



Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра теоретической механики и мехатроники

На правах рукописи

УДК 531.391

Шаповалов Иван Леонидович

**Исследование автоколебаний механических систем
в переменных действие-угол**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

Доктор физико-математических наук

Профессор Вильке В.Г.

Москва 2015

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Автоколебания двух тел с нелинейным трением.....	14
1.1 Постановка задачи. Уравнения движения и стационарные движения...	14
1.2 Канонические уравнения движения. Метод усреднения	22
1.3 Существование стационарных точек и их устойчивость.....	27
Глава 2. Автоколебания в процессе торможения автомобиля.....	30
2.1 Модель автомобиля и удар в момент блокировки колес	31
2.2. Аналитическое исследование процесса торможения автомобиля	40
Глава 3. Автоколебания в системе струна – смычок.....	47
3.1 Модель взаимодействия струны со смычком и уравнения движения....	47
3.2 Случай колебания струны с одной собственной частотой	54
3.3 Случай колебания струны с двумя собственными частотами	59
3.4 Случай колебания струны с диссипативными силами.....	71
Заключение	81
Список литературы	83

Введение

При контактном взаимодействии двух тел в ряде случаев возникают автоколебания или релаксационные колебания, которые представляют собой колебания частей тел друг относительно друга [2,42,46].

Устройство получает некоторое количество энергии от постоянного непериодического внешнего источника, за счет чего начинает совершать автоколебания и создает периодический процесс. При этом вид и свойства колебаний не зависят от начальных условий. Такая система называется автоколебательной.

Автоколебания присутствуют в химических и природных явлениях, например, поющие пески или «голос моря» (возникновение инфразвуковых колебаний при движении ветра над морскими волнами). Многие процессы в живом организме представляют собою автоколебания. Например, дыхание и работа сердца. Автоколебания появляются при игре на духовых и смычковых музыкальных инструментах. Они являются неотъемлемой частью работы таких устройств как: ламповый и электронный генераторы, электромагнитный прерыватель. И это только небольшая часть окружающих нас повсюду автоколебаний.

Наиболее распространенными видами автоколебаний являются колебания, обусловленные трением, или фрикционные релаксационные автоколебания, которые легко определить по сопровождающему их скрипу. Например, скрип поворачивающейся калитки, мела по доске, деревянного пола под ногами, скрип при игре на музыкальной пиле и скрипке.

Скрип, возникающий при скольжении одного тела по поверхности другого, наблюдается повсеместно и может достигать большой мощности, не подвергаясь никаким изменениям, и устойчиво продолжаться в течение длительного периода времени. Легко услышать, как флюгер на крыше дома при дуновении ветра скрипит, постоянно издавая одни и те же звуки,

которые не изменяются год от года. Самовозбуждения такого рода автоколебаний встречаются очень часто, а, значит, для создания соответствующих условий не требуется особых усилий.

Автоколебания широко распространены, как в технике, так и в естествознании и имеют большое значение для их изучения.

Рассмотрим процесс появления колебаний и сопутствующих им скрипов с точки зрения сил, действующих в системе. Представим два покоящихся тела прижатых друг к другу, на которые в область соприкосновения действует сила трения покоя, которая больше силы трения скольжения. Когда на одно из тел слегка начинает действовать по касательной внешняя сила, и это приводит к деформации тела, но за счет силы трения покоя тела остаются на месте. Так происходит, до тех пор, пока сила трения покоя не станет меньше упругой силы деформации тела за счет увеличения касательной силы, что приведет к перемещению тела в другое положение. В новом положении на тело снова начнет действовать внешняя сила и процесс повторится. Итак, колебания в приведенных примерах зависят именно от трения.

Ясно, что упомянутый выше флюгер продолжает скрипеть из-за различия между силами трения покоя и трения скольжения. Но стоит смазать трущиеся поверхности подходящей смазкой, и скрип на какое-то время исчезнет. Для фрикционных автоколебательных систем зависимость силы трения от относительной скорости трущихся тел имеет основное значение.

Поэтому необходимо детальное изучение фрикционных автоколебаний, исследования по которым, как правило, проводятся современными методами теории колебаний, волновой механики и механики сплошных сред. Речь идет об исследованиях в направлении определения различных режимов автоколебаний, их устойчивости в зависимости от параметров системы в целом и характеристик фрикционного контакта в частности, которые при этом считаются заданными.

Сам термин автоколебания был введен в 1928 году Андроновым А.А. [2,3]. В его основополагающей работе [2], опубликованной в 1937 году, была описана теория нелинейных колебаний в системах с одной степенью свободы.

Также в это время исследованием автоколебаний занимался Ван дер Полю Б., основные результаты отражены в его работе [12], Пуанкаре [57,58]. На основе методов Пуанкаре, Андронova А.А, Ван дер Поля Б. происходило развитие теории автоколебательных систем, которая стала одним из важных элементов исследования в других областях механики и физики [43,44].

Развитие теории фрикционных автоколебаний составляет уже почти вековую историю. За это время наиболее значимые результаты были получены следующими отечественными и зарубежными учеными: Андронов А.А, Витт А.А., Ветюков И.И., Ишлинский А.Ю., Кайдановский Н.Л., Коловский Н.З., Крагельский И.В., Пановко Я.Г., Петров В.Ф., Стрелков С.П., Тондл А., Хайкин С.Э. и рядом других. Здесь приведен лишь небольшой список работ написанных этими учеными по данной тематике [2,5,9,11,21,22,27-30,37,41,42,47,52,62,64,67-69,73-76,79-86,91,94].

Одним из самых первых и самых известных примеров фрикционных автоколебаний является – упруго-закрепленный груз на движущейся ленте. Этот пример был предложен Ван дер Полю Б. в 1930 г. [12]. Он связывал возникновение автоколебаний в системе с наличием нелинейности в законе сухого трения. Релаксационные фрикционные автоколебания, содержащие интервалы времени, в течение которых тела неподвижны относительно ленты, впервые были детально описаны Кайдановским Н.Л. и Хайкиным С.Э. в работе [32]. В данной работе показано, что все фрикционные системы, в которых могут возникать автоколебания, должны обладать нелинейностью в законе трения, а именно сила трения, зависящая от относительной скорости скольжения между телами, должна иметь интервалы, на которых она уменьшается с ростом скорости.

Еще одним примером механической системы с одной степенью свободы, в котором возникают автоколебания, может служить маятник Фруда, в котором используется модель сухого трения, когда сила трения покоя превосходит силу трения скольжения. Аналогичная модель трения позволяет найти периодические движения в системе с двумя степенями свободы [66,78,94]. При описании динамики колесных экипажей популярна модель взаимодействия шин с дорогой, называемая «магической формулой», в которой сила трения представляется комбинацией двух арктангенсов, зависящих от скорости скольжения шины по дороге, а также формула в виде многочлена от этой скорости и ее модуля [92].

С математической точки зрения использование законов трения подобного рода приводит либо к неоднозначности решений, вызванной переменной структурой правых частей дифференциальных уравнений, либо к сложностям аналитического исследования поведения фазовых траекторий. В результате используются численные методы исследования динамики систем с нелинейным трением [66].

Помимо названных, также существует ряд моделей фрикционных автоколебаний, описываемых с помощью реологических и термодинамических процессов на фрикционном контакте [35].

Каждая из перечисленных выше моделей, имеет свою ограниченную область применения, однако утверждение, что причиной возникновения автоколебаний является нелинейная сила трения, с падающим участком, зависящая от относительной скорости трущихся тел, является наиболее распространенным. При этом зависимость силы трения от скорости может описываться различными способами: в виде скачкообразной [4,31], экспоненциальной [6], кусочно-линейной [7,12,13], или кубической [1] зависимостей. Подробный анализ этих законов трения и многих других подробно освещен в работах [8,14,36,53,77].

Отдельно можно выделить работы польского ученого Аурейцевича Я. посвященные автоколебательным системам с одной [81,82] и двумя

степенями свободы [83-86]. В его работах используется кусочно-кубическая аппроксимация закона сухого трения.

При исследовании автоколебаний в большинстве работ используется скачкообразная модель трения. В задачах, где используется кубическая модель трения, рассматриваются только квазигармонические автоколебательные режимы. Это обусловлено тем, что при использовании кубической или иной нелинейной модели трения, за исключением скачкообразной модели, в абсолютном большинстве случаев относительная скорость скольжения считается величиной знакоопределенной, что является верным лишь при анализе малых колебаний. Количество работ, в которых допускается обращение относительной скорости в ноль крайне невелико. Коловский И.З. в своих работах [23,34] изучал задачи в подобной постановке. Петров В.Ф. в своей работе [54] использовал скачкообразную модель трения с линейным возрастающим участком. Он исследовал квазигармонические и релаксационные режимы. Общим выводом в работах Коловского И.З. и Петрова В.Ф. является тот факт, что квазигармонические фрикционные автоколебания могут возникать только на небольшом интервале скоростей, на котором сила трения падает с ростом скорости.

В данной работе используется модель трения, описываемая полиномом пятой степени, содержащая нечетные степени относительной скорости трущихся тел. Характерной особенностью силы трения является наличие интервала скоростей, в котором сила трения убывает с ростом скорости. Предложенная модель трения используется для анализа динамики взаимодействующих тел. Данная модель трения уже успешно использовалась в работе Мигуновой Д.С. [45].

Для исследования динамики фрикционных систем применяется теория нелинейных дифференциальных уравнений, поэтому исследование фрикционных автоколебаний в сложных системах, в особенности с несколькими степенями свободы, оказывается сложной и часто неразрешимой аналитическими методами задачей. В связи с этим

исследование фрикционных автоколебательных систем разумно начать с рассмотрения автоколебаний в системе с двумя степенями свободы.

Исследованию фрикционных автоколебаний в системе с двумя степенями свободы и посвящена первая глава диссертации. С решением в том или ином виде данной задачи связано достаточно большое число работ. [87,89,93,95,96].

Системы с большим количеством степеней свободы исследуются в целом ряде работ [10,51]. В основном в работах рассматриваются системы с двумя степенями свобод, по крайней мере, для этих систем проведен довольно подробный анализ. К примеру, Петров В.Ф. в своей работе [55] рассмотрел систему, состоящую из двух свободно вращающихся на параллельных осях дисков, соединенных между собой пружиной и взаимодействующих с движущейся с постоянной скоростью шероховатой поверхностью. В работах Тондла А. [72,73] с помощью моделирования на ЭВМ, получены интересные результаты исследований фрикционных автоколебаний в системах с несколькими степенями свободы.

Вторая глава посвящена изучению возникновения автоколебаний автомобиля при его торможении.

Хотя конструкторские бюро и автомобильные заводы давно нуждаются в способах борьбы с колебаниями колес, эта проблема изучена недостаточно. Наш соотечественник Глух Б.А. в 1937 г. одним из первых написал работы по теоретическому и экспериментальному изучению колебаний колес автомобиля [24]. Основное направление его исследований, состояло в том, чтобы изучить влияние некоторых параметров колебательной системы на устойчивость движения.

Изучение взаимосвязи торможения и колебаний колес автомобиля рассмотрено в работах [33,65].

Математические методы и схемы построения модели колебаний автомобиля при его экстренном торможении на дороге с полной блокировкой

колес, рассмотрены в теоретических и экспериментальных исследованиях [38,39,48,49,59-61].

Третья глава посвящена изучению автоколебаний возникающих в струне скрипки при ее взаимодействии со смычком. Первые прототипы смычковых музыкальных инструментов были придуманы более двух тысяч лет назад. Лучшие скрипичные музыкальные инструменты были созданы великими итальянскими мастерами Страдивари, Амати, Гварнери, Тесторе в XVI—XVIII веках. Современные ученые до сих пор спорят, благодаря чему скрипки тех мастеров, имеют столь неповторимое звучание. Даже при развитых сегодняшних технологиях не удастся создать музыкальные инструменты, которые сравнились бы по качеству звучания с инструментами, которые были созданы теми мастерами.

Изучение возникновения автоколебаний в смычковых музыкальных инструментах, было начато лишь во второй половине XIX века. Научное исследование звучания скрипичных инструментов было начато так поздно из-за недостаточно развитого математического аппарата, позволяющего описать явления, которые возникают в музыкальных инструментах. Также большое затруднение при изучении вызывает большое количество параметров, от которых зависит звучание музыкального инструмента.

Работы большинства современных ученых, которые занимаются исследованиями формирования звука в смычковых инструментах основываются на анализе и сравнении звучания лучших старинных инструментов. Важным трудом в данном исследовании была работа Стретта Д.В. (лорд Рэлей) [70], в которой были изложены достижения в теории колебаний струн к концу XIX века. В его работе был заложен фундамент общей теории колебаний.

Упомянутый выше упруго-закрепленный груз, лежащей на ленте транспортера является простейшей моделью, моделирующей механизм возникновения автоколебаний струны при ее взаимодействии со смычком. Качественное объяснение этого явления было предложено Стреттом Д.В.

[70]. Стретт Д.В. следующим образом описывал данное явление: «Способность смычка поддерживать колебания струны связана с тем, что трение между твёрдыми телами при средних скоростях меньше, чем при малых, поэтому, когда часть струны, на которую действует смычок, движется вместе со смычком их взаимодействие сильнее, чем тогда, когда струна движется в противоположном направлении с большей относительной скоростью. Ускоряющий эффект первой части движения, таким образом, не нейтрализуется целиком последующим отставанием и избыток ускорения оказывается в состоянии поддерживать колебания несмотря на другие потери энергии».

Стрелков С.П. распространил методы изучения автоколебаний в радиотехнике на случай механических систем. Он изучил два случая автоколебаний: колебания близкие к синусоидальным [69], и колебания релаксационного типа [68]. В своих работах Стрелков С.П. предполагал, так же как и Стретт Д.В., что характеристика силы трения как функция относительной скорости в некоторой области имеет падающий участок. Известным примером колебаний близких к синусоидальным является исследованный Стрелковым С.П. маятник Фруда [69].

Также хочется отметить ряд работ [25,26,40,50,88,90], в которых представлены результаты экспериментов по исследованию зависимости свойств звука от различных параметров смычковых инструментов, приведены основные количественные и качественные характеристики инструментов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из трех глав, введения, заключения и списка литературы.

Введение содержит краткий обзор литературы по тематике данной работы.

Первая глава диссертации посвящена задаче об автоколебании двух тел с нелинейным трением. Рассматривается механическая система, состоящая из двух тел, одно из которых соединено пружиной с неподвижным телом, а второе соединено пружиной с базовым массивным телом, движущимся с постоянной скоростью, относительно неподвижного тела. Оба тела движутся прямолинейно, скользя друг относительно друга. В качестве закона, описывающего взаимодействие двух трущихся тел, используется нелинейная зависимость силы, представленная полиномом пятой степени с нечетными степенями относительной скорости тел. Нелинейная характеристика трения имеет интервалы, на которых сила трения убывает с ростом относительной скорости скольжения.

В главе 1.1 формулируется постановка задачи, и выводятся общие уравнения движения. Исследуется устойчивость нулевого решения соответствующего скольжению одного твердого тела по-другому с постоянной скоростью.

В главе 1.2 с использованием канонических переменных действие–угол и метода усреднения, найдены стационарные режимы, описывающие скольжения тел друг относительно друга с постоянной скоростью или относительные колебания с одной и двумя частотами.

В главе 1.3 исследована устойчивость найденных стационарных режимов на основе усредненных уравнений.

Вторая глава посвящена задаче об автоколебаниях в процессе торможения автомобиля. Рассматривается движение автомобиля после блокировки колес, скольжение которых по дороге описывается моделью нелинейного вязкого трения с падающим участком характеристики. Используемая модель трения аппроксимирует модель сухого трения, когда трение покоя превосходит трение скольжения. В этом случае в системе наблюдаются автоколебания на некоторых этапах торможения автомобиля при соответствующих начальных условиях движения. Автоколебания колес автомобиля порождают периодически изменяющуюся тангенциальную

нагрузку на полотно дороги, что может служить причиной возникновения на дороге волнообразного рельефа.

В главе 2.1 описана модель автомобиля и уравнения движения в момент блокировки колес. Исследован характер движения механической системы, это иллюстрируется числовыми примерами для уравнений Лагранжа второго рода.

В главе 2.2 изучение задачи производится в канонических переменных действие-угол, полученные результаты иллюстрируются числовыми примерами, полученные методом усреднения канонических уравнений.

В третьей главе речь идет об автоколебаниях в системе струна-смычок.

Исследуются колебания тонкой растянутой струны, взаимодействующей со смычком, скользящим по ней с постоянной ортогональной к струне скоростью. Взаимодействие смычка и струны определяется гладким нелинейным законом трения таким же, как в первой и второй главе. Движение системы описывается бесконечной системой связанных друг с другом обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

В главе 3.1 описана модель взаимодействия струны и смычка и выведены основные уравнения движения. Уравнения колебаний струны описываются через счетное количество собственных частот.

В главах 3.2-3.3 разбираются уравнения движения струны в случаях одной и двух собственных частот. Получены усредненные уравнения движения в канонических переменных действие-угол, найдены стационарные точки, соответствующие автоколебательным режимам, и исследована их устойчивость.

В главе 3.4 рассматриваются колебания струны при добавлении диссипативных сил. Автоколебательные режимы, так же как и в предыдущих пунктах возникали в случае, когда скорость смычка находилась в интервале, на котором производная функции силы трения отрицательна. Все многочастотные автоколебательные режимы оказались неустойчивыми.

Фазовая плоскость оказалась разделенной на области притяжения одночастотных устойчивых автоколебательных режимов.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

По теме диссертации опубликованы пять печатных работ [16-20].

Основные результаты были доложены на Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2014», «Ломоносов-2015» (Москва, 7–11 апреля 2014 года, 13–17 апреля 2015 года). Конференции «Ломоносовские чтения» (Москва, 14–23 апреля 2014 года). L Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, РУДН (Москва, 13-16 мая 2014 года).

Глава 1. Автоколебания двух тел с нелинейным трением

В данной главе исследовано движение двух тел, одно из которых связано пружиной с неподвижным основанием, а другое - с телом, движущимся с постоянной скоростью. Взаимодействие тел описывается нелинейным законом трения с падающим участком характеристики. Были получены усредненные уравнения движения в канонических переменных действие–угол, найдены стационарные точки, соответствующие автоколебательным режимам, и исследована их устойчивость. Этим точкам соответствуют одночастотные или двухчастотные колебания, когда точка в двумерном конфигурационном пространстве описывает фигуру типа фигуры Лиссажу.

1.1 Постановка задачи. Уравнения движения и стационарные движения

Существуют различные модели трения и их аппроксимации, описывающие динамику возникновения автоколебаний. Самая простая из них - модель трения Кулона, когда сила трения покоя превосходит силу трения скольжения (рисунок 1.1).

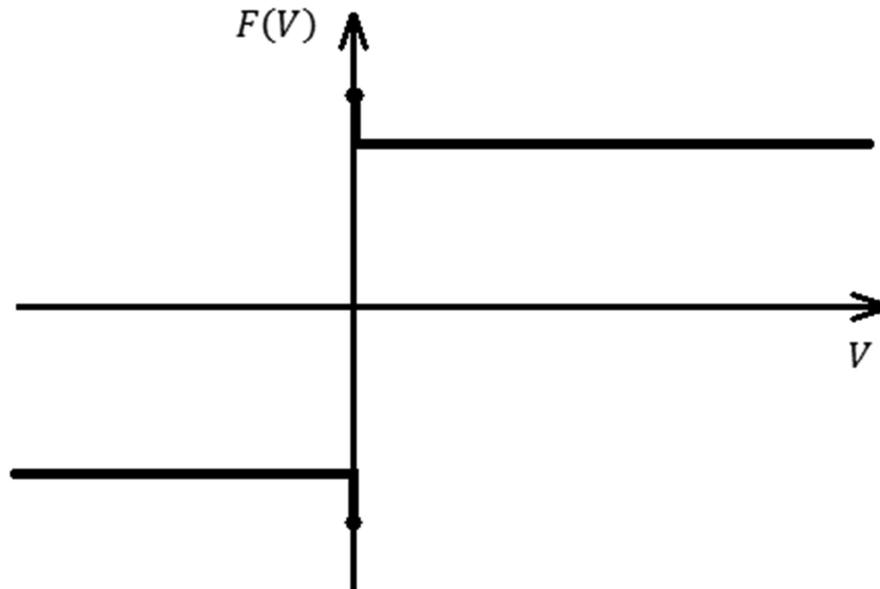


Рисунок 1.1 - График силы трения Кулона от скорости

При своей достаточной простоте этот закон довольно хорошо описывает закономерности силы трения для высоких нормальных напряжений, однако этот закон дает погрешности в других случаях. Закон трения Кулона имеет один важный недостаток: он разрывен в нуле.

Еще одна из моделей, описывающая данное явление, выражается следующей формулой

$$F(V) = \frac{k}{1 + |V|} \sigma_n \text{sign}(V),$$

где $k < 1$ коэффициент сухого трения, V – скорость точки контакта, σ_n – нормальное напряжение.

На рисунке 1.2 нарисованы графики, монотонно убывающей силы трения, с ростом скорости согласно приведенной выше формуле, и классического кулоновского трения (пунктирная линия).

