МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА.

КАФЕДРА ГАЗОВОЙ И ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ.

На правах рукописи

УДК 539.3

Панфилов Дмитрий Игоревич

ДИНАМИКА ГИБКИХ СВЯЗЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Специальность 01.02.04 – «механика деформируемого твердого тела».

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н. профессор Звягин А.В.

к. ф.-м. н. доцент Душин В.Р.

Москва 2015

СОДЕРЖАНИЕ.

ВВЕДЕНИЕ.

Актуальность работы. Издавна тросы, канаты, нити являются одним из основных конструктивных элементов многих механизмов и тем самым, также как и колесо, являются значимыми техническими факторами развития цивилизации. При математическом моделировании нить является идеальным одномерным объектом, движущимся в пространстве. При этом даже при упругом поведении материала нити, уравнения движения являются геометрически нелинейными в силу больших перемещений и поворотов. Одномерность нити, в силу своей простоты в моделировании, позволяет решать нелинейные задачи с большими скоростями движения и деформациями и при этом получать хорошее первое приближение решения реальной физической задачи. Учет жёсткости изгиба, как правило, необходим лишь в областях с большим радиусом кривизны.

Во многих устройствах длина рабочего участка троса (нити) меняется во времени. Примером могут служить широко известные устройства, такие как лифты, подъемные краны, канатные дороги и т.д. Задачи с движением участков нити переменной длины характерны для многих технологий текстильной промышленности. Между тем изменение свободного участка нити ведет к изменению набора ее собственных частот. В механике известно явление параметрического резонанса, когда внешние возмущения малой амплитуды могут привести к потере устойчивости. Для нити переменной длины скорость изменения вовлечённого в движение участка нити, или скорость движения вдоль нити внешней возмущающей связи, могут привести к аналогичным последствиям – росту амплитуды колебаний. Данный факт может иметь решающее значение для возникновения резонанса – увеличения амплитуды колебаний. В некоторых случаях, резонанс может иметь положительное значение. Например, гитарист, изменяя длину свободного участка струны, не только меняет собственные частоты колебаний, но может индуцировать наступление события резонанса, тем самым увеличивая громкость звучания гитары. В технических приложениях резонанс, как правило, не приемлем, так как может привести к разрушению конструкции. Рост амплитуды колебаний вследствие движения границ нити – один из аспектов, которому уделялось особое внимание при написании диссертации.

Другой замечательной особенностью нити является наличие в ней двух типов волн – продольных и поперечных. Причём, если скорость продольных волн определяется материалом нити, то скорость поперечных волн определяется величиной натяжения и может регулироваться. Это обстоятельство ведет к возможности исследования интересной задачи, поведению среды, когда движущаяся вдоль нити связь переходит с дозвуковой (по отношению к скорости поперечных волн) скорости – к сверхзвуковой скорости. Аналогичные задачи возникают в контактных задачах в теории упругости при движении штампа вдоль свободной поверхности. В газовой динамике - процесс перехода летящего тела с дозвукового в сверхзвуковой режим. Во всех случаях при решении стационарных задач меняется тип уравнений (эллиптический тип меняется на гиперболический тип). Между тем, для твёрдых сред, где скорости распространения волн, как правило, очень велики, процесс перехода через критическую скорость для нити (скорость поперечных волн) на данный момент экспериментально остается практически не исследованным. Следует отметить, что множество работ в последнее время посвящено именно задачам о воздействии подвижной нагрузки, движущейся с докритической скоростью, на нить, в том числе лежащую на упругом основании (например, при моделировании железнодорожного полотна). В следующих работах [1-6] рассматривается энергетический метод решения задач о струне, лежащей на упругом основании. В данных статьях вводится понятие конфигурационной силы – величины, характеризующей энергетический обмен между упругой средой и подвижным источником. А также производится классификация (по М. Гартину) данных сил на внешние и внутренние. В частности внешняя конфигурационная сила представляет собой реакцию среды на движение инерционного включения (сила волнового сопротивления, сила вибрационного давления). В частности, получена зависимость силы между струной и включением от времени как для случая равноускоренного движения инерционного включения, так и случая немонотонного движения включения с мало меняющейся скоростью. Применённый в работах асимптотический подход, позволил показать, что инерционное включение, под действием заданной продольной внешней силы, движется вдоль струны так, как двигалась бы под действием внешней силы материальная точка переменной массы (присоединенная масса).

Здесь стоит обратить внимание, что в последней главе рукописи будет рассмотрена задача о балке как более сложного объекта, имеющего жесткость на изгиб и как следствие конечные радиусы кривизны возникающих изломов. Балка, позволяет получить решение, более точно описывающее процессы, происходящие в тросах и канатах, так как реальные объекты имеют изгибную жесткость. Модель идеальной нити данной характеристики не рассматривает, так как в этой модели изгибная жёсткость равна нулю.

Целью диссертационной работы является анализ явлений, возникающих при динамике нити с подвижными границами. Общим для данного класса задач является то, что область независимых переменных, в которой ищется решение, изменяется во времени. Показано, что величина скорости изменения области определения решения, по отношению к скорости распространения возмущений в нити является одним из определяющих параметров задачи. В том случае, когда нить разматывается с катушки, изменяется область определения решения (длина нити в свободном движении). Подвижные границы появляются также для нити, на которую наложена движущаяся по точкам нити геометрическая связь, разделяющая её на две области переменной длины. В работе рассмотрены задачи обеих типов.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту:

- задача о динамической размотке нити приводит к необходимости решения дифференциальных уравнений в частных производных для области независимых переменных, которая меняется со временем. Подобная задача рассмотрена впервые. Важно, что решить задачу удалось аналитически без применения численных методов. Исследовались случаи сверхзвукового и дозвукового режима (по отношению к скорости поперечных волн) размотки нити. Процесс перехода скорости подвижной границы через скорость поперечных волн остается практически неисследованным, поэтому полученное аналитическое решение и проведенный анализ колебаний нити являются особенно ценными.

- задача о скользящем ударе по идеальной растяжимой нити является новой. В работе эта задача рассмотрена как теоретически (автомодельное решение), так и экспериментально. Эксперименты по динамике нити имеют самостоятельную ценность, поскольку позволяют проверить работоспособность принятых математических моделей. Полученное теоретическое решение сравнивалось с результатами эксперимента. В эксперименте скорость ролика возрастает постепенно, поэтому результаты эксперимента и полученное автомодельное решение совпадают качественно. Найдена зависимость динамического коэффициента вязкого трения для резины от Эйлеровой скорости ролика. В ходе эксперимента удалось изучить процесс перехода скорости ролика через скорость поперечных волн в нити (тонкая резиновая нить).

- решение задачи о динамическом прогибе балки под действием движущейся нагрузки позволило получить значения критических скоростей движения (скорости при которых происходит резонанс). Этот результат является новым. Показано, что при равноускоренном движении нагрузки, переход из дозвукового в сверхзвуковой режим меняет характер движения балки.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались на следующих конференциях:

- Конференция Ломоносов 2013
- Конференция Ломоносов 2014
- Конференция Ломоносов 2015
- Конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова 2013
- Конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова 2014
- Конкурс У.М.Н.И.К. 2013 I полугодие
- Конкурс У.М.Н.И.К. 2013 II полугодие

и научно-исследовательских семинарах кафедры Теории пластичности, кафедры Теории упругости, кафедры Механики композитов и кафедры Газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах [31, 46], рекомендованных перечнем ВАК, 1 статья в рецензируемом международном периодическом издании [31], 5 статей в сборнике трудов конференции [35, 37, 41-43] и 3 тезиса докладов [36, 44, 45].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, трех глав, заключения, восьми приложений и списка литературы. Общий объем диссертации 96 страница, из них 91 страниц текста, включая 25 рисунков. Библиография включает 47 наименований на 5 страницах.

Во **Введении** сформулированы постановки задач и дан краткий обзор основных результатов диссертации.

В **Обзоре литературы** приводятся основные работы, посвященные задачам динамики нитей, тросов и канатов с подвижными границами.

В **первой главе** рассмотрена задача о динамической размотке нити. Особенностью данной задачи является то, что длина нити, находящейся в свободном движении меняется. Получено аналитическое решение как для случая движения границы со скоростью меньшей скорости поперечных волн, так и для случая движения границы со скоростью, превосходящей скорость поперечных волн. Произведен анализ роста амплитуды колебаний со временем. Показано, что амплитуда колебаний растет во всех случаях, соответствующих реальным случаям движения.

Во **второй главе** рассмотрена задача о скользящем ударе по гибкой растяжимой нити. Задача решалась в нелинейной постановке с учетом фронтов продольных и поперечных волн и фронта вынужденного разрыва, обусловленного геометрической связью, скользящей по нити с постоянной скоростью. Для бесконечной нити получено автомодельное решение, при котором форма нити представлена в виде прямолинейных звеньев. Задача была сведена к решению системы из шести нелинейных уравнений, решение которой было получено численно. Показано, что характер решения существенно меняется в зависимости от отношения скорости движения связи к скорости поперечных волн (дозвуковое и сверхзвуковое движение связи). Показано, что при переходе в режим сверхзвукового скольжения, сила реакции нити на связь возрастает на порядок.

В НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова автором проведены эксперименты, моделирующие задачу о скользящем ударе по гибкой растяжимой нити (в эксперименте нить и связь, скользящая вдоль нее, моделируются соответственно тонкой резиной и роликом, движущимся вдоль нити). Получены экспериментальные значения деформаций, напряжений и скоростей, возникающих в резине. Произведена оценка погрешностей, возникающих при подготовке и обработке эксперимента. Получен факт постоянства Лагранжевой скорости скольжения ролика по точкам нити. С использованием данного результата, задача о скользящем ударе по нити была решена в более сложной постановке, когда скользящая связь не идеальная (на нить действует сила трения). Получена зависимость динамического коэффициента трения от Эйлеровой скорости связи. Произведено сравнение полученных деформаций в теории и эксперименте. Показана необходимость учета изгибной жесткости резины, отсутствующей в модели идеальной нити.

В **третьей главе** рассмотрена задача о динамическом прогибе предварительно натянутой балки (модель Кирхгофа-Лява) под действием движущейся сосредоточенной нагрузки. Задача решалась в линейной постановке. Рассмотрено движение нагрузки с постоянной скоростью и равноускоренное движение. Показано наличие характерных скоростей (критические скорости движения), при которых наступает резонанс. По отношению к меньшей из критических скоростей рассмотрен случай движения с дозвуковой и сверхзвуковой скоростью. Проанализирован случай равноускоренного движения, при котором скорость нагрузки переходит критическую скорость в процессе движения вдоль балки. Во всех случаях получены аналитические решения в виде абсолютно сходящихся рядов. Проанализированы прогибы балки, показана необходимость учета изгибной жесткости в области приложения нагрузки.

В **Заключении** приведены основные результаты диссертационной работы.

В **Приложениях** приведены основные выкладки.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В данной работе исследовались процессы динамики нитей, тросов и канатов с подвижными границами. Все решения подобных задач зависят от следующего параметра – отношения скорости подвижной границы к скорости распространения возмущений в нити. Здесь стоит отметить два важных обстоятельства. Во-первых, в нити присутствуют волны двух типов – продольные и поперечные, и любое колебание в нити есть суперпозиция этих двух волн. Данный эффект проявляется при решении нелинейных задач для нити. Фактически процесс перехода скорости подвижной границы через скорость поперечных волн есть аналог задачи о сверхзвуковом движении тела в газе. В газовой динамике при решении стационарных линейных задач при переходе через скорость звука меняется тип уравнений – эллиптический тип меняется на гиперболический тип. Для нити переход через критическую скорость также связан с интереснейшими эффектами. И, конечно, во-вторых, стоит иметь в виду, что рассматриваемый класс задач можно подразделить на два направления. Первое – это задачи, в которых движется граница самой нити [31, 41, 44]. При этом область независимых переменных, на которой ищется решение системы дифференциальных уравнений в частных производных, меняется со временем. Второй класс задач – это задачи, в которых нить имеет конечную длину и по нити движется некоторая связь или сосредоточенная нагрузка [42, 43, 45, 46]. Подвижная граница, обусловленная связью или сосредоточенной нагрузкой, делит нить на два участка переменной длины. Например, в работах [1-6] рассматривалась нелинейно-упругая нить, лежащая на упругом основании. Задачи решались с помощью энергетического метода. В данных работах было показано, что процесс перехода скорости подвижной нагрузки через критическую скорость в нити нельзя исследовать в линейной постановке. В момент совпадения скоростей нагрузки и критической скорости амплитуда колебаний растет и конфигурационная сила (реакция нити на подвижную нагрузку) стремится к бесконечно большим значениям. Это показывает важность рассмотрения подобных задач в нелинейных постановках.

Отметим также, что при решении данных задач нас также интересовала устойчивость полученных решений. Под неустойчивостью в данной работе понимается неограниченный рост максимума амплитуды колебаний со временем. Методы исследования параметрических резонансов и неустойчивости упругих систем описаны в [47].

Итак, первая глава посвящена особенностям процесса инерционной размотки стекловолоконной тросовой системы очень большой длины (десятки километров). Математическое моделирование такой задачи сводится к решению гиперболического уравнения колебаний нити. Одним из важных практических вопросов данной проблемы является характер изменения максимума амплитуды колебаний.

В задаче рассматривается процесс распространения плоских поперечных колебаний однородной идеальной нити переменной длины в предположении, что натяжение нити остается постоянным. Получено точное аналитическое решение поставленной задачи. Показано, что одним из параметров задачи является аналог числа Маха – отношение скорости размотки к скорости поперечных волн в нити. В предельном случае, когда начальная длина нити равна нулю, решение найдено другим способом – методом бегущих волн. Проведено сравнение. Показано, что предельный случай соответствует данному решению.

Анализ полученного решения показал, что максимальная амплитуда колебаний нити почти всегда возрастает с ростом времени, что соответствует асимптотической неустойчивости решения (в данной работе под неустойчивостью понимается рост максимума амплитуды колебаний со временем). Лишь в особых вырожденных условиях решение устойчиво. Полученные результаты роста амплитуды должны учитываться при моделировании поведения тросовой системы, поскольку малые возмущающие колебания на конце смотки всегда присутствуют.

В практических приложениях издавна широко используются гибкие связи в виде нитей, канатов, тросов. В последнее время предпринимаются попытки использования тросовых систем в космосе. За последние десять лет было проведено множество экспериментов, целью которых был анализ поведения таких систем, сбор данных и визуализации рассматриваемого процесса. Были проведены успешные запуски TSS1 и TSS1-R (Tethered Satellite System), а также миссии Oedipus, SEDS 1 и SEDS 2 (Small Expendable Deployer System), YES и YES2 (Young Engineers' Satellite), и многие другие.

Для реализации размотки троса большой длины были разработаны новые высокопрочные механизмы, подробное описание которых можно найти, например, в [1]. Такие механизмы использовались для размотки и последующей смотки нити с целью создания искусственной гравитации в ходе проекта MARS-g. Данные технологии могут быть использованы и в будущих миссиях на Марс, над которыми совместно работают NASA и Европейское космическое агентство. Для получения большей информации и данных, а также отладки механизмов и тросовых систем необходимо было проводить большое число запусков. Для этого были разработаны системы, которые являлись полезной нагрузкой на борту небольших спутников. Результатом этих исследований стала разработка механизмов небольшой массы и повышенной прочности, например, в рамках проекта DELFI-1. Проект такой миссии, в результате которой предполагалась размотка алюминиевой нити длинной 1 километр, описан в [2].

На данный момент существуют проекты, в которых задействованы тросовые системы. Например, в качестве "космических лифтов", при доставке материалов с орбиты без транспортного корабля ("космическая почта"), или при удалении космического мусора. Для решения последней проблемы (минимизации количества объектов космического мусора на геостационарных орбитах), в работе [3] был проведен подробный анализ и рассмотрены различные сценарии. Для демонстрации и отработки возможной доставки груза с орбиты с помощью тросовой системы 14 сентября 2007 г. была запущена миссия YES2. В ходе эксперимента была проведена размотка 32 километров троса и спуск с орбиты 6 килограммовой возвращаемой капсулы. В результате были получены данные о процессах, происходящих в нити во время размотки (Графики координат спускаемой капсулы, угла отклонения нити от вертикального положения, скорости размотки и длины нити в зависимости от времени). Получены данные о скачках натяжения в нити, как следствия взаимодействия продольных и поперечных возмущений с границами [4]. Параллельно было проведено математическое моделирование рассматриваемого процесса. С помощью полученных в ходе миссии данных была проведена верификация этой модели. Проведенный анализ показал чувствительность процесса к начальным параметрам задачи (вес капсулы, начальная скорость ее движения), а также необходимость учитывать на последней стадии размотки эффекты, связанные с распространением звуковых волн в нити, их отражения от спутника и возвращаемой капсулы [5-7].

Приведенные факты указывают на актуальность теоретического анализа процесса размотки нити. В данной работе этот процесс моделировался в предположении, что натяжение нити остается постоянным. Мы рассматривали распространение поперечных колебаний в однородной идеальной нити переменной длины [8]. В рамках данной модели была поставлена и решена следующая задача. Из состояния покоя длина нити начинает возрастать с постоянной скоростью. При этом один конец нити закреплен, а другой колеблется по заданному закону. Полученное аналитическое решение было использовано для анализа движения, в том числе для исследования поведения максимальной амплитуды колебаний со временем.

Во второй главе рассматривается одна из мало изученных задач механики – определение характеристик среды при движении в ней, или в контакте с ней, внешнего тела со скоростями близкими к скорости звуковых волн. Как правило, переход через скорость звука является критическим для всех волновых задач. Например, при решении стационарных линейных задач в газовой динамике [12] при переходе через скорость звука меняется тип уравнений. Отметим, что аналогичные эффекты характерны и для движения твёрдого тела, контактирующего с деформируемой средой (например, - упругой [13]). В этом случае в среде присутствуют волны двух типов – продольные и поперечные. В зависимости от соотношения между величиной скорости скольжения и величинами скоростей звуковых волн (продольных и поперечных) должен меняться характер деформаций и напряжений в среде. В данной работе рассматривается контактная задача скольжения тела вдоль нити. Для нити квадрат скорости поперечных волн пропорционален её натяжению, поэтому скорость поперечных волн в слабо натянутых нитях может быть сколь угодно малой. При этом, сами контактные задачи для пары тело – нить характерны для текстильной промышленности и большого класса технических приложений, связанных с гибкими передаточными механизмами, управлением по сматываемым проводам и мн. др. Это позволяет говорить об актуальности такого рода задач, поскольку они имеют, как практическую значимость, так и фундаментальный интерес.

