

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”  
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Шаповалов Иван Леонидович

**ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ В ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Москва, 2015

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

**Научный руководитель:** Вильке Владимир Георгиевич,  
доктор физико-математических наук, профессор

**Официальные оппоненты:** Красильников Павел Сергеевич,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой дифференциальных  
уравнений Московского авиационного института  
(национального исследовательского университета)

Зленко Александр Афанасьевич,  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры высшей математики  
Московского автомобильно-дорожного  
государственного технического университета  
(МАДИ)

**Ведущая организация:** Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
Российской академии наук Федерального  
исследовательского центра «Информатика и  
управление» Российской академии наук

Защита диссертации состоится 2016 года в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском Государственном Университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте <http://mech.math.msu.su/~snark/files/diss/0092diss.pdf>

Автореферат разослан 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Прошкин Владимир Александрович

## Общая характеристика работы

### **Актуальность темы.**

Задача о возникновении и устойчивости автоколебаний является одной из фундаментальных задач механики. Автоколебания широко распространены как в технике, так и в естествознании и имеют большое значение для их изучения.

Первые фундаментальные исследования в области автоколебаний принадлежат Стретту Дж., Пуанкаре А.

Развитие теории фрикционных автоколебаний составляет уже почти вековую историю. Наиболее значимые результаты были получены следующими учеными: Андроновым А.А, Витте А.А., Ветюковым И.И., Ишлинским А.Ю., Кайдановским Н.Л., Коловским Н.З., Крагельским И.В., Пановко Я.Г., Петровым В.Ф., Стрелковым С.П., Хайкиным С.Э. и рядом других.

Кайдановский Н.Л. и Хайкин С.Э. показали, что для возникновения автоколебаний закон трения должен обладать нелинейностью. Сила трения, зависящая от относительной скорости скольжения между телами, должна иметь интервалы, на которых она уменьшается с ростом скорости. При этом зависимость силы трения от скорости может описываться различными способами, например: скачкообразным, экспоненциальным, кусочно-линейным или кубическим.

В диссертации используется модель трения, которая описывается полиномом пятой степени от относительной скорости скольжения тел. Характерной особенностью этой модели является наличие интервала скоростей, в котором сила трения убывает с ростом скорости. Предложенная модель трения используется для анализа динамики взаимодействующих тел. Преимущество принятой модели состоит в том, что она задается гладкой функцией и не имеет зон «застоя» или модулей относительных скоростей двух тел в точках контакта, представляющих значительные трудности при исследовании движений систем с сухим трением.

### **Цель работы.**

Целью диссертации является изучение автоколебаний тел при их контактном взаимодействии. В отличие от ранее исследуемых работ по этой тематике, в данной работе используется модель трения, описываемая многочленом пятой степени от относительной скорости скольжения тел. Данная модель трения используется потому, что она является простейшей аппроксимацией модели трения Кулона, когда сила трения покоя превосходит силу трения скольжения. Использование этой модели трения позволяет аналитически исследовать явление автоколебаний в переменных действие-угол.

### **Методы исследования.**

В диссертации применяется метод изучения движения в переменных действие-угол и метод усреднения, разработанный Вильке В.Г. для изучения механических систем, как с конечным числом степеней свободы, так и с бесконечным числом степеней свободы.

### **Достоверность результатов.**

Все результаты в диссертации получены аналитическими и численными методами. В работе приведены подробные доказательства основных результатов. Во всех случаях заимствования научных результатов приведены соответствующие ссылки.

### **Научная новизна.**

Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми. Благодаря предложенной Вильке В.Г. модели трения, удалось аналитически исследовать автоколебания в системе с бесконечным числом степеней свободы на примере задачи о струне и смычке. Также аналитическими методами удалось решить задачи о взаимодействующих осцилляторах и простыми способами описать возникновения автоколебаний колес в процессе торможения автомобиля.

### **Теоретическая и практическая ценность.**

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в акустике и в автомобилестроении. Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН и других научно-исследовательских центрах.

