ФГБОУ ВО
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Погудин Глеб Александрович

Первичные дифференциальные алгебры и ассоциированные с ними алгебры Ли

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель:	**Размыслов Юрий Питиримович,** доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
Официальные оппоненты:	**Мищенко Сергей Петрович** доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВПО «УлГУ», факультет математики, авиационных и информационных технологий, кафедра прикладной математики, профессор
	Туганбаев Аскар Аканович доктор физико-математических наук, НИУ «МЭИ», Институт электроэнергетики, кафедра высшей математики, профессор
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВПО «Тульский государственный педагогический университет имени Л. Н. Толстого»**

Защита диссертации состоится **4 марта 2016 г. в 16 ч. 45 м.** на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 на базе ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО МГУ имени М.В. Ломоносова, по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, и на сайте http://mech.math.msu.su/ snark/index.cgi.

Автореферат разослан 4 февраля 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 на базе
МГУ имени М.В. Ломоносова
доктор физико-математических наук,
профессор

Шафаревич Андрей Игоревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В настоящей диссертации изучается ряд вопросов дифференциальной алгебры, возникающих естественным образом при изучении алгебр Ли, удовлетворяющих стандартному тождеству St_5:

$$\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma \operatorname{ad} x_{\sigma(1)} \operatorname{ad} x_{\sigma(2)} \operatorname{ad} x_{\sigma(3)} \operatorname{ad} x_{\sigma(4)} z = 0$$

Тем не менее, почти все результаты представляют самостоятельный интерес с точки зрения дифференциальной алгебры. Все алгебры, если не оговорено противное, считаются алгебрами над полем k нулевой характеристики.

Изучение алгебр Ли, удовлетворяющих стандартному тождеству степени 5, началось в конце 1970-х, когда было обнаружено (независимо Е.Н. Суменковым, Дж. Бергманом, Ю.П. Размысловым и Б.В. Лидским), что в алгебре Ли векторных полей на прямой $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$ выполняется St_5. Отметим, что $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$ может рассматриваться как алгебра Ли специальных дифференцирований алгебры $C^\infty(\mathbb{R})$. Было доказано[1], что многие тождества алгебры $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$ следуют из St_5, и была построена универсальная алгебра в категории подалгебр $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$ с m порождающими, которая при ближайшем рассмотрении оказывается подалгеброй алгебры Ли специальных дифференцирований свободной дифференциальной алгебры. Была выдвинута гипотеза, что все тождества алгебры $\mathrm{Vect}(\mathbb{R})$ (или, что равносильно, все тождества алгебры Ли полиномиальных векторных полей на прямой W_1) следуют из тождества St_5.

Эта гипотеза доказана в случае простых алгебр над полем характеристики отличной от двух Ю.П. Размысловым[2]. Для этого в работе[2] было показано, что всякая простая алгебра Ли, удовлетворяющая тождеству St_5 вкладывается в алгебру специальных дифференцирований дифференциальной алгебры с одним сигнатурным дифференцированием[3], в которой, в свою очередь, выполняются все тождества алгебры W_1. Это вложение было осуществлено при помощи следующей конструкции. Пусть L — ал-

[1]Кириллов А.А., Овсиенко В.Ю., Удалова О.Д., *Тождества алегбры Ли векторных полей на прямой*, Препринты Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, №135, 1984.

[2]Размыслов Ю.П., *Простые алгебры Ли, удовлетворяющие стандартному лиеву тождеству степени 5*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **49**:3, стр. 592-634, 1985.

[3]всюду далее, если не оговорено противное, рассматриваются дифференциальные алгебры с одним сигнатурным дифференцированием

гебра Ли над полем k, удовлетворяющая St_5, тогда в алгебре $\operatorname{End}_k L$ можно рассмотреть ассоциативную подалгебру, порожденную элементами вида

$$\langle g_1, g_2, g_3\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma\in S_3}(-1)^\sigma \operatorname{ad} g_{\sigma(1)} \operatorname{ad} g_{\sigma(2)} \operatorname{ad} g_{\sigma(3)}.$$

Оказывается, что эта подалгебра коммутативна, и элементы L действует на ней дифференцированиями. Далее будем обозначать эту алгебру через $R(L)$.