В третьей главе рассматривался процесс динамического прогиба предварительно натянутой балки Кирхгофа-Лява под действием сосредоточенной нагрузки. Цель работы – определение критических явлений, возникающих при переходе скорости движения нагрузки через характерную скорость для балки. Нами было получено точное аналитическое решение для двух принципиальных задач – во-первых, случая движения нагрузки с постоянной скоростью и, во-вторых, с постоянным ускорением. Был проведен анализ амплитуды колебаний, а также показано влияние изгибной жесткости балки на ее прогиб как непосредственно в месте приложения нагрузки, так и в области, связанной с фронтом волны, бегущей с характерной для балки скоростью. Проведенный в НИИ механики МГУ эксперимент доказывает наше предположение о важности учета изгибной жесткости при решении подобных динамических задач.

ГЛАВА 1.

Задача о динамической размотке нити.

§1. Математическая модель процесса размотки нити с катушки. Рассмотрим движения в плоскости (x, y) однородной, абсолютно гибкой нити переменной длины (Рис.1). Каждой материальной точке нити поставим в соответствие длину соответствующей дуги s в нерастянутом состоянии. Для идеальной нити сила натяжения $\mathbf{T} = T\boldsymbol{\tau}$ направлена по касательной. Пусть $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, касательный к нити. Тогда вектор силы натяжения можно представить как $\mathbf{T} = T\boldsymbol{\tau}$, где $T -$ натяжение. В общем случае движения нити необходимо найти положение $\mathbf{r}$, натяжение T, деформацию ε, единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ для каждой материальной точки s в каждый момент времени t. Таким образом, искомые величины являются функциями двух переменных (s,t). Введем компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$ точек нити $v_x(s,t), v_y(s,t)$, начальную линейная плотность ρ и плотность массовых сил $\mathbf{g}$.

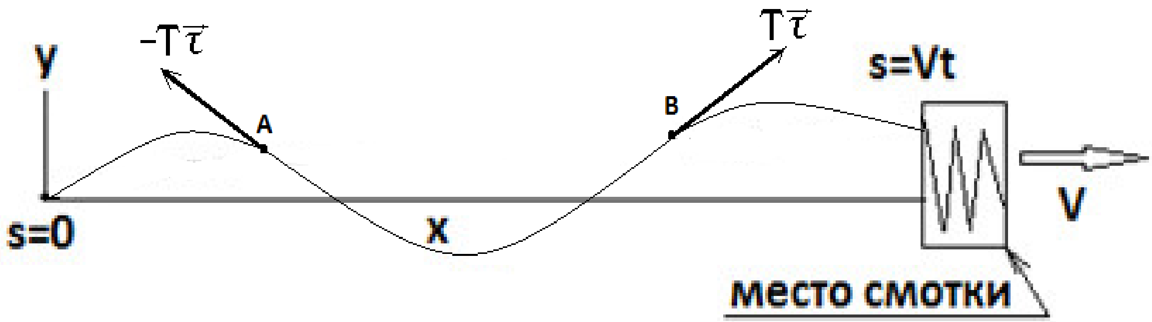

Рис.1. Общая схема движения. Один конец нити $(s = 0)$ закреплен. В процессе движения разматывающего устройства со скоростью V_0 длина нити увеличивается от начальной длины L_0 до текущей $-$ $L_0 + V_0 t$, при этом подвижный конец нити $(s = L_0 + V_0 t)$ испытывает поперечные колебания малой амплитуды $y = k \sin \omega t$.

Для любого выделенного участка AB (Рис.1) нити можно записать закон изменения количества движения

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{s_A}^{s_B}\rho\mathbf{v}ds=\int_{s_A}^{s_B}\left[\frac{\partial(T\boldsymbol{\tau})}{\partial s}+\rho\mathbf{g}\right]ds \text{ или } \int_{s_A}^{s_B}\left[\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}-\frac{\partial(T\boldsymbol{\tau})}{\partial s}-\rho\mathbf{g}\right]ds=0.$$

Для непрерывных движений из последнего равенства в силу произвольности A, B следует уравнение движения нити

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(T\boldsymbol{\tau})}{\partial s}+\mathbf{g}.$$

Будем считать, что в процессе размотки нити с постоянной скоростью натяжение нити близко к постоянной величине T_0 (данное натяжение зависит от скорости размотки и определяется техническими параметрами устройства). Будем считать, что массовые силы пренебрежимо малы и в процессе движения малыми величинами для нити являются угол между касательной и осью x и продольная скорость точек. В этом случае в задаче можно ограничиться только поперечным движением. Причем из малости указанных величин следует, что $\tau_y \approx \partial y/\partial s$, $s \approx x$. С учетом выражения для поперечной скорости, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=b^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad b^2=\frac{T_0}{\rho}. \tag{1}$$

Согласно предлагаемой модели размотки (Рис.1) уравнение (1) можно дополнить следующими начальными и граничными условиями:

$$t=0,\ y(x,0)=0,\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=0;\ x=0,\ y(0,t)=0;\ x=L_0+V_0t,\ y=k\sin\omega t. \tag{2}$$

Перейдем к безразмерным величинам

$$\tilde{y}=\frac{y}{L_0},\ \tilde{x}=\frac{x}{L_0},\ \tilde{t}=\frac{V_0t}{L_0},\quad \tilde{b}=\frac{b}{V_0},\quad \tilde{\omega}=\frac{\omega L}{V_0},\quad \tilde{k}=\frac{k}{L_0}.$$

и для удобства опустим знак волны в последующих вычислениях. В результате приходим к задаче (более подробный вывод уравнений смотри Приложение 1)

$$\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=b^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad t>0,\quad 0<x<1+t;\\ \left(t=0,\quad y=0,\quad \dfrac{\partial y}{\partial t}=0\right);\quad (x=0,\quad y=0);\quad (x=1+t,\quad y=k\sin\omega t).\end{array} \tag{3}$$

§2. Получение решения. Для решения задачи (3) сделаем замену независимых переменных, цель которой – перевести подвижную правую границу в стационарное положение:

$$s = \frac{x}{1+t},\ \tau = \ln(1+t).$$

В результате уравнение и условия (3) примут следующий вид (более подробный вывод уравнений смотри Приложение 2):

$$\left(\frac{T_0}{\rho V_0^2} - s^2\right)\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + 2s\frac{\partial^2 y}{\partial s \partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - 2s\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial \tau} = 0 \tag{4}$$

$$\tau = 0:\ y(s,0) = 0,\ \frac{\partial y}{\partial \tau}(s,0) = 0; \quad s = 0:\ y(0,\tau) = 0; \ \ s = 1:\ y(1,\tau) = k\sin\omega\cdot\left(e^{\tau} - 1\right). \tag{5}$$

Применим к уравнению (4) и граничным условиям (5) преобразование Лапласа по переменной τ:

$$Y(s,p) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} y(s,\tau)\,d\tau.$$

Тогда с учетом однородных начальных условий, получим (подробный вывод системы уравнений приведен в Приложении 3)

$$\left(b^2 - s^2\right)\frac{d^2Y}{ds^2} + 2(p-1)s\frac{dY}{ds} - \left(p^2 - p\right)Y = 0, \tag{6}$$

$$s = 0:\ Y(0,p) = 0, \quad s = 1:\ Y(1,p) = k\cdot\int_0^{\infty} e^{-p\tau}\sin\left(\omega\left(e^{\tau} - 1\right)\right)d\tau. \tag{7}$$

Для решения уравнения (6) с переменными коэффициентами сделаем следующую замену [9]:

$$Y(s,p) = U(\xi,p)\cdot|s+b|^{\frac{p+1}{2}}\cdot|s-b|^{\frac{p-1}{2}},\ \text{где}\ \xi = \ln\left|\frac{s-b}{s+b}\right|.$$

В результате (6) преобразуется в следующее уравнение:

$$4\frac{d^2U}{d\xi^2} - 4\frac{dU}{d\xi}\cdot + U\cdot\left(1 - p^2\right) = 0 \tag{8}$$

Решая уравнение (8) и возвращаясь к старым переменным, с учетом граничных условий (7), получим решение задачи (6), (7) (подробный метод получения использованной замены переменных и выкладки, приводящие к решению (12) изложены в Приложении 4):

$$Y(s,p)=k\cdot L_0(p)\cdot\frac{|s-b|^p-|s+b|^p}{|1-b|^p-|1+b|^p}\text{, где}\qquad L_0(p)=\int\limits_0^\infty e^{-p\tau}\sin\left(\omega\left(e^\tau-1\right)\right)d\tau \tag{12}$$

Далее для нахождения оригинала, т.е. поперечного смещения нити, мы использовали теоремы о свертке и запаздывании преобразования Лапласа [10, 11]. Как видим, полученное решение зависит от безразмерного параметра $b=\sqrt{T_0/\rho}\big/V_0$. Физически это отношение скорости поперечных возмущений к скорости размотки нити, т.е. величина обратная к числу «Маха».

Представим полученное решение (12) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}Y(s,p)&=pkL_0(p)\cdot\frac{e^{-p\cdot\ln\left|\frac{1+b}{s-b}\right|}-e^{-p\cdot\ln\left|\frac{1+b}{s+b}\right|}}{e^{-p\cdot\left|\frac{1+b}{1-b}\right|}-1}=\\&=\left\{p\cdot k\cdot L_0(p)\right\}\cdot\left\{\frac{1}{2p}\cdot\left(1+cth\left(\frac{p}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right)\right)\right\}\cdot\left\{e^{-p\cdot\ln\left|\frac{1+b}{s+b}\right|}-e^{-p\cdot\ln\left|\frac{1+b}{s-b}\right|}\right\}\end{aligned}\tag{13}$$

При этом, верны следующие неравенства:

$$\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|>0,\quad \ln\left|\frac{1+b}{s-b}\right|>0\text{, при } s\in[0;1],\quad \ln\left|\frac{1+b}{s+b}\right|>0\text{ при } s\in[0;1].$$

Рассмотрим случай $b\neq1$. Образ (13) поперечного смещения нити представлен в виде произведения трех членов:

1). $p\cdot k\cdot L_0(p)\ \leftarrow\ \frac{d}{d\tau}\left[k\sin\left(\omega\left(e^\tau-1\right)\right)\right]$ – имеет оригиналом производную функции возмущений границы.

2). $\frac{1}{2p}\cdot\left(1+cth\left(\frac{p}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right)\right)\ \leftarrow\ H_b(\tau)$, где $H_b(\tau)$ это ступенчатая функция, график которой изображен на Рис. 2.

3). Множитель $e^{-p\cdot\ln\left|\frac{1+b}{s+b}\right|}-e^{-p\cdot\ln\left|\frac{1+b}{s-b}\right|}$ – в силу теоремы запаздывания, означает соответствующие сдвиги аргумента, связанные с отражением волн от границ.

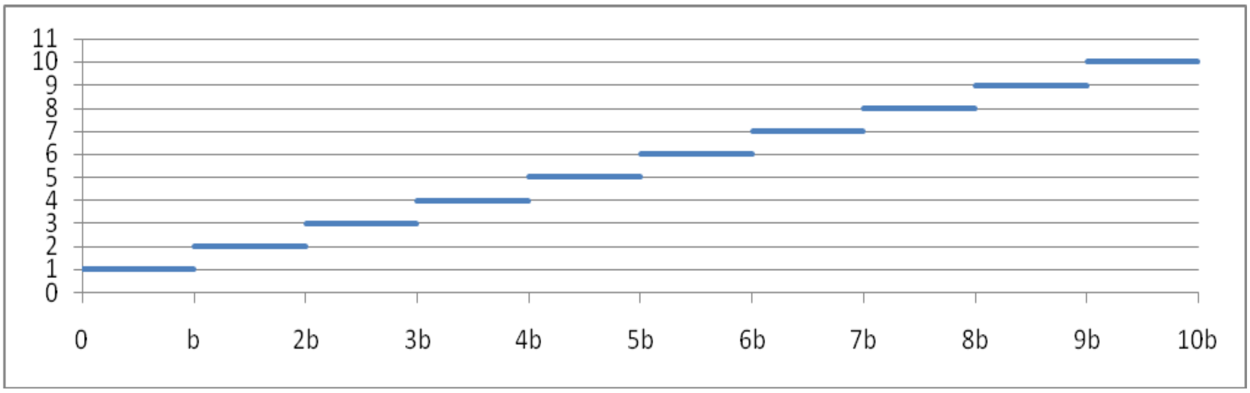

Рис. 2. $H_b(\tau)$ – ступенчатая функция, длина ступеньки которой равна *b*, а высота – единице.

Функция $H_b(\tau)$ определяется следующим образом:

$$H_b(\tau)=1+H_0(\tau-b)+H_0(\tau-2b)+H_0(\tau-3b)+H_0(\tau-4b)+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}H_0(\tau-kb),$$

где $H_0(\tau)$ - единичная функция Хэвисайда.

Эта функция имеет следующее полезное свойство, которое мы применили при вычислении интегралов, возникающих при использовании теоремы о свертке:

$$\int_0^A f(z)\cdot H_b(z)\cdot dz=\left(\left[\frac{A}{b}\right]+1\right)\cdot F(A)-\sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{b}\right]}F(kb),$$

где $F(z)$ – первообразная функции $f(z)$, здесь и далее $\left[\frac{A}{b}\right]$ – обозначение целой части от деления числа A на число b. Введем два натуральных числа

$$M=\left[\frac{\ln\left|\frac{\xi+b}{1+b}\right|}{\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|}\right],\quad N=\left[\frac{\ln\left|\frac{\eta-b}{1+b}\right|}{\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|}\right],\quad \xi=x+bt,\quad \eta=x-bt. \qquad (14)$$

В итоге точное аналитическое решение поставленной задачи будет следующим (подробные выкладки получения данного решения приведены в приложении 5):

$$y(x,t)=k\left(I_1\left(\xi\right)-I_2\left(\eta\right)\right), \tag{15}$$

где $\xi = x+b\cdot t$, $\eta = x-b\cdot t$, функции $I_1(\xi), I_2(\eta)$ определены следующими конечными рядами с использованием M и N из (14)

$$I_1\left(\xi\right)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{M}\sin\left(\omega\left(\dfrac{|\xi+b|\cdot|1-b|^k}{|1+b|^{k+1}}-1\right)\right), & |\xi+b|>1+b,\\ 0, & |\xi+b|<1+b\end{cases}$$

$$I_2\left(\eta\right)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{N}\sin\left(\omega\left(\dfrac{|\eta-b|\cdot|1-b|^k}{|1+b|^{k+1}}-1\right)\right), & |\eta-b|>1+b\\ 0, & |\eta-b|<1+b\end{cases}$$

Визуализацией процесса (15) могут служить графики положения нити в различные моменты времени при $k=0.4$, $\omega=4\pi$ и $b=5$ (Рис. 3 (1, 2, 3)).

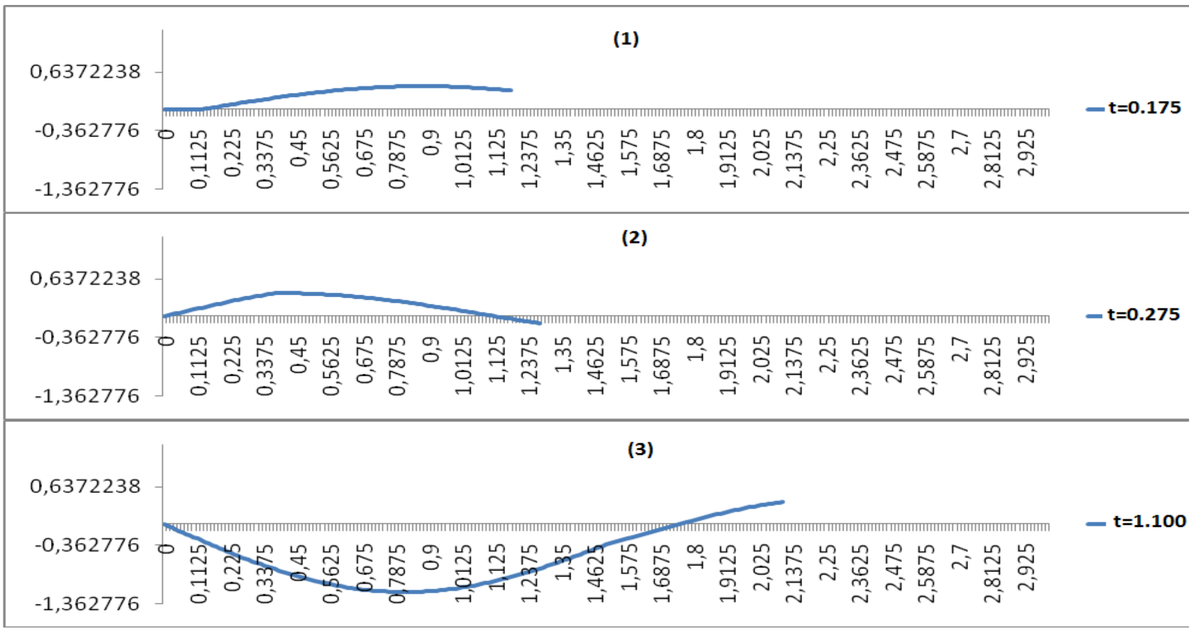

Рис.3 . Положение нити в три последовательных момента времени:

1) t = 0.175; 2) t = 0.275; 3) t = 1.1.

Решение в случае $b=1$ получается аналогично и имеет вид:

$$y(x,t)=k\left(I_1(x+t)-I_2(x-t)\right), \tag{16}$$

$$I_1=\begin{cases}\sin\left(\omega\left(\frac{1}{2}|x+t+1|-1\right)\right), & |x+t+1|\geq 2\\ 0, & |x+t+1|<2\end{cases},\quad I_2=\begin{cases}\sin\left(\omega\left(\frac{1}{2}|x-t-1|-1\right)\right), & |x-t-1|\geq 2\\ 0, & |x-t-1|<2\end{cases}$$

Аналогичные графики положения нити (16) в различные моменты времени для параметров $k=0.4$, $\omega=4\pi$ и $b=1$ представлены на Рис.4(1, 2, 3).