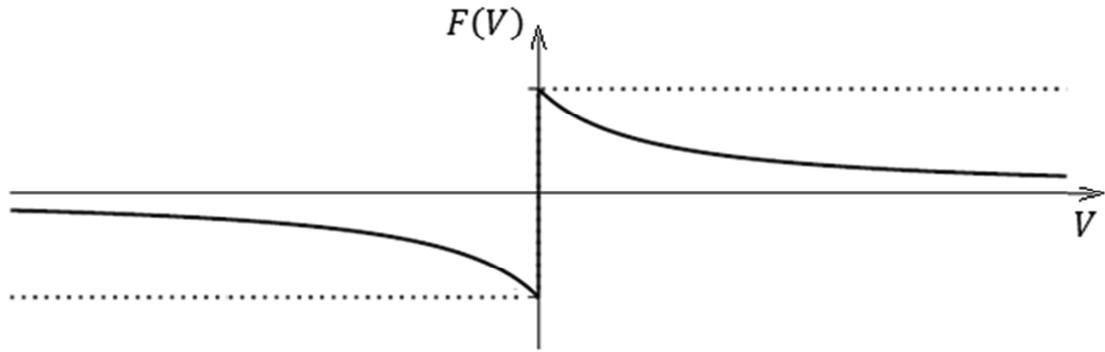


Рисунок 1.2 - График силы трения для модели

$$F(V) = \frac{k}{1 + |V|} \sigma_n \text{sign}(V)$$

В результате экспериментов, был выведен факт, что с дальнейшим увеличением скорости величина коэффициента трения увеличивается, в том числе превосходя изначальную, соответствующую трению покоя. Эта зависимость может быть приближенно описана функцией следующего вида:

$$F(V) = k\sigma_n(\text{sign}(V) - aV + bV^3),$$

где a и b - положительные коэффициенты, получаемые из опытов.

На рисунке 1.3 изображены графики зависимости силы трения от скорости проскальзывания точки контакта для случая классического трения Кулона (пунктир) и посткулоновской модели (сплошная линия).

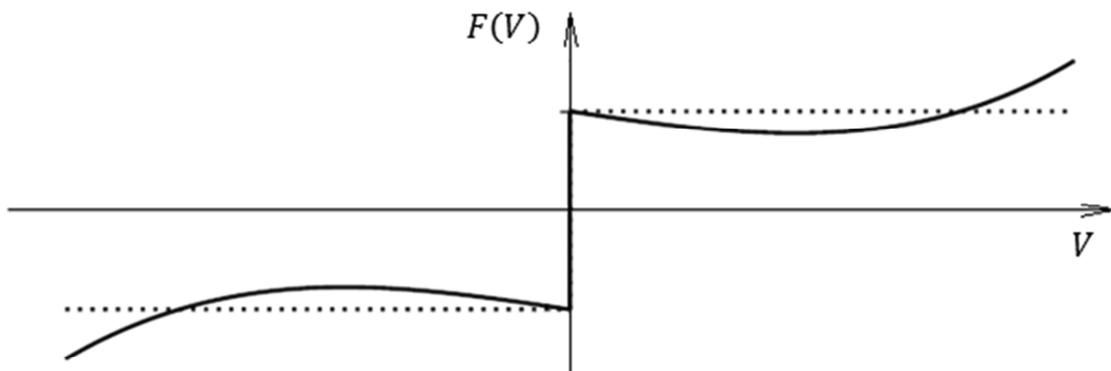


Рисунок 1.3 - График силы трения от скорости точки контакта для модели $F(V) = k\sigma_n(\text{sign}(V) - aV + bV^3)$

Отметим, что для малых скоростей проскальзывания точки контакта сила трения покоя превосходит силу трения скольжения. С ростом скорости величина силы трения начинает возрастать, и в конечном итоге может превосходить трение покоя.

Еще одной часто используемой формулой является магическая формула Пасейки

$$F(V) = D \sin[C \arctan\{B(1 - E)V + E \arctan(BV)\}],$$

в которой сила трения представляется комбинацией двух арктангенсов, зависящих от скорости скольжения [92], коэффициенты B, C, D, E – некоторые константы.

Общий вид кривой для магической формулы приведен на рисунке 1.4.

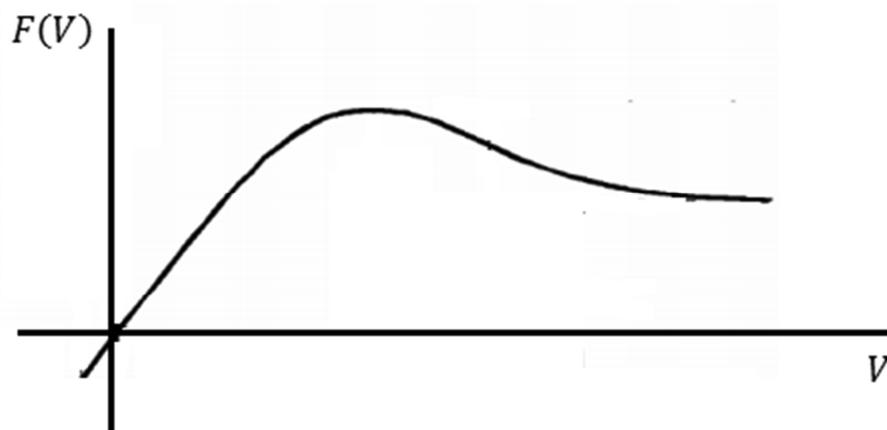


Рисунок 1.4 - Магическая формула Пасейки

Данная формула часто применяется для описания динамики взаимодействия шин с дорогой.

Данные модели трения имеют ряд серьезных недостатков. Модели трения, изображенные на рисунках 1.1-1.3 не имеют производных в нуле, что приводит к появлению зон застоя при нулевых значениях скорости, к потере единственности решений, вызванных переменной структурой правых частей

дифференциальных уравнений. Недостатком модели трения Пасейки можно отнести сложности аналитического исследования поведения фазовых траекторий. В результате используются численные методы исследования динамики систем с нелинейным трением [66].

В данной задаче используется модель трения (рисунок 1.5), которая зависит от относительной скорости скольжения между телами, как многочлен пятой степени:

$$F(V) = kV(1 - g_1V^2 + g_2V^4), \quad (1.1.1)$$

где V – относительная скорость между телами,

k, g_1, g_2 – некоторые постоянные положительные коэффициенты.

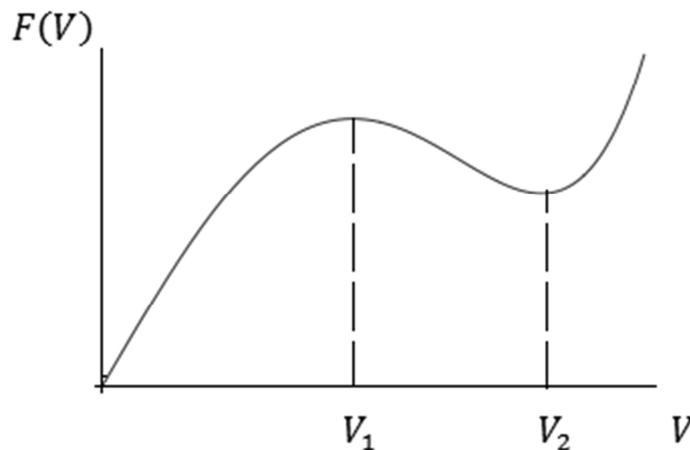


Рисунок 1.5 - График силы трения от скорости точки контакта

для модели $F(V) = kV(1 - g_1V^2 + g_2V^4)$

Коэффициенты k, g_1, g_2 положительны и определяют характер нечетной функции $F(V)$, определенной на всей числовой оси. Если принять

$$g_1 = \frac{V_1^2 + V_2^2}{3V_1^2V_2^2}, \quad g_2 = \frac{1}{5V_1^2V_2^2}, \quad V_2 > V_1 > 0, \quad (1.1.2)$$

то $F(V)$ в области положительных значений аргумента имеет локальный максимум в точке V_1 , локальный минимум в точке V_2 и убывает на интервале (V_1, V_2) . Допустим, что $F(V) > 0$ при $V > 0$. Это условие будет выполнено,

если ее локальный минимум в точке V_2 окажется больше нуля, что будет справедливо, если выполнено неравенство:

$$15V_1^2V_2^2 - 5(V_1^2 + V_2^2)V_2^2 + 3V_2^4 > 0 \Rightarrow 5V_1^2 > V_2^2$$

или

$$g_1^2 - 4g_2 < 0. \tag{1.1.3}$$

В дальнейшем будем считать, что $F(V)$ удовлетворяет условиям (1.1.2) и (1.1.3).

Данная модель трения используется потому, что она является простейшей аппроксимацией модели трения Кулона, когда сила трения покоя превосходит силу трения скольжения. Использование этой модели трения, как будет показано в дальнейшем, позволит получить аналитическое исследование возникновения автоколебаний.

Предложенная модель трения используется для анализа динамики двух взаимодействующих осцилляторов с использованием переменных действие–угол и метода усреднения.

Рассмотрим два тела (рисунок 1.6), одно из которых имеет массу m_2 и связано с неподвижным основанием пружиной жесткости k_2 . Второе тело скользит по поверхности первого тела, имеет массу m_1 и связано пружиной жесткости k_1 с третьим массивным телом, движущимся поступательно вдоль оси Ox с постоянной скоростью v .

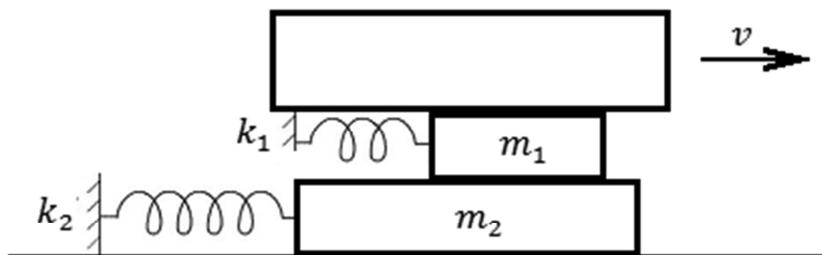


Рисунок 1.6 - Общий вид взаимодействующей системы

Движения первого и второго тела также имеют поступательный характер вдоль неподвижной оси Ox . Введем координаты для перемещений тел. Пусть q_2 – перемещение первого тела в неподвижной системе координат, а q_1 – перемещение второго тела относительно массивного тела. Будем предполагать, что при $q_1 = q_2 = 0$ обе пружины являются недеформированными. Так как массивное тело движется с постоянной скоростью, то система координат, связанная с ним будет инерциальной. Уравнения движения системы будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 &= -F(V), \\ m_2 \ddot{q}_2 + k_2 q_2 &= F(V), \\ F(V) &= k(V - g_1 V^3 + g_2 V^5), \\ V &= v + \dot{q}_1 - \dot{q}_2. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} q_1 &= -k_1^{-1} F(v) + x_1, \\ q_2 &= k_2^{-1} F(v) + x_2, \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

и представим уравнения движения в следующем виде

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 &= -[F(V) - F(v)], \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 &= [F(V) - F(v)], \\ V &= v + \dot{x}_1 - \dot{x}_2. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Система уравнений (1.1.5) имеет нулевое решение, когда $x_1 = x_2 = 0$, которое соответствует скольжению одного твердого тела по-другому с постоянной скоростью. Постоянные растяжения пружин в этом случае определяются величиной силы трения и согласно соотношениям (1.1.4) равны

$$q_{10} = -k_1^{-1} F(v), \quad q_{20} = k_2^{-1} F(v).$$

Устойчивость стационарного скольжения двух тел исследуем на основе линеаризованной системы уравнений (1.1.5):

$$m_n \ddot{x}_n + k_n x_n = (-1)^n F'(v) (\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad n = 1, 2; \tag{1.1.6}$$

$$F'(v) = k(1 - 3g_1v^2 + 5g_2v^4).$$

Имеем

$$\dot{W} = -F'(v)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2,$$

$$W = T + \Pi,$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(k_1x_1^2 + k_2x_2^2).$$

Если $v \in [0, V_1) \cup (V_2, \infty)$, то $F'(v) > 0$ и $\dot{W} < 0$ вне многообразия $M = \{(\dot{x}_1, \dot{x}_2): \dot{x}_1 = \dot{x}_2\}$, которое не содержит траекторий системы (1.1.6). Следовательно, согласно теореме Барбашина–Красовского стационарное скольжение устойчиво [63]. В противном случае в области значений $v \in (V_1, V_2)$ производная $F'(v) < 0$ и стационарное скольжение неустойчиво согласно теореме Барбашина–Красовского о неустойчивости [63].

Найдем производную полной механической энергии системы, используя систему (1.1.5),

$$\dot{W} = -[F(v+w) - \dot{F}(v)]w, \quad w = \dot{x}_1 - \dot{x}_2.$$

Функция $F(v)$ монотонно возрастает в области $v > v_* > V_2$ (рисунок 1.7), где v_* удовлетворяет равенству $F(v_*) = F(V_1)$.

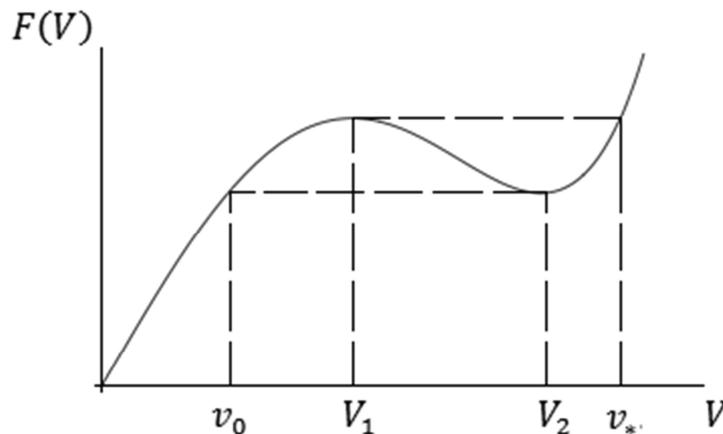


Рисунок 1.7 - Определение интервалов возрастания функции $F(v)$

Тогда справедливо неравенство $[F(v+w) - F(v)]w > 0, \forall w$, если скорость базового тела $v > v_*$. Следовательно, в области $v > v_*$ система (1.1.5) не имеет стационарных решений, отличных от нуля, все ее решения ограничены в четырехмерном фазовом пространстве $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2)$ и асимптотически стремятся к нулевому решению согласно теореме Барбашина–Красовского [63].

Если скорость базового тела относительно неподвижной системы координат v удовлетворяет условию $0 < v < v_0 < V_1$, где v_0 удовлетворяет равенству $F(v_0) = F(V_2)$, то справедливо неравенство:

$$[F(v+w) - F(v)]w > 0, \quad \forall w.$$

Следовательно, все решения системы (1.1.5) ограничены в фазовом пространстве и асимптотически стремятся к нулевому стационарному решению [63]. Таким образом, в областях малых и больших значений скорости скольжения v одного тела по другому механическая система обладает положениями равновесия, асимптотически устойчивыми в большом.

Ранее было показано, что на интервалах скоростей базового массивного тела $v \in ([v_0, V_1) \cup (V_2, v_*])$ нулевое решение системы (1.1.5) устойчиво по Ляпунову.

1.2 Канонические уравнения движения. Метод усреднения

Исследуем поведение системы, когда скорость скольжения тел v принадлежит интервалу (v_0, v_*) , содержащему интервал (V_1, V_2) , на котором функция $F(V)$ убывает. Перейдем к каноническим переменным действие–угол $I_1, \varphi_1, I_2, \varphi_2$ для двух гармонических осцилляторов по формулам [15]

$$p_n = m_n \dot{x}_n = \sqrt{2m_n \omega_n I_n} \cos \varphi_n,$$

$$x_n = \sqrt{\frac{2\omega_n I_n}{k_n}} \sin\varphi_n,$$

$$\omega_n^2 = \frac{k_n}{m_n}, \quad n = 1, 2.$$

Выпишем функцию Гамильтона в переменных действие–угол и работу обобщенных сил на возможных перемещениях в следующей форме

$$H(I_1, \varphi_1, I_2, \varphi_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2,$$

$$\delta A = -[F(V) - F(v)]\delta(x_1 - x_2), \quad (1.2.1)$$

$$V = v + \sqrt{\frac{2\omega_1 I_1}{m_1}} \cos\varphi_1 - \sqrt{\frac{2\omega_2 I_2}{m_2}} \cos\varphi_2.$$

Используя (1.2.1), выпишем канонические уравнения движения с неконсервативными силами в форме [15]

$$\dot{I}_n = -[F(V) - F(v)] \frac{\partial(x_1 - x_2)}{\partial\varphi_n}, \quad (1.2.2)$$

$$\dot{\varphi}_n = \omega_n + [F(V) - F(v)] \frac{\partial(x_1 - x_2)}{\partial I_n}, \quad n = 1, 2.$$

Система (1.2.2) имеет стандартный вид системы, используемой в методе усреднения, если коэффициент k в выражении силы трения (1.1.2) принять в качестве малого параметра в соответствующей системе единиц, где он имеет безразмерную величину. Усредним правые части (1.2.2) по быстрым переменным φ_1 и φ_2 , предполагая отсутствие резонансов.

Отсутствие резонансов будет выполнено при условии $l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2 \neq 0$ для любых целых l_1 и l_2 .

Сохраняя прежние обозначения, получим систему усредненных уравнений:

$$\dot{I}_n = G_n(I_1, I_2), \quad \dot{\varphi}_n = \omega_n, \quad n = 1, 2,$$

$$G_n(I_1, I_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [F(V) - F(v)] \frac{\partial(x_1 - x_2)}{\partial\varphi_n} d\varphi_1 d\varphi_2, \quad (1.2.3)$$

из которой следует, что частоты быстрых переменных φ_1 и φ_2 не возмущаются. Стационарным точкам первых двух уравнений системы (1.2.3), в которых обращаются в нуль функции G_1 и G_2 , соответствуют автоколебательные режимы, представленные фигурами Лиссажу на плоскости (x_1, x_2) , всюду плотно заполняющие прямоугольник с центром в начале координат, размеры которого определяются величинами I_1 и I_2 в стационарных точках.

Найдем явный вид усредненных уравнений. Введем новые переменные

$$P_n = \sqrt{\frac{2\omega_n I_n}{m_n}}, \quad n = 1, 2$$

и запишем первую группу уравнений системы (1.2.2) в виде:

$$\begin{aligned} P_n \dot{P}_n &= (-1)^n m_n^{-1} [F(V) - F(v)] P_n \cos \varphi_n, \\ V &= v + P_1 \cos \varphi_1 - P_2 \cos \varphi_2, \quad n = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Учитывая вид функции $F(V)$, представленной в (1.1.1), и, усредняя правые части уравнений (1.2.4), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= -k m_1^{-1} L_1(Z_1, Z_2), \\ \dot{Z}_2 &= -k m_2^{-1} L_2(Z_1, Z_2), \\ L_1(Z_1, Z_2) &= Z_1 [A + B(Z_1 + 2Z_2) + C(Z_1^2 + 6Z_1 Z_2 + 3Z_2^2)], \\ L_2(Z_1, Z_2) &= Z_2 [A + B(2Z_1 + Z_2) + C(3Z_1^2 + 6Z_1 Z_2 + Z_2^2)], \\ Z_1 &= P_1^2, \\ Z_2 &= P_2^2, \\ A &= 1 - 3g_1 v^2 + 5g_2 v^4, \\ B &= \frac{15}{2} g_2 v^2 - \frac{3}{4} g_1, \\ C &= \frac{5}{8} g_2. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Учитывая (1.1.2) и неравенство (1.1.3), представим коэффициенты уравнений A, B, C (1.2.5) в зависимости от коэффициентов v, V_1, V_2

$$A = \frac{(v^2 - V_1^2)(v^2 - V_2^2)}{V_1^2 V_2^2},$$

$$B = \frac{6v^2 - V_1^2 - V_2^2}{4V_1^2V_2^2} > 0,$$

$$C = \frac{1}{8V_1^2V_2^2} > 0.$$

Коэффициент $B > 0$, в силу соотношения (1.1.3). Коэффициент $A = k^{-1}F'(v)$ отрицателен, когда v принадлежит интервалу (V_1, V_2) . Следовательно, нулевое решение уравнений (1.2.5) неустойчиво в этой области значений скорости v . Если относительная скорость двух тел $v \in (0, V_1) \cup (V_2, \infty)$, то коэффициент A положителен и нулевое решение уравнений (1.2.5) асимптотически устойчиво. Таким образом, в областях малых и больших скоростей относительного скольжения двух тел существуют устойчивые режимы скольжения двух тел относительно друг друга. Этот результат был получен в разделе 1.1 для точных уравнений.

Найдем ненулевые стационарные точки (1.2.5), которым соответствуют автоколебательные режимы, и исследуем их устойчивость на основе усредненных уравнений (1.2.5). Приравнявая правые части (1.2.5) к нулю, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} L_1(Z_1, Z_2) = 0, \\ L_2(Z_1, Z_2) = 0. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Если не рассматривать нулевое решение, то система (1.2.6) эквивалентна трем системам

$$\begin{cases} Z_1 = 0, \\ A + BZ_2 + CZ_2^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow Z_1 = 0, Z_2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}; \quad (1.2.7)$$

$$\begin{cases} Z_2 = 0, \\ A + BZ_1 + CZ_1^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow Z_2 = 0, Z_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}; \quad (1.2.8)$$

$$\begin{cases} A + B(Z_1 + 2Z_2) + C(Z_1^2 + 6Z_1Z_2 + 3Z_2^2) = 0, \\ A + B(2Z_1 + Z_2) + C(3Z_1^2 + 6Z_1Z_2 + Z_2^2) = 0. \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Решения (1.2.7) и (1.2.8) описывают автоколебательные режимы, при которых одно из тел движется с постоянной скоростью или покоится, а другое тело совершает колебательные движения.

Найдем ненулевые решения (1.2.9). Складывая и вычитая два уравнения (1.2.9), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} 2A + 3B(Z_1 + Z_2) + 4C(Z_1^2 + 3Z_1Z_2 + Z_2^2) &= 0, \\ (Z_1 - Z_2)[B + 2C(Z_1 + Z_2)] &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Система (1.2.10) имеет четыре решения

$$\begin{aligned} Z_1 = Z_2 &= \frac{-3B \pm \sqrt{9B^2 - 40AC}}{20C}; \\ Z_1 &= \frac{-B \pm \sqrt{4AC - 3B^2}}{4C}, \quad Z_2 = \frac{-B \mp \sqrt{4AC - 3B^2}}{4C}. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Из найденных стационарных решений следует оставить действительные неотрицательные решения согласно определению переменных Z_1 и Z_2 .