### **Апробация работы.**

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2014» (Москва, 2014).
2. Конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, 2014).
3. I Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, РУДН (Москва, 2014).
4. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015» (Москва, 2015).
5. Научный семинар имени А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению (Москва, 2015).

### **Публикации.**

По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ. Среди них 3 печатные работы [1-3] опубликованы в журналах, включенных в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

### **Личный вклад.**

В совместных работах [1-3] Вильке В.Г. принадлежат постановки задач и общее научное руководство. Все результаты получены лично автором.

### **Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 96 наименований, включая работы автора. В диссертации приведено 22 рисунка. Общий объем диссертации – 90 страниц.

## **Содержание диссертации**

**Во введении** раскрывается вопрос актуальности исследования, дан краткий обзор литературы по тематике диссертации и изложено содержание работы.

**Первая глава** диссертации посвящена задаче об автоколебании двух тел с нелинейным трением. Рассматривается механическая система, состоящая из двух тел, одно из которых соединено пружиной с неподвижным телом, а второе соединено пружиной с базовым массивным телом, движущимся с постоянной скоростью, относительно неподвижного тела. Оба тела движутся прямолинейно, скользя друг относительно друга. В качестве закона, описывающего взаимодействие двух трущихся тел, используется нелинейная зависимость силы, представленная полиномом пятой степени с нечетными степенями относительной скорости тел (рисунок 1).

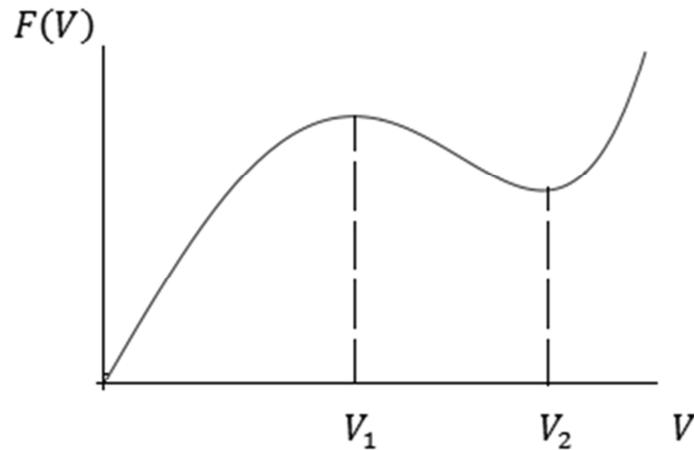


Рисунок 1 - График модели силы трения  $F(V) = kV(1 - g_1V^2 + g_2V^4)$ ,  
 где  $V$  – относительная скорость между телами,  
 $k, g_1, g_2$  – постоянные положительные коэффициенты

В §1.1 сформулирована постановка задачи и выведены уравнения движения:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 = -[F(V) - F(v)],$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 = [F(V) - F(v)],$$

$$F(V) = k(V - g_1V^3 + g_2V^5),$$

$$V = v + \dot{x}_1 - \dot{x}_2,$$

$$x_1 = k_1^{-1}F(v) + q_1,$$

$$x_2 = -k_2^{-1}F(v) + q_2,$$

где  $m_1, m_2$  – массы тел,  $k_1, k_2$  – жесткости пружин,  $v$  – постоянная скорость скольжения массивного тела,  $q_2$  – перемещение первого тела в неподвижной системе координат, а  $q_1$  – перемещение второго тела относительно массивного тела. При  $q_1 = q_2 = 0$  обе пружины являются недеформированными.

Решение  $x_1 = x_2 = 0$  соответствует скольжению одного твердого тела по другому с постоянной скоростью. Оно будет устойчиво, когда сила трения растет с ростом скорости, и неустойчиво, когда сила трения падает с ростом скорости.

В §1.2 уравнения движения приводятся к переменным действие-угол в окрестности стационарного решения. Далее применяется метод усреднения, если коэффициент  $k$  в выражении силы трения принять в качестве малого параметра в

соответствующей системе единиц, где он имеет безразмерную величину. Усреднение производится по быстрым угловым переменным, предполагая отсутствие резонансов.