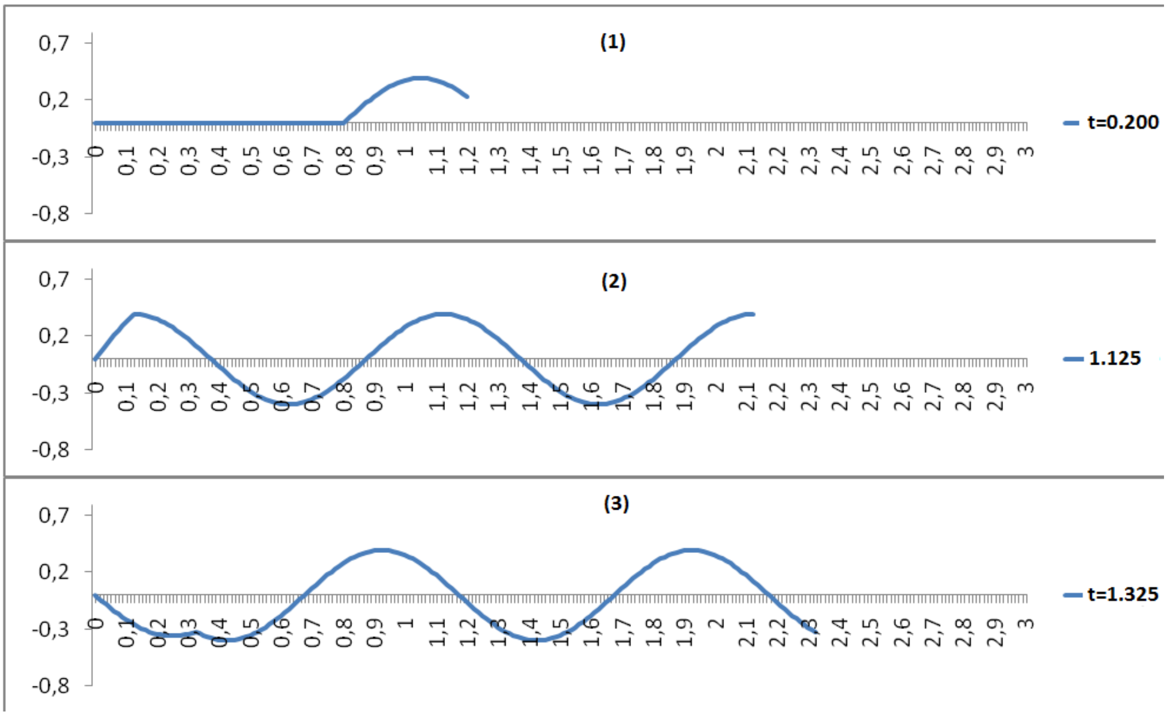

Рис.4 . Положение нити в случае размотки со скоростью поперечных волн для трех моментов времени: 1) t = 0.2, 2) 1.125, 3) 1.325.

В дополнение к приведенным результатам заметим, что решения (13) и (14) являются суммами волн, бегущих вправо, и волн, бегущих влево. Таким образом, полученные решения удовлетворяют волновому уравнению (1), также выполняются начальные и граничные условия (2) и (3). Доказательство данного утверждения подробно изложено в Приложении 6.

§3. Предельный случай размотки нити при нулевой начальной длине. В предельном случае, когда $L_0=0$, решение можно получить методом бегущих волн. Будем искать решение в размерных переменных. Общее решение волнового уравнения имеет вид:

$$y(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta),\ \text{где}\ \xi=x-b\cdot t,\ \eta=x+b\cdot t.$$

В случае $b \neq 1$ после подстановки данного решения в граничные условия получим следующую систему функциональных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&g\left(\left(\frac{b}{V_0}+1\right)z\right)-g\left((\frac{b}{V_0}-1)z\right)=k\sin\left(\omega z\right) \\
&f(z)=-g\left(-z\right)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Используя функциональные уравнения (17), можно вычислить все производные функции $g\left(\eta\right)$ в нуле и, применяя формулу Тейлора, найти вид этой функции. В результате получим решение в виде бесконечного ряда:

$$
y(x,t)=k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\omega^{2n+1}}{(2n+1)!\left[\left(\frac{b}{V_0}+1\right)^{2n+1}-\left(\frac{b}{V_0}-1\right)^{2n+1}\right]}\left\{\left(\frac{x-bt}{V_0}\right)^{2n+1}+\left(\frac{x+bt}{V_0}\right)^{2n+1}\right\},\ 0<x<V_0t
\tag{18}
$$

Решение в случае звукового движения $b=1$ получается аналогичным способом, однако имеет более простой вид:

$$
y(x,t)=k\sin\left(\frac{\omega}{2b}\left(x-bt\right)\right)+k\sin\left(\frac{\omega}{2b}\left(x+bt\right)\right),\ 0<x<bt
\tag{19}
$$

Для контроля было проведено сравнение полученных решений (15), (16) и решений (18), (19). Если в решении (15) перейти к размерным величинам и устремить начальную длину нити к нулю, то мы в точности получим решение (18). Во-вторых, можно проверить, что получится с решением, если подставить его в функциональные уравнения:

$$
f\left(\xi\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sin\omega\cdot\left(\frac{|\xi|\cdot|V_0-b|^k}{|V_0+b|^{k+1}}\right),\ g\left(\eta\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\sin\omega\cdot\left(\frac{|\eta|\cdot|V_0-b|^k}{|V_0+b|^{k+1}}\right).
$$

Данные функции $f\left(\xi\right)$ и $g\left(\eta\right)$ полностью удовлетворяют системе функциональных уравнений (17). Таким образом, решения, полученные с помощью преобразования Лапласа, полностью совпадают в предельном случае размотки нити при нулевой начальной длине с решениями (18), (19), полученными другим способом – методом бегущих волн.

Далее в этом предельном случае мы попытались графически оценить поведение амплитуды колебаний со временем. Сложность построения графика по решению (17) заключается в том, что оно является бесконечной суммой, и с ростом времени количество членов ряда для сохранения точности необходимо увеличивать. Однако для сравнительно малых времен можно показать идентичность решений, взяв малую величину L_0. График зависимости амплитуды середины нити от времени (Рис.5) при следующих параметрах $L_0 \to 0$, $k=1$, $\omega=1$, $b=15$ и $V_0=10$ полностью совпал для решений, построенных двумя методами. Напомним, что решение (15) стремится к решению (18) при уменьшении начальной длины нити. Заметим (Рис.5), что рассматриваемая середина нити – это не материальный элемент нити, а ее геометрический центр. Было отмечено, что максимальная амплитуда колебаний растет. Это вызвало необходимость более тщательного исследования вопроса асимптотической неустойчивости решения. В данной работе под неустойчивостью понимается рост максимальной амплитуды колебаний со временем.

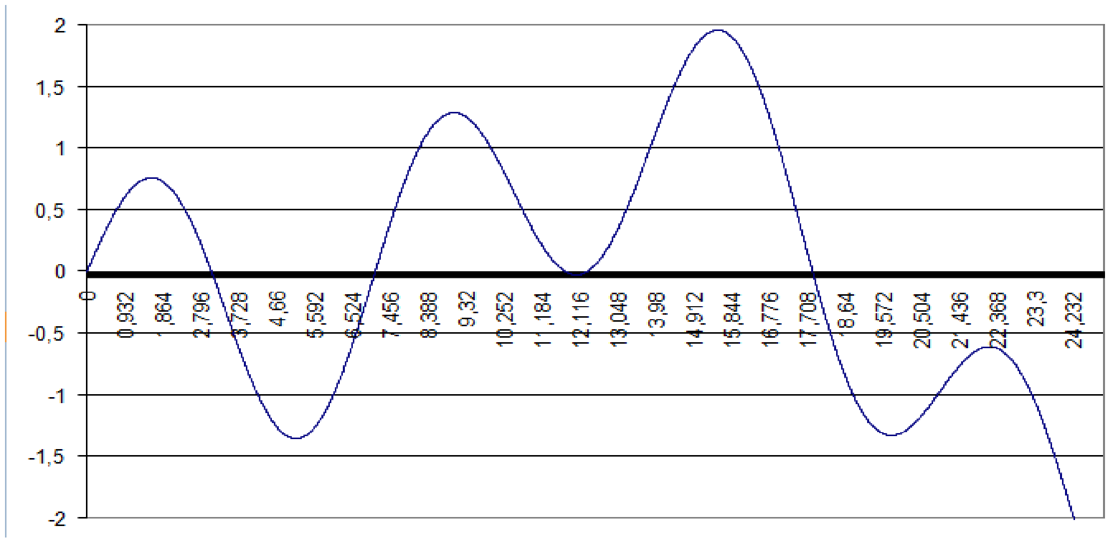

Рис. 5. График поперечных отклонений в геометрической середине нити с координатой

$$x=\frac{1}{2}\left(L_0+V_0t\right).$$

§4. Анализ устойчивости полученного решения. Для исследования устойчивости решения использовалась асимптотики поведения функции и ее преобразования Лапласа. Имеет место следующее утверждение: оригинал изображения $y(t)$ устойчив при $t\to\infty$ тогда и только тогда, когда образ $Y(p)=L(y)$ стремится к нулю при $p\to 0$.

Соответственно нами был вычислен предел образа поперечных смещений нити при стремлении параметра преобразования Лапласа p к нулю:

$$Y(s,p)\xrightarrow[p\to 0]{}\frac{k}{L_0}\cdot\left(ci\left(\frac{\omega L_0}{V_0}\right)\sin\left(\frac{\omega L_0}{V_0}\right)-si\left(\frac{\omega L_0}{V_0}\right)\cos\left(\frac{\omega L_0}{V_0}\right)\right)\cdot\frac{\ln|s-b|-\ln|s+b|}{\ln|1-b|-\ln|1+b|},$$

где $si(z)=-\int\limits_z^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^{z}\frac{\sin x}{x}dx-\frac{\pi}{2}$, $ci(z)=-\int\limits_z^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ - соответственно интегральный синус и косинус. В результате анализа было получено, что решение устойчиво только в следующих случаях:

a). $ci\left(\frac{\omega L_0}{V_0}\right)\sin\left(\frac{\omega L_0}{V_0}\right)=si\left(\frac{\omega L_0}{V_0}\right)\cos\left(\frac{\omega L_0}{V_0}\right)$; b). $k\to 0$; c). $L_0\to\infty$;

d) $s=0\Leftrightarrow x=0$; e) $b\to 0$; f) $b=0$

Эти результаты физически соответствуют:

a) амплитуда колебаний границы равна нулю;
b) начальная длина размотанного участка бесконечно велика;
c) скорость распространения поперечных возмущений в нити пренебрежимо мала по сравнению со скоростью размотки;
d) скорость распространения поперечных волн в нити в точности совпадает со скоростью размотки.

Очевидно, что все перечисленные ситуации практически соответствуют вырожденным случаям движения. Это означает, что на практике будет наблюдаться неограниченный рост максимума амплитуды колебаний с ростом времени. В отличие от классического резонанса происходит более медленный рост максимальной амплитуды. Для демонстрации роста максимальной амплитуды со временем на Рис. 6 приведен график зависимости координаты середины нити от времени при следующих параметрах: $L_0\to 0$, $k=1$, $\omega=1$, $b=15$, $V_0=10$, шаг по времени $\tau=1000$.

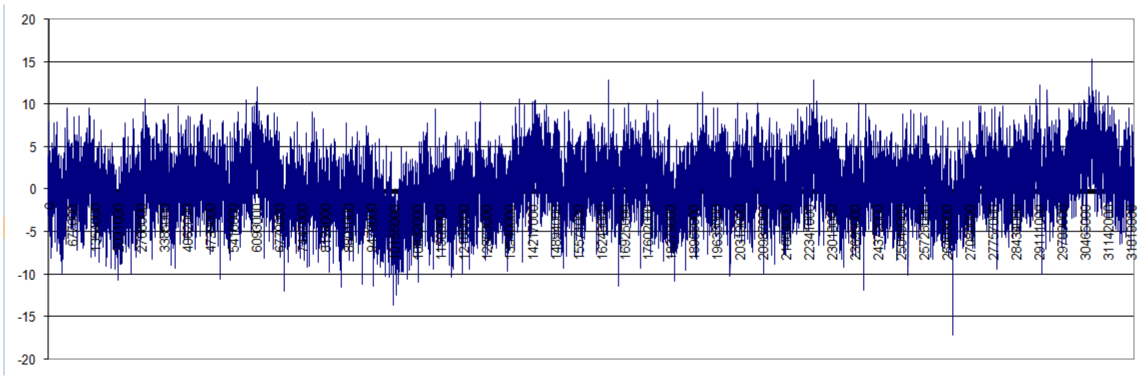

Рис. 6. График поперечных отклонений в точке с координатой $x = \frac{1}{2}\left(L_0 + V_0 t\right)$.

На Рис. 7. показана зависимость максимума амплитуды колебаний от времени для двух начальных длин нити.

Рис. 7.

§5. Основные результаты. В силу актуальности систем смотки и размотки нитей, тросов и канатов для современных космических технологий и приложений было проведено моделирование процесса инерционной размотки стекловолоконной тросовой системы большой длины. Все такие механизмы в том или ином виде содержат катушку как один из основных конструктивных элементов, что приводит в свою очередь к колебанию конца нити и, как следствие, распространению поперечных возмущений в ней. Основным результатом этой работы является найденное точное аналитическое решение, которое существенным образом зависит от своеобразного аналога числа Маха –

отношения скорости поперечных волн в нити к скорости ее размотки. Данное решение может быть использовано в качестве верификации численного моделирования более сложных процессов и сценариев размотки нити. Главной задачей данной работы был анализ роста максимальной амплитуды колебаний, т.к. это является существенным параметром для выполнения задач проекта. В результате нами были найдены все случаи устойчивого поведения нити. Показано, что практически это всегда соответствует лишь вырожденным случаям движения. В действительном движении всегда будет постепенный рост максимальной амплитуды со временем, хотя скорость этого роста значительно меньше по сравнению со случаем классического резонанса. На практике это означает, что подобные эффекты должны в обязательном порядке учитываться при проектировании тросовых систем и моделировании процессов размотки, поскольку малые возмущающие колебания всегда присутствуют в любом реальном процессе.

ГЛАВА 2.

Скользящий удар по гибкой растяжимой нити. Теория и эксперимент.

§1. Введение. Теория поперечного удара была детально развита в работах Х. А. Рахматулина [14-16], его учеников [17-21] и многих других авторов [22-23]. Нами рассматривается задача о внезапном скольжении сосредоточенной идеальной связи вдоль бесконечной идеальной растяжимой нити со скоростью близкой к скорости поперечных волн. Задача решается в нелинейной постановке в рамках модели идеальной растяжимой линейно упругой нити. Главная цель данного теоретических исследования и проведенных экспериментов – анализ явлений, возникающих при приближении скорости вынужденного разрыва к скорости поперечных волн. Напомним, что любые колебания нити являются совместной суперпозицией продольных и поперечных волн, поскольку любое поперечное отклонение струны от равновесного состояния немедленно приводит к изменению величины натяжения и это модулирует продольные волны.

§2. Задача о внезапном движении вынужденного разрыва вдоль нити. Пусть в начальный момент времени натянутая связью в точке M бесконечная нить покоится и имеет деформацию ε_0 (Рис.1). В точке M на нить действует сосредоточенная сила, обусловленная идеальной связью (идеальная связь означает отсутствие трения в точке контакта нити и связи). Считаем, что массовые силы отсутствуют (в динамических задачах вклад в решение массовых сил, как правило, мал). В частном случае, в начальный момент нить может быть не натянута (в этом случае $\varepsilon_0 = 0$ и реакция нити на связь в начальный момент равна нулю). Углы наклона между касательной к нити и осью x для участков слева и справа от связи в начальный момент считаем заданными и постоянными.

В момент времени $t = 0$ связь M начинает двигаться с постоянной скоростью $\overset{0}{V}$, направленной вдоль оси x.

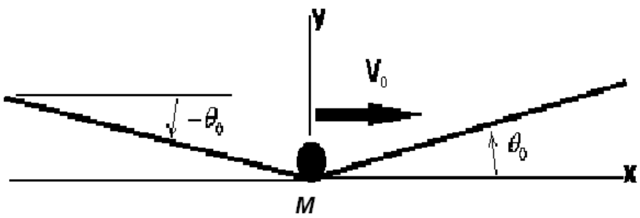

Рис. 1

Уравнения пространственного движения нити имеют следующий вид [5], [7]:

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=\frac{\partial(T\boldsymbol{\tau})}{\partial s},\quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}=\frac{\partial\left[(1+\varepsilon)\boldsymbol{\tau}\right]}{\partial t},\quad \boldsymbol{\tau}^2=1, \tag{1}$$

Система (1) замыкается уравнением состояния материала нити. Будем считать нить линейно упругой

$$T=\Sigma\varepsilon, \tag{2}$$

где $t-$ время, $s-$ начальная (в нерастянутом состоянии) длина дуги точки нити, $\Sigma-$ модуль упругости нити, T – натяжение, ε – относительное удлинение нити, $\mathbf{v}$ – скорость движения точек нити, ρ – линейная плотность нити.

Подвижная скользящая нагрузка модулирует в нити продольные и поперечные волны. Даже для нити конечной длины, до взаимодействия волн с границами в данной задаче отсутствует характерный линейный размер, что позволяет искать автомодельное решение. В работах Х.А. Рахматулина показано, что автомодельное решение зависит от единственной автомодельной переменной $\xi=s/(at)$, где $a=\sqrt{\Sigma/\rho}$ – скорость продольных волн в нити. С учетом уравнения состояния (2) уравнения (1) примут вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=a^2\frac{\partial(\varepsilon\boldsymbol{\tau})}{\partial s},\quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}=\frac{\partial\left[(1+\varepsilon)\boldsymbol{\tau}\right]}{\partial t},\quad \boldsymbol{\tau}^2=1$$

Перейдем к безразмерным переменным, используя следующий базовый набор размерных величин $\rho,\quad a=\sqrt{\Sigma/\rho}$ и безразмерные искомые функции $\mathbf{v}^*=\mathbf{v}/a$

$$-\xi\frac{d\mathbf{v}^*}{d\xi}=\frac{d(\varepsilon\boldsymbol{\tau})}{d\xi},\quad \frac{d\mathbf{v}^*}{d\xi}=-\xi\frac{d\left[(1+\varepsilon)\boldsymbol{\tau}\right]}{d\xi},\quad \boldsymbol{\tau}^2=1.$$

После исключения скорости, получим векторное равенство

$$\xi^2\left[\frac{d\varepsilon}{d\xi}\boldsymbol{\tau}+(1+\varepsilon)\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\xi}\right]=\frac{d\varepsilon}{d\xi}\boldsymbol{\tau}+\varepsilon\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\xi}.$$

Учитывая ортогональность единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$ и его производной $d\boldsymbol{\tau}/d\xi$, приходим к уравнениям

$$\left(\xi^2-1\right)\frac{d\varepsilon}{d\xi}=0,\quad \left(\xi^2-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\xi}=0.$$

Отметим, что при условиях $\xi\neq\pm1,\quad \xi\neq\pm\sqrt{\varepsilon/(1+\varepsilon)}$ полученная система уравнений имеет лишь тривиальное решение $\varepsilon=const,\quad \boldsymbol{\tau}=const$. Это означает, что в областях непрерывного решения нить движется с постоянными параметрами – скоростью, деформацией и вектором касательной. Особые точки $\xi \neq \pm 1, \quad \xi \neq \pm\sqrt{\varepsilon/(1+\varepsilon)}$ соответствуют фронтам сильного разрыва.