В работе К.А. Зубрилина показано, что для любого тождества $f = 0$ в алгебре W_1 существует такое n, что $([x_0, \langle x_1, x_2, x_3\rangle])^n f = 0$ следует из St_5. Опираясь на эти идеи и результаты работы Ю.П. Размыслова[4], автор и Ю.П. Размыслов доказали (см. теорему **??**), что всякая первичная алгебра, удовлетворяющая St_5, вкладывается в алгебру Ли специальных дифференцирований некоторой первичной дифференциальной алгебры.

В этой связи естественными являются следующие вопросы: как связаны первичность дифференциальной алгебры с одним сигнатурным дифференцированием и первичность алгебры Ли её специальных дифференцирований, насколько «плохой» может быть первичная дифференциальная алгебра и, соответственно, первичная алгебра Ли, удовлетворяющая тождеству St_5.

Первый вопрос достаточно подробно изучен в литературе (см. работы[5,6] и ссылки в этих работах) для алгебр с единицей. Случай алгебр без единицы оказывается ощутимо труднее, он исследуется в разделе 2.2 настоящей диссертации (см. предложение 2.2.4).

Второй вопрос оказывается связан с достаточно старой открытой проблемой в дифференциальной алгебре. В 1942 г. Г. Леви[7] первым начал изучать комбинаторные свойства дифференциального идеала $[x^m]$. Его структура оказалась весьма нетривиальной, в частности, Дж. Риттом[8] была сформулирована следующая проблема: для всяких i и m найти такое минимальное j, что $\left(x^{(i)}\right)^j \in [x^m]$. В течение последующих 60 лет были по-

[4]Размыслов Ю.П., *О конечно порожденных простых алгебрах Ли, удовлетворяющих стандартному тождеству степени* 5, Вестн. Моск. Ун-та., Серия 1, Матем., Механика, №3, 37-41, 1990.

[5]Chebotar M.A., Lee P., *Prime lie rings of derivations of commutative rings* , Communications in Algebra, vol. 34, p. 4339-4344, 2006.

[6]Lui C., Passman D., *Prime Lie rings of derivations of commutative rings in characteristic* 2 , Journal of Algebra, vol. 311, issue 1, p. 352-364, 2007.

[7]Levi H., *On the structure of differential polynomials and their theory of ideals,* Trans. AMS, vol.51, 532-568, 1942.

[8]Ritt J.F., *Differential Algebra,* volume XXXIII of Colloquium Publications. New York, American Mathematical Society, 1950.

лучены некоторые частичные продвижения[9]. Автору удалось решить эту задачу полностью (см. теорему 3.1.2) и доказать, что фактор свободной дифференциальной алгебры по идеалу $[x^m]$ первичен (см. теорему 3.1.1). Более того, если рассматривать свободную дифференциальную алгебру без единицы, то фактор по идеалу $[x^m]$ окажется первичной дифференциальной ниль-алгеброй, а алгебра Ли специальных дифференцирований будет первичной и энгелевой (см. теорему 3.2.1).

Интересным является также вопрос, какую часть алгебры $R(L)$ можно получить, если вместо L рассматривать её подалгебру порожденную двумя элементами. Геометрически этот вопрос можно сформулировать так: насколько большую подалгебру можно восстановить в алгебре функций на аффинном многообразии, если для восстановления используется алгебра Ли, порожденная двумя векторными полями, коллинеарными в каждой точке (подробнее о геометрическом подходе и восстановлении алгебры функций см. работу Ю.П. Размыслова[10]). Такой вопрос оказывается естественным образом связан с дифференциальной теоремой о примитивном элементе. Колчин[11] доказал, что если расширение дифференциальных полей $F \subset E$ таково, что $\operatorname{trdeg}_F E < \infty$, E конечнопорождено над F и в F имеется неконстанта, то E можно породить над F одним элементом. Эта теорема была усилена автором (см. теорему 4.1.3): достаточно требовать наличия неконстанты не в F, а в поле E. Пользуясь этим усилением, удается доказать, что в алгебре специальных дифференцирований целостной дифференциальной k-алгебры B конечной степени трансцендентности, можно выбрать такие два элемента, что восстановленная ими подалгебра в B будет иметь ту же степень трансцендентности, что и B (см. теорему 4.4.1). Более того, с использованием результатов Ю.П. Размыслова[12] доказано, что в простой конечно порожденной алгебре Ли L, удовлетворяющей St_5, можно выбрать элементы $g, h \in L$ такие, что $\operatorname{trdeg}_k R(L) = \operatorname{trdeg}_k R(L_0)$, где через L_0 обозначена подалгебра Ли, порожденная g и h.