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= -km_1^{-1}Z_1[A + B(Z_1 + 2Z_2) + C(Z_1^2 + 6Z_1Z_2 + 3Z_2^2)], \\ \dot{Z}_2 &= -km_2^{-1}Z_2[A + B(2Z_1 + Z_2) + C(3Z_1^2 + 6Z_1Z_2 + Z_2^2)], \\ \dot{\varphi}_n &= \omega_n, \\ Z_n &= \frac{2\omega_n I_n}{m_n}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$A = \frac{(v^2 - V_1^2)(v^2 - V_2^2)}{V_1^2 V_2^2}, \quad B = \frac{6v^2 - V_1^2 - V_2^2}{4V_1^2 V_2^2} > 0, \quad C = \frac{1}{8V_1^2 V_2^2} > 0,$$

$$m_n \dot{x}_n = \sqrt{2m_n \omega_n I_n} \cos \varphi_n, \quad x_n = \sqrt{\frac{2\omega_n I_n}{k_n}} \sin \varphi_n,$$

$$\omega_n^2 = \frac{k_n}{m_n}, \quad n = 1, 2.$$

Если скорость массивного тела принадлежит интервалам  $v \in (0, V_1) \cup (V_2, \infty)$ , то коэффициент  $A$  положителен, и нулевое решение уравнений (1) асимптотически устойчиво. Другие автоколебательные режимы на данных интервалах скоростей отсутствуют. Если  $v \in (V_1, V_2)$ , то нулевое решение будет неустойчивым. Этот результат был получен в разделе §1.1 для точных уравнений.

Кроме нулевого решения система имеет 3 автоколебательных режима, определенных при  $v \in (V_1, V_2)$ :

$$\begin{cases} Z_1 = 0, \\ A + BZ_2 + CZ_2^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow Z_1 = 0, \quad Z_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} Z_2 = 0, \\ A + BZ_1 + CZ_1^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow Z_2 = 0, \quad Z_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}, \quad (3)$$

$$\begin{cases} A + B(Z_1 + 2Z_2) + C(Z_1^2 + 6Z_1Z_2 + 3Z_2^2) = 0, \\ A + B(2Z_1 + Z_2) + C(3Z_1^2 + 6Z_1Z_2 + Z_2^2) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решения (2) и (3) описывают автоколебательные режимы, при которых одно из тел движется с постоянной скоростью или покоится, а другое тело совершает колебательные движения.

В §1.3 исследуется устойчивость автоколебательных режимов. Автоколебательные режимы (2) и (3) - устойчивы. Это означает, что в системе существуют автоколебательные режимы, когда одно из тел совершает колебания близкие к гармоническим колебаниям с конечной амплитудой, а второе тело «почти» не колеблется.

Автоколебательный режим (4) неустойчив, и степень его неустойчивости равна единице.

В итоге со временем в системе устанавливается режим устойчивых релаксационных колебаний, отвечающий либо решению (2), либо решению (3) в зависимости от того, в какую область притяжения попадут начальные условия движения.

**Вторая глава** диссертации посвящена задаче о возникновении автоколебаний колес при торможении автомобиля. В данной главе рассматривается движение автомобиля после блокировки колес, скольжение которых по дороге описывается моделью нелинейного вязкого трения с падающим участком характеристики. В этом случае на некоторых этапах торможения автомобиля при соответствующих начальных условиях движения в системе возникают автоколебания.

В §2.1-§2.2 описываются модель автомобиля и выведены уравнения движения.

Результаты численного интегрирования, представлены на рисунках 2-4. По оси абсцисс на всех графиках отложено время в секундах. Коэффициенты  $k, g_1, g_2$  выбраны таким образом, что сила трения падает на участке от 10 до 20 м/с. Начальная скорость при торможении 25 м/с.

Как видно из графиков скорость корпуса автомобиля стремится к нулю (рисунок 2). На интервале времени от 2 до 3.8 секунд, когда скорость скольжения попадает в интервал  $v \in (10,20)$  и производная  $F'(v) < 0$ , возникают автоколебания

колес относительно корпуса автомобиля (рисунки 3 и 4). Эти автоколебания затухают, когда скорость становится меньше 10 м/с.