Допуская существование фронтов сильного разрыва продольных и поперечных волн, а также вынужденного разрыва, обусловленного скользящей связью, получим следующие условия [18] ($f^-, f^+ -$ соответственно значения искомых функций до и после разрыва):

На фронтах продольных волн сильного разрыва

$$\xi^* = \pm 1, \quad \boldsymbol{\tau}^- = \boldsymbol{\tau}^+, \quad \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^- = \pm\left(\varepsilon^- - \varepsilon^+\right)\boldsymbol{\tau}^- . \tag{3}$$

На фронтах поперечных волн сильного разрыва

$$\xi^* = \pm\sqrt{\varepsilon/(1+\varepsilon)}, \quad \varepsilon^- = \varepsilon^+, \quad \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^- = \mp\sqrt{\varepsilon^-\left(1+\varepsilon^-\right)}\left(\boldsymbol{\tau}^+ - \boldsymbol{\tau}^-\right) \tag{4}$$

Вынужденный фронт сильного разрыва обусловлен действием на нить со стороны связи сосредоточенной силой $\mathbf{N}$. Его скорость по точкам нити $\dot{S}$ не известна и подлежит определению в ходе решения задачи из следующих кинематических и динамических условий:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{v}^- + \left(1+\varepsilon^-\right)\boldsymbol{\tau}^-\dot{S} = \mathbf{v}^+ + \left(1+\varepsilon^+\right)\boldsymbol{\tau}^+\dot{S}, \quad \mathbf{V}_0 = V_0\mathbf{e}_\mathbf{x} , \tag{5}$$

$$\dot{S}\left(\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-\right) = \left(\varepsilon\boldsymbol{\tau}\right)^- - \left(\varepsilon\boldsymbol{\tau}\right)^+ - \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = N\mathbf{e}_\mathbf{N}, \quad \mathbf{e}_\mathbf{N} = \frac{\boldsymbol{\tau}^+ - \boldsymbol{\tau}^-}{\left|\boldsymbol{\tau}^+ - \boldsymbol{\tau}^-\right|} . \tag{6}$$

Таким образом, определение автомодельного движения нити в виде прямолинейных звеньев, переменной длины, разделенных фронтами сильного разрыва сводится к решению системы уравнений (3) – (6) с учетом начальных условий покоя. Обозначим неизвестные в соответствующих областях плоскости независимых переменных (s,t) в согласии с Рис.2., учитывая непрерывность некоторых параметров на соответствующих фронтах продольных и поперечных волн:

$$\text{в области (0)} \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \tau_x = \cos\theta_0, \tau_y = \sin\theta_0 ;$$

$$\text{в области (0')} \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \tau_x = \cos\theta_0', \tau_y = \sin\theta_0' ;$$

$$\text{в области (1)} \quad v_x = v_x^{(1)}, \quad v_y = v_y^{(1)}, \quad \varepsilon = \varepsilon^{(1)}, \quad \tau_x = \cos\theta_0, \tau_y = \sin\theta_0 ;$$

$$\text{в области (1')} \quad v_x = v_x^{(1')}, \quad v_y = v_y^{(1')}, \quad \varepsilon = \varepsilon^{(1')}, \quad \tau_x = \cos\theta_0', \tau_y = \sin\theta_0' ;$$

$$\text{в области (2)} \quad v_x = v_x^{(2)}, \quad v_y = v_y^{(2)}, \quad \varepsilon = \varepsilon^{(1)}, \quad \tau_x = \cos\theta_2, \tau_y = \sin\theta_2 ;$$

$$\text{в области (2')} \quad v_x = v_x^{(2')}, \quad v_y = v_y^{(2')}, \quad \varepsilon = \varepsilon^{(1')}, \quad \tau_x = \cos\theta_2', \tau_y = \sin\theta_2' .$$

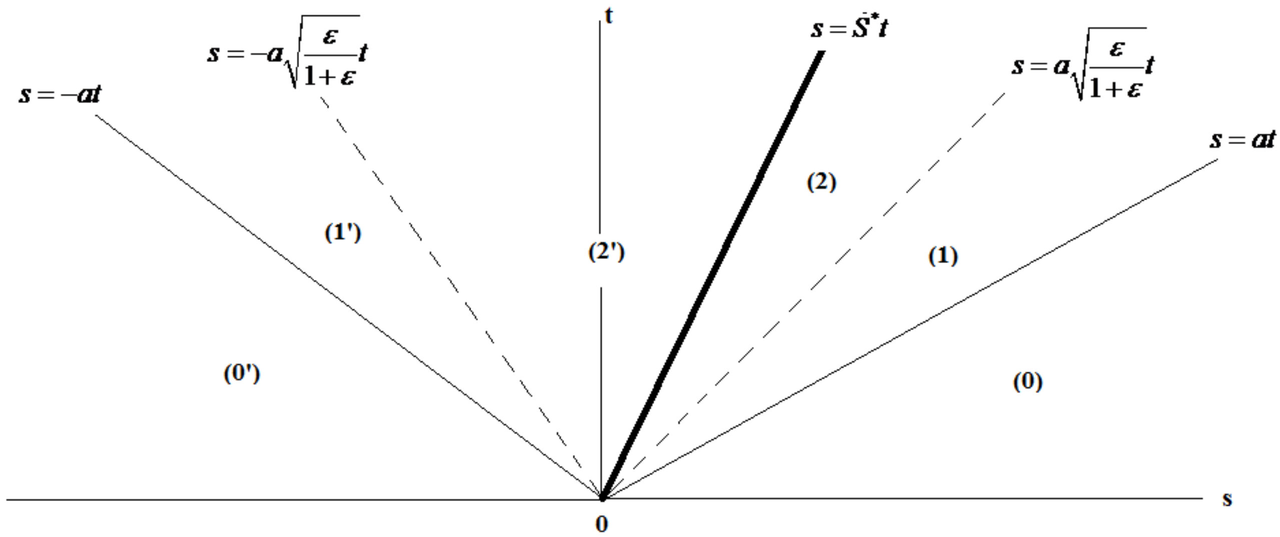

Рис.2. Области (0) и (0) соответствуют невозмущённым точкам, области (1) и (1’) – соответствуют точкам нити, находящимся между фронтами продольных и поперечных волн, области (2) и (2’) соответствуют точкам, которые находятся между фронтами поперечных волн и фронтом вынужденного разрыва.

Учитывая введенные обозначения из условий (3), (4), (5), (6) получим следующую замкнутую систему уравнений для четырнадцати неизвестных

$v_x^{(1)}, v_y^{(1)}, \varepsilon^{(1)}, v_x^{(2)}, v_y^{(2)}, v_x^{(1')}, v_y^{(1')}, \varepsilon^{(1')}, v_x^{(2')}, v_y^{(2')}, \theta_2, \theta_2', N, \dot{S}$

$$v_x^{(1)} = -\varepsilon^{(1)}\cos\theta_0, \quad v_y^{(1)} = -\varepsilon^{(1)}\sin\theta_0, \quad v_x^{(1')} = \varepsilon^{(1')}\cos\theta_0', \quad v_y^{(1')} = \varepsilon^{(1)}\sin\theta_0'$$

$$v_x^{(2)} - v_x^{(1)} = -\sqrt{\varepsilon^{(1)}\left(1+\varepsilon^{(1)}\right)}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_0\right), \quad v_y^{(2)} - v_y^{(1)} = -\sqrt{\varepsilon^{(1)}\left(1+\varepsilon^{(1)}\right)}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_0\right)$$

$$v_x^{(2')} - v_x^{(1')} = \sqrt{\varepsilon^{(1')}\left(1+\varepsilon^{(1')}\right)}\left(\cos\theta_2' - \cos\theta_0'\right), \quad v_y^{(2')} - v_y^{(1')} = -\sqrt{\varepsilon^{(1')}\left(1+\varepsilon^{(1')}\right)}\left(\cos\theta_2' - \cos\theta_0'\right)$$

$$v_x^{(2)} + \left(1+\varepsilon^{(1)}\right)\cos\theta_2\dot{S} = V_0, \quad v_y^{(2)} + \left(1+\varepsilon^{(1)}\right)\cos\theta_2\dot{S} = 0$$

$$v_x^{(2')} + \left(1+\varepsilon^{(1')}\right)\cos\theta_2'\dot{S} = V_0, \quad v_y^{(2')} + \left(1+\varepsilon^{(1')}\right)\cos\theta_2'\dot{S} = 0$$

$$\dot{S}\left(v_x^{(2')} - v_x^{(2)}\right) = \varepsilon^{(1)}\cos\theta_2 - \varepsilon^{(1')}\cos\theta_2' - N\frac{\cos\theta_2' - \cos\theta_2}{\sqrt{2\left(1-\cos\theta_2\cos\theta_2' - \sin\theta_2\sin\theta_2'\right)}}$$

$$\dot{S}\left(v_y^{(2')} - v_y^{(2)}\right) = \varepsilon^{(1)}\sin\theta_2 - \varepsilon^{(1')}\sin\theta_2' - N\frac{\sin\theta_2' - \sin\theta_2}{\sqrt{2\left(1-\cos\theta_2\cos\theta_2' - \sin\theta_2\sin\theta_2'\right)}}$$

Методом исключения уменьшим количество уравнений

$$
\begin{aligned}
&\left(\varepsilon^{(1')}-\varepsilon_0\right)\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon^{(1')}\left(1+\varepsilon^{(1')}\right)}\left(\cos\theta_2'-\cos\theta_0\right)+\left(1+\varepsilon^{(1')}\right)\cos\theta_2'\cdot\dot{S}=V_0\\
&\left(\varepsilon_0-\varepsilon^{1'}\right)\varepsilon^{(1')}\sin\theta_0+\sqrt{\varepsilon^{(1')}\left(1+\varepsilon^{(1')}\right)}\left(\sin\theta_2'+\sin\theta_0\right)+\left(1+\varepsilon^{(1')}\right)\sin\theta_2'\cdot\dot{S}=0\\
&\left(\varepsilon_0-\varepsilon^{(1)}\right)\cos\theta_0-\sqrt{\varepsilon^{(1)}\left(1+\varepsilon^{(1)}\right)}\left(\cos\theta_2-\cos\theta_0\right)+\left(1+\varepsilon^{(1)}\right)\cos\theta_2\cdot\dot{S}=V_0\\
&\left(\varepsilon_0-\varepsilon^{(1)}\right)\sin\theta_0-\sqrt{\varepsilon^{(1)}\left(1+\varepsilon^{(1)}\right)}\left(\sin\theta_2-\sin\theta_0\right)+\left(1+\varepsilon^{(1)}\right)\sin\theta_2\cdot\dot{S}=0\\
&\left(\dot{S}\right)^2\cdot\left[\left(1+\varepsilon^{(1)}\right)\cos\theta_2-\left(1+\varepsilon^{(1')}\right)\cos\theta_2'\right]=\varepsilon^{(1)}\cos\theta_2-\varepsilon^{(1')}\cos\theta_2'-N\cdot F\\
&\left(\dot{S}\right)^2\cdot\left[\left(1+\varepsilon^{(1)}\right)\sin\theta_2-\left(1+\varepsilon^{(1')}\right)\sin\theta_2'\right]=\varepsilon^{(1)}\sin\theta_2-\varepsilon^{(1')}\sin\theta_2'-N\cdot G
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

где для удобства введены функции

$$F=\frac{\cos\theta_2-\cos\theta_2'}{\sqrt{2-2\cos\theta_2\cos\theta_2'-2\sin\theta_2\sin\theta_2'}},\quad G=\frac{\sin\theta_2-\sin\theta_2'}{\sqrt{2-2\cos\theta_2\cos\theta_2'-2\sin\theta_2\sin\theta_2'}}.$$

Система (7) решалась численно. При решении системы мы задавали параметры: θ_0, ε_0, V_0, и получали значения $\dot{S}$, $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(1')}$, θ_2, θ_2', N. В результате был получен ожидаемый (в силу отсутствия трения) результат постоянства деформаций между фронтами продольных волн.

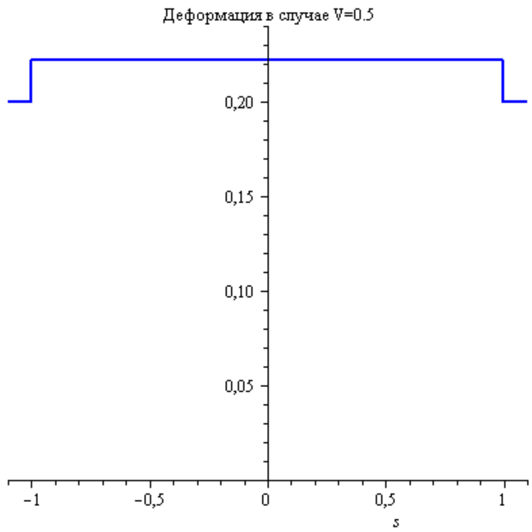

Рис. 3. Теоретическая зависимость деформаций от дуговой координаты s вдоль нити для идеальной связи

На Рис. 3 приведена в качестве примера зависимость деформации от дуговой координаты s для фиксированного момента времени $t=1$ при следующих значениях начальных параметров $t=1,\quad V_0=0.5,\quad \varepsilon_0=0.2,\quad \theta_0=\pi/36$.

В результате численного решения получилась возрастающая зависимость деформации между фронтами продольных волн от скорости вынужденного разрыва, причем переход к “сверхзвуковому” случаю движения происходит в точке, находящейся в области значений графика с наименьшим радиусом кривизны (Рис. 4).

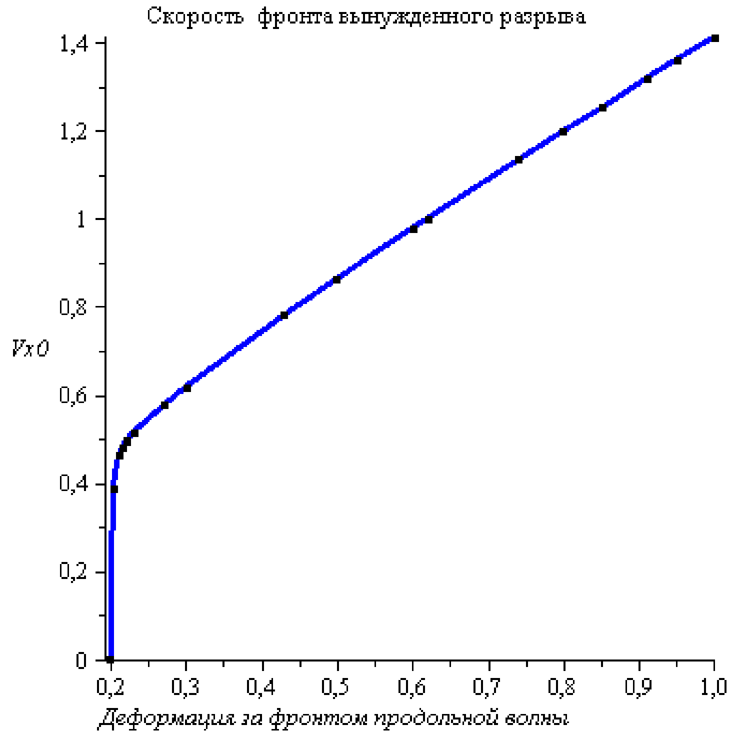

Рис. 4. Зависимость деформаций между фронтами продольных волн от скорости вынужденного разрыва.

Интересно изменение формы нити при возрастании скорости вынужденного разрыва. На Рис.5 приведена форма нити для трёх значений скорости при тех же значениях параметров $t=1, \quad \varepsilon_0 = 0.2, \quad \theta_0 = \pi/36$. Рис.5(а) соответствует дозвуковому движению связи, Рис.5(б) – случай движения связи со скоростью, равной скорости поперечных волн, Рис.5(в) соответствует сверхзвуковому движению.

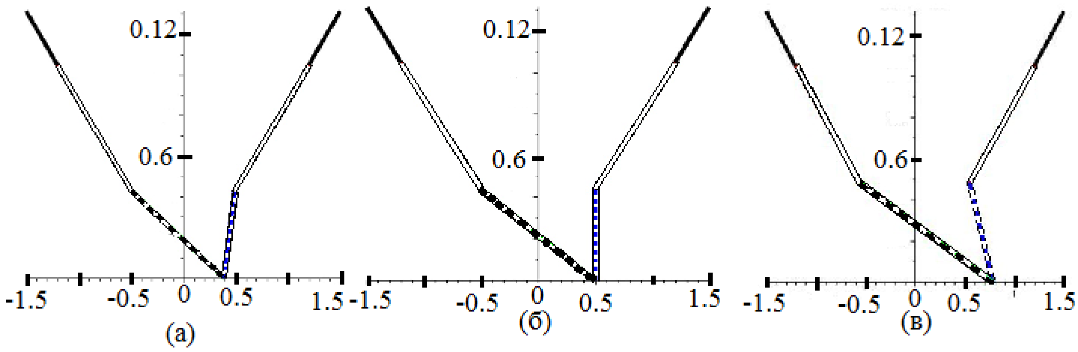

Рис. 5. Графики формы нити для: а) $V_0 = 0.4$, дозвуковой случай движения связи; б) $V_0 = 0.5$, случай движения связи со скоростью поперечных волн; в) $V_0 = 0.7$, сверхзвуковой случай движения связи.

На Рис.5 черные линии – области начальных значений, белые – области между продольным и поперечным фронтом, пунктиры – области между поперечным фронтом и фронтом вынужденного разрыва. Расчеты проводились для разных наборов начальных параметров. Качественно результаты аналогичны приводимым примерам. Деформация нити растёт с ростом скорости связи. При превышении некоторого характерного значения скорости скользящей связи скорость роста деформаций резко падает. При этом угол наклона нити перед скользящей по ней связью становится больше $\pi/2$.

§3.Результаты эксперимента. Параллельно в НИИ механики МГУ был проведен эксперимент, моделирующий данную задачу. Общая схема экспериментальной установки представлена на Рис.6. Нить (1) с маркерами, позволяющими отслеживать движение конкретных материальных точек, натянута горизонтально и оттянута роликом (2), жестко связанным с подвижной кареткой (3). Каретка (3) может скользить по направляющим балкам (5). Разгон каретки осуществляется резиновой тягой (4). Для масштабирования используется линейка (6).

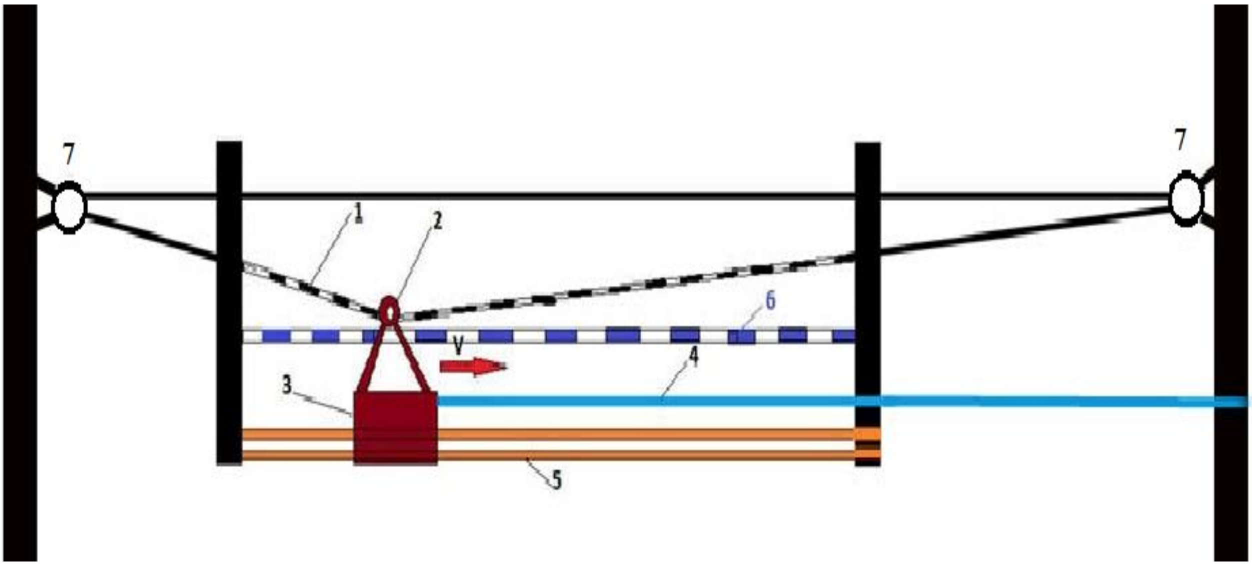

Рис. 6. Общая схема экспериментальной установки.