Получим уравнения в вариациях в окрестности каждого стационарного решения в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\frac{k}{m_1} \left(\frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} \xi_1 + \frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} \xi_2 \right), \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{k}{m_2} \left(\frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} \xi_1 + \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} \xi_2 \right). \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Здесь ξ_1, ξ_2 – вариации переменных Z_1 и Z_2 в окрестности стационарной точки, в которой вычисляются частные производные функций L_1 и L_2 . Стационарное решение устойчиво, если корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^2 + N_1\lambda + N_2 &= 0, \\ N_1 &= k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \left(\frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} + \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} \right), \\ N_2 &= \frac{k^2}{m_1 m_2} \left(\frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} - \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} \frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} \right) \end{aligned}$$

имеют отрицательные действительные части, что согласно теореме Виета справедливо, если

$$N_1 > 0, \quad N_2 > 0. \quad (1.2.13)$$

Все стационарные значения Z_1, Z_2 и коэффициенты N_1, N_2 зависят от трех параметров v_1^2, V_1^2, V_2^2 .

1.3 Существование стационарных точек и их устойчивость

Наибольший интерес с точки зрения существования автоколебательных режимов представляет интервал скоростей базового тела (V_1, V_2) . В этом интервале скоростей v нулевое решение (1.2.5) неустойчиво, так как система уравнений в вариациях (1.2.12) принимает вид

$$\dot{\xi}_1 = -\frac{k}{m_1} A \xi_1, \quad \dot{\xi}_2 = -\frac{k}{m_2} A \xi_2, \quad A < 0.$$

Проведем исследование устойчивости стационарной точки (1.2.7).

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1(0, Z_2)}{\partial Z_1} &= \frac{\partial L_2(0, Z_2)}{\partial Z_2} = A + 2BZ_2 + 3CZ_2^2, \\ \frac{\partial L_1(0, Z_2)}{\partial Z_2} &= 0, \\ \frac{\partial L_2(0, Z_2)}{\partial Z_1} &= 2BZ_2 + 6CZ_2^2. \end{aligned}$$

Условия устойчивости (1.2.13) в рассматриваемом случае сводятся к доказательству одного неравенства

$$\frac{\partial L_1(0, Z_2)}{\partial Z_1} = \frac{\partial L_2(0, Z_2)}{\partial Z_2} = A + 2BZ_2 + 3CZ_2^2 > 0,$$

которое эквивалентно следующему неравенству

$$\begin{aligned} -2A > BZ_2 &\Rightarrow \\ (6v^2 - V_1^2 - V_2^2)[8(v^2 - V_1^2)(V_2^2 - v^2) + (6v^2 - V_1^2 - V_2^2)^2] &> 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо во всем интервале значений $v \in (V_1, V_2)$. Таким образом, стационарное решение (1.2.7), а также и стационарное решение (1.2.8), устойчивость которого исследуется аналогичным образом, устойчиво. Это означает, что в системе существуют автоколебательные режимы, когда одно из тел совершает колебания близкие

к гармоническим колебаниям с конечной амплитудой, а второе тело «почти» не колеблется.

В интервале значений $v \in (V_1, V_2)$ из четырех ненулевых решений (1.2.11) остается только одно

$$Z_1 = Z_2 = Z_0, \quad Z_0 = \frac{\sqrt{9B^2 - 40AC} - 3B}{20C} > 0, \quad (1.2.14)$$

поскольку для остальных решений переменные Z_1 и Z_2 могут принимать отрицательные значения.

Для исследования устойчивости стационарного решения (1.2.14) проверим справедливость неравенств (1.2.13). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_i(Z_0, Z_0)}{\partial Z_i} &= A + 4BZ_0 + 18CZ_0^2, \\ \frac{\partial L_i(Z_0, Z_0)}{\partial Z_j} &= 2BZ_0 + 12CZ_0^2; \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Поскольку Z_0 является корнем квадратного уравнения

$$10CZ_0^2 + 3BZ_0 + A = 0,$$

частные производные (1.2.15) представляются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_i(Z_0, Z_0)}{\partial Z_i} &= -\frac{4}{5}A - \frac{7}{5}BZ_0, \\ \frac{\partial L_i(Z_0, Z_0)}{\partial Z_j} &= -\frac{6}{5}A - \frac{8}{5}BZ_0; \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Условия устойчивости (1.2.13) записываются в форме

$$-4A - 7BZ_0 > 0, \quad (4A + 7BZ_0)^2 > (6A + 8BZ_0)^2. \quad (1.2.16)$$

Произведем следующую замену переменных

$$x = -AV_1^2V_2^2 > 0, \quad y = 4BV_1^2V_2^2.$$

Тогда первое неравенство (1.2.16) представляется в виде

$$160x - 7y \left(\sqrt{9y^2 + 80x} - 3y \right) > 0,$$

из которого следует неравенство $x(2x + y^2) > 0$, справедливое во всей области значений $v \in (V_1, V_2)$.

Второе неравенство (1.2.16) не выполняется во всей области значений скорости v , поскольку справедливо неравенство

$$-6A - 8BZ_0 > -4A - 7BZ_0 > 0 \Leftrightarrow x(8x + 5y^2) > 0.$$

Стационарная точка (1.2.14) неустойчива, и степень ее неустойчивости равна единице.

В области значений $v \in (V_1, V_2)$ существуют две неустойчивые стационарные точки – начало координат (точка А) и точка, определяемая соотношениями (1.2.14) (точка С), и две устойчивые стационарные точки, определяемые соотношениями (1.2.7) (точка В) и (1.2.8) (точка D). Область значений переменных $\Sigma = \{(Z_1, Z_2): Z_1 \geq 0, Z_2 \geq 0\}$ изображена на рисунке 1.8. Эта область разбивается двумя сепаратрисами, входящими в особую точку С, на две области притяжения устойчивых стационарных точек В и D соответственно. Одна из сепаратрис выходит из начала координат, а вторая – приходит в особую точку С из бесконечности. В системе устанавливается режим устойчивых релаксационных колебаний, отвечающий либо решению В, либо решению D в зависимости от того, в какую область притяжения попадут начальные условия движения.

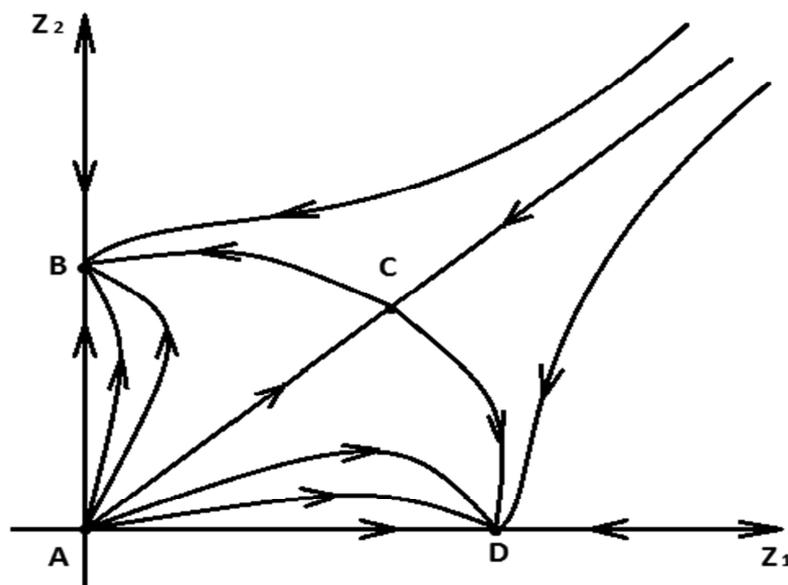


Рисунок 1.8 - Фазовый портрет системы для случая когда сила трения падает с ростом скорости

Глава 2. Автоколебания в процессе торможения автомобиля

В данной главе рассматривается движение автомобиля после блокировки колес, скольжение которых по дороге описывается моделью нелинейного вязкого трения (1.1.1) с падающим участком характеристики. Напомним, что используемая модель трения аппроксимирует модель сухого трения, когда трение покоя превосходит трение скольжения [19]. В этом случае в системе наблюдаются автоколебания на некоторых этапах торможения автомобиля при соответствующих начальных условиях движения. Автоколебания колес автомобиля могут быть причиной возникновения на дороге волнообразного рельефа. Волнообразный рельеф дороги чаще наблюдается на грунтовых дорогах в местах перед поворотами, где происходит интенсивное торможение. Исследование характера движения механической системы иллюстрируется числовыми примерами для уравнений Лагранжа второго рода и для уравнений, полученных методом усреднения канонических уравнений в переменных действие-угол.

Различаются случаи «жесткого» и «мягкого» возбуждения автоколебаний. В первом случае для возникновения автоколебательного режима необходимо выбрать начальные условия движения в области притяжения предельного цикла, описывающего автоколебательный процесс. Во втором случае устойчивые автоколебания возникают при почти всех начальных условиях движения. В данном случае условия возникновения «мягкого» возбуждения автоколебаний возникают в процессе торможения автомобиля, когда скорость скольжения заблокированных колес попадает в область, характеризуемую увеличением силы трения при уменьшении скорости скольжения.

2.1 Модель автомобиля и удар в момент блокировки колес

Рассмотрим процесс торможения автомобиля с заблокированными колесами. Модель автомобиля представлена на рисунке 2.1. Корпус автомобиля с центром масс C соединен с колесами пружинами и демпферами. Движение автомобиля рассматривается в плоскости Ox_1x_3 . Корпус автомобиля поворачивается вокруг оси Cx_2 на угол φ .

Пусть движения двух передних колес одинаковы, что позволяет их заменить одним колесом с удвоенной массой $2m$ и удвоенным моментом инерции $2J_1$. Аналогичное утверждение справедливо для задних колес. Система координат $Cx_1x_2x_3$ связана с корпусом автомобиля.

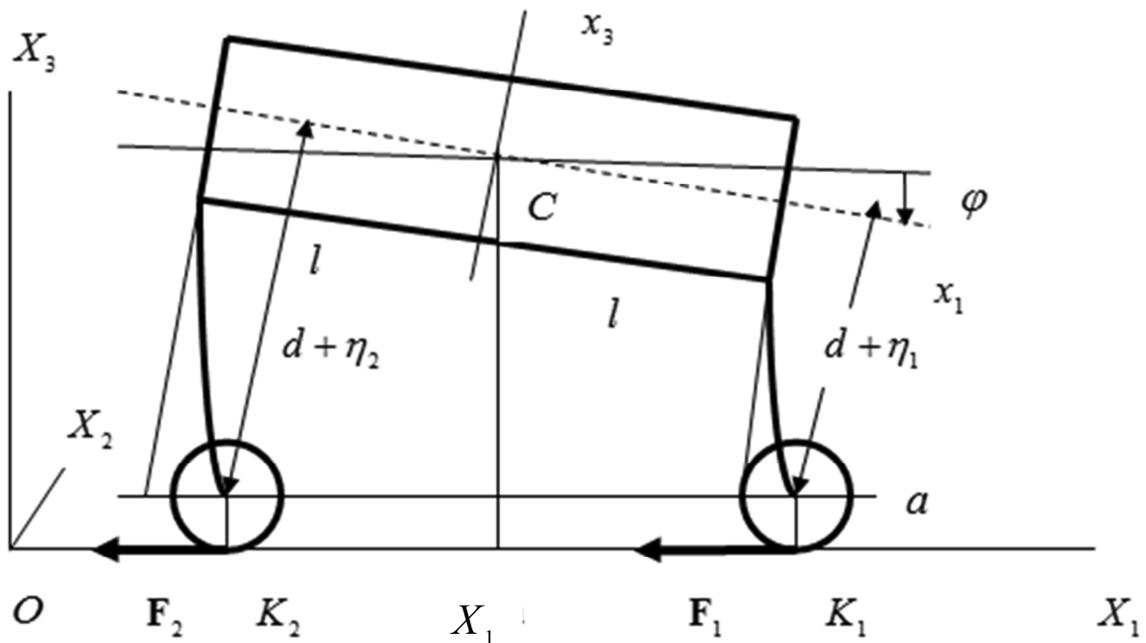


Рисунок 2.1 - Модель автомобиля

Пусть X_1, X_3 координаты центра масс корпуса автомобиля. Радиус-векторы центров колес представим в виде

$$R_i = X_1 E_1 + X_3 E_3 + \Gamma_2(\varphi) [(-(-1)^i l + \xi_i) e_1 - (d + n_i) e_3],$$

$$\Gamma_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Здесь E_1, E_3 – орты системы координат OX_1X_3 , e_1, e_3 – орты системы координат $Cx_1x_2x_3$. ξ_i, n_i – соответственно продольные и поперечные перемещения центров колес относительно его корпуса. Колеса автомобиля заблокированы, и их угловая скорость относительно корпуса автомобиля равна нулю. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} (R_i, E_3) = X_3 + \Gamma_2(\varphi)[(-(-1)^i l + \xi_i)e_1 - (d + n_i)e_3], E_3) = a \Rightarrow \\ (X_3 - (-1)^i l + \xi_i)\sin\varphi - (d + n_i)\cos\varphi = a, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где a – радиус колеса.

Соотношения (2.1.1) являются голономными связями, наложенными на перемещения точек механической системы. Система имеет пять степеней свободы.

В качестве обобщенных координат возьмем $q = (X_1, X_3, \varphi, \xi_1, \xi_2)$, а координаты n_1, n_2 определим согласно равенствам (2.1.1).

Далее найдем

$$\begin{aligned} x_i = (R_i, E_1) = X_1 + (\Gamma_2(\varphi)[(-(-1)^i l + \xi_i)e_1 - (d + n_i)e_3], E_1) = \\ = X_1 - ((-1)^i l + \xi_i)\cos\varphi - (d + n_i)\sin\varphi \Rightarrow \\ \dot{x}_i = \dot{X}_1 - ((-1)^i l + \xi_i)\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\xi}_i\cos\varphi - (d + n_i)\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{n}_i\sin\varphi \cong \\ \cong \dot{X}_1 + \dot{\xi}_i - d\dot{\varphi}; \\ v_i = \dot{x}_i - a\dot{\varphi} \cong \dot{X}_1 + \dot{\xi}_i - d_1\dot{\varphi}; \quad i = 1, 2, \quad d_1 = d + a. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Здесь x_i, v_i – координаты центров колес и скорости точек контакта колес с дорогой K_1 и K_2 соответственно. Приближенные равенства в соотношениях (2.1.2) соответствуют задаче о малых колебаниях, когда переменные $\varphi, \dot{\varphi}, \xi_i, \dot{\xi}_i, n_i, \dot{n}_i$ являются малыми величинами.

Кинетическую энергию системы представим в виде

$$T = \frac{M}{2}(\dot{X}_1^2 + \dot{X}_3^2) + \frac{J_0 + 4J_1}{2}\dot{\varphi}^2 + m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2).$$

Здесь M, J_0 – масса и момент инерции корпуса автомобиля относительно его центра масс.

Выпишем значение для потенциальной энергии:

$$\Pi = MgX_3 + c_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) + c_2[(n_1 - n_0)^2 + (n_2 - n_0)^2],$$

где c_1, c_2 – соответственно продольная и вертикальная жесткости подвески автомобиля для каждого колеса ($c_1 \gg c_2$), n_0 – постоянная. Вертикальные перемещения колес n_1, n_2 вызывают сжатие пружин передней или задней подвески, а их изменение приводит к возникновению демпфирующих сил. Продольные перемещения ξ_1, ξ_2 порождают упругие силы деформаций элементов подвески с большим коэффициентом жесткости. Будем считать, что характеристики передней и задней подвески автомобиля одинаковы.

Получим уравнения движения автомобиля в рамках теории малых колебаний. Согласно (2.1), (2.2) имеем

$$n_i = X_3 - (-1)^i l \varphi - d - a,$$

где $d_1 = d + a$ – координата центра масс корпуса автомобиля, когда он находится в состоянии покоя, а вертикальные пружины подвески сжаты.

Представим функцию Лагранжа, соответствующую малым колебаниям, в виде

$$\begin{aligned} L = & \frac{M}{2} (\dot{X}_1^2 + \dot{X}_3^2) + \frac{J_0 + 4J_1}{2} \dot{\varphi}^2 + m \sum_{i=1}^2 [\dot{X}_1 - d\dot{\varphi} + \dot{\xi}_i]^2 - \\ & - MgX_3 - c_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2c_2 \left[\left(X_3 - d_1 - \frac{Mg}{4c_2} \right)^2 + l^2 \varphi^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Найдем обобщенные силы, действующие на систему в процессе торможения автомобиля. Силы нелинейного вязкого трения F_1, F_2 , приложенные к системе в четырех точках контакта, и диссипативные силы, возникающие в амортизаторах, совершают работу на возможных перемещениях

$$\begin{aligned} \delta A = & 2F_1(\delta X_1 + \delta \xi_1 - d_1 \delta \varphi) + 2F_2(\delta X_1 + \delta \xi_2 - d_1 \delta \varphi) - \\ & - 4\aleph(\dot{X}_3 \delta X_3 + l^2 \dot{\varphi} \delta \varphi), \end{aligned}$$

где \aleph – коэффициент, характеризующий диссипативные свойства амортизатора подвески колеса автомобиля.

Далее получим выражения обобщенных сил

$$\begin{aligned} Q_{1X} &= 2F_1 + 2F_2, \\ Q_\varphi &= -2(F_1 + F_2)d_1 - 4\aleph l^2 \dot{\varphi}, \\ Q_{3X} &= -4\aleph \dot{X}_3, \\ Q_{1\xi} &= 2F_1, \\ Q_{2\xi} &= 2F_2. \end{aligned}$$

Выпишем уравнения Лагранжа второго рода в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_0 \ddot{X}_1 - 4md\ddot{\varphi} + 2m(\ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2) &= 2(F_1 + F_2), \\ M\ddot{X}_3 + 4\aleph \dot{X}_3 + 4c_2(X_3 - d_1) &= 0, \\ I_0 \ddot{\varphi} - 2md(2\ddot{X}_1 + \ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2) + 4c_2 l^2 \varphi &= -2(F_1 + F_2)d_1 - 4\aleph l^2 \dot{\varphi}, \\ m(\ddot{X}_1 - d\ddot{\varphi} + \ddot{\xi}_1) + c_1 \xi_1 &= F_1, \\ m(\ddot{X}_1 - d\ddot{\varphi} + \ddot{\xi}_2) + c_1 \xi_2 &= F_2, \\ M_0 &= M + 4m, \\ I_0 &= J_0 + 4J_1 + md^2. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Из второго уравнения системы (2.1.4) следует, что $X_3(t) = d_1$, поскольку начальные условия движения до и после момента блокировки колес равны $X_3(0) = d_1$, $\dot{X}_3(0) = 0$.

Пусть силы нелинейного вязкого трения определяются соотношениями

$$\begin{aligned} F_i &= -kN_i(v_i - g_1 v_i^3 + g_2 v_i^5), \quad i = 1, 2; \\ v_i &= \dot{X}_1 + \dot{\xi}_i - d_1 \dot{\varphi}, \\ N_i &= N_0 - (-1)^i c_2 l \varphi, \\ N_0 &= \frac{M_0 g}{4}. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Здесь N_i – величина нормальной реакции в точке контакта с номером i , коэффициент k характеризует свойства трущихся поверхностей шины и дороги.

Ввиду малости угла φ , примем $N_1 = N_2 = N_0$.

Начальные условия движения для переменных, входящих в уравнения (2.1.4), определим, рассматривая момент блокировки колес как приложение внутреннего момента ударного импульса между колесами и корпусом автомобиля в момент времени $t = 0$.

До момента блокировки колес имели место условия

$$X_1(-0) = \varphi(-0) = \dot{\varphi}(-0) = 0,$$

$$\dot{X}_1(-0) = v_0,$$

$$\dot{\xi}_i(-0) = \xi_i(-0) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Колеса автомобиля вращались со скоростью $\Omega = \frac{v_0}{a}$. Пусть точка C_0 – центр масс системы (корпус автомобиля и четыре колеса) при равномерном движении автомобиля со скоростью v_0 . Внутренний момент ударного импульса не изменяет величину момента количества движения системы относительно ее центра масс (относительно осей Кенига), что выражается равенством

$$4J_1\Omega = A\dot{\varphi}(+0),$$

$$A = J_0 + 4J_1 + 4ml^2 + 4m_r d^2 \Rightarrow \dot{\varphi}(+0) = \frac{4J_1 v_0}{Aa}.$$

Здесь A – момент инерции автомобиля относительно его центра масс, определяемого вектором $\overrightarrow{CC_0} = -4mM_0^{-1}de_3$, а $m_r = \frac{4mM}{M_0}$ – приведенная масса. Таким образом, задается начальное условие $\dot{\varphi}(+0)$.

Начальные условия для оставшихся переменных следующие:

$$X_1(+0) = \varphi(+0) = 0,$$

$$\dot{X}_1(+0) = v_0,$$

$$\dot{\xi}_i(+0) = \xi_i(+0) = 0, \quad i = 1, 2$$

в виду отсутствия ударных импульсов в момент блокировки колес.

Из явного вида первого, третьего, четвертого и пятого уравнения в соотношениях (2.1.4), следует, что система допускает семейство решений, когда

$$\xi_1(t) = \xi_2(t) = \xi(t).$$

Это можно заметить, если из четвертого уравнения системы вычесть пятое.