Как видно из графика, изображенного на рисунке 2, в процессе автоколебаний на интервале времени от 2 до 3.8 секунд торможение автомобиля более эффективно. В дальнейшем, когда скорость скольжения оказывается в интервале от нуля до десяти метров в секунду, автоколебания прекращаются, а ускорение торможения уменьшается.

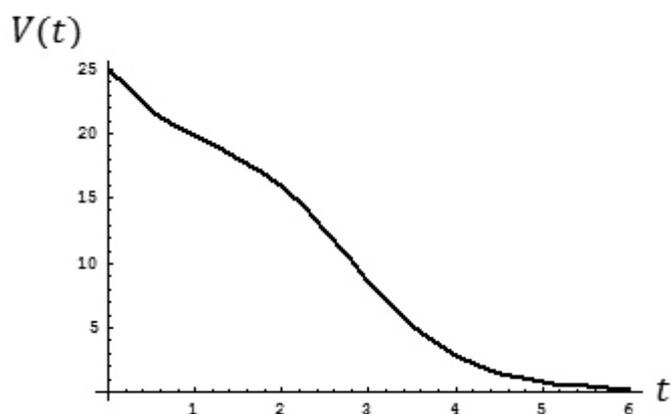


Рисунок 2 - График скорости автомобиля при его торможении

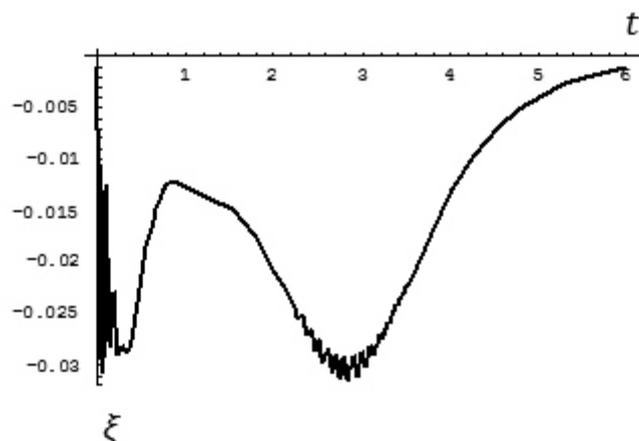


Рисунок 3 - График колебаний колес автомобиля при его торможении

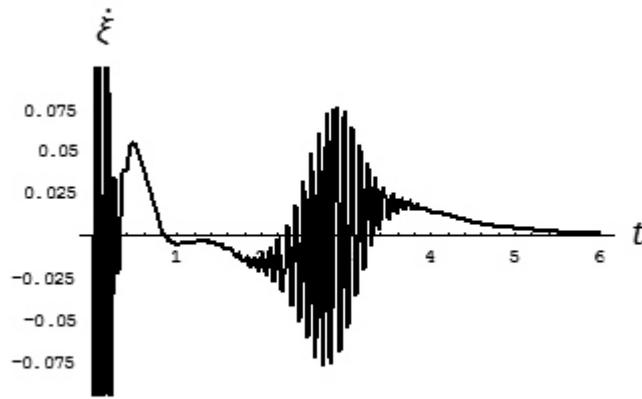


Рисунок 4 - График скорости колебаний колес автомобиля при его торможении

В **третьей** главе речь идет об автоколебаниях в системе струна-смычок. Исследуются колебания тонкой растянутой струны, взаимодействующей со смычком, скользящим по ней с постоянной ортогональной к струне скоростью. Взаимодействие смычка и струны определяется гладким нелинейным законом трения таким же, как в первой и второй главе. Движение системы описывается бесконечной системой связанных друг с другом обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

В главе §3.1 описана модель взаимодействия струны и смычка и выведены уравнения движения.