Отметим, что с целью увеличения времени рабочего участка нить была закольцована через гладкие блоки (7). В результате удалось сдвинуть по времени влияние отражённых продольных волн. Этим обеспечивается то, что два продольных фронта пробегают по резине, не отражаясь от роликов и не возвращаясь в рабочую зону эксперимента (длительность эксперимента 0.11 сек., рассчитанная скорость продольных волн 35 м/сек., таким образом, за время эксперимента фронты успевают пройти не более 4 метров в каждую сторону). Динамика нити фиксировалась съёмкой высокоскоростной камеры. Нанесённые на нить маркеры позволяли определять положение материальных точек на каждом кадре, что позволяло после обработки находить скорости и деформации.

Для эксперимента использовалась резина со следующими физическими свойствами. Линейная плотность резины $\rho = 17 \cdot 10^{-4}$ $кг/м$, площадь поперечного сечения $F_0 = 1.6 \cdot 10^{-6}$ $м^2$. Коэффициент пропорциональности между нагрузкой и возникающими в исследуемой резине деформациями $\Sigma \approx 2$ Н, скорость продольных волн $a = 35$ $м/с$. Данные характеристики являются осреднёнными. Все эксперименты по вычислению параметров проводились несколько раз с разными длинами резины для обеспечения большей точности и достоверности результатов. На Рис.7 представлены результаты экспериментов по определению модуля упругости. Они показывают, что в исследуемом диапазоне деформаций нить можно считать линейно упругой.

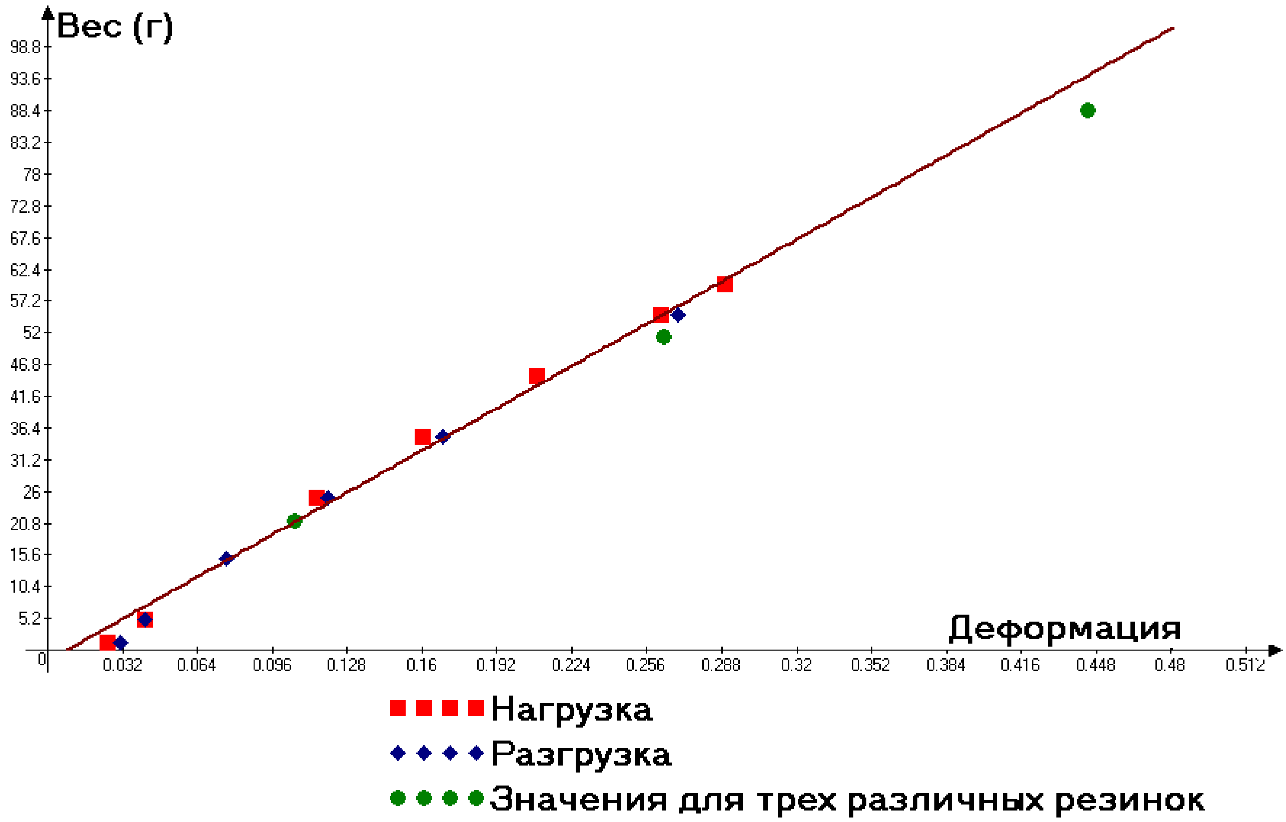

Рис. 7.

В начальный момент времени у нас задавалась деформация ε_0, начальные углы впереди ролика $\theta_0^+ = 0.24$ радиан и за ним $\theta_0^- = -0.44$ задает геометрия задачи. Силой натяжения резины определяется скорость поперечных волн. И соответственно, зная ту рабочую скорость, которую достигает каретка с роликом в ходе эксперимента, и уменьшая начальное натяжение резины, мы достигали необходимого эффекта – в ходе эксперимента скорость ролика превосходила скорость поперечных волн в резине.

В ходе эксперимента, скорость движения ролика в рабочей зоне возрастала от значения $8.7\,м/с$, в момент времени $t = 0.06\,с$, – до $12.6\,м/с$, в момент времени $t = 0.11\,с$. Погрешность определения скорости составляла $0.24\,м/с$ (Рис. 8).

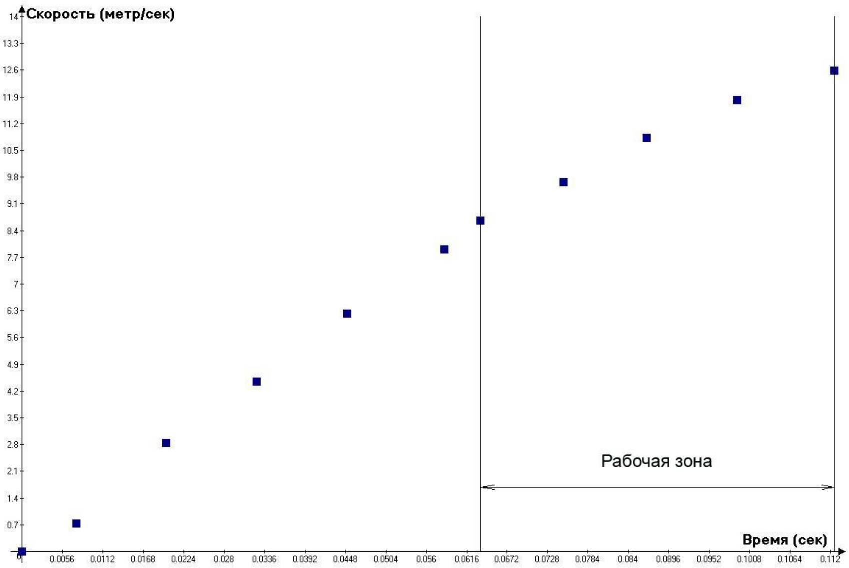

Рис. 8. Зависимость скорости движения вынужденного разрыва от времени

При обработке эксперимента были получены значения деформации впереди и за роликом в различные моменты времени, которые соответствуют как случаям “дозвукового” движения ролика, так и “сверхзвукового”. В качестве примера на Рис. 9 представлен сводный результат по деформациям при обработке пяти кадров. Начальному распределению деформации соответствует горизонтальная прямая. Деформации представлены в системе координат, связанной с роликом. Вертикальная черта определяет положение ролика. Экспериментальные точки на этом графике соединены линиями для более четкой визуализации и анализа амплитуды. Исходя из полученных данных, можно сделать следующий вывод – в эксперименте существенную роль играет сила трения. Видно, что за счет нее непосредственно впереди ролика деформации падают, а затем начинают расти.

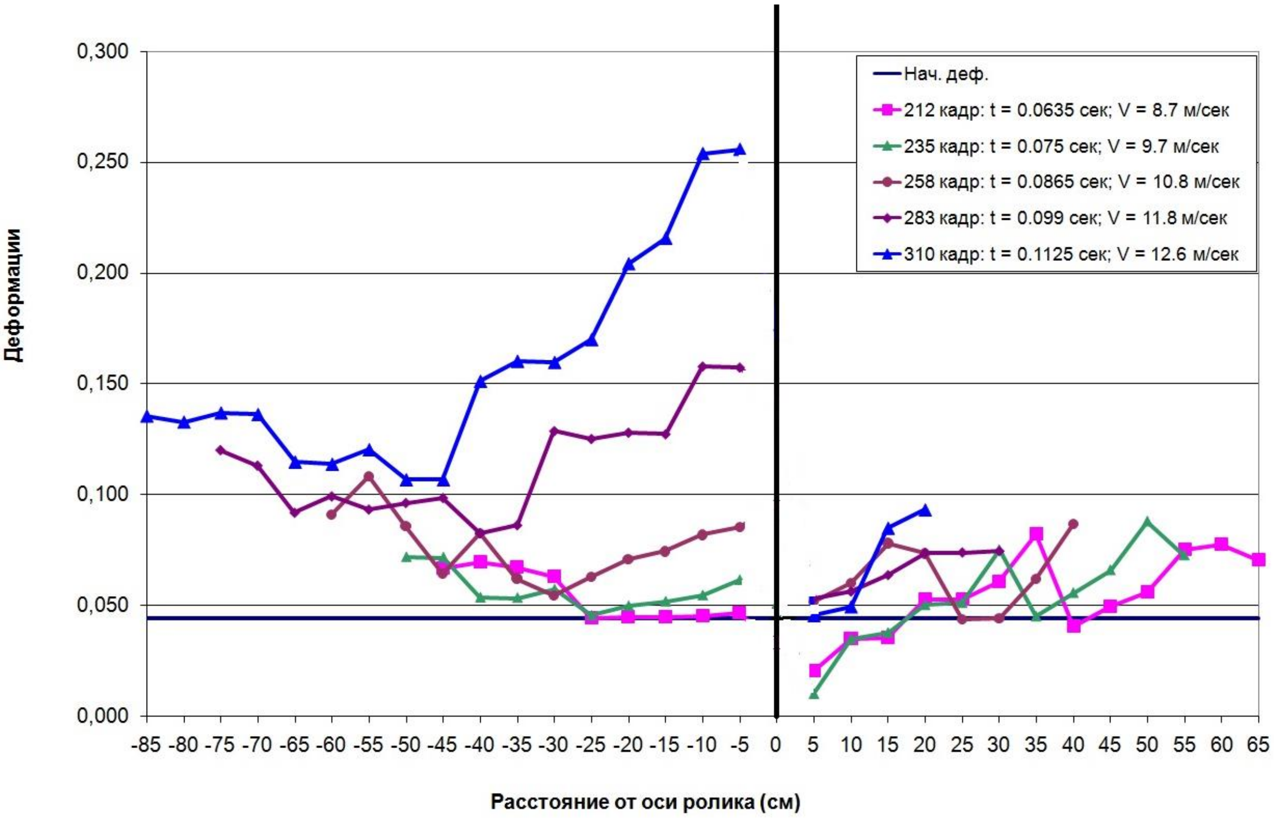

Рис. 9. Распределение деформаций вдоль нити

В случае относительно небольших скоростей “дозвукового” режима движения (скорость ролика 8.7 и 9.7 метр/сек соответственно) перед роликом образуется даже участок сжатия (горизонтальная линия – начальные деформации). В то же время непосредственно за роликом образуется область повышенных деформаций.

В результате обработки была найдена лагранжевая скорость движения ролика по точкам нити. Интересно, что в результате, эта скорость оказалась практически постоянной и не зависящей от Эйлеровой скорости движения связи. С учетом погрешностей эту скорость можно с достаточной степенью точности считать постоянной величиной (Рис. 10). Отметим, что на графике прямыми линиями нанесен коридор погрешностей.

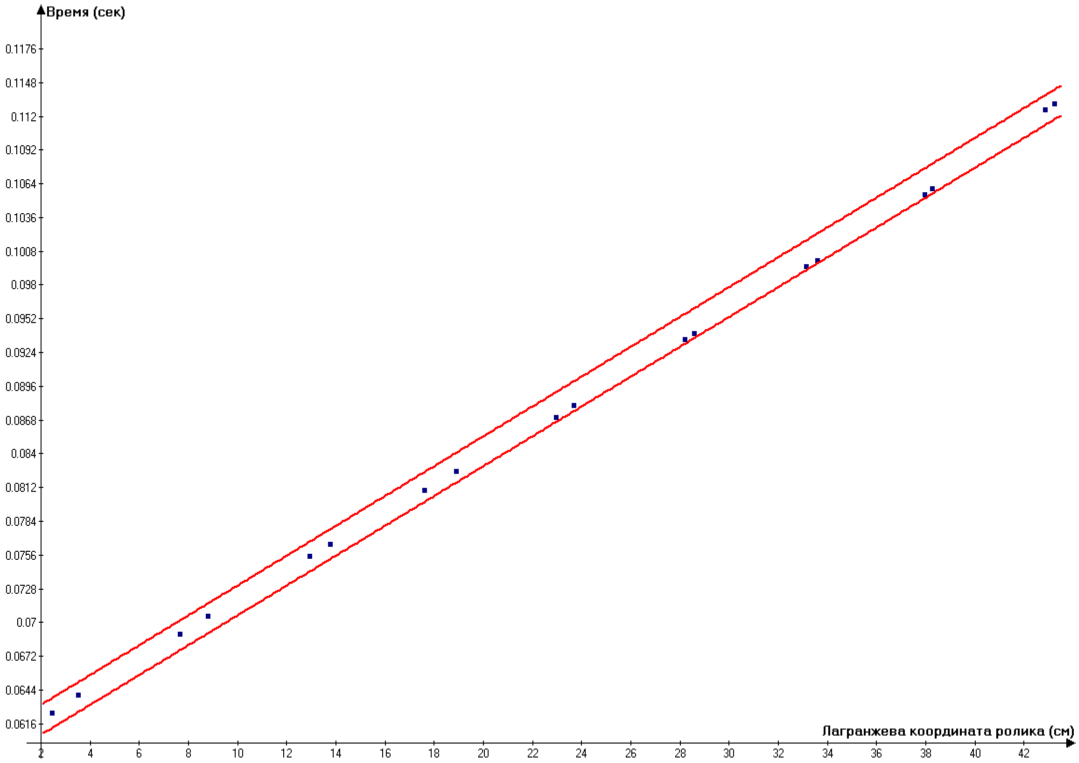

Рис. 10. Зависимость дуговой координаты положения подвижной связи от времени.

§4. Сравнение теории и эксперимента. Напомним, что решая теоретическую задачу, мы считали, что связь идеальная, а также начальные углы в нити равными. В эксперименте отчетливо проявляется влияние силы трения. Таким образом, для адекватного сравнения эксперимента и теории необходимо решить рассмотренную выше теоретическую задачу, учитывая трение. Взяв за основу полученный результат, мы считали, что неизвестная скорость $\dot{S}$ является в системе (7) постоянной величиной определённой из эксперимента (Рис.10). Зато в системе появляется новая неизвестная переменная – коэффициент трения. В результате система разлагается на три независимые системы. Первая и вторая определяют деформации и углы соответственно впереди и за вынужденным разрывом. Третья определяет реакцию связи и коэффициент трения, уже исходя из полученных решений первой и второй системы. Так как эти две системы решаются параллельно, то общее решение существенно зависит от Лагранжевой скорости вынужденного разрыва, которая определялась экспериментально.

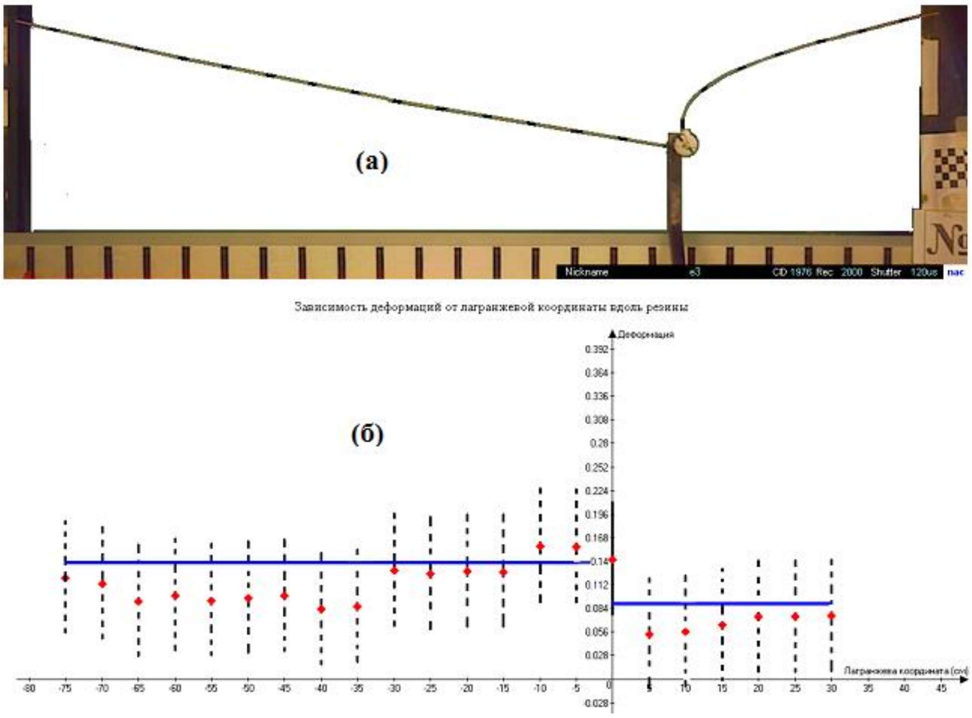

Рис. 11. (а) - положение нити в момент времени $t = 0.09 с$ при скорости связи $V_0 = 11.8\ м/с$ (эксперимент), (б) – соответствующая зависимость деформации от дуговой координаты: сплошная линия – теоретическое решение; точки – результаты эксперимента; пунктиры – доверительный интервал.