Вопрос о такого рода восстановлении алгебры функций по подалгебре Ли алгебры векторных полей интересен не только для алгебр, соответствующих одномерным распределениям (то есть алгебр, удовлетворяющих St_5).

[9] O'Keefe K.B., *A property of the differential ideal* $[y^p]$, Trans. AMS, vol. 94, 483-497, 1960.

[10] Размыслов Ю. П., *Центральные полиномы в неприводимых представлениях полупростой алгебры Ли*, Мат. сб.-Т. 12(164), №1(9).-С. 97-125, 1983.

[11] Kolchin E.R., *Extensions of differential fields, I*, Annals of Mathematics, vol. 43, 1942.

[12] Размыслов Ю.П., *О конечно порожденных простых алгебрах Ли, удовлетворяющих стандартному тождеству степени* 5, Вестн. Моск. Ун-та., Серия 1, Матем., Механика, №3, 37-41, 1990.

Ю.П. Размысловым[10] доказано существование лиева полинома, который бы по гладкому m-мерному инволютивному распределению восстанавливал бы алгебру функций на аффинном алгебраическом многообразии. Автором построен такой полином в явном виде для двумерных распределений (см. раздел 5.4 диссертации). Кроме того, в разделах 5.2 и 5.3 диссертации исследуется некоторые вложения конечномерных алгебр Ли в алгебры Ли $\widetilde{W}_m = \mathrm{Der}\, k[[x_1, \ldots, x_m]]$, соответствующие m-мерным распределениям.

Цель работы

Целью настоящей работы является изучение первичных дифференциальных алгебр, первичных алгебр Ли, удовлетворяющих тождеству St_5, и их взаимосвязей. Перед автором возникли следующие задачи:

• Доказать, что всякая первичная алгебра Ли, удовлетворяющая тождеству St_5, вкладывается в алгебру Ли специальных дифференцирований некоторой первичной алгебры Ли.

• Доказать первичность алгебры $k\{x\}/[x^m]$, изучить комбинаторную структуру идеала $[x^m]$.

• Усилить теорему Колчина о примитивном элементе для случая, когда основное поле состоит из констант. Вывести отсюда подобного рода результат для алгебр Ли специальных дифференцирований целостных дифференциальных алгебр.

• Изучить некоторые вложения конечномерных алгебр Ли в алгебры $\mathrm{Der}\, k[[x_1, \ldots, x_m]]$.

• Построить полилинейный ассоциативный полином, который по гладкому двумерному инволютивному распределению на аффинном алгебраическом многообразии восстанавливал бы алгебру функций на многообразии.

Эти задачи успешно решены автором в данной работе.

Научная новизна

Научная новизна диссертации состоит в следующем.

• Доказано, что первичная алгебра Ли, удовлетворяющая стандартному тождеству степени 5 вкладывается в алгебру Ли специальных дифференцирований первичной дифференциальной алгебры. Доказано, что алгебра Ли специальных дифференцирований первичной дифференциальной алгебры первична (в отличие от предыдущих работ по данному вопросу[13,14] не требуется наличие единицы).

• Доказана первичность алгебры $k\{x\}/[x^m]$, доказано, что поле констант этой алгебры совпадает с полем k. Доказано, что минимальное j такое, что $\left(x^{(i)}\right)^j \in [x^m]$, равно $(i+1)m-i$.

• Теорема Колчина о примитивном элементе[11] усилена: предположение о наличии неконстанты в основном поле заменено предположением о наличии неконстанты в расширении.

• Построены вложения n-мерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики в $\operatorname{Der} k[[x_1,\ldots,x_n]]$ такие, что все коэффициенты у дифференцирований являются рациональными функциями от квазимногочленов.

• Построен в явном виде полилинейный ассоциативный полином, который по гладкому двумерному инволютивному распределению на аффинном алгебраическом многообразии восстанавливает алгебру функций на многообразии. Существование таких полиномов было доказано Ю.П. Размысловым[10].

Основные методы исследования

В работе используются результаты и методы теории алгебр многообразий $\operatorname{var} W_n$ и дифференциальной алгебры. Результаты диссертации опираются на работы Ю.П. Размыслова о восстанавливающих полиномах[10] и структуре алгебр Ли, удовлетворяющих стандартному тождеству[2] степени 5, работы Колчина[11] и Зайденберга[15] о дифференциальной теореме о примитивном элементе, понятие α-мономов и основные результаты о них, полученные Леви[7]. Результаты главы 3 оказались возможны благодаря переходу от коммутативных дифференциальных алгебр к антикоммутативным.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Однако, доказательства многих результатов конструктивны. Результаты и методы могут быть при-

[13] Chebotar M.A., Lee P., *Prime lie rings of derivations of commutative rings*, Communications in Algebra, vol. 34, p. 4339-4344, 2006.