Уравнение колебаний струны имеет вид:

$$p\ddot{u}(s, t) - Nu''(s, t) + EJu''''(s, t) = F(\dot{u}(s_0, t) - V)\delta(s - s_0),$$

$$u(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \psi_i(s) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi i}{l} s,$$

где  $u(s, t)$  – поперечные отклонения точек струны,  $p$  – линейная плотность струны,  $N$  – натяжение струны,  $EJ$  – изгибная жесткость,  $V$  – скорость смычка,  $s_0$  – точка, контакта смычка со струной,  $F(\dot{u}(s_0, t) - V)$  – сила трения между смычком и струной,  $l$  – длина струны.

Далее система уравнений приводится к переменным действие-угол в окрестности стационарного решения:

$$\begin{aligned}
\dot{I}_i &= \frac{k}{p} [(V + v - g_1(V^3 + v^3) + g_2(V^5 + v^5)] \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \psi_i(s_0) \cos \varphi_i, \\
\dot{\varphi}_i &= \omega_i + \frac{k}{p} [(V + v - g_1(V^3 + v^3) + g_2(V^5 + v^5)] \sqrt{\frac{1}{2I_i \omega_i}} \psi_i(s_0) \sin \varphi_i, \\
v &= \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_j(t) \psi_j(s_0) - V, \\
\omega_i^2 &= \frac{1}{p} \left( N \frac{\pi^2 i^2}{l^2} + EJ \frac{\pi^4 i^4}{l^4} \right), \\
\begin{cases} q_i = \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \sin \varphi_i, & \dot{q}_i = p_i, \quad i = 1, 2, \dots \\ p_i = \sqrt{2I_i \omega_i} \cos \varphi_i. \end{cases}
\end{aligned}$$

Данные уравнения являются бесконечной системой нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в обыкновенных производных. Механическую систему, которой соответствуют эти уравнения, можно трактовать как бесконечную систему гармонических осцилляторов, связанных друг с другом нелинейными силами вязкого трения.

В главах §3.2-§3.3 рассматриваются уравнения движения струны для случаев одной и двух собственных частот. Получены усредненные уравнения движения в канонических переменных действие–угол. Найдены стационарные точки, соответствующие автоколебательным режимам, и исследована их устойчивость.

Автоколебания возникают в случае, когда скорость смычка принадлежит интервалу, на котором сила трения падает с ростом скорости.

На основе результатов глав §3.2 и §3.3 получен фазовый портрет (рисунок 5) в переменных «действие» для колебаний струны с двумя собственными частотами.

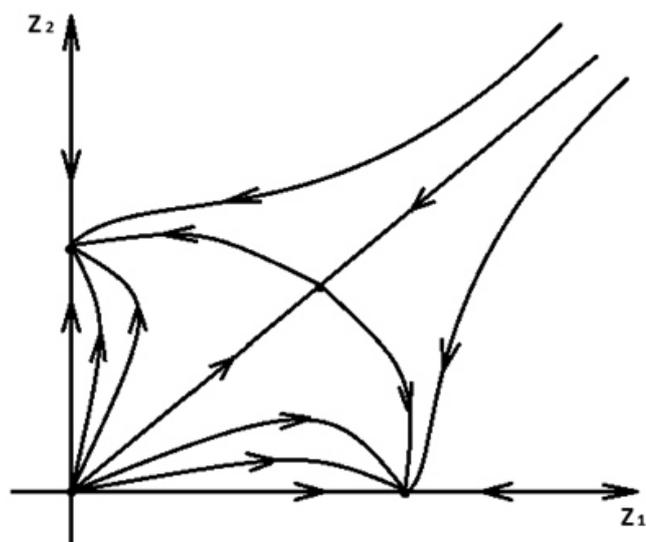


Рисунок 5 - Фазовый портрет колебаний струны

Как видно из рисунка 5 решение системы со временем стремится к одному из двух устойчивых автоколебательных режимов, соответствующих автоколебаниям струны по одной частоте и затуханиям по другой.

В главе §3.4 рассматриваются колебания струны при добавлении диссипативных сил.

Так же, как и в предыдущих пунктах, автоколебательные режимы возникают в случае, когда скорость смычка находится в интервале, на котором производная функции силы трения отрицательна. Все многочастотные автоколебательные режимы оказываются неустойчивыми.

