

Отзыв

официального оппонента на диссертационную работу

Погудина Глеба Александровича

«Первичные дифференциальные алгебры и ассоциированные с ними алгебры Ли», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Диссертационная работа Погудина Г.А. посвящена исследованию дифференциальных алгебр, в основном, связанных с простой бесконечномерной алгеброй Ли картановского типа общей серии.

Актуальность темы.

Исследование алгебр с точки зрения выполнения тождественных соотношений является устоявшимся направлением исследований современной алгебры. Классическими областями являются ассоциативный случай, случай алгебр Ли, случай йордановых алгебр. Однако, в последние десятилетия стали значительно активнее исследоваться алгебры других сигнатур. Например, тернарные алгебры или, как в данной работе, алгебры над полем, в которых, кроме бинарной операции, задана еще одна, но уже унарная операция. Самым привлекающим внимание стал случай, когда унарная операция по отношению к бинарной является дифференцированием. Одним из естественных примеров такой является алгебра Ли векторных полей на прямой. Многообразие, которая эта алгебра порождает, совпадает с многообразием, порожденным алгеброй Витта или алгеброй Ли дифференциальных операторов первого порядка, например, на кольце многочленов от одной образующей. Несмотря на легко запоминающуюся таблицу умножения алгебры Витта, когда $e_i e_j = (j - i)e_{i+j}$, исследование тождеств соответствующего многообразия является очень сложной задачей. В середине 70-х годов прошлого века несколькими авторами, в том числе научным руководителем соискателя, было замечено, что в любой простой бесконечномерной алгебре Ли картановского типа общей серии выполняется стандартное лиево тождество некоторой степени. Позже, в середине 80-х годов уже мною было доказано, что многообразие, порожденное простой бесконечномерной алгебре Ли картановского типа общей серии, имеет экспоненциальный рост. Но в отличие от ассоциативного случая, кохарактер этих многообразий не лежит ни в одном крюке. В частности, наличие стандартного лиева тождества степени пять, которое выполняется в первой алгебре из серии, в алгеб-

ре W_1 , не влечет выполнения в ней системы тождеств Капелли. Позже, уже в середине 90-х годов прошлого века, для других алгебр общей серии были обнаружены тождества, которые не следуют из стандартного. В случае нулевой характеристики основного поля для алгебры W_2 это было доказано профессором МГУ Зайцевым М.В. Для алгебры W_1 над полем характеристики нуль создалась удивительная ситуация: с одной стороны, не обнаружено ни одно тождество, которое не является следствием стандартного лиева тождества степени пять, а с другой стороны, не удается доказать конечную базисуемость многообразия. Поэтому не является случайностью, что возникла необходимость изучения алгебр, в которых выполнено стандартное тождество степени пять. И на этом пути одним из подходов является расширение списка заданных на алгебре операций, например, задание, кроме бинарной операции, еще и унарной.

Таким образом, у меня нет никаких сомнений, что тематика исследования диссертационной работы является не только актуальной, но еще и весьма трудной.

Целью диссертационной работы является изучение алгебр, удовлетворяющих стандартному лиеву тождеству степени пять, в частности, первичных дифференциальных алгебр, первичных алгебр Ли и их взаимосвязей.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 61 страницу.

Содержание работы.

Первая глава содержит обоснование актуальности проводимого исследования, а также краткий исторический обзор состояния изучаемой области по данной теме.

Вторая глава посвящена описанию основных объектов диссертации: дифференциальных алгебр и алгебр Ли, удовлетворяющих стандартному тождеству степени 5. Вводятся алгебра Ли специальных дифференцирований и дифференциальная алгебра, восстановленная по алгебре Ли, удовлетворяющей стандартному тождеству степени 5. Доказываются различные вспомогательные факты, связанные с этими конструкциями. В частности, показано, что при переходе как от дифференциальных алгебр к алгебрам Ли, так и обратно сохраняется первичность.

Третья глава связана с изучением первичных дифференциальных алгебр. Исследуется фактор свободной дифференциальной алгебры по

дифференциальному идеалу, порожденному x^2 . Решается ряд открытых вопросов, связанных с этой алгеброй: доказываемся первичность, описывается подкольцо констант, вычисляются порядки нильпотентности для многих элементов и т.д. Эта алгебра позволяет построить два важных примера: первичную дифференциальную ниль-алгебру и энгелеву первичную алгебру Ли, удовлетворяющую стандартному тождеству степени 5.