[14] Lui C., Passman D., *Prime Lie rings of derivations of commutative rings in characteristic* 2, Journal of Algebra, vol. 311, issue 1, p. 352-364, 2007.

[15] Seidenberg A., *Some basic theorems in differential algebra (characteristic p, arbitrary)*, Trans. AMS, vol. 73, 174-190, 1952.

менены в дифференциальной алгебре, теории дифференциальных уравнений, при изучении тождеств алгебр Ли, в алгебраической и дифференциальной геометрии.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

• на международных конференциях «Polynomial Computer Algebra» в г. Санкт-Петербурге в 2013 и 2014 гг.;

• на международной концеренции «Model Theory, Difference/Differential Equations and Applications» в г. Люмини в 2015 г.;

• на научно-исследовательском семинаре и на семинаре «Теория колец» кафедры высшей алгебры МГУ;

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приводится в конце библиографии.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из пяти глав и списка литературы из 48 наименования. Общий объем диссертации составляет 61 страницу.

Краткое содержание работы

Первая глава является вводной: в ней кратко изложена история вопроса, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты. Также описана структура и краткое содержание диссертации.

В главе 2 даются базовые определения из дифференциальной алгебры. В частности, для дифференциальной алгебры A определяется алгебра Ли специальных дифференцирований $\operatorname{Diff} A$. Доказано следующее предложение, связывающее первичность A как дифференциальной алгебры и превичность $\operatorname{Diff} A$ как алгебры Ли.

Предложение 2.2.4. *Пусть A — первичная дифференциальная k-алгебра над полем характеристики нуль с ненулевым дифференцированием. Тогда* $\operatorname{Diff} A$ *первична.*

По сравнению с известными результатами[13,14] мы не требуем наличия в A единицы. Оказывается, однако, что во всяком простом дифференциальном кольце единица обязательно есть:

Предложение 2.3.1. *Во всяком простом дифференциальном кольце есть единица.*

Хорошо известно, что всякая алгебра специальных дифференцирований дифференциальной алгебры удовлетворяет стандартному лиеву тождеству степени 5. Более того, далее определяется стандартная процедура, позволяющая по алгебре Ли L, удовлетворяющей стандартному тождеству степени 5, построить коммутативную алгебру $R(L)$, на которой L действует дифференцированиями. Более того, в этом случае доказана теорема, являющаяся в каком-то смысле обращением предложения 2.2.4:

Теорема 2.4.2. *Пусть L — первичная алгебра Ли, в которой выполняется стандартное тождество степени* 5*. Тогда она вкладывается в алгебру Ли специальных дифференцирований первичной алгебры Ли.*

Глава 3 посвящена изучению некоторых нетривиальных примеров первичных дифференциальных алгебр. Основным объектом является фактор свободной дифференциальной алгебры $k\{x\}$ по идеалу $[x^m]$. Этот идеал имеет довольно сложную комбинаторную структуру, из-за чего многие задачи с ним связанные в течение долгого времени были открытыми проблемами[8,9].

Главным инструментом при изучении этого идеала оказывается построенный в главе 3 гомоморфизм дифференциальных алгебр $\varphi_m\colon k\{x\} \to \Lambda(V_m)$, где $\Lambda(V_m)$ — алгебра Грассмана бесконечномерного пространства V_m, снабженная структурой дифференциальной алгебры. Про этот гомоморфизм доказан следующий основной факт.

Предложение 3.1.1. *φ_m — инъективный гомоморфизм.*

Благодаря тому, что φ_m оказывается вложением, удается доказать множество нетривиальных утверждений об идеале $[x^m]$ и алгебре $D_m = k_+\{x\}/[x^m]$.

