ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Погудина Глеба Александровича «Первичные дифференциальные алгебры и ассоциированные с ними алгебры Ли», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

В представленной диссертации исследуются коммутативные алгебры, снабженные дополнительной унарной операцией, дифференцированием, удовлетворяющей правилу Лейбница. Такие алгебры начали систематически изучаться в классических работах Ритта и Колчина 30-40-х годов двадцатого века в связи с построением дифференциальной теории Галуа и развитием алгоритмов, связанных с алгебраическими дифференциальными уравнениями. В течение последующих лет одной из основных тенденций в дифференциальной алгебре было развитие аналогии с классической коммутативной алгеброй: были доказаны аналоги теоремы Гильберта о базисе, теоремы о примарном разложении, введены аналоги базисов Гребнера и формы Чжоу. Как правило, эти аналоги оказываются значительно сложнее своих классических аналогов. С одной стороны, диссертация Г.А. Погудина продолжает эту традицию: значительное место в ней занимают теорема о примитивном элементе для дифференциальных полей и алгебра $k\{x\} / [x^2]$, являющаяся естественным аналогом кольца двойных чисел.

С другой стороны, полученные результаты оказываются связанными с другим сюжетом: с алгебрами Ли, удовлетворяющими стандартному тождеству степени 5. В 70-х годах рядом исследователей было независимо подмечено, что алгебра Ли векторных полей на прямой удовлетворяет стандартному тождеству степени 5. Вопрос о том, следуют ли остальные тождества этой алгебры из одного данного тождества, является открытым по сей день. В работе Ю.П. Размыслова была подмечена связь между такого рода алгебрами Ли и дифференциальными алгебрами. Дело в том, что каждой дифференциальной алгебре можно сопоставить алгебру Ли её специальных дифференцирований. Более того, во многих случаях оказывается возможно установить обратное соответствие. Благодаря этому результаты автора, относящиеся к дифференциальным алгебрам, трансформируются в результаты об алгебрах Ли.

Диссертация состоит из пяти глав. Первая глава содержит введение, там приведена краткая историческая справка, обоснованы актуальность работы, сформулированы основные результаты.

Во второй главе приводятся известные результаты о связи дифференциальных алгебр и алгебр Ли, удовлетворяющих стандартному тождеству степени 5. Доказаны некоторые вспомогательные результаты: сохранение первичности алгебры при указанном соответствии (в обе стороны), наличие единицы в простой дифференциальной алгебре над полем нулевой характеристики.

Третья глава содержит результаты, связанные с алгеброй $k\{x\} / [x^m]$. В отличие от своего коммутативно-алгебраического аналога, эта алгебра бесконечномерна, что существенно затрудняет её изучение. Удивительно то, что она оказывается первичной дифференциальной алгеброй и позволяет построить пример первичной дифференциальной ниль-алгебры. Отметим, что в силу результата из второй главы о наличии единицы в простой дифференциальной алгебре, простой дифференциальной ниль-алгебры над полем нулевой характеристики не существует.

В четвертой главе автор усиливает классическую теорему Колчина о примитивном элементе, заменив посылку теоремы на самую слабую из возможных. В отличие от теоремы Колчина, теорема, доказанная в диссертации, верна, например, для дифференциальных расширений поля рациональных или комплексных чисел.
К результатам третьей и четвертой главы, касающимся дифференциальной алгебры, сформулированы и доказаны результаты о соответствующих алгебрах Ли.

Особое место в диссертации занимает пятая глава. В ней собраны результаты автора об алгебрах Ли, соответствующих некоторым дифференциальным алгебрам, снабженных несколькими коммутирующими дифференцированиями. В частности, оказывается, что любая конечномерная алгебра Ли вкладывается в какую-нибудь алгебры из этого класса. Более того, некоторые из этих вложений обладают рядом интересных свойств, которые сформулированы и доказаны в диссертации.

Сделаем несколько непринципиальных замечаний:

1. В главе 4 не хватает единообразия обозначений: нижнее поле расширения в некоторых случаях обозначается, k, а в некоторых F.
2. В доказательстве леммы 4.2.1 для полной ясности не хватает фразы о том, что коэффициент при $a^{(m+1)}$ в правой части не равен нулю, так как как R может быть выбрана минимальной алгебраической зависимостью.
3. В параграфе 3.3. в определении скособоченного монома набор $(a_1, \dots, a_n)$ лучше было бы называть не степенью, а, например, мультистепенью, так как в дальнейших рассуждениях обычная общая степень монома также фигурирует.
4. Точки над ё то ставятся, то не ставятся
5. Во второй строчке сверху на 42 странице не хватает пояснения, орбита какого действия для f рассматривается, хотя по контексту можно понять, что речь идет о действии универсальной обертывающей алгебры

Данные замечания не снижают общего хорошего впечатления от диссертации, в которой получен ряд важных результатов об алгебрах с дифференцированием. Работа вносит существенный вклад в развитие этой области, представляет собой законченное математическое исследование и выполнена на высоком математическом уровне. Автореферат диссертации правильно отражает её содержание. Результаты диссертации являются новыми, содержат полные доказательства и своевременно опубликованы.

Результаты диссертации докладывались на различных научных конференциях и семинарах. Они могут использоваться в дальнейших исследованиях в ведущих алгебраических центрах в России и за рубежом.

На основание изложенного выше я считаю, что диссертационная работа Г.А. Погудина «Первичные дифференциальные алгебры и ассоциированные с ними алгебры Ли» удовлетворяет всем требованиям п.9 «Положения о порядке присуждения учёных степеней» российского ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Профессор кафедры высшей математики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14,
доктор физико-математических
наук по специальности 01.01.06,
профессор

Туганбаев Аскар Аканович
e-mail: tuganbaev@gmail.com
тел. +7(916)0542719

05.02.16г

Подпись А.А.Туганбаева заверяю
Начальник управления кадров НИУ МЭИ

(Е. Ю. Баранова)

ВЕРНО
НАЧАЛЬНИК ОТДЕЛА ПО РАБОТЕ
С НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИМИ РАБОТНИКАМИ
ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ»
ЯРЕМЕНКО Г.А.