На Рис. 11(а) представлен кадр из эксперимента, соответствующий времени $t = 0.09\ с$ и скорости движения ролика $V_0 = 11.8\ м/с$. На Рис.11(б) приведены теоретические (сплошная линия) и соответствующие этому кадру экспериментальные значения деформаций (точки) вместе с коридором погрешностей (пунктиры). Следует отметить, что для всех обработанных кадров теоретически рассчитанные деформации находятся в коридоре погрешностей, связанных с экспериментально полученными деформациями. Теоретический результат наиболее отклоняется от экспериментального непосредственно в области ролика, где определение деформации наименее точно. Одной из причин является и то, что в этой области существенную роль играет изгибная жесткость резины, не учитываемая в модели идеальной нити. В таблицах 1 и 2 приведены относительные отклонения результатов по деформациям в теории и эксперименте.

Таблица 1. Относительная погрешность деформации перед роликом.

Кадр \ расстояние (см.)	0	10	20	30	40	50	60
212 кадр: t=0.063 с., V_0 =8.7 м/с	104%	92%	28%	11%	66%	20%	13%
235 кадр: t=0.075 с., V_0 =9.7 м/с	41%	106%	43%	4%	29%	18%	
258 кадр: t=0.086 с., V_0 =10.8м/с	16%	34%	9%	81%	8%		
283 кадр: t=0.099 с., V_0 =11.8м/с	37%	58%	21%	19%			
310 кадр: t=0.112 с., V_0 =12.6м/с	44%	96%	4%				

Таблица 2. Относительная погрешность деформации позади ролика.

Кадр \ расстояние (см.)	-60	-50	-40	-30	-20	-10	0
212 кадр: t=0.063 с., V_0 =8.7 м/с			3%	8%	52%	50%	104%
235 кадр: t=0.075 с., V_0 =9.7 м/с		26%	68%	58%	81%	65%	41%
258 кадр: t=0.086 с., V_0 =10.8м/с	26%	34%	40%	112%	62%	41%	16%
283 кадр: t=0.099 с., V_0 =11.8м/с	39%	43%	67%	7%	8%	13%	37%
310 кадр: t=0.112 с., V_0 =12.6м/с	37%	46%	3%	2%	24%	39%	44%

Как и следовало ожидать, наибольшие отклонения возникают в области связи (ролик), а также в области бегущего впереди него поперечного фронта. В этих областях вместо излома (модель идеальной нити) возникают конечные радиусы кривизны резины, связанные с ее изгибной жесткостью. Теоретическое решение задачи скольжения связи с трением при использовании экспериментальных результатов для величины лагранжевой скорости (Рис.10) позволили определить зависимость динамического коэффициента вязкого трения от скорости (Рис.12). Его зависимость от скорости нелинейная. Для малых дозвуковых скоростей коэффициент вязкого трения равен ≈ 0.005. В диапазоне сверхзвуковых скоростей движения связи он возрастает на порядок, выходя на некоторое практически постоянное значение ≈ 0.06 при изменении скорости движения связи на величину $\approx 4 м/с$.

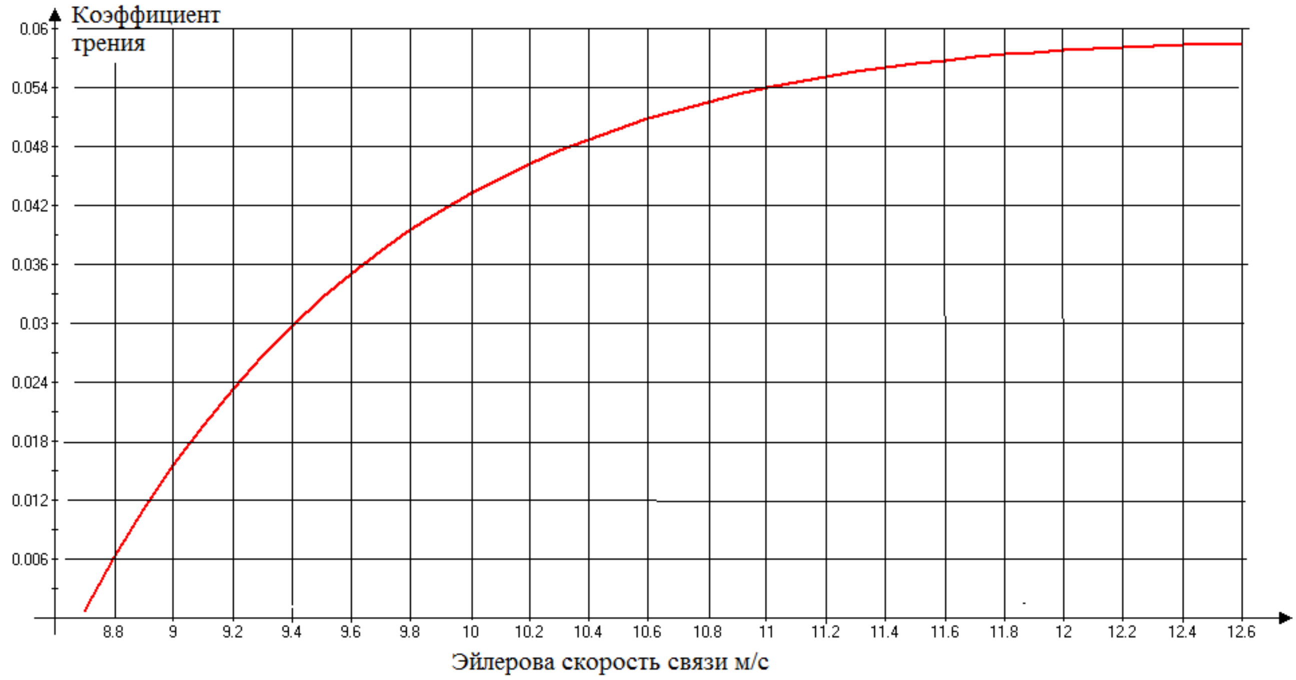

Рис.12. Зависимость коэффициента трения от скорости связи.

Отметим, что сила вязкого трения пропорциональна скорости проскальзывания нити, т.е. лагранжевой скорости вынужденного разрыва $\dot{S}$, и направлена перпендикулярно биссектрисе угла излома нити, возникающего в точке приложения идеальной связи: $\mathrm{F}_{\text{трения}} = k \cdot \dot{S} \cdot \mathbf{e}_\tau$, где k – динамический коэффициент вязкого трения, а $\mathbf{e}_\tau = \dfrac{\boldsymbol{\tau}^+ + \boldsymbol{\tau}^-}{\left|\boldsymbol{\tau}^+ + \boldsymbol{\tau}^-\right|}$.

§5. Заключение. Экспериментально и теоретически исследована нелинейная задача о скольжении сосредоточенной связи вдоль гибкой растяжимой нити с конечными деформациями и перемещениями. Показано, что существует некоторое критическое значение скорости движения точечной нагрузки, при превышении которого форма нити и поведение решения резко меняются. Определена зависимость динамического коэффициента вязкого трения от скорости. Оказалось, что при переходе движения связи в сверхзвуковой режим коэффициент вязкого трения сначала быстро возрастает на порядок, а затем практически становится постоянной величиной. Результаты сравнения показали приемлемую точность выбранной модели нити.

ГЛАВА 3.

Задача о динамическом прогибе балки.

§1. Введение. Одной из мало изученных задач механики, является определение характеристик среды при движении в ней внешнего тела со скоростями близкими к скорости звуковых волн [24]. Между тем, переход через скорость звука является критическим для всех волновых задач. При решении стационарных линейных задач в газовой динамике [12] при переходе через скорость звука меняется тип уравнений (эллиптический тип меняется на гиперболический тип). Отметим, что аналогичные эффекты характерны и для движения тел в твердых деформируемых средах, в которых присутствуют волны двух типов – продольные и поперечные [25]. Увеличение скорости движения поездов уже приблизило эту скорость к скорости поперечных волн, характерной для «пути» (здесь имеется в виду вся система – «рельсы и шпалы, лежащие на грунтовом основании»). В данное время все более широко применяются канатные дороги, где роль рельса выполняет натянутые балки или тросы. В качестве примера можно привести проекты висячих струнных дорог А.Э. Юницкого (пробный проект уже реализован в Нижнем Новгороде). В этом проекте заявляется о возможной скорости движения транспорта – 500 км/час, что может быть вполне сопоставимым со скоростью поперечных волн. Это позволяет говорить об актуальности и новизне такого рода задач, поскольку они имеют как практическую значимость, так и фундаментальный интерес. Поскольку все волновые задачи, независимо от типа волн и объектов, в которых они распространяются, имеют множество схожих аспектов поведения, для анализа данного эффекта выбрана балка Кирхгофа-Лява [26, 27].

§2. Задача о влиянии скорости подвижной нагрузки на изгиб натянутой балки.

Предварительно горизонтально натянутая балка с шарнирно закрепленными концами находится в поле сил тяжести (Рис.1). В начальный момент времени она неподвижна и находится в равновесии. В некоторый момент времени на неё начинает действовать подвижная сосредоточенная сила [28], которую можно, задавая линейную плотность, представить в форме $\vec{\mathbf{q}} = -m_0 g\delta(x + l - V_0 t)\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}$ (для случая движения нагрузки с постоянной скоростью).

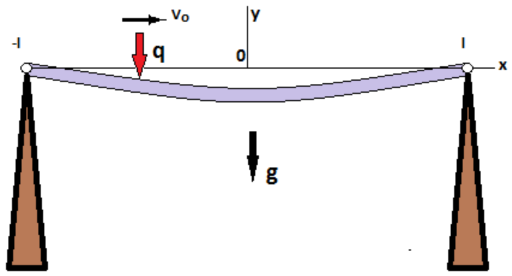

Рис. 1

Мы считали балку однородной и линейно упругой, а также что для балки верна гипотеза плоских сечений. Рассматривался процесс плоских непрерывных прогибов балки. В нашем исследовании мы считали, что прогибы балки малы (фактически считаем балку нерастяжимой). В рамках данной линейной теории мы получаем, что натяжение балки остается постоянным ($T = T_0 = const$), более того $x \approx s$, $\theta \approx \partial y / \partial x$, где $\boldsymbol{\tau} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathbf{v} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ - естественные векторы для балки, Q и T – перерезывающая сила и сила натяжения балки. С учетом данных предположений и перехода к безразмерным переменным по следующему базису: l – длина половины балки, $\tilde{\rho} F_0$ – линейная плотность балки, $b = \sqrt{T_0 / \tilde{\rho} F_0}$ – характерная скорость, мы решали следующую систему (подробный вывод данных уравнений приведен в Приложении 7):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -q^2 \dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - f - \mu f \cdot \delta(x + 1 - vt), \\ t = 0, \quad y = y_0(x), \quad \dfrac{\partial y}{\partial t} = 0 \\ x = \pm 1, \quad y = 0, \quad \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

где $q^2 = \dfrac{Eh^2}{12 l^2 \tilde{\rho} b^2}$, $f = \dfrac{gl}{b^2}$, $\mu = \dfrac{m_0}{\tilde{\rho} F_0 l}$, $v = \dfrac{V}{b}$, $\tilde{\rho}$ - плотность ее материала, F_0 - площадь поперечного сечения, EJ - изгибная жесткость (E – модуль Юнга, J – геометрический момент инерции сечения).

Заметим также, что условие шарнирного закрепления балки на концах $x = \pm 1$ налагает следующие ограничения на функцию $y = y_0(x)$:

$$x = \pm 1: \; y_0 = 0, \; \frac{d^2 y_0}{dx^2} = 0 \qquad (2)$$

Поскольку параметр f не зависит от времени, систему (1) можно представить в виде двух систем, статической и динамической. Сложность представляет решение как раз динамической системы. Ее мы решали методом разделения переменных. Нами была вычислена полная система собственных функций. В результате мы получили точное аналитическое решение (3) вышеизложенной задачи (смотри приложение 8).

$$y(x,t) = \underbrace{-\frac{q^2 f}{ch\left(q^{-1}\right)} ch\left(\frac{x}{q}\right) + f\,\frac{x^2-1}{2} + q^2 f}_{\text{Решение статической задачи}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} T_n^1(t)\cdot \sin \pi n x + \sum_{n=0}^{\infty} T_n^2(t)\cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right) x}_{\text{Решение динамической задачи}}$$

,

$$T_n^i(t) = \frac{\mu f \cdot (-1)^n}{p_i(n)^2\left[q^2\cdot p_i(n)^2 + 1 - \nu^2\right]}\cdot\left[\frac{\nu}{\sqrt{q^2\cdot p_i(n)^2+1}}\sin\left[p_i(n)\sqrt{q^2\cdot p_i(n)^2+1}\right]t - \sin p_i(n)\nu t\right]$$

в случае, если $\sqrt{q^2\cdot p_i(n)^2+1} \neq \nu$;

$$T_n^i(t) = \frac{\mu f \cdot (-1)^{n+1}}{2 p_i(n)\nu}\left[\frac{1}{p_i(n)\sqrt{q^2\cdot p_i(n)^2+1}}\sin\left[p_i(n)\sqrt{q^2\cdot p_i(n)^2+1}\right]t - \cos\left(p_i(n)\nu t\right)\cdot t\right]$$

в случае, если $\sqrt{q^2\cdot p_i(n)^2+1} = \nu$; где $p_1(n) = \pi n$, $p_2(n) = \frac{\pi}{2} + \pi n$. (3)

Таким образом, нами получен целый набор критических скоростей $\sqrt{q^2\cdot(\pi n)^2+1} = \nu$ и $\sqrt{q^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2+1} = \nu$, при которых, как видно из решения, наступает резонанс. То есть амплитуда колебаний неограниченно возрастает и предположение о малости прогибов нарушается.

Таким образом, чтобы в линейной постановке проанализировать именно переход скорости нагрузки через характерную скорость балки, мы дополнительно рассмотрели случай равноускоренного движения нагрузки (4).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -q^2 \dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - f - \mu f \cdot \delta(x + 1 - \dfrac{1}{4} t^2) \\ t = 0, \quad y = y_0(x), \quad \dfrac{\partial y}{\partial t} = 0 \\ x = \pm 1, \quad y = 0, \quad \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Аргумент дельта-функции Дирака первого уравнения системы (8) задается условием перехода скорости нагрузки через характерную скорость балки именно в начале координат. Данную задачу мы решали совершенно аналогично предыдущей. Также было найдено решение статической задачи. Динамическая задача решалась методом разделения переменных. Для нее, конечно же, сохраняется та же система собственных функций. В результате получено следующее точное аналитическое решение (5).

$$y(x,t) = \underbrace{-\frac{q^2 f}{ch\left(q^{-1}\right)} ch\left(\frac{x}{q}\right) + f\,\frac{x^2-1}{2} + q^2 f}_{\text{Решение статической задачи}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} T_n^1(t) \cdot \sin \pi n x + \sum_{n=0}^{\infty} T_n^2(t) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) x}_{\text{Решение динамической задачи}}$$

,

$$T_n^i(t) = T_i \cdot \{(\cos\left(\frac{p_i^2}{4a_i}\right) FS\left(\frac{2a_i t + p_i}{\sqrt{2\pi a_i}}\right) - \sin\left(\frac{p_i^2}{4a_i}\right) FC\left(\frac{2a_i t + p_i}{\sqrt{2\pi a_i}}\right) +$$

$$+ \cos\left(\frac{p_i^2}{4a_i}\right) FS\left(\frac{|2a_i t - p_i|}{\sqrt{2\pi a_i}}\right) - \sin\left(\frac{p_i^2}{4a_i}\right) FC\left(\frac{|2a_i t - p_i|}{\sqrt{2\pi a_i}}\right) +$$

$$+ 2\sin\left(\frac{p_i^2}{4a_i}\right) FC\left(\frac{p_i}{\sqrt{2\pi a_i}}\right) - 2\cos\left(\frac{p_i^2}{4a_i}\right) FS\left(\frac{p_i}{\sqrt{2\pi a_i}}\right)) \cdot \sin p_i t +$$

$$+ (\cos\left(\frac{p_i^2}{4a_i}\right) FC\left(\frac{2a_i t + p_i}{\sqrt{2\pi a_i}}\right) + \sin\left(\frac{p_i^2}{4a_i}\right) FS\left(\frac{2a_i t + p_i}{\sqrt{2\pi a_i}}\right) -$$

$$-\cos\left(\frac{p_i^2}{4a_i}\right)FC\left(\frac{|2a_it-p_i|}{\sqrt{2\pi a_i}}\right)-\sin\left(\frac{p_i^2}{4a_i}\right)FS\left(\frac{|2a_it-p_i|}{\sqrt{2\pi a_i}}\right)\cdot\cos p_it\},$$

где $T_i=(-1)^{n+1}\dfrac{\mu f}{2p_i}\sqrt{\dfrac{\pi}{2a_i}}$, $p_1=\pi n\sqrt{q^2(\pi n)^2+1}$,

$p_2=\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)\sqrt{q^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)^2+1}$, $a_1=\dfrac{\pi n}{4}$, $a_2=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $FC(z)=\int\limits_0^z\cos\left(\dfrac{\pi}{2}r^2\right)dr$

и $FS=\int\limits_0^z\sin\left(\dfrac{\pi}{2}r^2\right)dr$ - интегральные функции Френеля. (5)

Следует отметить, что ниже будут построены графики, основанные на решениях (3) и (5), для резины, которую мы использовали в ходе эксперимента. Анализ прогибов позволит сделать ряд физических выводов о существенной роли изгибной жесткости в эксперименте. Речь о нем пойдет в следующем разделе.

§3. Верификация эксперимента. Изначально верификацию эксперимента мы проводили, используя теоретическое решение автомодельной задачи о скользящем ударе по гибкой растяжимой нити бесконечной длины [29-31]. Для ее решения, в том числе, использовался пакет Maple [32].

Стоит отметить, что для всех обработанных кадров теоретически рассчитанные деформации находятся в коридоре погрешностей, связанные с экспериментально полученными деформациями, кроме последнего кадра. Этот кадр соответствует наибольшей скорости движения ролика. И теоретический результат отклоняется от экспериментального непосредственно в области ролика, где возникают большие деформации из-за трения. Более того в этой области существенную роль играет изгибная жесткость резины, не учитываемая в модели идеальной нити [22,33,34].