Теорема 3.1.1. *Алгебра D_m первична.*

Теорема 3.1.2. *Минимальная степень q_k такая, что $\left(x^{(k)}\right)^{q_k} \in [x^m]$, равна $(k+1)m - k$.*

Предложение 3.1.2. *Обозначим через q и r неполное частное и остаток от деления n на $m-1$. Если вес монома M степени n меньше, чем $(m-1)q(q-1)+2rq$, то $M \in [x^m]$.*

Кроме того, для любого n существует моном $M \notin [x^m]$ степени n и веса $(m-1)q(q-1)+2rq$

Из существования вложения φ_m следует не только первичность алгебры D_m, но и нильпотентность всех её элементов. Доказано, что аналогичными свойствами обладает также алгебра Ли специальных дифференцирований $\operatorname{Diff} D_m$.

Теорема 3.2.2. *Всякое специальное дифференцирование алгебры $k_+\{x\}/[x^m]$ локально нильпотентно.*

Для любого $g \in \operatorname{Diff} k_+\{x\}/[x^m]$ дифференцирование $\operatorname{ad} g$ локально нильпотентно.

Метод, основанный на вложении в алгебру Грассмана, удается также обобщить на идеалы вида $[x^2, (x')^2, \ldots, \left(x^{(s)}\right)^2]$. Будем говорить, что моном $x^{(k_n)} \cdot \ldots \cdot x^{(k_0)}$ $(k_n \geqslant k_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant k_0)$ обладает α_m свойством, если для любых i и i' таких, что $i - i' = m-1$, выполнено $k_i - k_{i'} > 2s+1$. Далее строится гомоморфизм

$$\psi_{2,s}\colon k\{x\}/\left[x^2, (x')^2, \ldots, \left(x^{(s)}\right)^2\right] \to \Lambda(V_{2,s}),$$

где $\Lambda(V_{2,s})$ опять обозначает алгебру Грассмана некоторого бесконечномерного векторного пространства. В диссертации доказана теорема:

Теорема 3.3.1. *Образы $\alpha_{2,s}$-мономов образуют базис образа $\psi_{2,s}$ как векторного пространства. Ядром $\psi_{2,s}$ является идеал $\left[x^2, (x')^2, \ldots, \left(x^{(s)}\right)^2\right]$.*

В **главе 4** обсуждается усиленная версия теоремы Колчина о примитивном элементе и некоторые следствия из неё.

Пусть $F \subset E$ — расширение дифференциальных полей. Для элемента $a \in E$ через $F\langle a\rangle$ обозначается дифференциальное подполе в E, порожденное a и F. Колчиным[11] был доказан следующий факт:

Теорема 4.1.1. *Пусть $E = F\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ и $\operatorname{trdeg}_F E < \infty$. Пусть также F содержит неконстанту. Тогда существует $b \in E$ такой, что $E = F\langle b\rangle$.*

Вопрос о том, можно ли ослабить условие теоремы и требовать наличия неконстанты только в E, долгое время оставался открытым[17].

В доказательстве Колчина элемент b ищется в виде F-линейной комбинации элементов $a_1, \ldots, a_n$. Дело в том, что в случае, когда дифференцирование на F тривиально, такое не всегда возможно, как показывает следующий пример. Рассмотрим, поле $\mathbb{Q}(x, y)$ с дифференцированием $x' = 1$, $y' = 0$. Ни один из элементов вида $x + \lambda y$ не порождает всего поля, но $\mathbb{Q}(x, y) = \mathbb{Q}\langle x^2 + y \rangle$.

Таким образом, потребовалось развить некоторую технику, позволяющую искать порождающий элемент не в виде линейной комбинации образующих, а в виде многочлена от них. Результатом этого стала основная теоремы главы 4.

Теорема 4.1.3. *Пусть* $E = k\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$, $\operatorname{trdeg} E < \infty$ *и* E *содержит неконстанту. Тогда существует* $a \in E$ *такой, что* $E = k\langle a \rangle$.

Эта теорема позволяет доказать аналогичное утверждение для алгебр Ли специальных дифференцирований целостных дифференциальных алгебр.

Теорема 4.4.1. *Пусть* A *— целостная дифференциальная алгебра конечной степени трансцендентности (как коммутативная алгебра). Тогда существуют* $a, b \in A$ *такие, что* $\operatorname{trdeg} A$ *равна* $\operatorname{trdeg} R(A_0)$, *где через* A_0 *обозначена подалгебра Ли в* $\operatorname{Diff} A$, *порожденная* $a\partial$ *и* $b\partial$.

В **главе 5** собраны некоторые результаты касающиеся алгебры Ли специальных дифференцирований алгебры формальных степенных рядов от n переменных.