Для этого семейства справедливы уравнения

$$\begin{aligned} M_0 \ddot{X}_1 - 4md\ddot{\varphi} + 4m\ddot{\xi} &= 4F, \\ I_0 \ddot{\varphi} - 4md(\ddot{X}_1 + \ddot{\xi}) + 4c_2 l^2 \varphi &= -4Fd_1 - 4\aleph l^2 \dot{\varphi}, \\ m(\ddot{X}_1 - d\ddot{\varphi} + \ddot{\xi}) + c_1 \xi &= F. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Для упрощения расчетов введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} V = \dot{X}_1, \quad u = \varphi, \quad U = \dot{\varphi}, \quad w = \xi, \quad W = \dot{\xi}, \\ J_{01} = \frac{J_0}{4} + J_1 - mdd_1, \end{aligned}$$

и представим преобразованную систему уравнений (2.1.6) в форме

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 4c_1 M^{-1} w, \\ \dot{u} &= U, \\ \dot{w} &= W, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

$$\begin{aligned} J_{01} \dot{U} + ma(\dot{V} + \dot{W}) + \aleph l^2 U + c_2 l^2 u + d_1 c_1 w &= 0, \\ \dot{V} + \dot{W} - d\dot{U} &= -c_1 m^{-1} w - kN_0 m^{-1} (v - g_1 v^3 + g_2 v^5). \end{aligned}$$

Если коэффициент $d_1 = 0$, а вместе с ним и радиус колеса $a = 0$, то колебания корпуса автомобиля по углу φ отделяются от остальных переменных и затухают. Эти условия означают, что центр масс корпуса автомобиля (точка C) расположен в середине отрезка, соединяющего точки K_1, K_2 – точки контакта колес с дорогой, а радиус колес равен нулю. Конструктивно выполнить эти условия невозможно, но следует стремиться понизить высоту центра масс корпуса автомобиля, чтобы уменьшить колебания корпуса автомобиля по углу φ при его торможении.

В качестве коэффициентов силы трения взяты соотношения

$$g_1 = 0.004166 \text{ м}^{-2} \text{ с}^2, \quad g_2 = 0.000005 \text{ м}^{-4} \text{ с}^4,$$

тогда график функции $F(v) = v - g_1 v^3 + g_2 v^5$, будет иметь следующий вид (рисунок 2.2):

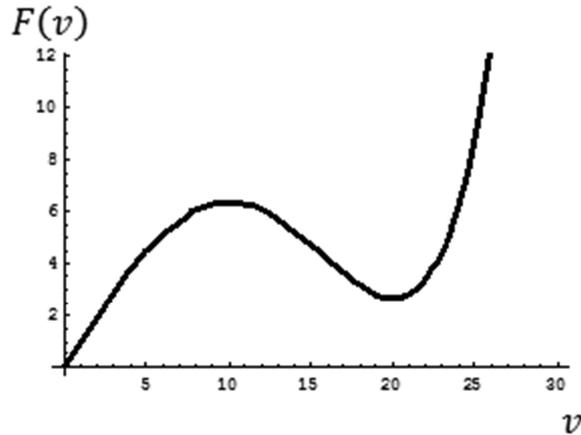


Рисунок 2.2 - График силы трения от скорости

$$F(v) = v - 0.004166v^3 + 0.000005v^5$$

Результаты численного интегрирования системы уравнений (2.1.7), полученные с помощью пакета программ Mathematica 5.1, представлены на рисунке 2.3. По осям абсцисс на всех графиках, представленных на рисунке 2.3, отложено время в секундах. В численных расчетах использованы следующие данные [71]:

$$M = 1500 \text{ кг}, \quad m = 25 \text{ кг}, \quad a = 0.3 \text{ м},$$

$$d = 0.7 \text{ м}, \quad d_1 = 1 \text{ м}, \quad l = 2 \text{ м},$$

$$J_0 = 2280 \text{ кгм}^2, \quad J_1 = 1.125 \text{ кгм}^2, \quad J_{01} = 554 \text{ кгм}^2,$$

$$c_1 m^{-1} = 3944 \text{ с}^{-2}, \quad \kappa l^2 J_{01}^{-1} = 4 \text{ с}^{-1}, \quad c_2 l^2 J_{01}^{-1} = 39.44 \text{ с}^{-2},$$

$$4c_1 M^{-1} = 263 \text{ с}^{-2}, \quad d_1 c_1 J_{01}^{-1} = 178 \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-2}, \quad k N_0 m^{-1} = 20.1 \text{ с}^{-1}.$$

Начальные условия движения

$$V(0) = 25 \text{ мс}^{-1}, W(0) = 0, w(0) = -0.001, u(0) = 0, U(0) = 0.1371 \text{ с}^{-1}.$$

Как видно из графиков скорость корпуса автомобиля $V(t)$ стремится к нулю (рисунок 2.3). На интервале времени от 0 до 0.4 секунды колебания переменных $w(t)$ и $W(t)$ на частоте 10 гц, обусловленные начальными условиями движения, затухают (рисунки 2.4 и 2.5). Затем на интервале времени от 2 до 3.8 секунды, когда скорость автомобиля в процессе торможения попадает в интервал $v \in (10,20)$ и производная $F'(v) < 0$,

возникают автоколебания колес относительно корпуса автомобиля (рисунки 2.4 и 2.5). Эти автоколебания затухают, когда скорость $V(t)$ становится меньше 10 мс^{-1} . Перемещения колеса относительно корпуса автомобиля $w(t)$ имеют отрицательные значения (рисунок 2.4).

Ускорение торможения автомобиля пропорционально функции $w(t)$. Как видно из графика, изображенного на рисунке 2.4, в процессе автоколебаний на интервале времени от 2 до 3.8 секунды торможение автомобиля более эффективно (рисунок 2.4). В дальнейшем, когда скорость проскальзывания $v(t)$ оказывается в интервале от нуля до десяти метров в секунду, автоколебания прекращаются, ускорение торможения уменьшается (рисунок 2.4). Затухающие угловые колебания корпуса автомобиля на частоте 1 гц представлены на рисунке 2.6. Процесс затухания угловых колебаний прекращается на интервале времени от 2 до 3.8 секунды, когда возникают автоколебания. Существенное снижение скорости автомобиля происходит в течение четырех секунд при начальной скорости 90 км/час.

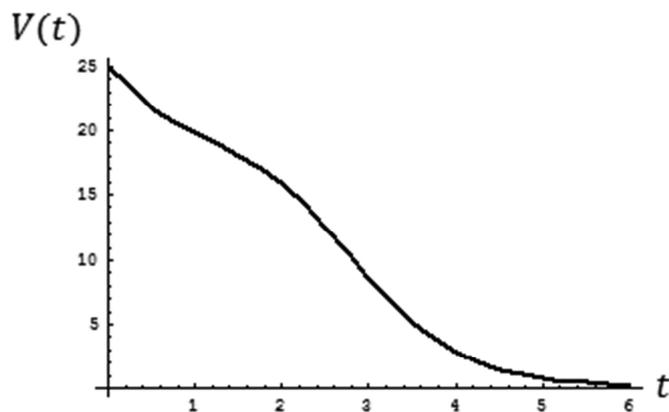


Рисунок 2.3 - График скорости автомобиля при его торможении

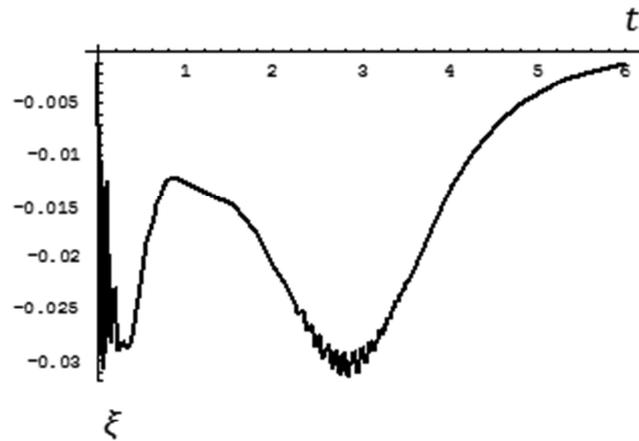


Рисунок 2.4 - График колебаний колес автомобиля при его торможении

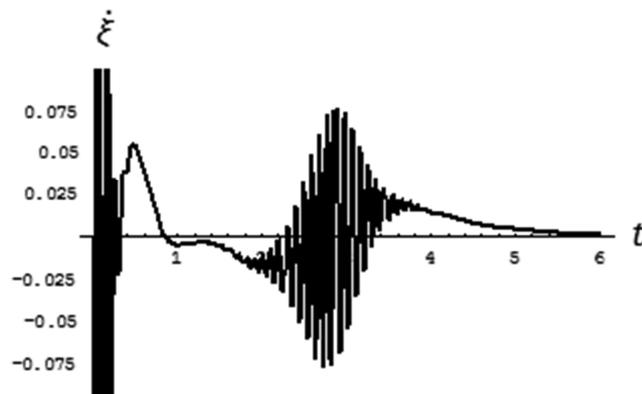


Рисунок 2.5 - График скорости колебаний колес автомобиля при его торможении

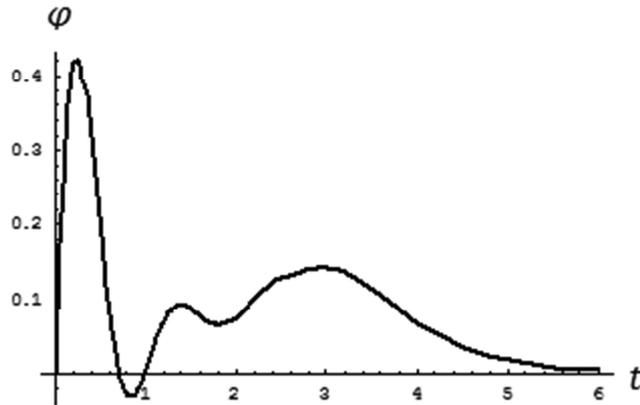


Рисунок 2.6 - График угловых колебаний корпуса автомобиля

2.2. Аналитическое исследование процесса торможения автомобиля

Изучим процесс возникновения автоколебаний при торможении автомобиля, используя метод усреднения и канонические переменные действие-угол. Поскольку колебания корпуса автомобиля по вертикали отделяются от остальных движений в рамках теории малых колебаний, то рассмотрим оставшиеся движения системы, описываемые переменными (X, φ, ξ) :

$$X = X_1 + 4mM_0^{-1}\xi.$$

Функция Лагранжа (2.1.3) и работа неконсервативных сил на возможных перемещениях примут вид

$$L_0 = \frac{M_0\dot{X}^2}{2} + \frac{M_0b^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_r\dot{\xi}^2}{2} - 4md\dot{X}\dot{\varphi} - m_r d\dot{\xi}\dot{\varphi} - 2c_1\xi^2 - 2c_2l^2\varphi^2,$$

$$b^2 = \frac{J_0 + 4J_1 + 4md^2}{M_0},$$

$$m_r = \frac{4mM}{M_0};$$

(2.2.1)

$$\begin{aligned}
\delta A &= 4F(\delta X + MM_0^{-1}\delta\xi - d_1\delta\varphi) - 4\aleph l^2\dot{\varphi}\delta\varphi, \\
4F &= -kM_0gF(v), \\
v &= \dot{X} + MM_0^{-1}\dot{\xi} - d_1\dot{\varphi}.
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Рассмотрим случай, когда $d = 0$, $d_1 = a$ и кинетическая энергия в формуле (2.2.1) принимает канонический вид. В этом случае центр масс корпуса автомобиля в состоянии покоя лежит на середине отрезка, соединяющего центры колес.

Обобщенные импульсы определяются формулами [15]

$$\begin{aligned}
p_x &= \frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}} = M_0\dot{X}, \\
p_\varphi &= \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\varphi}} = M_0b^2\dot{\varphi}, \\
p_\xi &= \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\xi}} = m_r\dot{\xi}.
\end{aligned}$$

Выпишем функцию Гамильтона

$$H = \frac{p_x^2}{2M_0} + \frac{p_\varphi^2}{2M_0b^2} + \frac{p_\xi^2}{2m_r} + 2c_1\xi^2 + 2c_2l^2\varphi^2.$$

Перейдем к каноническим переменным действие-угол I_1, ψ_1, I_2, ψ_2 , согласно равенствам [15]

$$\begin{aligned}
p_\xi &= \sqrt{2m_r I_1 \omega_1} \cos\psi_1, & \xi &= \sqrt{\frac{I_1 \omega_1}{2c_1}} \sin\psi_1, & \omega_1^2 &= \frac{4c_1}{m_r}, \\
p_\varphi &= \sqrt{2M_0 b^2 I_2 \omega_2} \cos\psi_2, & \varphi &= \sqrt{\frac{I_2 \omega_2}{2c_2 l^2}} \sin\psi_2, & \omega_2^2 &= \frac{4c_2^2 l^2}{M_0 b^2}.
\end{aligned}$$

и представим гамильтониан системы в новых переменных в виде

$$K(p_x, I_1, I_2, \psi_1, \psi_2) = \frac{p_x^2}{2} + \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2.$$

Определим обобщенные силы, используя выражение (2.2.2) для работы сил на возможных перемещениях в соотношениях (2.2.2)

$$\begin{aligned} \delta A = 4F \left[\delta X + MM_0^{-1} \left(\frac{\partial \xi}{\partial I_1} \delta I_1 + \frac{\partial \xi}{\partial \psi_1} \delta \psi_1 \right) - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial I_2} \delta I_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_2} \delta \psi_2 \right) \right] \\ - 4\kappa l^2 \sqrt{2M_0^{-1}b^{-2}I_2\omega_2 \cos\psi_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial I_2} \delta I_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_2} \delta \psi_2 \right) \Rightarrow \\ Q_x = 4F, \\ Q_{I_1} = \frac{2FM}{M_0} \sqrt{\frac{\omega_1}{2c_1 I_1}} \sin\psi_1, \\ Q_{\psi_1} = \frac{4FM}{M_0} \sqrt{\frac{I_1 \omega_1}{2c_1}} \cos\psi_1, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

$$Q_{I_2} = -2 \left(aF + \kappa l^2 \sqrt{2M_0^{-1}b^{-2}I_2\omega_2 \cos\psi_2} \right) \sqrt{\frac{\omega_2}{2c_2 l^2 I_2}} \sin\psi_2,$$

$$Q_{\psi_2} = -4 \left(aF + \kappa l^2 \sqrt{2M_0^{-1}b^{-2}I_2\omega_2 \cos\psi_2} \right) \sqrt{\frac{I_2 \omega_2}{2c_2 l^2}} \cos\psi_2.$$

Скорость скольжения точки контакта колеса по дороге:

$$\begin{aligned} v &= a_0 + a_1 \cos\psi_1 + a_2 \cos\psi_2, \\ a_0 &= p_x M_0^{-1}, \\ a_1 &= MM_0^{-1} \sqrt{2m_r^{-1} I_1 \omega_1}, \\ a_2 &= -a \sqrt{2M_0^{-1} b^{-2} I_2 \omega_2}. \end{aligned}$$

Канонические уравнения Гамильтона с учетом обобщенных сил (2.2.3) представляются в форме [15]

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial X} + Q_x = Q_x, \\ \dot{X} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{M_0}, \\ \dot{I}_k &= -\frac{\partial H}{\partial \psi_k} + Q_{\psi_k} = Q_{\psi_k}, \\ \dot{\psi}_k &= \frac{\partial H}{\partial I_k} - Q_{I_k} = \omega_k - Q_{I_k}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Применим для анализа поведения решений системы уравнений (2.2.4) метод усреднения, полагая частоты невозмущенных колебаний ω_1, ω_2 независимыми.

Эволюция движения в рассматриваемой задаче описывается усредненными уравнениями для переменных действия p_x, I_1, I_2 .

Сохраняя обозначения переменных, представим усредненные уравнения в виде

$$\dot{p}_x = \langle Q_x \rangle, \quad \dot{I}_k = \langle Q_{\psi_k} \rangle, \quad k = 1, 2 \dots$$

Будем считать, что невозмущенное движение системы представляется равномерным движением центра масс системы и незатухающими гармоническими колебаниями по переменным ξ на частоте ω_1 и φ на частоте ω_2 . Невозмущенное движение имеет место, если выполняются условия $F = \aleph = 0$.

В результате усреднения по «быстрым» переменным ψ_1, ψ_2 , получим

$$\begin{aligned} \langle Q_x \rangle &= -\frac{k}{8} M_0 g a_0 G_0(Z_0, Z_1, Z_2), \\ \langle Q_{\psi_1} \rangle &= -\frac{kMg}{16} \sqrt{\frac{I_1 \omega_1}{2c_1}} a_1 G_1(Z_0, Z_1, Z_2), \\ \langle Q_{\psi_2} \rangle &= \frac{akMg}{16} \sqrt{\frac{I_2 \omega_2}{2c_2 l^2}} a_2 G_1(Z_0, Z_2, Z_1) - \frac{4\aleph l^2}{M_0 b^2} I_2, \end{aligned}$$

$$Z_k = a_k^2, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$\begin{aligned} G_0(Z_0, Z_1, Z_2) &= 8 - g_1(8Z_0 + 12Z_1 + 12Z_2) \\ &\quad + g_2(8Z_0^2 + 40Z_0Z_1 + 40Z_0Z_2 + 15Z_1^2 + 15Z_2^2 + 60Z_1Z_2), \\ G_1(Z_0, Z_1, Z_2) &= 8 - g_1(24Z_0 + 6Z_1 + 12Z_2) \\ &\quad + g_2(40Z_0^2 + 60Z_0Z_1 + 120Z_0Z_2 + 5Z_1^2 + 15Z_2^2 + 30Z_1Z_2), \end{aligned}$$

Усредненные уравнения движения представим в форме

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0 &= -\frac{kg}{4} Z_0 G_0(Z_0, Z_1, Z_2), \\ \dot{Z}_1 &= -\frac{kMg}{32m} Z_1 G_1(Z_0, Z_1, Z_2), \\ \dot{Z}_2 &= -\frac{a^2kg}{8b^2} Z_2 G_1(Z_0, Z_2, Z_1) - \frac{4\aleph l^2}{J_0 + 4J_1} Z_2. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Согласно числовым данным, приведенным в разделе 2.1, имеем

$$\begin{aligned} \frac{kg}{4} &= 0.314 \text{ c}^{-1}, & \frac{kMg}{32m} &= 2.355 \text{ c}^{-1}, \\ \frac{a^2kg}{8b^2} &= 0.009896 \text{ c}^{-1}, & \frac{4\aleph l^2}{J_0 + 4J_1} &= 3.88 \text{ c}^{-1}. \end{aligned}$$

Начальные условия движения

$$\begin{aligned} Z_0(0) &= 625 \text{ м}^2 \text{ c}^{-2}, & Z_1(0) &= 0.01435 \text{ м}^2 \text{ c}^{-2}, \\ Z_2(0) &= 0.003378 \text{ м}^2 \text{ c}^{-2}. \end{aligned}$$

Все решения уравнений (2.2.5) обладают свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_k(t) = 0, \quad k = 0, 1, 2$$

согласно теореме об изменении механической энергии

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -kM_0 g v^2 (1 - g_1 v^2 + g_2 v^4) - 4\aleph l^2 \dot{\varphi}^2 \leq 0 \quad (2.2.6)$$

Неравенство (2.2.6) выражает диссипативные свойства нелинейного вязкого трения. Система дифференциальных уравнений (2.2.5) описывает переходный процесс, в ходе которого могут возникать автоколебания.

Графики решений, полученные с помощью пакета программ Mathematica 5.1, представлены на рисунках 2.7-2.9. По абсциссам всех графиков отложено время в секундах. Процесс торможения представлен на

рисунке 2.7. Ординаты графика на рисунке 2.8 пропорциональны амплитуде колебаний по переменной ξ . Очевидно, что на интервале времени (2,4) наблюдается возрастание амплитуды колебаний, что свидетельствует о возникновении автоколебаний.

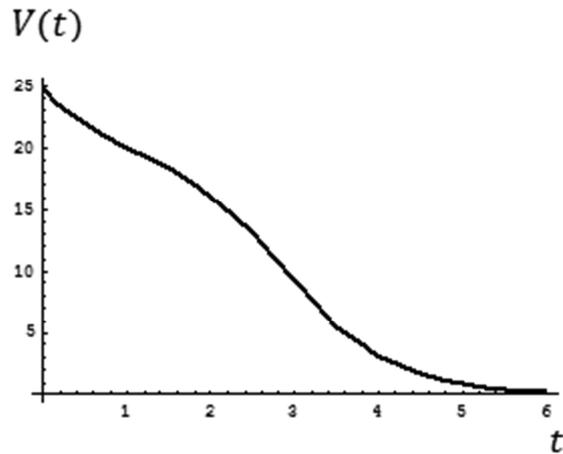


Рисунок 2.7 - График процесса торможения автомобиля

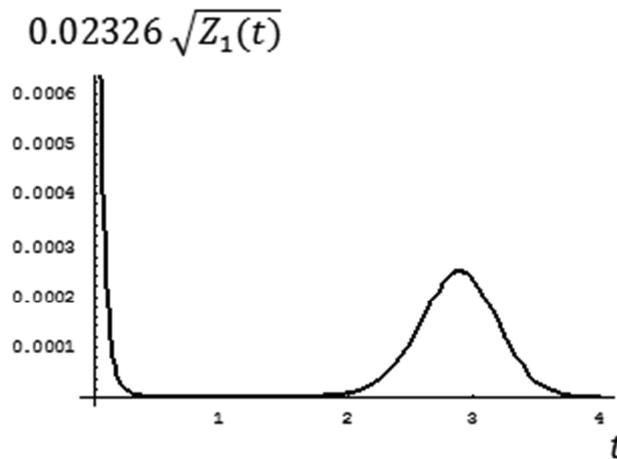


Рисунок 2.8 - График колебаний колес автомобиля

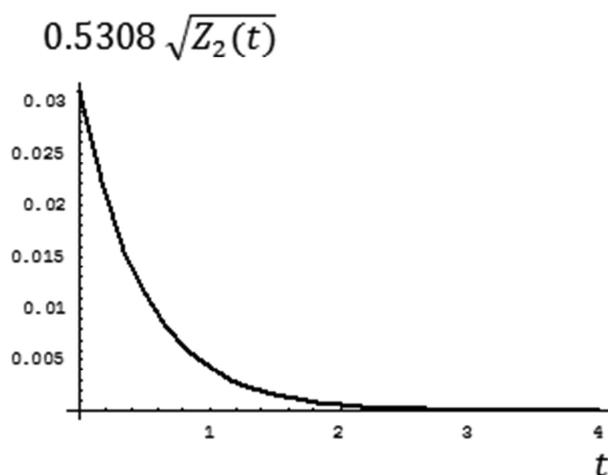


Рисунок 2.9 - График колебаний корпуса автомобиля

В дальнейшем при снижении скорости автомобиля автоколебания пропадают. Заметим, что в усредненном варианте начальное значение переменной Z_1 должно быть положительным. В противном случае переменная $Z_1(t) = 0$ в силу усредненных уравнений движения. Как следует из рисунка 2.9 угол φ , характеризующий поворот корпуса автомобиля, монотонно убывает и практически не реагирует на возникновение автоколебательного режима.

