\operatorname{tg}\psi) = \frac{\dot{\psi}}{\cos^2\psi}\frac{1}{u\cos\psi} = -\frac{\operatorname{tg}\psi}{u^2\cos^2\psi} \tag{3.24}$$

Следовательно, при $\psi \in (0, \pi/2)$ траектория центра масс диска выпукла вверх, а при $\psi \in (\pi/2, \pi)$ — вниз. Таким образом, она имеет вид, изображенный на рис. 3.2.

Так как в процессе движения диска $\psi \in (0, \pi)$, то функция $y(t)$ монотонно возрастает (см. второе уравнение 3.23). Выясним, существует ли $y_* = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

Согласно уравнениям (3.23), имеем

$$y(t) = \int\limits_0^t u(\tau)\sin\psi(\tau)d\tau$$

Исследуем интеграл $\int\limits_0^{+\infty} u(t)\sin\psi(t)dt$ на сходимость.

Так как $\psi_0 \in (0,\pi)$, то функция $\psi(t)$ монотонно убывает. В силу уравнений движения диска, $dt = -\dfrac{ud\psi}{\sin\psi}$. С помощью замены $t \to \psi$ приведем интеграл $\int\limits_0^{+\infty} u(t)\sin\psi(t)dt$ к следующему виду

$$\int\limits_0^{\psi_0} u^2(\psi)d\psi \tag{3.25}$$

Утверждение 3.1 При $\varkappa \leq 0.5$ интеграл (3.25) расходится.

□ Выберем ψ_1 такое, что для всех $\psi \in (0,\psi_1)$ выполнено $\cos\psi > \varkappa$. Из уравнений (3.7) следует, что

$$\frac{du}{u} = -\frac{(\cos\psi - \varkappa f_1)d\psi}{\sin\psi}$$

Отсюда получаем равенство

$$\int\limits_{u_1}^{u}\frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}} = \int\limits_{\psi}^{\psi_1}\frac{(\cos\tilde{\psi} - \varkappa f_1)d\tilde{\psi}}{\sin\tilde{\psi}}$$

В силу выбора ψ_1, имеем

$$\int\limits_{u_1}^{u}\frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}} \geq \int\limits_{\psi}^{\psi_1}\frac{(\cos\tilde{\psi} - \varkappa)d\tilde{\psi}}{\sin\tilde{\psi}}$$

Следовательно, выполняется следующее неравенство

$$u \geq A\frac{(\mathrm{tg}(\psi/2))^{\varkappa}}{\sin\psi},\ \text{где A — некоторая положительная константа} \tag{3.26}$$

При $\varkappa \le 0.5$ интеграл $\int\limits_0^{\psi_1} \frac{(tg(\psi/2))^{2\varkappa}}{\sin^2\psi} d\psi$ расходится. А значит, в силу неравенства (3.26), расходится интеграл (3.25). ■

Следовательно, в случае $\varkappa \le 1/2$ координата y центра масс диска неограниченно возрастает с течением времени, то есть у траектории отсутствует асимптота $y = y_*$. Надо отметить, что в этом случае траектория центра масс диска не имеет и наклонной асимптоты, так как предел отношения $y(x)/x$ при $x \to +\infty$ равен нулю:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\dot y}{\dot x} = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{tg}\psi(t) = 0$$

Утверждение 3.2 При $0.5 < \varkappa \le 1$ интеграл (3.25) сходится.

□ В случае $\varkappa < 1$ $f_1(t) \to 1$ при $t \to +\infty$, т.е $f_1(\psi) \to 1$ при $\psi \to 0$. Следовательно, для всех $\varepsilon > 0$ существует $\psi_2(\varepsilon) \in (0, \psi_1)$ такое, что при $\psi \in (0,\ \psi_2(\varepsilon))$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \le f_1 \le 1$$

Выберем $\varepsilon \in (0, 2\varkappa - 1)$. Тогда $r = \dfrac{\varkappa}{1+\varepsilon} > \dfrac{1}{2}$, откуда получаем, что при $\psi \in (0, \psi_2)$ верно соотношение

$$0 < \cos\psi - \varkappa f_1 \le \cos\psi - r, \text{ где } r > \frac{1}{2}$$

Аналогично случаю $\varkappa \le 0.5$ получаем следующую оценку для скорости скольжения u

$$u \le B\frac{(\operatorname{tg}(\psi/2))^r}{\sin\psi}, \text{ где } B \text{ — некоторая положительная константа} \tag{3.27}$$

При $r > \dfrac{1}{2}$ интеграл $\int\limits_0^{\psi_2} \frac{(\operatorname{tg}(\psi/2))^{2r}}{\sin^2\psi} d\psi$ сходится, поэтому сходится (3.25).