Зафиксируем конечномерную алгебру Ли $\mathfrak{L}$ на полем k, обозначим её универсальную обертывающую через $U(\mathfrak{L})$, а двойственное пространство к обертывающей — через $U^*(\mathfrak{L})$. На $U(\mathfrak{L})$ можно определить коумножение, задав его формулой $\Delta l \stackrel{\text{def}}{=} l \otimes 1 + 1 \otimes l$ для $l \in \mathfrak{L}$ и продолжив по дистрибутивности на всю $U(\mathfrak{L})$. Это коумножение индуцирует умножение на $U^*(\mathfrak{L})$, задаваемое формулой $\langle f * g; u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f \otimes g; \Delta u \rangle$, где $f, g \in U^*(\mathfrak{L})$ и $u \in U(\mathfrak{L})$. Тогда $U^*(\mathfrak{L})$ становится коммутативной ассоциативной алгеброй, где единицей является функционал, сопоставляющий каждому элементу $U(\mathfrak{L})$ его свободный член. Она также является $\mathfrak{L}$ -модулем относительно действия ($l \in \mathfrak{L}$, $f \in U^*(\mathfrak{L})$ и $u \in U(\mathfrak{L})$):

$$\langle l \times f; u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f; ul \rangle. \tag{1}$$

[17] *On primitive elements in differentially algebraic extension fields*, Trans. AMS, vol. 143, 71-83, 1968.

Более того, элементы $\mathfrak{L}$ являются дифференцированиями $U^*(\mathfrak{L})$: $\langle l\times(f*g);u\rangle = \langle(l\times f)*g;u\rangle + \langle f*(l\times g);u\rangle$.

Дело в том, что структура алгебры на $U^*(\mathfrak{L})$ не зависит от скобки Ли на пространстве $\mathfrak{L}$ и определяется только размерностью $\mathfrak{L}$. Структура алгебры Ли отражается только в действии (1). Эта алгебра известна и называется пополненной алгеброй разделенных степеней $\widetilde{O}_n$. При $\operatorname{char} k = 0$ она изоморфна алгебре формальных степенных рядов от n переменных $\widetilde{\mathcal{E}_n} \stackrel{\text{def}}{=} k[[x_1,\dots,x_n]]$. В разделах 5.2 и 5.3 исследуются два семейства изоморфизов, при которых образ $\mathfrak{L}$ в $\operatorname{Der} k[[x_1,\dots,x_n]]$ обладает рядом интересных свойств. Так как формулировки результатов в целом схожи, мы ограничимся основной теоремой раздела 5.2.

Пусть $e_1,\dots,e_n$ — базис $\mathfrak{L}$. Сопоставим формальный ряд $\sum\langle f;e_1^{m_1}\dots e_n^{m_n}\rangle(e_1^{m_1}\dots e_n^{m_n})^*$ каждому элементу $f\in U^*(\mathfrak{L})$. Определим два отображения. Первое — преобразование Бореля $B\colon \widetilde{\mathcal{E}_n}\to U^*(\mathfrak{L})$:

$$B\left(\sum a_{m_1,\dots,m_n}x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n}\right) = \sum a_{m_1,\dots,m_n}(e_1^{m_1}\dots e_n^{m_n})^*.$$

Второе определено только в случае $\operatorname{char} k = 0$ и является изоморфизмом алгебр:

$$\varphi\left(\sum a_{m_1,\dots,m_n}(e_1^{m_1}\dots e_n^{m_n})^*\right) = \sum a_{m_1,\dots,m_n}\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\dots\frac{x_n^{m_n}}{m_n!}.$$

Теорема 5.2.1. *Для каждого $l\in\mathfrak{L}$ определим n «степенных рядов» $\overline{l_1},\dots,\overline{l_n}\in\widetilde{O}_n$ по формуле*

$$\overline{l_i} = \sum_{m_1,\dots,m_n}\langle e_i^*;(e_1^{m_1}\dots e_n^{m_n})\times l\rangle(e_1^{m_1}\dots e_n^{m_n})^*. \tag{2}$$

1. *Отображение*
$$\rho(l) = \overline{l_1}\partial_1+\ldots+\overline{l_n}\partial_n \tag{3}$$
из $\mathfrak{L}$ в специальные дифференцирования алгебры $\widetilde{O}_n$ есть точное представление $\mathfrak{L}$, причем $\mathfrak{L}$ -модуль, определямый данным представлением, инъективен, и ρ определяет точное представление $\mathfrak{L}$ и $U(\mathfrak{L})$ в операторах в подпространстве $R(\mathfrak{L})$. Кроме того, $\mathfrak{L}$ задает n -мерное распределение на $k-\operatorname{Spec}(R(\mathfrak{L}))$.