Автоколебания заблокированных колес порождают тангенциальные силы периодического характера, действующие на материал дороги, по которой движется автомобиль. Это обстоятельство возможно является причиной возникновения пластических деформаций материала дороги, поверхность которой приобретает волнообразный характер в областях интенсивного торможения автомобилей.

Глава 3. Автоколебания в системе струна – смычок

В данной главе исследуются колебания тонкой растянутой струны, взаимодействующей со смычком, скользящим по струне с постоянной ортогональной к струне скоростью. Взаимодействие смычка и струны определяется гладким нелинейным законом трения с наличием участка, на котором сила трения, падает с ростом скорости (1.1.1). Движение системы описывается бесконечной системой связанных друг с другом обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Получены усредненные уравнения движения в канонических переменных действие–угол, найдены стационарные точки, соответствующие автоколебательным режимам, и исследована их устойчивость.

3.1 Модель взаимодействия струны со смычком и уравнения движения

В задаче рассматривается система, состоящая из струны, концы которой закреплены, и смычка (рисунок 3.1). Смычок касается струны в точке и движется с постоянной скоростью V . Между струной и смычком присутствует сила трения, в результате чего в струне возникают поперечные колебания.

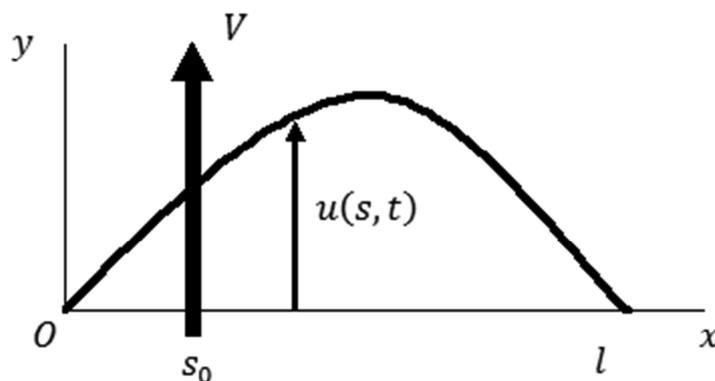


Рисунок 3.1 - Взаимодействие струны со смычком

Пусть струна в деформированном растянутом состоянии расположена вдоль оси Ox и $u(s, t), 0 \leq s \leq l$ - отклонения её точек вдоль оси Oy . Движение струны происходит в плоскости Oxy . Концы струны шарнирно закреплены в точках на оси Ox с координатами $s = 0$ и $s = l$.

Струну считаем упругим материалом. Линейную плотность струны обозначим- p , натяжение струны - N , а изгибную жесткость - EJ .

Пусть смычок приложен к струне в точке s_0 , тогда $F(t, s_0)$ – сила трения между смычком и струной.

Уравнения движения и динамические граничные условия получим из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского:

$$\delta(T - \Pi) + \delta A = 0.$$

Кинетическую энергию струны примем равной

$$T = \frac{1}{2} p \int_0^l \dot{u}^2 ds.$$

Потенциальная энергия струны будет равна

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l (Nu'^2 + EJ u''^2) ds.$$

Выпишем работу обобщенных сил

$$\delta A = \int_0^l f \delta u ds,$$

$$f = F(t, s_0) \delta(s - s_0).$$

Тогда вариационный принцип Гамильтона-Остроградского примет вид

$$\int_0^l (p \ddot{u} \delta u + EJ u'' \delta u'' - f \delta u + Nu' \delta u') ds = 0.$$

Поскольку концы струны закреплены, то

$$\int_0^l u'' \delta u'' ds = u'' \delta u' \Big|_{s=0}^{s=l} - u''' \delta u \Big|_{s=0}^{s=l} + \int_0^l u^{IV} \delta u ds,$$

$$\int_0^l u' \delta u' ds = u' \delta u \Big|_{s=0}^{s=l} - \int_0^l u'' \delta u ds,$$

$$u''' \delta u \Big|_{s=0}^{s=l} = 0, \quad u' \delta u \Big|_{s=0}^{s=l} = 0,$$

и вариационный принцип принимает вид:

$$\int_0^l (p \dot{u} \delta u + EJu^{IV} \delta u - f \delta u - Nu'' \delta u) ds + EJu''(l, t) \delta u'(l, t) - EJu''(0, t) \delta u'(0, t) = 0$$

Учитывая произвольность вариаций $\delta u(s, t)$, $\delta u'(l, t)$, $\delta u'(0, t)$, приходим к уравнению:

$$\begin{cases} p\ddot{u} + EJu^{IV} - Nu'' = f, & (3.1.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u''(0, t) = u''(l, t) = 0, & (3.1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u(l, t) = 0. & (3.1.3) \end{cases}$$

которое описывает поперечные колебания струны, а соотношения (3.1.2-3.1.3) описывают динамические граничные условия. Динамические вместе с кинематическими граничными условиями (условиями закрепления концов струны) образует полный набор граничных условий. Общее решение однородного уравнения (3.1.1), описывающее собственные колебания струны, можно получить методом Фурье разделения переменных.

Конфигурационным пространством системы является Гильбертово пространство

$$H_2\{u(s, t): u''(s, t) \in L_2([0, l]), u(0, t) = u(l, t) = 0\},$$

а пространство скоростей определяется как подпространство суммируемых вместе со своим квадратом функций

$$H_0 = \{\dot{u}(s, t): \dot{u}(s, t) \in L_2([0, l]), u(0, t) = u(l, t) = 0\}.$$

В этих пространствах выберем ортогональный базис

$$\{\psi_k(s)\}_{k=1}^{\infty}, \quad \psi_k(s) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi ks}{l},$$

удовлетворяющий условию

$$\int_0^l \psi_i(s) \psi_j(s) ds = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Представим функцию $u(s, t)$ в виде

$$u(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \psi_k(s). \quad (3.1.4)$$

Итак, уравнения движения струны принимают следующий вид:

$$p\ddot{u}(s, t) - Nu''(s, t) + EJ u^{IV}(s, t) = F(t, s_0) \delta(s - s_0),$$

$$u(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi i}{l} s.$$

Приведем уравнения движения струны к более удобному виду, для этого умножим скалярно уравнение (3.1.1) на ψ_i :

$$(p\ddot{u}, \psi_i) - N(u'', \psi_i) + EJ(u^{IV}, \psi_i) = F(t, s_0)(\delta(s - s_0), \psi_i) \Rightarrow$$

$$p\ddot{q}_i(t) + N \frac{\pi^2 i^2}{l^2} q_i(t) + EJ \frac{\pi^4 i^4}{l^4} q_i(t) = F(t, s_0) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi i}{l} s_0.$$

Запишем уравнение движения струны в Лагранжевых координатах:

$$\left\{ \begin{array}{l} p\ddot{q}_i(t) + N \frac{\pi^2 i^2}{l^2} q_i(t) + EJ \frac{\pi^4 i^4}{l^4} q_i(t) = -k(v - g_1 v^3 + g_2 v^5) \psi_i(s_0), \\ v = \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_j(t) \psi_j(s_0) - V, \quad i = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (3.1.5)$$

Уравнения (3.1.5) являются бесконечной системой нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в обыкновенных производных. Механическую систему, которой соответствуют уравнения (3.1.5), можно трактовать как бесконечную систему гармонических осцилляторов, связанных друг с другом нелинейными силами вязкого трения.

Система уравнений (3.1.5) имеет следующее стационарное решение:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{i0} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots \Rightarrow \\ \left(N \frac{\pi^2 i^2}{l^2} + EJ \frac{\pi^4 i^4}{l^4} \right) q_{i0} &= k(V - g_1 V^3 + g_2 V^5) \psi_i(s_0). \end{aligned}$$

Произведём замену переменных: $q_i = q_{i0} + \hat{q}_i$, и рассмотрим движение струны в окрестности стационарного решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} p\ddot{\hat{q}}_i + \left(N \frac{\pi^2 i^2}{l^2} + EJ \frac{\pi^4 i^4}{l^4} \right) \hat{q}_i = -k(V + v - g_1(V^3 + v^3) + g_2(V^5 + v^5))\psi_i(s_0), \\ v = \sum_{j=1}^{\infty} \dot{\hat{q}}_j(t)\psi_j(s_0) - V, \quad i = 1, 2 \dots \end{array} \right.$$

Далее опустим волну над \hat{q}_i .

Введем обозначение:

$$\omega_i^2 = \frac{1}{p} \left(N \frac{\pi^2 i^2}{l^2} + EJ \frac{\pi^4 i^4}{l^4} \right).$$

Для исследования динамики системы, описываемой уравнениями (3.1.5), перейдем к каноническим переменным действие-угол

$$(p_k, q_k) \Leftrightarrow (I_k, \varphi_k),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i = \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \sin \varphi_i, \quad \dot{q}_i = p_i, \quad i = 1, 2 \dots \\ p_i = \sqrt{2I_i \omega_i} \cos \varphi_i. \end{array} \right.$$

Выпишем гамильтониан задачи и работу обобщенных сил

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\dot{q}_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i I_i < \infty,$$

$$\delta A = -\frac{k}{p} \sum_{i=1}^{\infty} [(V + v - g_1(V^3 + v^3) + g_2(V^5 + v^5))\psi_i(s_0)] \delta q_i,$$

$$\delta q_i = \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \cos \varphi_i \delta \varphi_i + \sqrt{\frac{1}{2\omega_i I_i}} \delta I_i \sin \varphi_i.$$

Запишем уравнения движения в виде канонических уравнений Гамильтона с обобщенными силами [15]

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} + Q'_i = Q'_i, \\ \dot{\varphi}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} - Q''_i = \omega_i - Q''_i, \text{ где} \\ Q'_i = -\frac{k}{p} [(V + v - g_1(V^3 + v^3) + g_2(V^5 + v^5))] \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \psi_i(s_0) \cos \varphi_i, \\ Q''_i = -\frac{k}{p} [(V + v - g_1(V^3 + v^3) + g_2(V^5 + v^5))] \sqrt{\frac{1}{2I_i \omega_i}} \psi_i(s_0) \sin \varphi_i, \\ i = 1, 2 \dots \end{array} \right. \quad (3.1.6)$$

Система уравнений (3.1.6) в точности описывает колебания струны.

Если для какого-то номера i функция $\psi_i(s_0) = 0$, то соответствующее уравнение в системе (3.1.6) отделяется от остальных уравнений и описывает затухающие собственные колебания по переменной q_i .

Далее, в системе (3.1.6) произведем редукцию уравнений. Функцию $u(s, t)$ представим в следующем виде:

$$u(s, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi i}{l} s.$$

Найдем выражение для силы трения:

$$\begin{aligned} F(t, s_0) &= F(\dot{u}(s_0, t)) = -kv(1 - g_1 v^2 + g_2 v^4) = \\ &= -k((\dot{u}(s_0, t) - V) - g_1(\dot{u}(s_0, t) - V)^3 + g_2(\dot{u}(s_0, t) - V)^5), \\ \dot{u}(s_0, t) &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i(t) \psi_i(s_0). \end{aligned}$$

Далее для упрощения расчетов и записей введем коэффициенты $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$, таким образом, что выражение для силы трения будет выглядеть следующим образом:

$$F(\dot{u}(s_0, t)) = \sum_{0 < i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq 5} A_{i_1 i_2 \dots i_n} \dot{q}_1^{i_1} \dot{q}_2^{i_2} \dots \dot{q}_n^{i_n}.$$

Система уравнений (3.1.6) имеет стандартный вид для применения метода усреднения по быстрым переменным $(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$. Поскольку полная энергия системы ограничена, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} I_k \omega_k$ сходится. Будем предполагать, что скорость смычка относительно струны ограничена $V < \infty$. Ряд, определяющий скорость v в соотношениях (3.1.5) сходится. Отсюда следует, что правые части первых уравнений системы (3.1.6) являются малыми величинами, если мал коэффициент k , определяющий законы внутреннего трения в струне и трения при взаимодействии смычка со струной.

Предположим, что собственные частоты колебаний струны $\omega_k, k = 1, 2 \dots$ независимы. Это означает, что линейная комбинация $\sum_{k=1}^N m_k \omega_k$, где m_k – целые числа, обращается в ноль для любого N только при $m_k = 0, k = 1, \dots, N$.

Применим операцию усреднения по угловым переменным $(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ к уравнениям (3.1.6) и получим

$$\begin{cases} \dot{I}_j = \frac{p_j}{m_j \omega_j} \left(\sum_{0 < i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq 5} A_{i_1 i_2 \dots i_n} B_{i_1 i_2 \dots i_n}^j p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_n^{i_n} \right), \\ \dot{\varphi}_j = \omega_j, \end{cases}$$

$$B_{i_1 i_2 \dots i_n}^j = \langle \cos^{i_1} \varphi_1 \cos^{i_2} \varphi_2 \dots \cos^{i_j+1} \varphi_j \dots \cos^{i_n} \varphi_n \rangle_{\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n}, \quad (3.1.7)$$

$$\sqrt{2I_j \omega_j} = p_j,$$

$$\frac{1}{m_j} = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{j\pi}{l} s_0, \quad j = 1 \dots n.$$

Произведем еще одну замену переменных:

$$Z_j = p_j^2 = 2I_j \omega_j, \quad Z_j > 0, \quad j = 1 \dots n.$$

В итоге система уравнений (3.1.7) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_i &= \frac{2}{m_i} L_i(Z_1, Z_2 \dots Z_n) = \\ &= \frac{2}{m_i} Z_i \left(\sum_{0 \leq j_1 + \dots + j_n \leq 2} A_{2j_1, 2j_2, \dots, 2j_i+1, \dots, 2j_n} B_{2j_1, 2j_2, \dots, 2j_i+1, \dots, 2j_n}^i Z_1^{j_1} Z_2^{j_2} \dots Z_i^{j_i} \dots Z_n^{j_n} \right), \quad (3.1.8) \\ & \quad i = 1 \dots n. \end{aligned}$$

Найдем ненулевые стационарные точки (3.1.8), которым соответствуют автоколебательные режимы, и исследуем их устойчивость на основе усредненных уравнений (3.1.8). Приравнявая правые части (3.1.8) к нулю, получим систему алгебраических уравнений

$$L_i(Z_1, Z_2 \dots Z_n) = 0, \quad i = 1 \dots n. \quad (3.1.9)$$

Теперь будем искать решения системы уравнений (3.1.9) для случаев $n = 1, 2$, и для общего произвольного n .

3.2 Случай колебания струны с одной собственной частотой

Для случая колебания струны с одной собственной частотой система уравнений (3.1.9) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= \frac{2}{m_1} L_1(Z_1), \\ L_1(Z_1) &= Z_1 \left(\frac{1}{2} A_1 + \frac{3}{8} A_3 Z_1 + \frac{5}{16} A_5 Z_1^2 \right), \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

где коэффициенты A_i представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_5 &= \psi^5(s_0)(-kg_2) < 0, \\ A_3 &= \psi^3(s_0)(-10kg_2V^2 + kg_1), \\ A_1 &= \psi(s_0)(-5kg_2V^4 + 3kg_1V^2 - k). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Заметим, что коэффициенты A_1, A_3, A_5 (3.2.2), являются функциями от величин коэффициентов сил трения, скорости смычка, и точки в которой он приложен.

Найдем ненулевые стационарные точки (3.2.1), которым соответствуют автоколебательные режимы, и исследуем их устойчивость на основе усредненных уравнений (3.2.1). Приравнивая правые части (3.2.1) к нулю, получим следующие решения:

1. Нулевое автоколебательное решение

$$I_1 = \frac{Z_1}{2\omega_1} = 0.$$

2. Ненулевое автоколебательное решение, выраженное следующей формулой

$$5A_5 Z_1^2 + 6A_3 Z_1 + 8A_1 = 0,$$

сократив на $k \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} s_0$ получим:

$$5A_5^* Z_1^2 + 6A_3^* Z_1 + 8A_1^* = 0,$$

$$A_5^* = \psi^4(s_0)(-g_2) < 0,$$

$$A_3^* = \psi^2(s_0)(-10g_2 V^2 + g_1),$$

$$A_1^* = (-5g_2 V^4 + 3g_1 V^2 - 1).$$

(3.2.3)

Вычислим дискриминант уравнения (3.2.3):

$$D(V) = 36A_3^{*2} - 160A_1^* A_5^* = 4\psi^4(s_0)(700g_2^2 V^4 - 60g_1 g_2 V^2 + 9g_1^2 - 40g_2),$$

$$D(0) = 4\psi^4(s_0)(9g_1^2 - 40g_2) < 0 \text{ по условию (1.1.3).}$$

Тогда график $D(V)$ будет выглядеть, как показано на рисунке 3.2.

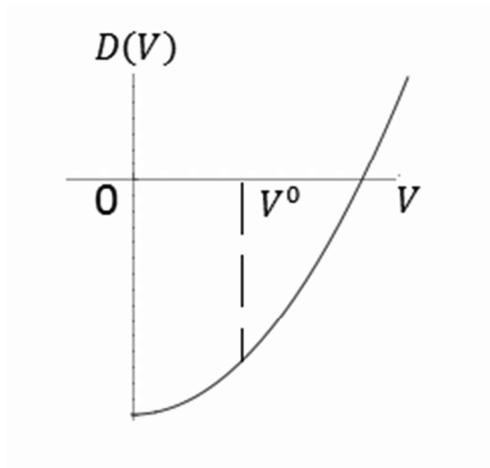


Рисунок 3.2 - График функции $D(V) = 4\psi^4(s_0)(700g_2^2 V^4 - 60g_1 g_2 V^2 + 9g_1^2 - 40g_2)$

Введем обозначение:

$$H(V) = g_2 V^5 - g_1 V^3 + V. \quad (3.2.4)$$

Рассмотрим уравнение $H'''(V^0) = 0$, из него следует, что $V^{02} = \frac{g_1}{10g_2}$.

Заметим, что при $V > V^0 \Rightarrow H'''(V) > 0$, при $V < V^0 \Rightarrow H'''(V) < 0$, а $D(V^0) = 10(g_1^2 - 4g_2) < 0$ в силу условия (1.1.3).

Это означает, что уравнение (3.2.3) при $V < V^0$ имеет отрицательный дискриминант и, следовательно, не имеет решений.

Оценим величину V^0 , воспользуемся формулой (1.1.2):

$$g_1 = \frac{V_1^2 + V_2^2}{3V_1^2 V_2^2}, \quad g_2 = \frac{1}{5V_1^2 V_2^2} \Rightarrow$$

$$V^{02} = \frac{g_1}{10g_2} = \frac{V_1^2 + V_2^2}{6}.$$

Далее применим условие (1.1.3): $V_2^2 < 5V_1^2$, тогда

$$V^{02} = \frac{V_1^2 + V_2^2}{6} < V_1^2 \Rightarrow V^0 < V_1.$$

Рассмотрим следующие интервалы скоростей $V^0 < V < V_1$ и $V > V_2$. На них выполнены следующие соотношения: $H'''(V) > 0$ и $H'(V) > 0$, а значит все коэффициенты A_i^* , ($i = 1, 3, 5$), будут отрицательны:

$$A_1^* = -H'(V) < 0,$$

$$A_3^* = -\frac{1}{6} \psi^2(s_0) H'''(V) < 0,$$

$$A_5^* = \psi^4(s_0) (-g_2) < 0.$$

Отсюда следует, что уравнение (3.2.3) на этом интервале скоростей не имеет решений.

Теперь рассмотрим последний интервал скоростей $V_1 < V < V_2$. На данном интервале справедливы соотношения $H'''(V) > 0, H'(V) < 0$. Из этого следует, что $A_1^* > 0$. По теореме Виета, произведение корней уравнения будет отрицательно

$$z_{10} * z_{11} = \frac{8A_1^*}{5A_5^*} < 0,$$

где z_{10}, z_{11} – корни уравнения (3.2.3). Получаем, что уравнение (3.2.3) имеет только одно положительное решение, и оно выражается следующей формулой:

$$I_1 = \frac{3(-10g_2V^2 + g_1) + \sqrt{700g_2^2V^4 - 60g_1g_2V^2 + 9g_1^2 - 40g_2}}{\frac{20}{l}g_2\omega_1\sin^2\frac{\pi}{l}s_0} \quad (3.2.5)$$

Далее исследуем на устойчивость полученные автоколебательные режимы.

Для упрощения записей произведем замену:

$$B_5 = \frac{5}{16}A_5, \quad B_3 = \frac{3}{8}A_3, \quad B_1 = \frac{1}{2}A_1,$$

$$\dot{Z}_1 = \frac{2}{m_1}Z_1(B_1 + B_3Z_1 + B_5Z_1^2).$$

Получим уравнения в вариациях в окрестности каждого стационарного решения в виде:

$$\dot{\xi} = \frac{2}{m_1}(3B_5Z_1^2 + 2B_3Z_1 + B_1)\xi, \quad (3.2.6)$$

где ξ – вариация переменной Z_1 в окрестности стационарной точки. Стационарное решение устойчиво, если

$$3B_5Z_1^2 + 2B_3Z_1 + B_1 < 0. \quad (3.2.7)$$

Рассмотрим нулевое решение, напомним, что оно определено при любых скоростях смычка, тогда уравнение (3.2.6) запишется в виде:

$$\dot{\xi} = \frac{2}{m_1}B_1\xi.$$

В результате получаем, что нулевое решение устойчиво, если

$$B_1 = \frac{1}{2}A_1 = -\frac{1}{2}\psi(s_0)F'(V) < 0,$$

то есть при $F'(V) > 0$. И неустойчиво, при $F'(V) < 0$.