В случае $\varkappa = 1$ имеем

$$u(t) \to u_* < \infty \text{ при } \psi \to 0 \tag{3.28}$$

Поэтому интеграл (3.25) сходится, т.е. существует $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = y_*$. ■

Таким образом, в случае $\varkappa \leq 1/2$ координата y центра масс диска неограниченно возрастает с течением времени, и у траектории центра масс диска отсутствуют асимптоты. При $1/2 < \varkappa \leq 1$ траектория центра масс диска имеет асимптоту $y = y_*$, которая является линией наибольшего ската.

Заключение

Таким образом, в диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- Рассмотрена динамика шайбы на наклонной плоскости в линейной и нелинейной моделях контактных напряжений в случае, когда коэффициент трения скольжения меньше, чем тангенс угла наклона плоскости. Доказано, что в этом случае шайба останавливается за конечное время при любых начальных условиях. Если же начальная угловая скорость шайбы не равна нулю, то скольжение и верчение шайбы прекращаются одновременно. В этом случае исследованы предельные движения шайбы и показано, что характер предельного движения зависит от двух параметров задачи.

- Для шайбы в нелинейной динамически совместной модели трения проведен численный анализ динамики: построены типичные фазовые траектории приведенной системы уравнений движения для различных областей параметров задачи.

- Для частного случая шайбы — плоского диска с равномерным распределением давления — выполнено глобальное исследование динамики при всех значениях отношения коэффициента трения к тангенсу угла наклона плоскости. Если отношение коэффициента трения к тангенсу угла наклона плоскости движения больше единицы, то в случае общего положения исследованы предельные движения диска: показано, что если эта величина больше двух, то отношение скорости скольжения к величине угловой скорости диска стремится к некоторому конечному ненулевому значению, не зависящему от начальных условий, в остальных случаях отношение скорости скольжения к величине угловой скорости стремится к бесконечности.

- Доказано, что в случае, когда отношение коэффициента трения к тангенсу угла наклона плоскости меньше либо равно единице, движение диска продолжается бесконечно долго. Если это отношение равно единице, то предельным движением диска является равномерное скольжение вниз вдоль линии наибольшего ската, если же оно меньше единицы, то предельное движение диска — это равноускоренное скольжение вниз вдоль линии наибольшего ската.

Литература

[1] *Андронов В.В., Журавлев В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. М.-Ижевск: РХД, 2010. 184 с.

[2] *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1978.

[3] *Борисов А.В., Ердакова Н.Н., Иванова Т.Б., Мамаев И.С.* Динамика тела с осесимметричным основанием на наклонной плоскости // Нелинейная динамика, 2014, Т. 10. No 4. С. 483–495.

[4] *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. "Наука". 1980. 303с.

[5] *Гончаренко В. И., Гончаренко В. А.* О классической задаче механики Бобылева-Jellet'a-Morin'a-Painlevé // Механика твердого тела. Межведомственный сборник научных трудов. Донецк, ИПММ НАН Украины. 2005. Вып. 35. С.136-144.

[6] *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. "Наука". 2001. 477с.

[7] *Ердакова Н. Н., Мамаев И. С.* Динамика тела с осесимметричным ос-

нованием, скользящего по шероховатой плоскости //Нелинейная динамика. 2013, Том 9, No 3, с. 521-545.

[8] *Жуковский Н. Е.* Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением// Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. Т. 1. С. 339-354.

[9] *Журавлев В. Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762-767.

[10] *Журавлев В. Ф.* Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения// Изв. РАН. МТТ. 2003. No 4. С.,81-88.

[11] *Журавлев В. Ф., Киреенков А. А.* О разложениях Паде в задаче о двумерном Кулоновском трении.// Изв. РАН. МТТ. 2005. No 2. С.,3-13.