2. *Обратное преобразование Бореля B^{-1} переводит $R(\mathfrak{L})$ в степенные ряды вида $\frac{p(x_1,\dots,x_n)}{q_1(x_1)\dots q_n(x_n)}$ (где p и q_i — многочлены). В случае, когда $\operatorname{char} k = 0$ и k алгебраически замкнуто, $\varphi(R(\mathfrak{L}))$ лежит в алгебре квазиполиномов и $\varphi(\overline{l_i})$ выражаются через квазиполиномы рационально.*

3. *Если в $\mathfrak{L}$ можно выбрать базис из элементов, которые нильпотентны в любом конечномерном представлении*[1], *то в этом базисе $\varphi(R(\mathfrak{L}))$ лежит в многочленах, а $\varphi(\overline{l_i})$ будут рациональными функциями.*

В разделе 5.4 в явном виде строится восстанавливающий полином для двумерных инволютивных распределений на аффинном алгебраическом многообразии. Общая теория восстанавливающих полиномов изложена в §42 монографии Ю.П. Размыслова[16]. Обозначим через W_n алгебру Ли всех дифференцирований алгебры многочленов $\mathcal{E}_n = k[x_1, \dots, x_n]$. Для того чтобы полилинейный ассоциативный полином $P(x_1, \dots, x_N)$ был восстанавливающим, необходимо и достаточно, чтобы образ отображения $P\colon \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{ad} W_n \to \operatorname{End}_k \mathcal{E}_n$ был ненулевым и лежал в подалгебре умножений на многочлен $\mathcal{E}_n \subset \operatorname{End}_k \mathcal{E}_n$.

Для любых дифференцрований $D_i = p_i^1 \frac{\partial}{\partial x} + p_i^2 \frac{\partial}{\partial y}$ $(i = 1, \dots, 12)$ обозначим через M_2 матрицу, i-ая строка которой имеет вид

$$(p_i^1, p_i^2, (p_i^1)_x, (p_i^1)_y, (p_i^2)_x, (p_i^2)_y, (p_i^1)_{xx}, (p_i^1)_{xy}, (p_i^1)_{yy}, (p_i^2)_{xx}, (p_i^2)_{xy}, (p_i^2)_{yy}).$$

Кроме того, положим

$$W^{(2)}(x_1, \dots, x_{12}, y_1, \dots, y_4) = \sum_{\sigma \in S_{12}} \operatorname{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(8)} y_1 x_{\sigma(9)} \cdots y_4 x_{\sigma(12)}$$

и пусть $\widetilde{D}_i = q_i^1 \frac{\partial}{\partial x} + q_i^2 \frac{\partial}{\partial y}$ $(i = 1, \dots, 4)$.

В диссертации доказана следующая теорема:

Теорема 5.4.1. *Для ассоциативного полилинейного полинома $W^{(2)}$ выполнено соотношение*

$$(1-\tau_{y_1y_2})(1-\tau_{y_3y_4})W^{(2)}|_{x_i = \operatorname{ad} D_i,\, y_j = \operatorname{ad} \widetilde{D}_j} = (-120) \begin{vmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_2^1 & q_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_3^1 & q_3^2 \\ q_4^1 & q_4^2 \end{vmatrix} \det M_2, \quad (4)$$

где $\tau_{y_iy_j}$ — элемент групповой алгебры $\mathbb{Z}[S_4]$, переставляющий y_i и y_j.

Таким образом, полином $(1-\tau_{y_1y_2})(1-\tau_{y_3y_4})W^{(2)}$ действительно является восстанавливающим.

[1] Такой базис может быть выбран, например, при условии $\mathfrak{L} = [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$

[16] Размыслов Ю.П., *Тождества алгебр и их представлений* , Наука, 1989.

Заключение

В этом последнем разделе мы вкратце опишем возможные обобщения основных результатов диссертации и пути дальнейшего исследования.