Рассмотрим автоколебательный режим описываемый формулой (3.2.5). Напомним, что он определен только при $V_1 < V < V_2$.

Для исследования устойчивости этого режима рассмотрим следующую функцию:

$$f(Z_1) = Z_1(B_1 + B_3Z_1 + B_5Z_1^2),$$

$$f'(Z_1) = 3B_5Z_1^2 + 2B_3Z_1 + B_1.$$

Так как

$$B_5 = \frac{5}{16}A_5 = \frac{5}{16}\psi^5(s_0)(-kg_2) < 0,$$

то график $f(Z_1)$ при $V_1 < V < V_2$ будет выглядеть так, как показано на рисунке 3.3.

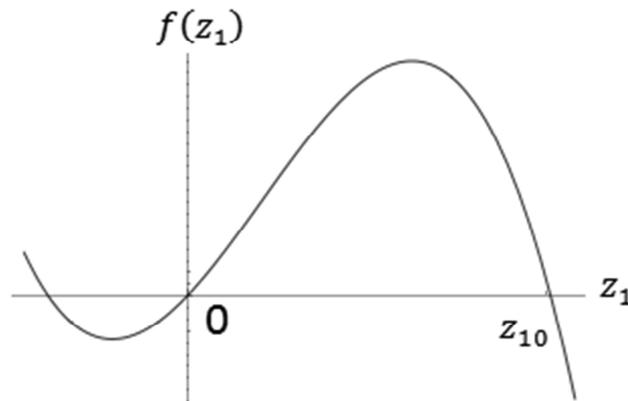


Рисунок 3.3 - График функции $f(Z_1) = Z_1(B_1 + B_3Z_1 + B_5Z_1^2)$,
при $V_1 < V < V_2$

Как видно из рисунка 3.3:

$$f'(z_{10}) = 3B_5z_{10}^2 + 2B_3z_{10} + B_1 < 0,$$

условие (3.2.7) выполняется и автоколебательный режим описываемый формулой (3.2.5) устойчив.

Итак, при скоростях, когда сила трения растет с ростом скорости возникает только устойчивое нулевое стационарное решение. Когда сила трения падает с ростом скорости возникают два режима, помимо нулевого

неустойчивого решения, возникает устойчивый автоколебательный режим, описываемый формулой (3.2.5).

3.3 Случай колебания струны с двумя собственными частотами

Для этого случая функция $u(s, t)$, описывающая поведение струны при ее взаимодействии со смычком, имеет вид:

$$u(s, t) = q_1(t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} s + q_2(t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} s.$$

При $s_0 = \frac{l}{2}$, получаем следующее:

$$u(s_0, t) = q_1(t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} s_0,$$

и чтобы рассматривать случай колебания струны с двумя собственными частотами нужно искать $u(s, t)$ в следующем виде:

$$u(s, t) = q_1(t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} s + q_3(t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{3\pi}{l} s,$$

дальнейшие рассуждения и выводы будут аналогичны случаю, когда $s_0 \neq \frac{l}{2}$.

В дальнейшем будем предполагать, что $s_0 \neq \frac{l}{2}$.

Итак, для этого случая система уравнений (3.1.11) запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \frac{2}{m_1} L_1(Z_1, Z_2), \\ \dot{Z}_2 = \frac{2}{m_2} L_2(Z_1, Z_2), \end{cases} \quad (3.3.1)$$

$$L_1(Z_1, Z_2) = Z_1 \left(\frac{1}{2} A_{10} + \frac{1}{4} A_{12} Z_2 + \frac{3}{16} A_{14} Z_2^2 + \frac{3}{8} A_{30} Z_1 + \frac{3}{16} A_{32} Z_1 Z_2 + \frac{5}{16} A_{50} Z_1^2 \right),$$

$$L_2(Z_1, Z_2) = Z_2 \left(\frac{1}{2}A_{01} + \frac{1}{4}A_{21}Z_1 + \frac{3}{16}A_{41}Z_1^2 + \frac{3}{8}A_{03}Z_2 + \frac{3}{16}A_{23}Z_1Z_2 + \frac{5}{16}A_{05}Z_2^2 \right).$$

Найдем ненулевые стационарные точки (3.3.1), которым соответствуют автоколебательные режимы, и исследуем их устойчивость на основе усредненных уравнений (3.3.1). Приравнивая правые части (3.3.1) к нулю, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} L_1(Z_1, Z_2) = 0, \\ L_2(Z_1, Z_2) = 0. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Система (3.3.2) эквивалентна 4 системам:

$$1. \quad Z_1 = Z_2 = 0 \quad (3.3.3)$$

$$2. \quad Z_1 = 0, \quad \frac{1}{2}A_{01} + \frac{3}{8}A_{03}Z_2 + \frac{5}{16}A_{05}Z_2^2 = 0 \quad (3.3.4)$$

$$3. \quad Z_2 = 0, \quad \frac{1}{2}A_{10} + \frac{3}{8}A_{30}Z_1 + \frac{5}{16}A_{50}Z_1^2 = 0 \quad (3.3.5)$$

$$4. \quad Z_1 \neq 0, \quad Z_2 \neq 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}A_{10} + \frac{1}{4}A_{12}Z_2 + \frac{3}{16}A_{14}Z_2^2 + \frac{3}{8}A_{30}Z_1 + \frac{3}{16}A_{32}Z_1Z_2 + \frac{5}{16}A_{50}Z_1^2 = 0, \\ \frac{1}{2}A_{01} + \frac{3}{8}A_{03}Z_2 + \frac{5}{16}A_{05}Z_2^2 + \frac{1}{4}A_{21}Z_1 + \frac{3}{16}A_{23}Z_1Z_2 + \frac{3}{16}A_{41}Z_1^2 = 0. \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Заметим, что при $F'(V) > 0$ и $F'''(V) > 0$, а именно при скоростях смычка $V^0 < V < V_1$ и $V_2 < V$ все коэффициенты $A_{ij} < 0$ и системы уравнений (3.3.4)-(3.3.6) решений не имеют.

Найдем ненулевые решения (3.3.6), выпишем коэффициенты A_{ij} в явном виде:

$$A_{10} = -k(5g_2V^4 - 3g_1V^2 + 1)\psi(s_0),$$

$$A_{12} = 3k(g_1 - 10g_2V^2)\psi(s_0)\psi^2(2s_0),$$

$$A_{14} = -5kg_2\psi(s_0)\psi^4(2s_0) < 0,$$

$$A_{30} = k(g_1 - 10g_2V^2)\psi^3(s_0),$$

$$A_{32} = -10kg_2\psi^3(s_0)\psi^2(2s_0) < 0,$$

$$A_{50} = -kg_2\psi^5(s_0) < 0,$$

$$\begin{aligned}
A_{01} &= -k(5g_2V^4 - 3g_1V^2 + 1)\psi(2s_0), \\
A_{21} &= 3k(g_1 - 10g_2V^2)\psi^2(s_0)\psi(2s_0), \\
A_{41} &= -5kg_2\psi^4(s_0)\psi(2s_0), \\
A_{03} &= k(g_1 - 10g_2V^2)\psi^3(2s_0), \\
A_{23} &= -10kg_2\psi^2(s_0)\psi^3(2s_0), \\
A_{05} &= -kg_2\psi^5(2s_0).
\end{aligned}
\tag{3.3.7}$$

Далее из первого выражения (3.3.6) вычтем второе, умноженное на $\frac{\psi(s_0)}{\psi(2s_0)}$, при этом учтем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
A_{03} \frac{\psi(s_0)}{\psi(2s_0)} &= \frac{1}{3} A_{12}, \\
A_{05} \frac{\psi(s_0)}{\psi(2s_0)} &= \frac{1}{5} A_{14}, \\
A_{21} \frac{\psi(s_0)}{\psi(2s_0)} &= 3A_{12}, \\
A_{41} \frac{\psi(s_0)}{\psi(2s_0)} &= 5A_{50}.
\end{aligned}$$

В итоге, получается уравнение:

$$A_{12}Z_2 + A_{14}Z_2^2 - 3A_{30}Z_1 - 5A_{50}Z_1^2 = 0. \tag{3.3.8}$$

Подставив вместо коэффициентов A_{ij} выражения (3.3.7) в формулу (3.3.8) с учетом выражения (3.2.4) получим следующую формулу:

$$[Z_1\psi(s_0)^2 - Z_2\psi(2s_0)^2] * \left[5g_2(Z_1\psi(s_0)^2 + Z_2\psi(2s_0)^2) + \frac{H'''(V)}{2} \right] = 0.
\tag{3.3.9}$$

Уравнение (3.3.9) имеет 2 решения:

$$1. Z_1 = Z_2 \frac{\psi(2s_0)^2}{\psi(s_0)^2} \tag{3.3.10}$$

$$2. 5g_2(Z_1\psi(s_0)^2 + Z_2\psi(2s_0)^2) + \frac{H'''(V)}{2} = 0 \tag{3.3.11}$$

Искомой целью является доказать, что из этих двух решений может возникнуть только (3.3.10) при условии, что скорость смычка, принадлежит интервалу, когда сила трения падает с ростом скорости, а решение (3.3.11) ни при каких значениях скорости смычка возникнуть не может.

Рассмотрим решение (3.3.10), выразив Z_1 через Z_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_{10} + \frac{1}{4}A_{12}Z_2 + \frac{3}{16}A_{14}Z_2^2 + \frac{3}{8}A_{30}Z_2 \frac{\psi(2s_0)^2}{\psi(s_0)^2} + \frac{3}{16}A_{32}Z_2^2 \frac{\psi(2s_0)^2}{\psi(s_0)^2} \\ + \frac{5}{16}A_{50} \frac{\psi(2s_0)^4}{\psi(s_0)^4} Z_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

С учетом следующих соотношений:

$$A_{30} \frac{\psi(2s_0)^2}{\psi(s_0)^2} = \frac{1}{3}A_{12}, \quad A_{32} \frac{\psi(2s_0)^2}{\psi(s_0)^2} = 2A_{14}, \quad A_{50} \frac{\psi(2s_0)^4}{\psi(s_0)^4} = \frac{1}{5}A_{14}$$

и после соответствующего преобразования выражения (3.3.12), получим следующее уравнение:

$$4A_{10} + 3A_{12}Z_2 + 5A_{14}Z_2^2 = 0. \quad (3.3.13)$$

Подставим вместо коэффициентов A_{ij} их выражения (3.3.7) в (3.3.13):

$$4kH'(V)\psi(s_0) + \frac{3}{2}kH'''(V)\psi(s_0)\psi(2s_0)^2Z_2 + 25kg_2\psi(s_0)\psi(2s_0)^4Z_2^2 = 0. \quad (3.3.14)$$

Введем обозначение:

$$Z_2\psi(2s_0)^2 = x, \quad x > 0.$$

Тогда уравнение (3.3.14) переписется в следующем виде:

$$50g_2x^2 + 3H'''(V)x + 8H'(V) = 0,$$

$$Z_1 = \frac{x}{\psi(s_0)^2}, \quad (3.3.15)$$

$$Z_2 = \frac{x}{\psi(2s_0)^2}.$$

Разберем, какое количество положительных решений имеет уравнение (3.3.15) в зависимости от скорости смычка. Для этого далее рассмотрим 3 случая, при которых скорость смычка принадлежит различным интервалам.

1. Интервал $0 < V < V^0$.

На нем выполнены следующие соотношения $H'(V) > 0$ и $H'''(V) < 0$.

Докажем, что на этом участке решения не возникают. Вычислим дискриминант уравнения (3.3.15) и докажем, что он меньше нуля:

$$\begin{aligned} D &= 9H'''(V)^2 - 1600g_2H'(V) = \\ &= 4(6100g_2^2V^4 - 420g_1g_2V^2 + 81g_1^2 - 400g_2). \end{aligned}$$

Из условия $H'''(V) < 0$ следует, что $V^2 < \frac{g_1}{10g_2}$. Отсюда вытекает

следующее неравенство:

$$\frac{D}{4} < 100(g_1^2 - 4g_2) < 0,$$

которое выполнено в силу условия (1.1.3).

В итоге получаем, что на этом интервале решений нет.

2. Интервал $V^0 < V < V_1$, $V > V_2$.

На данном интервале выполнены следующие соотношения: $H'(V) > 0$ и $H'''(V) > 0$.

По теореме Виета:

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \frac{4}{25} \frac{H'(V)}{g_2} > 0, \\ x_1 + x_2 &= -\frac{3}{50} \frac{H'''(V)}{g_2} < 0, \end{aligned}$$

где x_1, x_2 – корни уравнения (3.3.15). Отсюда следует что: $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$.

В результате чего на этом интервале нет положительных решений.

3. Интервал $V_1 < V < V_2$.

На данном интервале $H'(V) < 0$ и $H'''(V) > 0$. Из этих неравенств, для уравнения (3.3.15) по теореме Виета следует:

$$x_1x_2 = \frac{4}{25} \frac{H'(V)}{g_2} < 0, \quad D > 0.$$

Из данного неравенства следует, что у нас есть только одно положительное решение уравнения (3.3.15).

Рассмотрим второе решение уравнения (3.3.9)

$$Z_1\psi(s_0)^2 + Z_2\psi(2s_0)^2 = -\frac{H'''(V)}{10g_2}.$$

Так как $Z_1, Z_2, g_2 > 0$ данное уравнение может иметь решение только тогда когда $H'''(V) < 0$, то есть при $V^2 < \frac{g_1}{10g_2} = V_0^2$.

Выразим Z_1 через Z_2 :

$$Z_1 = -\frac{H'''(V)}{10g_2\psi(s_0)^2} - Z_2 \frac{\psi(2s_0)^2}{\psi(s_0)^2}.$$

Введем обозначение $C = -\frac{H'''(V)}{10g_2\psi(s_0)^2}$, тогда

$$Z_1 = C - Z_2 \frac{\psi(2s_0)^2}{\psi(s_0)^2} > 0. \quad (3.3.16)$$

Из неравенства (3.3.16) следует, что

$$0 < Z_2 < \frac{C\psi(s_0)^2}{\psi(2s_0)^2}. \quad (3.3.17)$$

Подставим выражение для Z_1 (3.3.16) в уравнение (3.3.6), получим:

$$Z_2^2 \left(-\frac{1}{8} A_{14} \right) + Z_2 \left(\frac{1}{8} A_{12} + \frac{1}{8} A_{32} C \right) + \left(\frac{1}{2} A_{10} + \frac{3}{8} A_{30} C + \frac{5}{16} A_{50} C^2 \right) = 0. \quad (3.3.18)$$

Докажем, что уравнение (3.3.18) не может иметь решений, удовлетворяющих условию (3.3.17). Для этого введем обозначения:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{8} A_{14}, \\ b &= \frac{1}{8} A_{12} + \frac{1}{8} A_{32} C, \\ d &= \frac{1}{2} A_{10} + \frac{3}{8} A_{30} C + \frac{5}{16} A_{50} C^2. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3.3.18) переписется в следующем виде:

$$aZ_2^2 + bZ_2 + d = 0.$$

Коэффициент a положителен так как:

$$a = -\frac{1}{8} A_{14} = \frac{5}{8} k g_2 \psi(s_0) \psi^4(2s_0) > 0.$$

Исследуем знак коэффициента d , для этого подставим выражения для A_{ij} и C в формулу для d , и после соответствующих преобразований получим:

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{320} k \psi(s_0) \left(\frac{1}{g_2} H'''(V)^2 - 160H'(V) \right) = \\ &= \frac{1}{80} k \psi(s_0) \left(700g_2V^4 - 60g_1V^2 + \frac{9}{g_2} g_1^2 - 40 \right). \end{aligned}$$

Так как $V^2 < \frac{g_1}{10g_2}$, то в силу условия (1.1.3) получим

$$d < \frac{1}{8g_2} k \psi(s_0) (g_1^2 - 4g_2) < 0.$$

Рассмотрим следующую функцию: $f(Z_2) = aZ_2^2 + bZ_2 + d$. Так как $f(0) = d < 0$, то график указанной функции примет вид, представленный на рисунке 3.4.

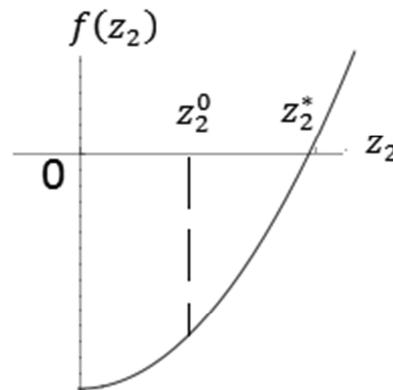


Рисунок 3.4 - График функции $f(Z_2) = aZ_2^2 + bZ_2 + d$

Напомним, что система уравнений (3.3.6) для поиска автоколебательных режимов имеет положительные решения, если решение уравнения (3.3.18)- z_2^* удовлетворяет следующему условию:

$$z_2^* < \frac{c\psi(s_0)^2}{\psi(2s_0)^2} = z_2^0.$$

Если $f(z_2^0) < 0$, то, как видно из рисунка 3.4, $z_2^0 < z_2^*$. Значит, решение z_2^* уравнения (3.3.18) не удовлетворяет условию (3.3.17). Проверим это:

$$Z_2 < -\frac{\psi(s_0)^2}{\psi(2s_0)^2} \frac{H'''(V)}{10g_2\psi(s_0)^2} = -\frac{H'''(V)}{10g_2\psi(2s_0)^2} = z_2^0,$$

$$f(z_2^0) = \frac{1}{320} k \psi(s_0) \left(\frac{1}{g_2} H'''(V)^2 - 160H'(V) \right) = d < 0.$$

В результате чего такое решение возникнуть не может.

Проведем исследование устойчивости автоколебательных режимов (3.3.3-3.3.6). Для этого выпишем уравнения в вариациях в окрестности каждого стационарного решения в виде:

$$\dot{\xi}_1 = \frac{2}{m_1} \left(\frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} \xi_1 + \frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} \xi_2 \right),$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{2}{m_2} \left(\frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} \xi_1 + \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} \xi_2 \right).$$

Здесь ξ_1, ξ_2 – вариации переменных Z_1 и Z_2 в окрестности стационарной точки, в которой вычисляются частные производные функций L_1 и L_2 .

Автоколебательный режим устойчив, если корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + N_1\lambda + N_2 = 0,$$

$$N_1 = -2 \left(\frac{1}{m_1} \frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} \right),$$

$$N_2 = \frac{4}{m_1 m_2} \left(\frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} - \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} \frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} \right),$$

имеют отрицательные действительные части, что согласно теореме Виета справедливо, если

$$N_1 > 0, \quad N_2 > 0.$$

Исследуем устойчивость нулевого решения:

$$\frac{\partial L_1(0,0)}{\partial Z_1} = \frac{1}{2}A_{10}, \quad \frac{\partial L_2(0,0)}{\partial Z_2} = \frac{1}{2}A_{01} \Rightarrow$$

$$N_1 = -\left(\frac{1}{m_1}A_{10} + \frac{1}{m_2}A_{01}\right).$$

Распишем чему равны коэффициенты $\frac{1}{m_1}$ и $\frac{1}{m_2}$:

$$\frac{1}{m_1} = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} s_0 = \frac{1}{p} \psi(s_0),$$

$$\frac{1}{m_2} = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} s_0 = \frac{1}{p} \psi(2s_0).$$

Тогда коэффициенты N_1 и N_2 с учетом значений коэффициентов A_{10} и A_{01} примут следующий вид:

$$N_1 = \frac{1}{p} k F'(V) (\psi(s_0)^2 + \psi(2s_0)^2),$$

$$N_2 = \frac{1}{m_1 m_2} A_{10} A_{01} = \frac{k^2}{p^2} \psi(s_0)^2 \psi(2s_0)^2 F'^2(V) > 0.$$

Отсюда следует, что нулевое решение устойчиво при $F'(V) > 0$, и неустойчиво при $F'(V) < 0$.

Исследуем устойчивость автоколебательного режима (3.3.4):

$$\frac{\partial L_1(Z_1, 0)}{\partial Z_1} = \frac{1}{2}A_{10} + \frac{3}{4}A_{30}Z_1 + \frac{15}{16}A_{50}Z_1^2 \quad (3.3.19)$$

$$\frac{\partial L_2(Z_1, 0)}{\partial Z_2} = \frac{1}{2}A_{01} + \frac{1}{4}A_{21}Z_1 + \frac{3}{16}A_{41}Z_1^2 \quad (3.3.20)$$

$$\frac{\partial L_2(Z_1, 0)}{\partial Z_1} = 0.$$

Из выражения (3.3.4) выразим коэффициент $\frac{1}{2}A_{10}$:

$$\frac{1}{2}A_{10} = -\frac{3}{8}A_{30}Z_1 - \frac{5}{16}A_{50}Z_1^2. \quad (3.3.21)$$

Полученное выражение подставим в формулу (3.3.19), в итоге получим:

$$\frac{\partial L_1(Z_1, 0)}{\partial Z_1} = \frac{3}{8} A_{30} Z_1 + \frac{5}{8} A_{50} Z_1^2. \quad (3.3.22)$$

Далее умножим выражение (3.3.4) на $\frac{\psi(2s_0)}{\psi(s_0)}$ и в итоге выражение (3.3.21) примет следующий вид:

$$\frac{1}{2} A_{01} + \frac{1}{8} A_{21} Z_1 + \frac{1}{16} A_{41} Z_1^2 = 0.$$

Из последней формулы выразим коэффициент $\frac{1}{2} A_{01}$ и подставим его в формулу (3.3.20). В итоге получим:

$$\frac{\partial L_2(Z_1, 0)}{\partial Z_2} = \frac{1}{8} A_{21} Z_1 + \frac{1}{8} A_{41} Z_1^2. \quad (3.3.23)$$

В главе 3.2 было получено уравнение (3.2.3) аналогичное уравнению (3.3.4). Из этого можно сделать вывод, что при $V_1 < V < V_2$ есть только одно решение уравнения (3.3.4). На этом интервале скоростей выполняется неравенство $H'''(V) > 0$, при котором коэффициенты $A_{21}, A_{41}, A_{30}, A_{50} < 0$, а $Z_1 > 0$. Используя выражения (3.3.22) и (3.3.23), получим, что $\frac{1}{m_1} \frac{\partial L_1(z_{11}, 0)}{\partial Z_1} < 0$ и $\frac{1}{m_2} \frac{\partial L_2(z_{11}, 0)}{\partial Z_2} < 0$. В итоге можно сделать вывод, что $N_1 > 0$.

$$N_2 = \frac{4}{m_1 m_2} \frac{\partial L_1(z_{11}, 0)}{\partial Z_1} \frac{\partial L_2(z_{11}, 0)}{\partial Z_2} > 0.$$

Из вышесказанного получается, что автоколебательный режим (3.3.4) при $V_1 < V < V_2$ устойчив.