На Рис. 2 и 3 место приложения нагрузки определяется по концам черных горизонтальных линий вдоль оси абсцисс. Графики построены на основании полученных решений динамического прогиба балки. На левых графиках на Рис. 2 и 3 нагрузка движется с постоянной скоростью. В то время как на правых графиках на Рис. 2 и 3 нагрузка движется равноускорено. При этом в обоих случаях движения нагрузки в месте приложения нагрузки и в области фронта волны, бегущей с характерной для балки скоростью, образуются не изломы (как в модели идеальной нити), а конечные радиусы кривизны. Данные радиусы кривизны определяются изгибной жесткостью резины. Отметим, что после перехода скорости нагрузки через характерную для балки скорость (место перехода – начало координат), возмущения распространяются уже позади нагрузки (правый график на Рис. 2). В случае движения с постоянной скоростью мы определяли скорость движения нагрузки равной Лагранжевой скорости ролика. Отметим также, что при прочих равных условиях для одной и той же резины величина прогиба при равноускоренном движении нагрузки в несколько раз больше аналогичных прогибов при движении нагрузки с постоянной скоростью.

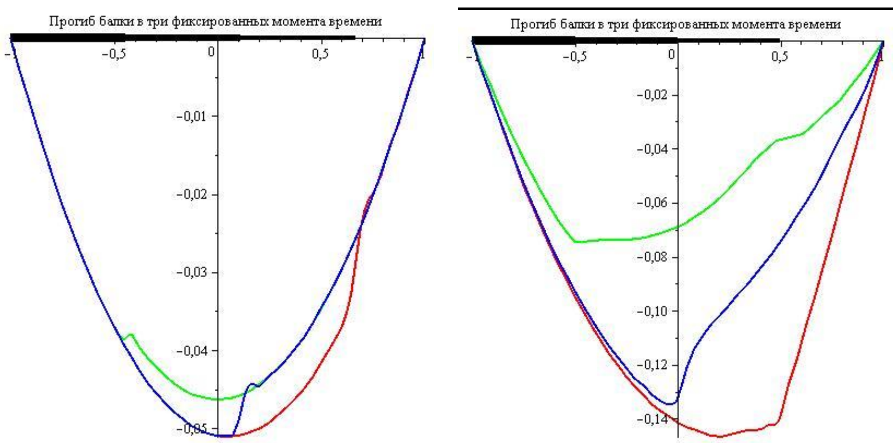

Рис. 2. Форма балки в три различных момента времени.

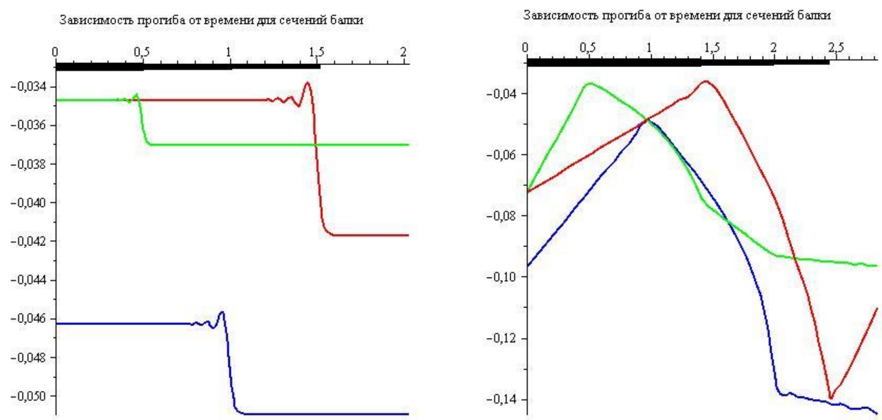

Рис. 3. Величина прогиба балки со временем для трех различных ее сечений.

В таблицах 1 и 2 приведены относительные отклонения результатов по деформациям в теории идеальной нити и эксперименте.

Таблица 1. Относительная погрешность деформации перед роликом.

Кадр \ расстояние (см.)	0	10	20	30	40	50	60
212 кадр: t=0.063 с., V_0 =8.7 м/с	104%	92%	28%	11%	66%	20%	13%
235 кадр: t=0.075 с., V_0 =9.7 м/с	41%	106%	43%	4%	29%	18%	
258 кадр: t=0.086 с., V_0 =10.8м/с	16%	34%	9%	81%	8%		
283 кадр: t=0.099 с., V_0 =11.8м/с	37%	58%	21%	19%			
310 кадр: t=0.112 с., V_0 =12.6м/с	44%	96%	4%				

Таблица 2. Относительная погрешность деформации позади ролика.

Кадр \ расстояние (см.)	-60	-50	-40	-30	-20	-10	0
212 кадр: t=0.063 с., V_0 =8.7 м/с			3%	8%	52%	50%	104%
235 кадр: t=0.075 с., V_0 =9.7 м/с		26%	68%	58%	81%	65%	41%
258 кадр: t=0.086 с., V_0 =10.8м/с	26%	34%	40%	112%	62%	41%	16%
283 кадр: t=0.099 с., V_0 =11.8м/с	39%	43%	67%	7%	8%	13%	37%
310 кадр: t=0.112 с., V_0 =12.6м/с	37%	46%	3%	2%	24%	39%	44%

Анализируя эти две таблицы, видно, что наибольшие отклонения (красные значения) возникают в области ролика и области бегущего впереди него поперечного фронта. Что подтверждает наш вывод о том, что в этих областях вместо излома (как это было в модели идеальной нити) возникают конечные радиусы кривизны резины, связанные с ее изгибной жесткостью.

§4. Заключение. Нами была исследована задача о динамическом прогибе предварительно натянутой балки. Получено точное аналитическое решение задачи. Построены формы прогиба для резины, используемой в эксперименте, моделирующей данную задачу. Получен результат существенного возрастания амплитуды прогиба резины при переходе скорости нагрузки через характерную для резины скорость (собственно говоря, данный эффект – один из ключевых целей исследования). Также проанализированная форма прогиба позволяет заключить о важности изгибной жесткости резины, объясняющей расхождение результатов эксперимента и теории идеальной нити в области ролика, а также области, связанной с фронтом поперечной волны. Количество исследованных задач такого типа мало, поэтому теория и получение данных экспериментов для такого класса задач является важным, новым и актуальным делом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Диссертационная работа была посвящена области задач с гибкими связями, границы которых подвижны. Данный круг задач существенно зависит от параметра (некоторого аналога числа Маха) – отношение скорости подвижной границы к скорости распространения колебаний в нити. Более того решение подобных задач происходит в области независимых переменных, которая меняется во времени (т.к. длина свободного участка нити меняется во времени по мере движения подвижной границы). Поэтому полученные аналитические решения особенно важны. Также показано, что изгибная жесткость нити сказывается в первую очередь в областях с наибольшими радиусами кривизны.

Основные результаты диссертации:

1. Задача о динамической размотке нити приводит к необходимости решения дифференциальных уравнений в частных производных для области независимых переменных, которая меняется со временем. Важно, что решить задачу удалось аналитически без применения численных методов. Проведенный анализ роста амплитуды колебаний показал, что во всех реальных случаях движения происходит рост амплитуды колебаний. Скорость роста амплитуды колебаний меньше скорости роста этой амплитуды в случае классического резонанса.

2. Задача о скользящем ударе по идеальной растяжимой нити является новой. В работе эта задача рассмотрена как теоретически (автомодельное решение), так и экспериментально. Найдена зависимость динамического коэффициента вязкого трения для резины от Эйлеровой скорости ролика. Показано, что реакция ролика при переходе скорости ролика через скорость поперечных волн в резине возрастает на порядок.

3. Решение задачи о динамическом прогибе балки под действием движущейся нагрузки позволило получить значения критических скоростей движения (скорости, при которых происходит резонанс). Этот результат является новым. Показано, что при равноускоренном движении нагрузки, переход из дозвукового в сверхзвуковой режим меняет характер движения балки.

Приложение 1.

Переход к безразмерным переменным.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{T_0}{\rho} \cdot \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \\ y(x,0) = 0, \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0, \dfrac{\partial y}{\partial x}(x,0) = 0 \\ y(0,x) = 0, y(L_0 + V_0 \cdot t, t) = k \sin \omega t \\ \end{cases}.$$

Переход к безразмерным величинам: $\tilde{y} = \dfrac{y}{L_0}$, $\tilde{x} = \dfrac{x}{L_0}$, $\tilde{t} = \dfrac{V_0 t}{L_0}$.

$$\frac{L_0 \cdot V_0^2}{L_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{L_0}{L_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{T_0}{\rho V_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}^2}$$

Начальные условия:

$$\frac{L_0}{V_0} \cdot \tilde{t} = 0: \quad L_0 \cdot \tilde{y}(\tilde{x},0) = 0, \ \frac{L_0 \cdot V_0}{L_0} \cdot \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{x},0) = 0, \ \frac{L_0}{L_0} \cdot \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x},0) = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{t} = 0: \ \tilde{y}(\tilde{x},0) = 0, \ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{x},0) = 0, \ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x},0) = 0.$$

Граничные условия:

$$L_0 \cdot \tilde{x} = 0: \ L_0 \cdot \tilde{y}(0, \tilde{t}) = 0,$$

$$L_0 \cdot \tilde{x} = L_0 + V_0 \cdot \frac{L_0}{V_0} \cdot \tilde{t}: \ L_0 \tilde{y}(1+\tilde{t}, \tilde{t}) = k \sin \frac{\omega \cdot L_0}{V_0} \cdot \tilde{t}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{x} = 0: \ \tilde{y}(0, \tilde{t}) = 0,$$

$$\tilde{x} = 1 + \tilde{t}: \ \tilde{y}(1+\tilde{t}, \tilde{t}) = \frac{k}{L_0} \sin \frac{\omega \cdot L_0}{V_0} \cdot \tilde{t}.$$

Для удобства опустим знак “волны” над переменными.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{T_0}{\rho V_0^2} \cdot \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \\ y\left(x,0\right) = 0, \dfrac{\partial y}{\partial t}\left(x,0\right) = 0, \dfrac{\partial y}{\partial x}\left(x,0\right) = 0 \\ y(0,t) = 0, y\left(1+t,t\right) = \dfrac{k}{L_0} \sin \dfrac{\omega \cdot L_0}{V_0} t \end{cases}.$$

Приложение 2.

Замена переменных, обеспечивающая стационарность граничных условий.

Ищем замену следующего типа: $s = f(x,t)$, $\tau = g(x,t)$, где $f(1+t,t) = const$.

Пусть $f(x,t) = \dfrac{x}{1+t}$.

$\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial s}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dfrac{\partial \tau}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \tau} = f_x\dfrac{\partial y}{\partial s} + g_x\dfrac{\partial y}{\partial \tau}$, $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\partial s}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dfrac{\partial \tau}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \tau} = f_t\dfrac{\partial y}{\partial s} + g_t\dfrac{\partial y}{\partial \tau}$, где: $f_x = \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$, $f_t = \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}$, $g_x = \dfrac{\partial g(x,t)}{\partial x}$ и $g_t = \dfrac{\partial g(x,t)}{\partial t}$.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_x\frac{\partial y}{\partial s} + g_x\frac{\partial y}{\partial \tau}\right) = f_{xx}\frac{\partial y}{\partial s} + g_{xx}\frac{\partial y}{\partial \tau} + f_x\left(f_x\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + g_x\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial \tau}\right) + g_x\left(f_x\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial \tau} + g_x\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(f_t\frac{\partial y}{\partial s} + g_t\frac{\partial y}{\partial \tau}\right) = f_{tt}\frac{\partial y}{\partial s} + g_{tt}\frac{\partial y}{\partial \tau} + f_t\left(f_t\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + g_t\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial \tau}\right) + g_t\left(f_t\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial \tau} + g_t\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}\right).$$

$$f_x = \frac{1}{1+t},\ f_{xx} = 0,\ f_t = -\frac{x}{(1+t)^2},\ f_{tt} = \frac{2x}{(1+t)^3}$$

И пусть: $\tau = g(x,t) = g(t)$, т.е. $g_x = 0$ и $g_{xx} = 0$, тогда:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho V_0^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2x}{(1+t)^3}\frac{\partial y}{\partial s} + g_{tt}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{x^2}{(1+t)^4}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - 2\frac{x}{(1+t)^2}g_t\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial \tau} + g_t^2\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{T_0}{\rho V_0^2}\frac{1}{(1+t)^2}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.$$

$$\Updownarrow$$

$$2s\frac{\partial y}{\partial s} + (1+t)^2 g_{tt}\frac{\partial y}{\partial \tau} + s^2\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - 2s(1+t)g_t\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial \tau} + (1+t)^2 g_t^2\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{T_0}{\rho V_0^2}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.$$

Пусть: $g_t = \dfrac{1}{1+t} \Rightarrow g_{tt} = -\dfrac{1}{(1+t)^2}$. Тогда:

$$2s\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial y}{\partial \tau}+s^2\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}-2s\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial \tau}+\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}=\frac{T_0}{\rho V_0^2}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\frac{T_0}{\rho V_0^2}-s^2\right)\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+2s\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial \tau}-\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}-2s\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial \tau}=0$$

Итак, $\tau=g(t)=\ln(1+t)\ \Leftrightarrow\ t=e^{\tau}-1.$

$$\Downarrow$$

Начальные условия:

$t=0$: $y(x,0)=0$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=0$, $\frac{\partial y}{\partial x}(x,0)=0$ $\Leftrightarrow$ $\tau=0$: $y(s,0)=0$, $-s\frac{\partial y}{\partial s}(s,0)+\frac{\partial y}{\partial \tau}(s,0)=0$, $\frac{\partial y}{\partial s}(s,0)=0$ $\Leftrightarrow$ $\tau=0$: $y(s,0)=0$, $\frac{\partial y}{\partial \tau}(s,0)=0$, $\frac{\partial y}{\partial s}(s,0)=0$.

Граничные условия.

$x=0$: $y(0,t)=0$, $x=1+t$: $y(1+t,t)=\frac{k}{L_0}\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot t$.

$$\Updownarrow$$

$s=0$: $y(0,\tau)=0$, $s=1$: $y(1,\tau)=\frac{k}{L_0}\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau}-1\right)$.

Запишем полученную систему уравнений:

$$\left(\frac{T_0}{\rho V_0^2}-s^2\right)\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+2s\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial \tau}-\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}-2s\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial \tau}=0$$

$\tau=0$: $y(s,0)=0$, $\frac{\partial y}{\partial \tau}(s,0)=0$, $\frac{\partial y}{\partial s}(s,0)=0$,

$s=0$: $y(0,\tau)=0$,

$$s = 1:\ y(1,\tau) = \frac{k}{L_0} \sin \frac{\omega \cdot L_0}{V_0} \cdot \left(e^{\tau} - 1\right)$$

Приложение 3.

Преобразование Лапласа.

Пусть: $L(y(s,\tau)) = Y(s,p)$, где $Y(s,p) = \int\limits_0^\infty y(s,\tau)\cdot e^{-p\tau} d\tau$.

Свойства преобразования Лапласа:

- преобразование производных:

$$L\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}(s,\tau)\right) = p\cdot Y(s,p) - y(s,0),$$

$$L\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}(s,\tau)\right) = p^2\cdot Y(s,p) - p\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}(s,0) - y(s,0),$$

- дифференцирование по независимой переменной s:

$$L\left(\frac{\partial^n y}{\partial s^n}(s,\tau)\right) = \frac{\partial^n Y}{\partial s^n}(s,p).$$

С учетом начальных условий:

$$L\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}(s,\tau)\right) = p\cdot Y(s,p),$$

$$L\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}(s,\tau)\right) = p^2\cdot Y(s,p).$$

Тогда:

$$\left(\frac{T_0}{\rho V_0^2} - s^2\right)\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} + 2(p-1)s\frac{\partial Y}{\partial s} - \left(p^2 - p\right)Y = 0$$

$s = 0:\ Y(0,p) = 0$,

$$s = 1:\ Y(1,p) = \frac{k}{L_0}\cdot L\left(\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^\tau - 1\right)\right)$$

Приложение 4.

Нахождение аналитического решения для образов.

Замена:

$$Y(s,p) = Z(s)\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-1}{2}}.$$

Свойства дифференцирования модуля:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(|f(s)|^n\right) = n\cdot sign(f(s))\cdot|f(s)|^{n-1}\cdot\frac{\partial f}{\partial s}(s),\ \ f(s)\cdot|f(s)|^n = sign(f(s))\cdot|f(s)|^{n+1},\ \ sign(s)\cdot|s| = s.$$

Тогда:

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = \frac{\partial Z}{\partial s}\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-1}{2}} + Z\cdot\frac{p-1}{2}\cdot sign\left(s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-3}{2}}\cdot 2s =$$

$$= \frac{\partial Z}{\partial s}\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-1}{2}} + Z\cdot(p-1)\cdot sign\left(s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-3}{2}}\cdot s.$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-1}{2}} + 2\cdot\frac{\partial Z}{\partial s}\cdot(p-1)\cdot sign\left(s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-3}{2}}\cdot s +$$

$$+ Z\cdot\left(p^2 - 4s + 3\right)\cdot s^2\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-5}{2}} + Z\cdot(p-1)\cdot sign\left(s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-3}{2}}.$$

Тогда:

$$- sign\left(s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)\cdot\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p+1}{2}} + 2\cdot\frac{\partial Z}{\partial s}\cdot(1-p)\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-1}{2}}\cdot s +$$

$$+ Z\cdot\left(-p^2 + 4p - 3\right)\cdot sign\left(s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)\cdot s^2\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-3}{2}} + Z\cdot(1-p)\cdot\left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-1}{2}} +$$

$$+\left(2p-2\right)\frac{\partial Z}{\partial s}\cdot s\cdot\left|s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-1}{2}}+Z\cdot\left(2p^2-4p+2\right)\cdot sign\left(s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)\cdot\left|s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-3}{2}}\cdot s^2+$$

$$+\left(p-p^2\right)\cdot Z\cdot\left|s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-1}{2}}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$-sign\left(s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}\cdot\left|s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p+1}{2}}+Z\cdot\left(p^2-1\right)\cdot sign\left(s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)\cdot\left|s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-3}{2}}\cdot s^2+$$

$$+Z\cdot\left(1-p^2\right)\cdot\left|s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-1}{2}}=0\,.$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}\cdot\left(s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)^2+Z\cdot\left(p^2-1\right)\cdot s^2+Z\cdot\left(1-p^2\right)\cdot sign\left(s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)\cdot\left|s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|=0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}\cdot\left(s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)^2+Z\cdot\left(p^2-1\right)\cdot s^2+Z\cdot\left(1-p^2\right)\cdot\left(s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}\cdot\left(s^2-\frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)^2+Z\cdot\left(p^2-1\right)\cdot\frac{T_0}{\rho V_0^2}=0$$

Замена:

$$Z(s,p)=U(\xi,p)\cdot\left(s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right),\ \text{где}\ \xi=\ln\left|\frac{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|.$$

Тогда:

$$\frac{\partial Z}{\partial s} = sign\left(s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right)\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\left|\frac{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|\cdot\frac{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}-s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{\left(s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)^2}\cdot\left(s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)+U=$$

$$=\frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\cdot\frac{2\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{\left(s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)^2}\cdot\left(s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)+U=\frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{2\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}+U\,.$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\frac{4T_0}{\rho V_0^2}}{\left(s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)^2\left(s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)}-\frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{2\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{\left(s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)^2}+\frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{2\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{\left(s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)\left(s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)}\,.$$