В главе 3 был весьма обстоятельно изучен дифференциальный идеал $[x^m]$. Для этих идеалов была установлена первичность фактора свободной алгебры по ним (теорема 3.1.1), критерий принадлежности степени производной идеалу (теорема 3.1.2) и ряд других свойств. Кроме того, развитая в этих доказательствах техника была обобщена на идеал $\left[x^2, (x')^2, \ldots, \left(x^{(s)}\right)^2\right]$. Интересными задачами для дальнейшего исследования являются:

- Получить критерий принадлежности произвольного монома идеалу. Отметим, что результаты главы 3 позволяют построить достаточно эффективный алгоритм для проверки этой принадлежности. Однако, критерий в виде формулы от порядков входящих в моном производных представлял бы большой интерес.
- Расширить класс идеалов, для которых применима техника, развитая в главе 3.
- Обобщить полученные результаты на случай алгебр с несколькими коммутирующими дифференцированиями.

В главе 4 была доказана усиленная версия теоремы Колчина о примитивном элементе для дифференциальных полей (теорема 4.1.3). Более точно, было доказано, что в конечнопорожденном дифференциально алгебраическом расширении дифференциальных полей $F \subset E$ таком, что F содержит неконстанту, найдется элемент $a \in E$, для которого $E = F\langle a \rangle$. Интересными задачами для дальнейшего исследования являются:

- Обобщить полученный результат на поля с m коммутирующими дифференцированиями. Условие наличия неконстанты в E, следуя Колчину[11], нужно заменить на наличие в F набора из m элементов с ненулевым якобианом.
- Предложить алгоритмы для нахождения примитивного элемента, изучить их сложность.

В главе 5 были построены некоторые вложения конечномерных алгебр Ли в алгебры специальных дифференцирований алгебр формальных степенных рядов от нескольких переменных такие, что коэффициенты полученных дифференцирований оказались рациональными функциями от квазимногочленов (теорема 5.2.1 и теорема 5.3.1). Кроме того, построен в явном виде полилинейный ассоциативный полином, который по гладкому двумерному инволютивному распределению на аффинном алгебраическом многообразии восстанавливает алгебру функций на многообразии (теорема 5.4.1). Интересными задачами для дальнейшего исследования являются:

- Найти базисы в универсальной обертывающей алгебре конечномерной алгебры Ли, отличные от симметрического базиса и базиса Пуанкаре-Биркгофа-Витта, для которых имели бы место аналоги теорем 5.2.1 и 5.3.1. Описать все такие базисы.
- Построить, по аналогии с теоремой 5.4.1, восстанавливающие полиномы для инволютивных распределений большей размерности.
- Построить восстанавливающий полином для двумерных инволютивных распределений меньшей степени или доказать отсутствие оного.

Благодарности

Автор чрезвычайно благодарен своему научному руководителю Ю.П. Размыслову за многочисленные и плодотворные беседы, повлиявшие не только на содержание диссертации, но и на стиль мышления диссертанта. Автор также очень признателен коллективу кафедры высшей алгебры за прекрасную атмосферу, многочисленную помощь в самых разных вопросах и интересные математические дискуссии. Особенно хотелось бы поблагодарить Е.С. Голода, А.И. Зобнина, Д.В. Трушина, Е.И. Бунину и И.В. Аржанцева. Автор выражает огромную благодарность своим школьным учителям математики С.Б. Трепаковой и В.З. Шаричу, подтолкнувших его к активным занятиям математикой и всемерно поддерживавших на этом пути.

Работы автора по теме диссертации

[1] Pogudin G. *The primitive element theorem for differential fields with zero derivation on the base field* // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2015. — Vol. 219, no. 9. — P. 4035–4041.

[2] Погудин Г.А. *Первичные дифференциальные ниль-алгебры существуют* // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. — 2014. — № 1. — С. 50–53.

[3] Размыслов Ю.П., Погудин Г.А. *Гейзенберговы оболочки алгебр Хохшильда конечномерных алгебр Ли* // Фундаментальная и прикладная математика. — 2012. — Т. 17, № 5. — С. 147–155

В данной работе Размыслову Ю.П. принадлежит постановка задачи и общее руководство, а Погудину Г.А. — доказательство основной теоремы и всех лемм.

[4] Размыслов Ю.П., Погудин Г.А. *Парадигма макс-фактора и конечномерные представления алгебр Ли* // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. — 2012. — № 4. — С. 48–50.

В данной работе Размыслову Ю.П. принадлежит постановка задачи и общее руководство, а Погудину Г.А. — доказательство основной теоремы.

[5] Погудин Г.А. *Вронскиан дифференцирований* // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. — 2011. — № 1. — С. 63–65.