На интервале скоростей $0 < V < V_1$ и $V > V_2$ уравнение (3.3.4) решений не имеет.

Исследование устойчивости автоколебательного режима (3.3.5), проводится аналогично исследованию устойчивости автоколебательного режима (3.3.4).

Исследуем устойчивость автоколебательного режима (3.3.6).

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} = \frac{1}{2}A_{10} + \frac{1}{4}A_{12}Z_2 + \frac{3}{16}A_{14}Z_2^2 + \frac{3}{4}A_{30}Z_1 + \frac{3}{8}A_{32}Z_1Z_2 + \\ + \frac{15}{16}A_{50}Z_1^2 \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} = \frac{1}{2}A_{01} + \frac{1}{4}A_{21}Z_1 + \frac{3}{16}A_{41}Z_1^2 + \frac{3}{4}A_{03}Z_2 + \frac{3}{8}A_{23}Z_1Z_2 + \\ + \frac{15}{16}A_{05}Z_2^2 \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

$$\frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} = \frac{1}{4}A_{12}Z_1 + \frac{3}{8}A_{14}Z_1Z_2 + \frac{3}{16}A_{32}Z_1^2 \quad (3.3.26)$$

$$\frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} = \frac{1}{4}A_{21}Z_2 + \frac{3}{8}A_{41}Z_1Z_2 + \frac{3}{16}A_{23}Z_2^2 \quad (3.3.27)$$

$$\frac{1}{2}A_{10} + \frac{1}{4}A_{12}Z_2 + \frac{3}{16}A_{14}Z_2^2 + \frac{3}{8}A_{30}Z_1 + \frac{3}{16}A_{32}Z_1Z_2 + \frac{5}{16}A_{50}Z_1^2 = 0 \quad (3.3.28)$$

$$\frac{1}{2}A_{01} + \frac{1}{4}A_{21}Z_1 + \frac{3}{16}A_{41}Z_1^2 + \frac{3}{8}A_{03}Z_2 + \frac{3}{16}A_{23}Z_1Z_2 + \frac{5}{16}A_{05}Z_2^2 = 0. \quad (3.3.29)$$

Выразим коэффициенты $\frac{1}{2}A_{10}$ и $\frac{1}{2}A_{01}$ из выражений (3.3.28) и (3.3.29) и подставим их соответственно в выражения (3.3.24) и (3.3.25). В итоге после преобразований получим:

$$\frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} = \frac{3}{8}A_{30}Z_1 + \frac{3}{16}A_{32}Z_1Z_2 + \frac{10}{16}A_{50}Z_1^2, \quad (3.3.30)$$

$$\frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} = \frac{3}{8}A_{03}Z_2 + \frac{3}{16}A_{23}Z_1Z_2 + \frac{10}{16}A_{05}Z_2^2. \quad (3.3.31)$$

С помощью соотношения $Z_i\psi(2s_0)^2 = x$ ($i = 1, 2$) преобразуем выражения (3.3.26)-(3.3.31). В итоге получим

$$\frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} = \frac{3}{8}A_{30}Z_1 + \frac{5}{2}A_{50}Z_1^2,$$

$$\frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} = \frac{3}{8}A_{03}Z_2 + \frac{5}{2}A_{05}Z_2^2,$$

$$\frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} = \frac{1}{4}A_{12}Z_1 + \frac{3}{8}A_{32}Z_1^2,$$

$$\frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} = \frac{1}{4}A_{21}Z_2 + \frac{3}{8}A_{23}Z_2^2.$$

Докажем, что $N_2 < 0$, в этом случае это будет означать неустойчивость данного режима.

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{4}{m_1 m_2} \left(\frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} - \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} \frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} \right) < 0 \\ \frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} &= \\ &= Z_1 Z_2 \left(\frac{9}{64} A_{30} A_{03} + \frac{15}{16} A_{03} A_{50} Z_1 + \frac{15}{16} A_{30} A_{05} Z_2 + \frac{25}{4} A_{50} A_{05} Z_1 Z_2 \right) \\ \frac{\partial L_1(Z_1, Z_2)}{\partial Z_2} \frac{\partial L_2(Z_1, Z_2)}{\partial Z_1} &= \\ &= Z_1 Z_2 \left(\frac{1}{16} A_{12} A_{21} + \frac{3}{32} A_{21} A_{32} Z_1 + \frac{3}{32} A_{12} A_{23} Z_2 + \frac{9}{64} A_{32} A_{23} Z_1 Z_2 \right) \\ N_2 &= \frac{4Z_1 Z_2}{m_1 m_2} \left(\left(\frac{9}{64} A_{30} A_{03} - \frac{1}{16} A_{12} A_{21} \right) + \left(\frac{15}{16} A_{03} A_{50} - \frac{3}{32} A_{21} A_{32} \right) Z_1 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{15}{16} A_{30} A_{05} - \frac{3}{32} A_{12} A_{23} \right) Z_2 + \left(\frac{25}{4} A_{50} A_{05} - \frac{9}{64} A_{32} A_{23} \right) Z_1 Z_2 \right). \end{aligned}$$

Подставляя вместо коэффициентов A_{ij} их значения (3.3.7) и, учитывая, что $H'''(V) > 0$, после соответствующих преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_1 m_2} \left(\frac{9}{64} A_{30} A_{03} - \frac{1}{16} A_{12} A_{21} \right) &= -\frac{3}{256} \frac{k^2}{p^2} \psi(s_0)^4 \psi(2s_0)^4 H''''^2(V) < 0 \\ \frac{1}{m_1 m_2} \left(\frac{15}{16} A_{03} A_{50} - \frac{3}{32} A_{21} A_{32} \right) &= -\frac{5}{16} \frac{k^2}{p^2} \psi(s_0)^6 \psi(2s_0)^4 H''''(V) < 0 \\ \frac{1}{m_1 m_2} \left(\frac{15}{16} A_{30} A_{05} - \frac{3}{32} A_{12} A_{23} \right) &= -\frac{5}{16} \frac{k^2}{p^2} \psi(s_0)^4 \psi(2s_0)^6 H''''(V) < 0 \\ \frac{1}{m_1 m_2} \left(\frac{25}{4} A_{50} A_{05} - \frac{9}{64} A_{32} A_{23} \right) &= -\frac{125}{16} \frac{k^2}{p^2} g_2^2 \psi(s_0)^6 \psi(2s_0)^6 < 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $N_2 < 0$ и автоколебательный режим (3.3.6) будет неустойчив.

На основе полученных результатов из глав 3.2 и 3.3 изобразим фазовый портрет (рисунок 3.5) для колебания струны с двумя собственными частотами для случая, когда скорость смычка V принадлежит интервалу (V_1, V_2) .

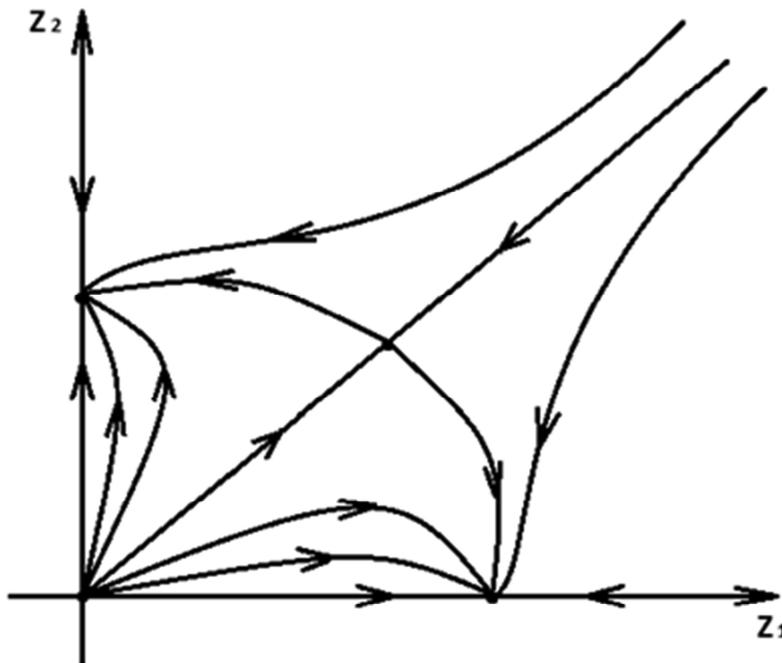


Рисунок 3.5 - Фазовый портрет колебаний струны

Как видно из рисунка 3.5 решение системы со временем стремится к одному из двух устойчивых автоколебательных режимов, соответствующих автоколебаниям струны по одной частоте и затуханиям по другой.

3.4 Случай колебания струны с диссипативными силами

Рассмотрим колебания струны при наличии диссипативных сил. Будем предполагать, что материал струны обладает диссипативными свойствами, описываемыми диссипативным функционалом Стретта Д.В. [70]

$$D = \frac{\kappa}{2} \int_0^l (N\dot{u}'^2 + EJ\dot{u}''^2) ds.$$

Уравнения движения и динамические граничные условия получим из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского

$$\int_0^T [\delta T - \delta \Pi + \delta A + \int_0^l \nabla_u D \delta u(s, t) ds] dt = 0, \quad \forall \delta u(s, t),$$

$$\delta u(0, t) = \delta u(l, t) = 0$$

в виде

$$p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(1 + \aleph \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(N \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - EJ \frac{\partial^4 u}{\partial s^4}\right) = F(t, s_0) \delta(s - s_0),$$

$$u''(0, t) = u''(l, t) = 0.$$

Запишем уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа второго рода

$$\ddot{q}_i + \aleph \omega_i^2 \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -k \psi_i(s_0) (v - g_1 v^3 + g_2 v^5), \quad i = 1, 2 \dots$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \psi_n(s_0) - V. \quad (3.4.1)$$

Определим величины q_{i0} из соотношений

$$\omega_i^2 q_{i0} = k \psi_i(s_0) (V - g_1 V^3 + g_2 V^5),$$

и, обозначая разность $q_i - q_{i0}$ по-прежнему q_i , представим уравнения (3.4.1)

в виде

$$\ddot{q}_i + \aleph \omega_i^2 \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -k \psi_i(s_0) (v - V - g_1 (v^3 - V^3) + g_2 (v^5 - V^5)),$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \psi_n(s_0) - V, \quad i = 1, 2 \dots \quad (3.4.2)$$

Для исследования динамики системы, описываемой уравнениями (3.4.2), перейдем к каноническим переменным действие-угол

$$(p_i, q_i) \Leftrightarrow (I_i, \varphi_i),$$

$$p_i = \dot{q}_i = \sqrt{2I_i \omega_i} \cos \varphi_i,$$

$$q_i = \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \sin \varphi_i,$$

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) \Rightarrow K = \sum_{i=1}^{\infty} I_i \omega_i < \infty.$$

Запишем уравнения движения в виде канонических уравнений Гамильтона с обобщенными силами [15]

$$\begin{aligned} \dot{I}_i &= -2\aleph \omega_i^2 I_i \cos^2 \varphi_i - [F(v) - F(V)] \psi_i(s_0) \sqrt{\frac{2I_i}{\omega_i}} \cos \varphi_i, \\ \dot{\varphi}_i &= \omega_i + \aleph \omega_i^2 \cos \varphi_i \sin \varphi_i + [F(v) - F(V)] \psi_i(s_0) (2I_i \omega_i)^{-\frac{1}{2}} \sin \varphi_i \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(s_0) \sqrt{2I_n \omega_n} \cos \varphi_n - V, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Применим операцию усреднения по угловым переменным $(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ к уравнениям (3.4.3) и получим

$$\begin{aligned} \dot{Z}_i &= -\aleph \omega_i^2 Z_i + \\ &+ \frac{k}{16\omega_i} Z_i \left[-8 \left(1 - 3g_1 V^2 + 5g_2 V^4 + 6(g_1 - 10g_2 V^2) \left(Z_i + 2 \sum_{n \neq i}^{\infty} Z_n \right) \right. \right. \\ &\left. \left. - 5g_2 \left(Z_i^2 + 6Z_i \sum_{n \neq i}^{\infty} Z_n + 3 \sum_{n \neq i}^{\infty} Z_n^2 + 12 \sum_{n \neq m \neq i}^{\infty} Z_n Z_m \right) \right], \quad (3.4.4) \\ \dot{\theta} &= \omega_i, \\ Z_i &= 2J_i \omega_i \psi_i^2(s_0), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ряды, стоящие в квадратных скобках первых уравнений (3.4.4), сходятся, так как

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq i}^{\infty} Z_n &< b_1 \sum_{n \neq i}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta}}, \\ \sum_{n \neq m \neq i}^{\infty} Z_n Z_m &< b_1^2 \sum_{n \neq m \neq i}^{\infty} \frac{1}{(nm)^{1+\beta}}, \end{aligned}$$

где b_1 и β – положительные константы.

Представим первую группу уравнений системы (3.4.4) в виде

$$\omega_i \dot{Z}_i = -CZ_i \left[A_i - 2E \left(Z_i + 2 \sum_{n \neq i}^{\infty} Z_n \right) + Z_i^2 + 6Z_i \sum_{n \neq i}^{\infty} Z_n + 3 \sum_{n \neq i}^{\infty} Z_n^2 + 12 \sum_{n \neq m \neq i}^{\infty} Z_n Z_m \right], \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.4.5)$$

$$C = \frac{k}{16V_1^2 V_2^2} > 0,$$

$$A_i = 16\aleph \omega_i^3 V_1^2 V_2^2 k^{-1} + 8(V^2 - V_1^2)(V^2 - V_2^2),$$

$$E = V_1^2 + V_2^2 - 6V^2.$$

Найдем стационарные решения уравнений (3.4.5). Очевидно, что ее решением является набор $Z_i = 0, i = 1, 2, \dots$. Устойчивость нулевого решения исследуем на основе системы уравнений в вариациях. Оставляя в правой части уравнений члены линейные по Z_i , получим

$$\omega_i \dot{Z}_i = -CA_i Z_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.4.6)$$

Система (3.4.6) распадается на счетную систему независимых дифференциальных уравнений первого порядка. Устойчивость нулевого решения зависит от знака коэффициента A_i : решение $Z_i = 0$ устойчиво, если $A_i > 0$ и неустойчиво в противном случае. Коэффициенты A_i положительны, если $V \in (0, V_1) \cup (V_2, \infty)$, поскольку они равны суммам двух положительных слагаемых. Коэффициенты A_i зависят от ω_i и их минимумы по этой переменной равны

$$\min_{0 < V < \infty} A_i = 16\aleph \omega_i^3 V_1^2 V_2^2 k^{-1} - 2(V_2^2 - V_1^2)^2.$$

Поскольку собственные частоты ω_i растут, как i^2 , то минимум A_i становится положительным, начиная с некоторого номера $i = n$. Функция $A_i(V) > 0$ при $k > i$ и все нулевые положения равновесия $Z_i = 0, i > n$ оказываются устойчивыми. Если $n = 0$, то нулевое положение равновесия устойчиво для всех нормальных форм колебаний струны. Это будет иметь место при достаточно большом коэффициенте внутреннего трения \aleph .

Рассмотрим вопрос о существовании ненулевых колебаний струны, когда $Z_i \neq 0, Z_n = 0, \forall n \neq i$.

В этом случае выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части уравнения (3.4.6) обращается в нуль

$$A_i - 2EZ_i + Z_i^2 = 0. \quad (3.4.7)$$

Квадратное уравнение (3.4.7) имеет действительные корни

$$Z_{ji} = E \pm \sqrt{D_i}, \quad j = 1, 2,$$

если его дискриминант не отрицателен $D_i = E^2 - A_i \geq 0$. Если при этом $A_i < 0$, то существует один отрицательный корень $Z_{1i} < 0$ и один положительный корень $Z_{2i} > 0$. Нулевое решение теряет устойчивость и возникает ненулевое стационарное решение Z_{2i} , которому отвечает автоколебательный режим с частотой колебаний ω_i . Устойчивость этого решения исследуется на основе уравнений в вариациях

$$\omega_i \dot{\xi}_i = -2CZ_{2i}\sqrt{D_i}\dot{\xi}_i,$$

$$\xi_i = Z_i - Z_{2i},$$

$$\omega_m \dot{Z}_m = -CA_m Z_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad m \neq i.$$

Отсюда следует, что возникший автоколебательный режим устойчив. Однако по другим модам нулевые решения могут оказаться неустойчивыми в зависимости от знака коэффициента A_m . Так как справедливы неравенства $A_1 < A_2 < \dots < A_i < \dots$, то устойчивым по всем переменным автоколебательный режим будет устойчив, если этот режим соответствует моде с низшей частотой, когда $A_1 < 0$, а коэффициенты $A_m > 0, m = 2, 3, \dots$

Условия существования двух положительных корней квадратного уравнения (3.4.7) представляются системой неравенств

$$D_i > 0, \quad A_i > 0, \quad V^2 < \frac{(V_1^2 + V_2^2)}{6}. \quad (3.4.8)$$

Учитывая неравенство в соотношениях (1.1.3), получим из последнего неравенства системы (3.4.8) оценку скорости смычка $V^2 < V_1^2$. При этом условии $A_i > 0$, но дискриминант $D_i < 0$, поскольку

$$\begin{aligned} & (V_1^2 + V_2^2 - 6V^2)^2 - 8(V^2 - V_1^2)(V^2 - V_2^2) = \\ & = 28V^4 - 4(V_1^2 + V_2^2)V^2 - 7(V_1^2 + V_2^2)^2 < 0 \end{aligned}$$

в области значений $V^2 < \frac{(V_1^2 + V_2^2)}{6}$. Существование двух стационарных режимов невозможно.

Исследуем возможность существования устойчивых двухчастотных автоколебательных режимов, когда $Z_i > 0$ и $Z_m > 0$. Так как все остальные колебательные режимы должны отсутствовать ($Z_j = 0, j \neq i, j \neq m$) и быть устойчивыми ($A_j > 0$), то устойчивые двухчастотные автоколебания возможны при $i = 1, m = 2$, которым соответствуют $A_1 < A_2 < 0$. Система уравнений (3.4.5) в этом случае сводится к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} \omega_1 \dot{Z}_1 &= -CZ_1[A_1 - 2E(Z_1 + 2Z_2) + Z_1^2 + 6Z_1Z_2 + 3Z_2^2], \\ \omega_2 \dot{Z}_2 &= -CZ_2[A_2 - 2E(Z_2 + 2Z_1) + Z_2^2 + 6Z_1Z_2 + 3Z_1^2]. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Ненулевые стационарные решения системы (3.4.9) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} A_1 - 2E(Z_1 + 2Z_2) + Z_1^2 + 6Z_1Z_2 + 3Z_2^2 &= 0, \\ A_2 - 2E(Z_2 + 2Z_1) + Z_2^2 + 6Z_1Z_2 + 3Z_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Далее получим

$$A_2 - A_1 - 2E(Z_1 - Z_2) + 2(Z_1^2 - Z_2^2) = 0. \quad (3.4.11)$$

Разность $A_2 - A_1$ пропорциональна коэффициенту \aleph , который определяет рассеяние энергии в струне при ее колебаниях. Считая \aleph малым, положим $A_2 - A_1 \cong 0$.

Уравнение (3.4.11) справедливо, если

$$a) Z_1 \cong Z_2;$$

$$b) Z_1 + Z_2 \cong E.$$

В случае $a)$ из уравнений (3.4.10) найдем

$$\begin{aligned} Z_1 \cong Z_2 \cong Z_0, \\ Z_0 = \frac{1}{10} \left(\sqrt{9E^2 - 10A + 3E} \right) > 0, \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

$$A \cong A_1 \cong A_2 < 0.$$

В случае *b*) система (3.4.10) не имеет решения, так как из нее следует уравнение

$$(Z_1 - Z_2)^2 \cong A - E^2 < 0.$$

Решение (3.4.12), описывающее автоколебания на двух частотах ω_1, ω_2 , неустойчиво. Запишем систему уравнений в вариациях

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -2C_1 Z_0 [(4Z_0 - E)\xi_1 + 2(3Z_0 - E)\xi_2], \\ \dot{\xi}_2 &= -2C_2 Z_0 [(4Z_0 - E)\xi_2 + 2(3Z_0 - E)\xi_1]\end{aligned}$$

и представим ее в виде

$$\begin{aligned}\omega_1 \xi_1' + (2\sqrt{9E^2 - A} + E)\xi_1 + (3\sqrt{9E^2 - A} - E)\xi_2 &= 0, \\ \omega_2 \xi_2' + (2\sqrt{9E^2 - A} + E)\xi_2 + (3\sqrt{9E^2 - A} - E)\xi_1 &= 0.\end{aligned}\tag{3.4.13}$$

Здесь $\xi_i = Z_k - Z_0$, а штрих означает дифференцирование по $\tau = \frac{kZ_0 t}{40V_1^2 V_2^2}$.