[12] *Иванов А.П.* Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // ПММ. 2009. No 2. С. 189-203.

[13] *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. РХД. 2011. 304с.

[14] *Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л.* О движении плоских тел при наличии сухого трения // МТТ, 1981, No 4, с. 17–28.

[15] *Киреенков А.А.* О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // МТТ, 2002, No 1, с. 60–67.

[16] *Киреенков А.А., Семендяев С.В., Филатов В.Ф.* Экспериментальное исследование связанных двумерных моделей трения скольжения и верчения // МТТ, 2010, No 6, с. 192–202.

[17] *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60-67.

[18] *Крагельский И.В., Щедров В.С.* Развитие науки о трении. Сухое трение. Москва: АН СССР, 1956. 236 с.

[19] *Мак-Миллан В.Д.* Динамика твердого тела. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 467 с.

[20] *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.

[21] *Розенблат Г.М.*О скольжении диска по шероховатой наклонной плоскости при произвольном законе нормальных напряжений// Изв. РАН. МТТ. 2013. No 5. С. 109-117.

[22] *Сальникова Т.В., Трещев Д.В., Галлямов С.Р.* Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, No 1, с. 83–101.

[23] *Самсонов В.А.* Очерки о механике. Некоторые задачи, явления и парадоксы. Ижевск: РХД. 2001. 80с.

[24] *Самсонов В.А.* О трении при скольжении и верчении тела // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 1981. № 2. С. 76–78.

[25] *Сумбатов А.С, Юнин Е.К.* Избранные задачи механики систем с сухим трением. Москва : Физматлит, 2013. 194 с.

[26] *Трещев Д.В., Ердакова Н.Н., Иванова Т.Б.* О финальном движении цилиндрических тел по шероховатоий плоскости // Нелинейная динамика, 2012. Т. 8. № 3. С. 585–603.

[27] *Coulomb C.A.* Théorie des machines simples //Mémoire de Mathématiques et de Physique de l'Académie Royale. P., 1785. P. 161-331.

[28] *Coulomb C.A.* Théorie des machines simples //Paris. 1821. 368 p.

[29] *Euler L.* Sur la diminution de la resistence du frottement //Histoire de L'académie royale des sciences et belles lettres. MDCCXLVIII (1748). P. 122-132.

[30] *Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D.E.* Frictional coupling between sliding and spinning motion // Phys. Rev. Lett., 2003, vol.90, no.24, 248302, 4pp. (См. также: Фаркаш З., Бар- тельс Г., Унгер Т., Вольф Д. О силе трения при поступательном и вращательном движении плоского тела // Нелинеийная динамика, 2011, т. 7, No 1, с. 139–146.)

[31] *Jellett J. H.* A treatise on the theory on friction. London: MacMillan, 1872. 220 pp.

[32] *Stribeck, R.*, Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager (Characteristics of Plain and Roller Bearings), Zeit. des VDI 46. 1902.

[33] *Voyenli K., Eriksen E.* On the motion of an ice hockey puck // Amer. J. Phys., 1985, vol.53, pp. 1149–1153.

[34] *Weidman P.D., Malhotra Ch.P.* On the terminal motion of sliding spinning disks with uniform Coulomb friction // Phys. D, 2007, vol. 233, no. 1, pp. 1–13. (См. также: Вайдман П. Д., Мальотра Ч. О финальном движении

скользящих и вращающихся дисков с однородным кулоновым трением // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, No 2, с. 339–365.)

[35] *Карапетян А. В., Русинова А. М.* Качественныий анализ динамики диска на наклонноий плоскости с трением // ПММ, 2011, т. 75, No 5, с. 731–737.

[36] *Русинова А.М.* О динамике диска на наклонной плоскости с трением в рамках динамически совместной модели трения. // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 3. С.396-401.

[37] *Русинова А.М.* О динамике однородной шайбы на наклонной плоскости с трением // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 538-544.

[38] *Русинова А.М.* О динамике шайбы на наклонной плоскости с трением при несимметричном распределении нормальных напряжений// ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 5. С. .

[39] *Русинова А.М.* О динамике диска на наклонной плоскости с трением// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. №4. Часть 5.