Фазовое пространство разбивается на области притяжения одночастотных устойчивых автоколебательных режимов. Вопрос о том, в какую область притяжения попадет траектория движения, зависит от выбора точки на струне, в которой смычок взаимодействует со струной, и от скорости смычка. Варьируя эти параметры, можно менять начальные условия и соотношения амплитуд обертонов при переходном процессе, оставаясь в области притяжения, например, первой гармоники. Колебания на первом основном тоне всегда возбуждаются в начале переходного процесса.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

- Для задачи двух взаимодействующих осцилляторов показано, что автоколебания возникают на интервале скоростей, когда сила трения падает с ростом скорости скольжения. Данный режим не является устойчивым, и со временем система приходит в режим движения, когда одно из тел находится в состоянии, близком к состоянию покоя или равномерного движения, а второе тело совершает колебания относительно первого тела.
- Проведено исследование возникновения автоколебаний колес при торможении автомобиля. Автоколебания заблокированных колес относительно корпуса автомобиля возникают на интервалах скоростей, когда сила трения падает с ростом скорости. Показано, что именно на этом интервале скоростей процесс торможения автомобиля наиболее эффективен.
- Рассмотрена задача о колебаниях струны при взаимодействии со смычком. Модель струны была представлена счетной системой взаимодействующих осцилляторов. Движение системы описывается бесконечной системой связанных друг с другом обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Было исследовано, при каких скоростях смычка могут возникать автоколебания, и проведен анализ их устойчивости. Автоколебательные режимы возникают в случае, когда скорость смычка находится в интервале, на котором производная функции силы трения отрицательна. Многочастотные автоколебательные режимы оказались неустойчивыми. Фазовая плоскость разбивается на области притяжения одночастотных устойчивых автоколебательных режимов. Переходный процесс к соответствующему одночастотному режиму сопровождается колебаниями струны на обертонах с затухающими амплитудами.

## Работы автора по теме диссертации

Работы, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ:

1. Вильке В.Г., Шаповалов И.Л. *Автоколебания двух тел с нелинейным трением* // Вестник Московского Университета. Сер. 1. Математика, механика. № 4. 2011. — С.39–45.
2. Вильке В.Г., Шаповалов И.Л. *Автоколебания в системе струна-смычок* // Вестник Московского Университета. Сер.1. Математика, механика. № 1. 2015. — С.34–40.
3. Вильке В.Г., Шаповалов И.Л. *Автоколебания в процессе торможения автомобиля* // Вестник Московского Университета. Сер.1. Математика, механика. № 4. 2015. — С.33–39.

Другие работы, опубликованные автором по теме диссертации:

4. Шаповалов И.Л. *Автоколебания в системе стержень-смычок* // Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2014». Тезисы докладов научной конференции. Секция «Математика и механика». 7–11 апреля 2014 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2014. — 1 электрон. опт. диск.
5. Шаповалов И.Л., Вильке В.Г. *Автоколебания в процессе торможения автомобиля* // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 14–23 апреля 2014 г., Москва, МГУ имени

М.В. Ломоносова. — Издательство Московского университета Москва, 2014. — С. 44.

6. Шаповалов И.Л., Вильке В.Г. *Изучение возникновения автоколебаний в системах с бесконечным числом степеней свободы на примере задачи о колебаниях стержня при его взаимодействии со смычком* // Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. (Москва, 13-16 мая 2014 г.) - М.: Издательство РУДН, 2014. — С. 234-235.

7. Шаповалов И.Л. *Автоколебания двух тел с нелинейным трением* // Международный молодежный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2015». Тезисы докладов научной конференции. Секция «Теоретическая механика и мехатроника». 13–17 апреля 2015 г., Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2015. — 1 электрон. опт. диск.

8. Шаповалов И.Л., Вильке В.Г. *Автоколебания в системе струна–смычок* // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. (Казань, 20 – 24 августа 2015 г.). – Казань: Издательство Казан. ун-та, 2015. — С. 4171-4173.