В четвертой главе изучаются вопросы, связанные с теоремой о примитивном элементе для дифференциальных полей. В случае, когда в дифференциально алгебраическом расширении дифференциальных полей дифференцирование действует на основное поле нетривиальным образом, теорема была доказана Э. Колчиным в 1942 году. Случай, когда основное поле является полем констант, оказался труднее — в этом случае дифференциальная теорема о примитивном элементе доказана диссертантом. В приложении к алгебрам Ли этот результат даёт возможность доказать, что алгебре Ли, соответствующей одномерному инволютивному распределению на аффинном алгебраическом многообразии, можно выбрать двупорожденную подалгебру, по которой можно будет восстановить «почти всё» исходное многообразие. Формально говоря, восстановить подалгебру в алгебре функций той же степени трансцендентности. Особый интерес представляет случай конечнопорожденных простых алгебр Ли, удовлетворяющих стандартному тождеству степени 5, так как из результатов Ю.П. Размыслова следует, что к таким алгебрам упомянутая теорема всегда применима.

В пятой главе собран ряд результатов, касающихся алгебр Ли W_n . Изучены два класса вложений (в симметрическом базисе и в базисе Пуанкаре-Биркгофа-Витта) конечномерных алгебр в алгебры этой серии. Доказано, что коэффициенты элементов образов являются рациональными функциями от квазимногочленов. Кроме того, построен полилинейный ассоциативный полином, позволяющий по двумерному инволютивному распределению на аффинном алгебраическом многообразии восстановить алгебру функций на этом многообразии.

Литература включает в себя список из 48 источников.

Научная новизна исследования. Результаты диссертации являются новыми и актуальными.

Степень обоснованности и достоверности полученных результатов. Доказательство результатов диссертации представлено с доста-

точной для понимания степенью подробности и с полным обоснованием. Они опубликованы в пяти статьях автора в журналах из списка ВАК или приравненных к ним.

Диссертационная работа носит теоретический характер и может найти применение в научных исследованиях, проводимых в России (Ульяновский, Московский, Новосибирский государственные университеты и др.) и за рубежом (в Италии, Болгарии, Бразилии и др.).

Замечания к диссертации.

1. Текст диссертации написан слишком кратко, практически тезисно. Многие доказательства можно было бы изложить более подробно. Например, доказательство Предложения 2.3.1 или доказательство Теоремы 3.2.1 на стр. 25.

2. На странице 15, 16 строка сверху, написано $ab = 0$, а надо $ab \neq 0$;

3. В списке литературы русскоязычные издания должны быть расположены вначале до англоязычных.

В тексте диссертации также присутствует ряд опечаток: дублирование слова «обозначим» на странице 17 в предпоследнем абзаце; в определении 3.3.1 на странице 26 вместо α_m надо $\alpha_{m,s}$; опечатка в слове «техничнее» на странице 27 в 3 строке сверху; на странице 29, 13 строка сверху, вместо ω надо ω_m ; опечатки в слове «алгебры» на странице 45, 8 строка сверху, и в слове «дифференцирований» на странице 52, 6 строка снизу. В целом, критических замечаний по оформлению и содержанию диссертации, влияющих на общую положительную оценку работы, у меня нет.

Автореферат диссертации правильно отражает содержание диссертации.

Замечания по автореферату. На странице 6, в разделе «Публикации», написано, «опубликовано в 6 работах», а в конце автореферата, в разделе «Работы автора по теме диссертации», приведены только пять работ.

Заключение. На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что тематика и содержание диссертации Погудина Глеба Александровича «Первичные дифференциальные алгебры и ассоциированные с ними алгебры Ли», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 (математическая логика, алгебра и теория чисел) отвечает паспорту специальности и соответствует критериям, установленным в Положении о порядке

присуждения ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 г. №842, а ее автор, Погудин Глеб Александрович, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладной математики
федерального государственного образовательного
бюджетного учреждения высшего образования
«Ульяновский государственный университет»
д.ф.-м.н., проф.

08.02.16²



С.П.Мищенко

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»
432017, г. Ульяновск, ул. Л.Толстого, 42, УлГУ
Адрес электронной почты: mishchenkosp@mail.ru
Интернет-сайт: <http://ulsu.ru>
Телефон: + 7 (8422) 41-20-88