Характеристическое уравнение системы (3.4.13)

$$\omega_1 \omega_2 \lambda^2 + (\omega_1 + \omega_2) (2\sqrt{9E^2 - A} + E) \lambda - 5\sqrt{9E^2 - A} (\sqrt{9E^2 - A} - 2E) = 0$$

имеет один положительный корень, а другой – отрицательный, так как по теореме Виета произведение корней отрицательно, а их сумма положительна. Это означает, что особая точка системы дифференциальных уравнений (3.4.9) является седлом. Автоколебания струны на двух частотах неустойчивы. В зависимости от возмущений система перейдет к устойчивым автоколебаниям либо на частоте ω_1 , либо на частоте ω_2 . Если система стремится к автоколебаниям на низшей частоте, то во время переходного процесса наблюдаются колебания на основном тоне и затухающие колебания на частоте ω_2 .

Область $Z_1 \geq 0, Z_2 \geq 0$ на плоскости (Z_1, Z_2) делится двумя сепаратрисами, одна из которых соединяет начало координат с особой точкой (Z_0, Z_0) , а вторая приходит в особую точку из бесконечности, на две части, каждая из которых является областью притяжения соответствующего одночастотного автоколебания. Две другие сепаратрисы соединяют особую точку (Z_0, Z_0) с особыми точками $(Z_{10}, 0)$ и $(0, Z_{20})$.

Покажем, что при $\varkappa = 0$ автоколебательный режим

$$Z_1 = \dots = Z_N = Z_{0N}, \quad Z_j = 0, \quad j = N + 1, \dots$$

неустойчив, если $N \geq 2$. Здесь

$$Z_{0N} = \frac{(2N - 1)E + \sqrt{(2N - 1)^2 E^2 - A(12N^2 - N - 8)}}{12N^2 - N - 8},$$

$$A = 8(V^2 - V_1^2)(V^2 - V_2^2) < 0.$$

Случай $N = 2$ рассмотрен выше. Запишем уравнения в вариациях для системы (3.4.5)

$$\omega_i \xi_i' + a_N \left(\xi_i + 2 \sum_{n \neq i}^N \xi_n \right) + \xi_i + (12N^2 - 24N + 54) \sum_{n \neq m}^N \xi_n = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$(\cdot)' = \frac{1}{2CZ_{0N}^2} \frac{d(\cdot)}{dt},$$

$$a_N = -\frac{E}{Z_{0N}} > 0. \tag{3.4.14}$$

Характеристическое уравнение системы (3.4.14) представляется в форме [56]

$$f_N(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 & u & \dots & u \\ u & a_2 & \dots & u \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u & u & \dots & a_N \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^N (a_i - u) + u \sum_{j=1}^N \prod_{i \neq j}^N (a_i - u) = 0.$$

Здесь

$$a_i = \omega_i \lambda + (a_N + 1),$$

$$u = 2a_N + 12N^2 - 24N + 54.$$

Многочлен $f_N(\lambda)$ имеет вид

$$f_N(\lambda) = b_N \lambda^N + \dots + b_1 \lambda + b_0,$$

где коэффициент $b_N = \omega_1 + \dots + \omega_N > 0$.

Найдем коэффициент b_0

$$b_0 = f_N(0) = (a - u)^{N-1}[a + (N - 1)u],$$

где $a = a_N + 1 > 0$ и $a - u < 0$.

Если N четное, то $b_0 < 0$, и существует положительный корень характеристического уравнения. Следовательно, автоколебательный режим $Z_1 = \dots = Z_N = Z_{0N} > 0$ неустойчив. В случае нечетного N покажем, что коэффициент $b_1 < 0$. Имеем

$$b_1 = \frac{\partial f(0)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^N \omega_i (a - u)^{N-2} [a + Nu] < 0.$$

Необходимое условие устойчивости не выполнено, так как один из коэффициентов характеристического уравнения отрицателен, и соответствующий автоколебательный режим неустойчив. Если коэффициент диссипации $\varkappa \neq 0$, но мал, то исследуемый стационарный режим $Z_1 = \dots = Z_N = Z_{0N} > 0$ будет существовать для ограниченных значений N и останется неустойчивым, поскольку корни характеристического уравнения получат малые возмущения и останутся корни с отрицательными действительными частями.

Подведем итог анализа существования автоколебательных режимов струны и их устойчивости, когда в системе учитываются внутренние диссипативные силы. Автоколебательные режимы существуют в случае, когда скорость смычка находится в интервале (V_1, V_2) , на котором производная функции $F'(V) < 0$ отрицательна. При этом коэффициент трения k должен быть достаточно большим, чтобы выполнялось условие $A_1 > 0$ в соотношениях (3.4.5). Одночастотные устойчивые колебания струны существуют до тех пор, пока A_m остаются положительными. Заметим, что, начиная с некоторого номера M , коэффициенты $A_i < 0$, и автоколебательные режимы на соответствующих частотах отсутствуют. Все многочастотные автоколебательные режимы неустойчивы. Область $D_* = \{Z_1 \geq 0, \dots, Z_{M-1} \geq 0\}$ разбивается на области притяжения

одночастотных устойчивых автоколебательных режимов. Переходный процесс к соответствующему одночастотному режиму сопровождается колебаниями струны на обертонах с затухающими амплитудами.

Если колебания струны начинаются из состояния покоя, то начальные условия для переменных Z_i определяются соотношениями

$$Z_i(0) = \omega_i^{-2} k^2 \psi_i^4(s_0) (V - g_1 V^3 + g_2 V^5)^2, \quad i = 1, 2, \dots$$

Вопрос о том в какую область притяжения попадет траектория движения, описываемого уравнениями (3.4.5), зависит от выбора точки на струне, в которой смычок взаимодействует со струной (значения функций $\psi_i(s_0)$) и от скорости смычка V . Представляется, что размеры области притяжения первой гармоники превосходят размеры областей высших гармоник. Варьируя параметры s_0 и V , можно менять начальные условия и соотношения амплитуд обертонов при переходном процессе, оставаясь в области притяжения, например, первой гармоники. Заметим, что значение собственной функции $\psi_1(s_0) > 0$, если $s_0 \in (0, l)$. Колебания на первом основном тоне всегда возбуждаются в начале переходного процесса. Последнее утверждение не справедливо для старших обертонов, т.е. может оказаться, что какой-то обертон будет отсутствовать, если $\psi_i(s_0) = 0$.

Заключение

В настоящей работе проведено исследование возникновения автоколебаний в системах с нелинейным трением.

Рассмотрено взаимодействие различных тел друг с другом, при наличии между ними сил нелинейного трения. Модель трения рассматривалась как многочлен пятой степени из нечетных степеней относительно скорости трущихся тел. Этот закон трения можно охарактеризовать как нелинейную модель вязкого трения, аппроксимирующую закон сухого трения, когда трение покоя превосходит трение скольжения. Преимущество принятой модели состоит в том, что она задается гладкой функцией и не имеет зон «застоя» или модулей относительных скоростей двух тел в точках контакта, представляющих значительные трудности при исследовании движений систем с сухим трением. Данная модель трения позволила аналитически исследовать поставленные задачи с помощью переменных действие-угол и метода усреднения. Анализировалось, на каких интервалах скоростей могут возникнуть автоколебания и их устойчивость.

Для задачи двух взаимодействующих осцилляторов было показано, что ненулевые автоколебания возникают на интервале скоростей, когда сила трения падает с ростом скорости. Данный режим не является устойчивым, и со временем система приходит в состояние, когда одно из тел находится в состоянии покоя или движется равномерно, а второе тело совершает колебания относительно первого тела, в зависимости от того, в какую область притяжения попадут начальные условия движения.

Проведено исследование возникновения автоколебаний при торможении автомобиля. Автоколебания заблокированных колес относительно корпуса автомобиля возникают на интервалах скоростей, когда сила трения падает с ростом скорости. Было показано, что именно на этом интервале

скоростей процесс торможения автомобиля наиболее эффективен. Выписаны выражения, определяющие какие параметры системы можно изменить, чтобы уменьшить амплитуду автоколебаний. Автоколебания заблокированных колес порождают тангенциальные силы периодического характера, действующие на материал дороги, по которой движется автомобиль, что может служить причиной возникновения на дороге волнообразного рельефа.

Рассмотрена задача о колебаниях струны при ее взаимодействии со смычком. Модель струны была представлена счетной системой взаимодействующих осцилляторов. Движение системы было описано бесконечной системой связанных друг с другом обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Было исследовано, при каких скоростях смычка могут возникать автоколебания, и проведен анализ их устойчивости. Автоколебательные режимы, так же как и в предыдущих задачах существуют в случае, когда скорость смычка находится в интервале, на котором производная функции силы трения отрицательна. Все многочастотные автоколебательные режимы оказались неустойчивыми. Фазовая плоскость разбивается на области притяжения одночастотных устойчивых автоколебательных режимов. Переходный процесс к соответствующему одночастотному режиму сопровождается колебаниями струны на обертонах с затухающими амплитудами.

Список литературы

1. Алифов А.А., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. М.: Наука. 1985, 328 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз. 1959. 915 с.
3. Андронов А.Л. Собрание трудов. М.: Изд-ва АН СССР. 1956. 538 с. М.: Физматгиз. 1959. 916 с.
4. Андронов В.В. Механические системы с преобразованным сухим трением. Изв. СССР. Механика твердого тела. 1988, № 1.
5. Бабаков И.М. Теория колебаний. Издательство «Наука» главная редакция физико-математической литературы Москва 1968.
6. Белокобыльский С.В., Прокопов В.К. Анализ фрикционных автоколебаний бурильной колонны при экспоненциальном законе сопротивления. Прикладная механика. 1982. Т. 18. № 12. С 32-39.
7. Белокобыльский С.В., Нагаев Р.Ф. Метод частичной гармонической линеаризации в задаче о фрикционных автоколебаниях механических систем с несколькими степенями свободы. Машиноведение. 1985. № 5. с. 27-31.
8. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. М.:Наука. 1964. 412 с.96.
9. Бутенин Н.Б. Элементы теории нелинейных колебаний. М.: Судпромгиз. 1962. 195 с.
10. Бутенин Н.В. Приложение метода Ван дер Поля к механическим автоколебательным системам с двумя степенями свободы. Изд. Вузов. Машиностроение. 1963, № 4, с. 32-46.
11. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука. 1987. 384 с.
12. Ван Дер Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний: Связьтехиздат. 1935.

13. Ветюков М.М. Устойчивость ползуна на плоскости при действии сил сухого некулонова трения. Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992. № 3. с.40-44.
14. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. Колебания нелинейных механических систем. Т.2. под ред. Блехмана И.И. М.: Машиностроение. 1979. 351 с.
15. Вильке В.Г. Теоретическая механика. 3 издание. С.–П. Лань. 2003. 302 с.
16. Вильке В.Г., Шаповалов И.Л. Автоколебания в процессе торможения автомобиля//Вестник МГУ. Сер.1. Математика, механика. 2015. № 4. С.33–39.
17. Вильке В.Г., Шаповалов И.Л. Автоколебания в системе струна–смычок//Вестник МГУ. Сер.1. Математика, механика. 2015. № 1. С.34–40.
18. Вильке В.Г., Шаповалов И.Л. Автоколебания в системе струна–смычок // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20 – 24 августа 2015 г.). – Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015.– С. 305.
19. Вильке В.Г., Шаповалов И.Л. Автоколебания двух тел с нелинейным трением// Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика, механика. № 4, 2011. С.39–45
20. Вильке В.Г., Шаповалов И.Л. Изучение возникновения автоколебаний в системах с бесконечным числом степеней свободы на примере задачи о колебаниях стержня при его взаимодействии со смычком // Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. (Москва, 13-16 мая 2014 г.) - М.: Издательство РУДН, 2014. – С. 234-235.

21. Витт А.А. Дополнение и поправки к моей работе "Колебания скрипичной струны" // Журнал технической физики. 1937. Т. 7. Вып. 5. 542-545.
22. Витт А.А. К теории скрипичной струны// Журнал технической физики. 1936. Т. 6. Вып. 9. 1459-1479.
23. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамики машин. Л.: Машиностроение, 1968, 284с.
24. Глух Б.А. Теория шимми автомобиля, Известия НАТИ, № 1, 1935.
25. Горлов А.М., Леонов А.Н. Производство и ремонт смычковых музыкальных инструментов. М.: Легкая индустрия. 1975.
26. Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики учебное пособие Наукова думка, 2007, 640 с.
27. Ден Гартог Дж. Механические колебания. Пер. с 4-го амер. издания Обморшева А.И. М.:Физматгиз. 1960. 464 с.97.
28. Жуковский Н.Е. О движении маятника с трением в точке подвеса. Полное собрание сочинений. М.: Физматгиз. 1948. Т. 1. 397-383.
29. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука. 1988. 328 с.
30. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука. 1988. 368 с.
31. Кайдановский Н. Л. Природа механических автоколебаний, возникающих при сухом трении. ХТФ. 1949. т. 19, вып. 9, с. 985-996.
32. Кайдановский Н.Л. Хайкин С.В. Механические релаксационные колебания. ЖТФ. 1933. т. 3, вып. 1, С. 91-107.
33. Колесников К.С. Автоколебания управляемых колес автомобиля. Государственное издательство технико-теоретической литературы Москва 1955.
34. Коловский Н.З. Нелинейная теория виброзащитных систем.1. М.: Наука, 1966, 298с.

35. Крагельский И.В. Трение и износ в вакууме. М.: Машиностроение, 1973, 216с.
36. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение. 1977. 526 с.
37. Крагельский И.В., Щедров В.С. Развитие науки о трении. Сухое трение. М.: АН СССР. 1956. 233 с.
38. Кручинин П. А., Магомедов М. Х., Новожилов И. В. Математическая модель автомобильного колеса на антиблокировочных режимах движения // Изв. РАН. МТТ. — 2001. — № 6. — С. 63—69.
39. Кручинин П. А., Магомедов М. Х., Новожилов И. В. Математическая модель автомобильного колеса на антиблокировочных режимах движения // Изв. РАН. МТТ. — 2001. — № 6. — С. 63—69.
40. Кузнецов Л.А. Акустика музыкальных инструментов: Справ. М.: Легпромбытиздат. 1989. 368 с.
41. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. Изд. 2. М.: Либроком. 2010. 320 с.
42. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М. Либроком. 2010. 360 с.
43. Мандельштам Л.И. Лекции по колебаниям. Полное собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР. 1955. Т. 4. 511 с.
44. Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д., Андронов А.А., Витт А.А., Горелик Г.С, Хайкин Э. Новые исследования нелинейных колебаний. Радиоиздат. 1936. 95 с.
45. Мигунова Д.С, Вильке В.Г. О движении мяча по травяному газону// ПММ, 2011, т. 75, вып. 5, с 801-812.
46. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М. Наука. 1975. 248 с.
47. Неймарк Ю.И. Метод точечного отображения в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. Гл. ред. физматлит. 1972. 472 с.

- 48.Новожилов И. В., Павлов И. С. Приближённая математическая модель колёсного экипажа // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 4.
- 49.Новожилов И. В., Павлов И. С., Фрольцов В. А. О поведении автомобиля на «миксте» // Изв. РАН. МТТ. — 2001. — № 3.
- 50.Оберберг В.О пружине в скрипке// Сб. работ комиссии по музыкальному инструментоведению. М. 1926. Вып. 1. 52-56.
- 51.Пановко Я.Г. особенности движения твердого тела вдоль вибрирующей плоскости при сухом некулоновом трении. Машиностроение. 1983. № 3.
- 52.Папалекси Н.Д., Андронов А.А., Горелик Г.С, Рытов С.М. Некоторые исследования в области нелинейных колебаний, проведенные в СССР, начиная с 1935 г. - УФН. Т. XXXIX. вып. 3. 1947. 335-352.
- 53.Первозванный А.А. Трение - сила знакомая, но таинственная// Соросовский образовательный журнал. 1999. № 2. 129-134.
- 54.Петров В.Ф. О механических автоколебаниях при сухом трении в системах с одной степенью свободы. Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1967. № 2. С.86-92.
- 55.Петров В.Ф. О механических автоколебаниях, возбуждаемых силами сухого трения в системе с двумя степенями свободы. Механика твердого тела. 1968. № 1. С.39-45.
- 56.Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Физматлит. 1962. 332 с.
- 57.Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. М.: Наука. 1971. Т. 1. 771 с.
- 58.Пуанкаре А. Избранные труды. М.: Наука. 1972. Т. 2. 999 с.
- 59.Раймпель Й. Шасси автомобиля: Конструкция подвесок. / Пер. с нем. В.П. Агапова. М.: Машиностроение, 1989. - 328с.
- 60.Расчёт эксплуатационных параметров движения автомобиля и автопоезда /Хачатуров А.А., Жигарев В.П., Кольцов В.И. и др. М.: Транспорт. 1982. - 264с.

- 61.РД 37.052.092 87 Методика экспериментального определения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) автомобиля. - Дмитров: Изд. НИЦИАМТ, 1988.-22с.
- 62.Розенвассер Е.П. Колебания нелинейных систем. М.: Наука. 1969. 575 с.
- 63.Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.Наука. 1988. 304 с.
- 64.Рытов С.М. Развитие теории нелинейных колебаний в СССР. Радиотехника и электроника. УФН. 1947. 335-352.
- 65.Светлицкий В.А. Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1976. - 216с.
- 66.Степанов С.Я., Хизгияев С.В. Автоколебания двухмассовой механической системы с кусочно–постоянной моделью сухого трения. Ломоносовские чтения, апрель 2007. Изд–во МГУ. 2007 .С.142.
- 67.Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: ИЛ. 1952. 264 с.100.
- 68.Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука. 1964. 440 с.
- 69.Стрелков С.П. Маятник Фруда //ЖТФ. 1933, Т. 3. Вып. 4. 563-573.
- 70.Стретт Д.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. М.: Изд-во иностр. лит. 1955. Т. 1. 503 с.
- 71.Тарасик В.П. Теория движения автомобилей. СПб: БХВ–Петербург. 2006.
- 72.Тондл А. Автоколебания. М.: Мир, 1979, 398с.53. форсблад Л. И. Вибрационное уплотнение грунтов оснований. М.: Транспорт. 1987. 67с.
- 73.Тондл А. Нелинейные колебания механических систем, м.: МИР, 1973, 334С.
- 74.Тот К.П. Теория механических колебаний. Пер. с англ. О.В. Лужина. М.: Машгиз. 1963. 351 с.

75. Финогенко И.А. О дифференциальных уравнениях, возникающих в динамике систем с сухим трением // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 8. 122-127.
76. Харкевич А.А. Автоколебания. Государственное издательство технико-теоретической литературы Москва 1954.
77. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М.: "Мир". 1966. 232 с.
78. Хизгияев С.В. Автоколебания двухмассового осциллятора с сухим трением // ПИММ. 2007. № 6. С. 1004–1013.
79. Хизгияев С.В. Автоколебания двухмассовой механической системы с кусочно-постоянной моделью сухого трения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. — М.: ВЦ РАН. 2007. 106-125.
80. Хизгияев С.В. Аналитическое исследование автоколебательной механической системы с кусочно-постоянной моделью сухого трения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. — М.: ВЦ РАН. 2006. 84-92.
81. Awrejcewicz J. Some comments about stability // Journal of Sound and Vibration. 1990. V. 137. № 1. R 159-160.
82. Awrejcewicz J., Dzyubak L. Quantifying smooth and nonsmooth regular and chaotic dynamics // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. V. 15. № 6. P. 2041-2055.
83. Awrejcewicz J., Dzyubak L. Stick-slip chaotic oscillations in a quasi-autonomous mechanical system // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2003. V. 4. № 2. P. 155-160.
84. Awrejcewicz J., Dzyubak L., Grehogi C. Estimation of chaotic and regular (stick-slip and ship-slip) oscillations exhibited by coupled oscillators with dry friction // Nonlinear Dynamics. 2005. V. 42. № 2. P. 383-394.
85. Awrejcewicz J., Krodkiwski J. Analysis of self-excited vibration due to nonlinear friction in two-degree-of-freedom system / Mechanica. z. 67. № 429. 1984. P. 13-30.

86. Awrejcewicz J., Olejnik P. Friction pair modeling by a 2-dof system: numerical and experimental investigations // Special Issue of International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. V. 15. № 6. P. 1931-1944.
87. Birkhoff G.D. Dynamical system with two degrees of freedom. Trans. Amer. Math. Soc. 1917. № 18. P. 199-300.
88. Gremer L. The Physics of the Violin. MIT Press. 1984. 474 p. 111. Hutchins C.M., Benade V. Research Papers in Violin Acoustics: 1975 - 1993. - Internet: <http://www.catgutacoustical.org/research/books/vlnacous/>.
89. Gveticanin L. The motion of a two-mass system with non-linear connection // Journal of Sound and Vibration. 2002. V. 252. № 2. P. 361-369.
90. Hutchins C.M., Benade V. Research Papers in Violin Acoustics: 1975 - 1993. - Internet: <http://www.catgutacoustical.org/research/books/vlnacous/>.
91. Kleczka M., Kreuzer E., Schiehlen W. Local and global stability of piecewise linear oscillator // Philos. Trans: Phys. Sci. Eng., Nonlinear Dynam. Eng. Syst. 1992. V. 338. № 1651. P. 533-546.
92. Pacejka H.B. Tyre and Vehicle Dynamics. L.UK: Elsevier. 2005. 621.
93. Pascal M. Analytical investigation of the dynamics of a non-linear structure with two degree of freedom // ASME 2005 IDETC/CIE. Sept. 2005. Long Beach. California. USA.
94. Pascal M. Dynamics and stability of a two degrees of freedom oscillator with an elastic stop // J. of Computational and Nonlinear Dynamics. 2006. V. 1. № 1. P. 94-102.
95. Shin K., Brennan M.J., Oh. J.-E., Harris C.J. Analysis of disc brake noise using a two-degree-of-freedom model // Journal of Sound and Vibration. 2002. V. 254. №- 5. P. 837-848.
96. Yeh G.C.K. Forced vibration of a two-degree-of-freedom system with combined Coulomb and viscous damping // Journal of the Acoustical Society of America. 1966. V. 39. № 1. P. 14-24.