Тогда:

$$\frac{4T_0}{\rho V_0^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\cdot\left(s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)-2\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\left(s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)^2+$$
$$+2\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\frac{\partial U}{\partial \xi}\left(s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)\cdot\left(s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)+U\cdot\left(s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right)\cdot\left(1-p^2\right)\cdot\frac{T_0}{\rho V_0^2}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{4T_0}{\rho V_0^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}-\frac{4T_0}{\rho V_0^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot+U\cdot\left(1-p^2\right)\cdot\frac{T_0}{\rho V_0^2}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}-4\frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot+U\cdot\left(1-p^2\right)=0$$

Характеристическое уравнение:

$4\lambda^2-4\lambda\cdot+\left(1-p^2\right)=0$,

$$\frac{D}{4} = 4 - 4 \cdot \left(1 - p^2\right) = 4p^2,$$

$$\lambda = \frac{2 \pm 2p}{4} = \frac{1 \pm p}{2}.$$

Итак, общее решение уравнения:

$$U(\xi, p) = C_1(p) \cdot e^{\frac{1+p}{2}\xi} + C_2(p) \cdot e^{\frac{1-p}{2}\xi}$$

Т.к. $\xi = \ln\left|\dfrac{s - \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s + \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|$,

$$Z(s, p) = U(\xi, p) \cdot \left(s + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right) = \left(C_1(p) \cdot \left|\frac{s - \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|^{\frac{1+p}{2}} + C_2(p) \cdot \left|\frac{s - \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|^{\frac{1-p}{2}}\right) \cdot \left(s + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right).$$

Т.к. при $s \in [0;1]$ $s + \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}} = \left|s + \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|$, то

$$Y(s, p) = Z(s) \cdot \left|s^2 - \frac{T_0}{\rho V_0^2}\right|^{\frac{p-1}{2}} = C_1(p) \cdot \left|s - \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p + C_2(p) \cdot \left|s + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p.$$

Итак, найдено общее решение уравнения. Подставим полученное решение в граничные условия.

$$s = 0: \; Y(0, p) = 0 \;\Leftrightarrow\; C_1(p) \cdot \left|\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p + C_2(p) \cdot \left|\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p = 0 \;\Leftrightarrow\; C_2(p) = -C_1(p).$$

Таким образом, $Y(s, p) = C_1(p) \cdot \left(\left|s - \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p - \left|s + \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p\right)$.

$$s=1:\ Y(1,p)=\frac{k}{L_0}\cdot L\left(\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau}-1\right)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$C_1(p)\cdot\left(\left|1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p-\left|1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p\right)=\frac{k}{L_0}\cdot L\left(\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau}-1\right)\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$C_1(p)=\frac{k}{L_0}\cdot\frac{L\left(\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau}-1\right)\right)}{\left|1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p-\left|1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p}.$$

Итак:

$$Y(s,p)=\frac{k}{L_0}\cdot L\left(\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau}-1\right)\right)\cdot\frac{\left|s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p-\left|s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p}{\left|1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p-\left|1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^p}.$$

Приложение 5.

Обратное преобразование Лапласа.

Свойства преобразования Лапласа:

- теорема о свертке:

пусть $f^*(p) = L(f(\tau))$, $g^*(p) = L(g(\tau))$, тогда $f^*(p)\cdot g^*(p) = L\left\{\int\limits_0^\tau \left(f(\tau-\xi)\cdot g(\xi)\cdot d\xi\right)\right\}$

- теорема о запаздывании:

пусть $f^*(p) = L(f(\tau))$, тогда $f^*(p)\cdot e^{-p\eta} = L(f(\tau-\eta))$, при $\tau-\eta \geq 0$

$f^*(p)\cdot e^{-p\eta} = L(0)$, при $\tau-\eta < 0$.

$$Y(s,p) = \frac{k}{L_0}\cdot L\left(\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^\tau-1\right)\right)\cdot\frac{\left|\dfrac{s-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|^p-\left|\dfrac{s+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|^p}{\left|\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|^p-1}.$$

Пусть $\dfrac{T_0}{\rho V_0^2} \neq 1$. Тогда:

$$Y(s,p) = \frac{k}{L_0}\cdot L\left(\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^\tau-1\right)\right)\cdot\frac{\left|\dfrac{s-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|^p-\left|\dfrac{s+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|^p}{\left|\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|^p-1} =$$

$$=\frac{k}{L_0}\cdot L\left(\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau}-1\right)\right)\cdot\frac{e^{-p\cdot\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}-e^{-p\cdot\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}}{e^{-p\cdot\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}-1}=$$

$$=\left\{p\cdot\frac{k}{L_0}\cdot L\left(\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau}-1\right)\right)\right\}\cdot\left\{\frac{1}{2p}\cdot\left(1+cth\left(\frac{p}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|\right)\right)\right\}\cdot\left\{e^{-p\cdot\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}-e^{-p\cdot\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right\}.$$

Более того, верны следующие неравенства:

$$\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|>0,$$

$$\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|>0 \text{ при } s\in[0;1],$$

$$\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|>0 \text{ при } s\in[0;1].$$

Заметим, что:

$$p\cdot\frac{k}{L_0}\cdot L\left(\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau}-1\right)\right)=p\cdot\frac{k}{L_0}\cdot L\left(\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau}-1\right)\right)-p\cdot\frac{k}{L_0}\cdot\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau}-1\right)\Big|_{\tau=0}=$$

$$= L\left\{\frac{k}{L_0}\cdot\frac{d}{d\tau}\left(\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau}-1\right)\right)\right\}.$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$H_b(\tau)=1+H_0(\tau-b)+H_0(\tau-2b)+H_0(\tau-3b)+H_0(\tau-4b)+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}H_0(\tau-kb),$$

где $H_0(\tau)$ - единичная функция Хэвисайда. Ниже представлен график функции $H_b(\tau)$.

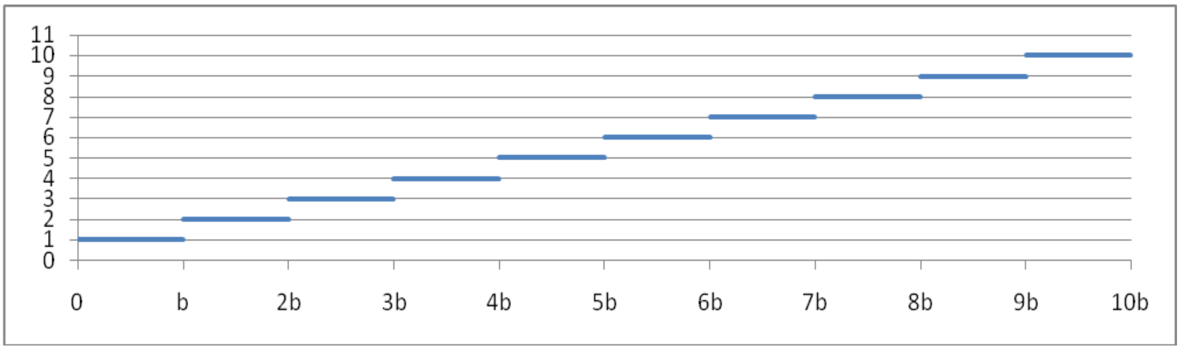

Рис. 1

$$L(H_b(\tau))=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\cdot e^{-pb}+\frac{1}{p}\cdot e^{-2pb}+\frac{1}{p}\cdot e^{-3pb}+\frac{1}{p}\cdot e^{-4pb}+\ldots=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-e^{-pb}}=\frac{1}{2p}\left(1+cth\frac{pb}{2}\right)$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2p}\cdot\left(1+cth\left(\frac{p}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|\right)\right)=L\left\{\sum_{k=0}^{\infty}H_0\left(\tau-k\cdot\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|\right)\right\}.$$

Тогда:

$y(s,\tau)=\frac{k}{L_0}\cdot\left(I_1-I_2\right)$, где

$$I_1 = \int\limits_0^{\tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|} \left\{ \frac{d}{d\eta}\left(\sin\frac{\omega \cdot L_0}{V_0} \cdot \left(e^{\eta} - 1\right)\right)\right\}\Bigg|_{\eta = \tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right| - \xi} \cdot \left\{ H_{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}(\xi)\right\} \cdot d\xi \quad \text{при}$$

$$\tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right| \geq 0,$$

$$I_1 = 0 \ \text{ при } \ \tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right| < 0,$$

$$I_2 = \int\limits_0^{\tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|} \left\{ \frac{d}{d\eta}\left(\sin\frac{\omega \cdot L_0}{V_0} \cdot \left(e^{\eta} - 1\right)\right)\right\}\Bigg|_{\eta = \tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right| - \xi} \cdot \left\{ H_{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}(\xi)\right\} \cdot d\xi \quad \text{при}$$

$$\tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right| \geq 0,$$

$$I_2 = 0 \ \text{ при } \ \tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right| < 0.$$

Итак, $I_1=\dfrac{V_0}{\omega\cdot L_0}\cdot\displaystyle\int\limits_0^{\tau-\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\left\{e^{\tau-\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|-\xi}\cdot\cos\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau-\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|-\xi}-1\right)\right\}\cdot\left\{H_{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}(\xi)\right\}\cdot d\xi$,

$$I_2=\frac{V_0}{\omega\cdot L_0}\cdot\int\limits_0^{\tau-\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\left\{e^{\tau-\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|-\xi}\cdot\cos\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau-\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|-\xi}-1\right)\right\}\cdot\left\{H_{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}(\xi)\right\}\cdot d\xi .$$

Далее вычислим следующий интеграл: $I=\int\limits_0^A f(z)\cdot H_b(z)\cdot dz$. Примем следующее обозначение $F(z)$ - первообразная функции $f(z)$. И пусть $A\in[n\cdot b;(n+1)\cdot b]$.

$$I=F(b)-F(0)+2F(2b)-2F(b)+3F(3b)-3F(2b)+\ldots+$$
$$+nF(nb)-nF((n-1)\cdot b)+(n+1)F(A)-(n+1)F(nb)=$$
$$=-F(0)-F(b)-F(2b)-\ldots-F(nb)+(n+1)F(A).$$

Итак, $I=\left(\left[\dfrac{A}{b}\right]+1\right)\cdot F(A)-\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{A}{b}\right]}F(kb)$, где $\left[\dfrac{A}{b}\right]$- целая часть от деления числа A на число b.

Таким образом,

$$I_1=\sum_{k=0}^{\left[\frac{\tau-\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]}\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau-\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|-k\cdot\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}-1\right)\quad\text{при }\ \tau-\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|\ge 0$$

$$I_1 = 0 \quad \text{при} \quad \tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right| < 0\,,$$

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{\tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]} \sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(e^{\tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right| - k\cdot\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|} - 1\right) \quad \text{при} \quad \tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right| \ge 0\,,$$

$$I_2 = 0 \quad \text{при} \quad \tau - \ln\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{s-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right| < 0\,.$$

Теперь вернемся к начальным безразмерным переменным *x* и *t*.

$y(x,t) = \dfrac{k}{L_0}\cdot\left(I_1 - I_2\right)$, где

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln\left|\frac{x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]} \sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\frac{\left|x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|\cdot\left|1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}{\left|1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^{k+1}}-1\right)$$ при

$$\left|x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right| \geq 1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\ ,$$

$$I_1 = 0 \quad \text{при} \quad \left|x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right| < 1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\ ,$$

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]} \sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\frac{\left|x-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|\cdot\left|1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}{\left|1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^{k+1}}-1\right)$$ при

$$\left|x-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right| \geq 1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\ ,$$

$$I_2 = 0 \quad \text{при} \quad \left|x-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right| < 1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\ .$$

Приложение 6.

Проверка начальных и граничных условий.

I. $t = 0$: $y(x,0) = 0$.

Итак, при $t = 0$ $x \in [0;1]$, и следовательно $\left| x + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}} \right| < 1 + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}$ и $\left| x - \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}} \right| < 1 + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}$. В результате получаем, что $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$, т.е. $y(x,0) = 0$.

II. $x = 0$: $y(0,t) = 0$.

$$I_1 = I_2 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln\left| \frac{\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}} \cdot (1+t)}{1 + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}} \right|}{\ln\left| \frac{1 + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1 - \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}} \right|} \right]} \sin \frac{\omega \cdot L_0}{V_0} \cdot \left(\frac{\left| \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}} \cdot (1+t) \right| \cdot \left| 1 + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}} \right|^k}{\left| 1 + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}} \right|^{k+1}} - 1 \right)$$ при $\left| \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}} \cdot (1+t) \right| \geq 1 + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}$,

$I_1 = I_2 = 0$ при $\left| \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}} \cdot (1+t) \right| < 1 + \sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}$.

В результате, $y(0,t) = \frac{k}{L_0} \cdot (I_1 - I_2) = 0$.

III. $x = 1 + t$: $y(1+t,t) = \frac{k}{L_0} \sin \frac{\omega \cdot L_0}{V_0} t$.

Итак, $I_1 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln|1+t|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]} \sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\frac{|1+t|\cdot\left|1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}{\left|1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}-1\right)$ при любых *t*.

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln|1+t|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]-1} \sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\frac{|1+t|\cdot\left|1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^{k+1}}{\left|1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^{k+1}}-1\right) \text{ при } |1+t| \ge \frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}},$$

$$I_2 = 0 \text{ при } |1+t| < \frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}.$$

Рассмотрим первый случай: $|1+t| < \frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}$, тогда $I_2 = 0$, а $I_1 = \sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot t$, т.к. $\frac{\ln|1+t|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|} < 1$. Таким образом, $y(1+t,t) = \frac{k}{L_0}\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}t$.

Теперь рассмотрим второй случай: $\left|1+t\right| \geq \dfrac{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}$. Обозначим

$f\left(t,k\right)=\sin\dfrac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\dfrac{\left|1+t\right|\cdot\left|1-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}{\left|1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}-1\right)$, а $n=\dfrac{\ln\left|1+t\right|}{\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}$. Тогда

$$y\left(1+t,t\right)=\frac{k}{L_0}\left(\sum_{k=0}^{n} f\left(t,k\right)-\sum_{k=0}^{n-1} f\left(t,k+1\right)\right)=\frac{k}{L_0}\cdot f\left(t,0\right)=\frac{k}{L_0}\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}t\ .$$

Вычислим предел:

$$\lim_{dx\to 0}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln\left|\frac{x+dx+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]}\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\frac{\left|x+dx+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|\cdot\left|1-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}{\left|1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^{k+1}}-1\right)-\sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln\left|\frac{x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]}\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\frac{\left|x+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|\cdot\left|1-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}{\left|1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^{k+1}}-1\right)}{dx}$$

.

Запишем неравенство:

$$\frac{\ln\left|\dfrac{x+dx+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}-\frac{\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}<1 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{x+dx+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{x+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}\right|<\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right| \underset{dx\to 0}{\Leftrightarrow} \left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|>1,$$ что верно всегда, т.к. $\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\neq 0$.

Таким образом, $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln\left|\frac{x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]}\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\frac{\left|x+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|\cdot\left|1-\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}{\left|1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^{k+1}}-1\right)\right)=$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln\left|\frac{x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]} \frac{\partial}{\partial x}\left\{\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\frac{\left|x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|\cdot\left|1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}{\left|1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^{k+1}}-1\right)\right\}.$$

Аналогично получается другая формула дифференцирования.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln\left|\frac{x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]} \sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\frac{\left|x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|\cdot\left|1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}{\left|1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^{k+1}}-1\right)\right)=$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln\left|\frac{x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\frac{\left|x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|\cdot\left|1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}{\left|1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^{k+1}}-1\right)\right\}.$$

Итак:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(x,t)=\frac{k}{L_0}\cdot\left(\frac{\partial I_1}{\partial x_i}-\frac{\partial I_2}{\partial x_i}\right),\ \text{где}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial x_i}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln\left|\frac{x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\frac{\left|x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|\cdot\left|1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}{\left|1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^{k+1}}-1\right)\right\}\quad\text{при}$$

$$\left|x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|\ge 1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}},$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial x_i}=0\quad\text{при}\ \left|x+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|<1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}},$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial x_i}=\sum_{k=0}^{\left[\frac{\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)}{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}{\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}{1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}}\right|}\right]}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\sin\frac{\omega\cdot L_0}{V_0}\cdot\left(\frac{\left|x-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|\cdot\left|1-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^k}{\left|1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|^{k+1}}-1\right)\right\}\quad\text{при}$$

$$\left|x-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|\ge 1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}},$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial x_i}=0\quad\text{при}\ \left|x-\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}}\cdot(1+t)\right|<1+\sqrt{\frac{T_0}{\rho V_0^2}},\ \text{где}\ x_1=x,\ \text{а}\ x_2=t.$$

В итоге, при $t=0$: $\left|x+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}\right|<1+\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho V_0^2}}$. И как результат $\dfrac{\partial I_j}{\partial x_i}=0$, $i, j=1{,}2$, $x_1=x$, $x_2=t$. Следовательно, $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0)=0, \dfrac{\partial y}{\partial x}(x,0)=0$.

Таким образом, полученное решение полностью удовлетворяет всем начальным и граничным условиям.

Приложение 7.

Пусть $\mathbf{G}(s,t)$ – плотность массовых сил.

$\mathbf{q}(s,t)$ – линейная плотность поверхностных сил.

$s-$ длина дуги срединного волокна балки $-l \le s \le l$, $t-$ время.

$T(s) = T_0$ – натяжение.

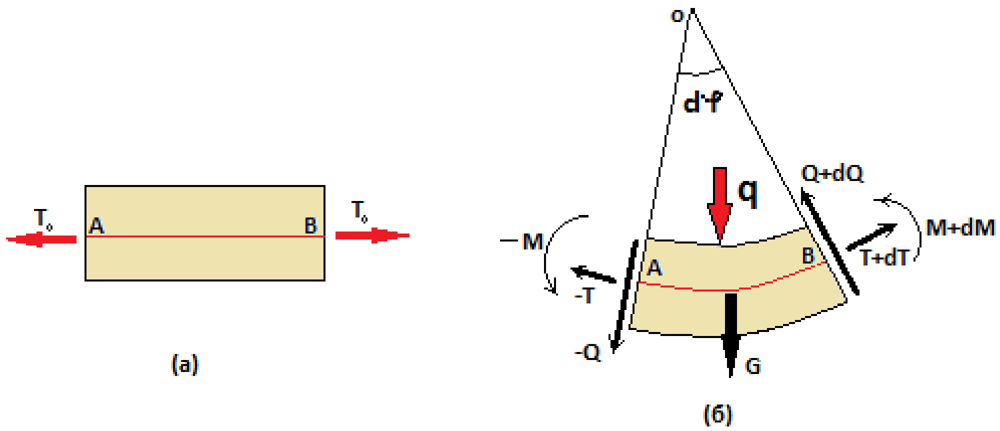

Рис.1

В силу гипотезы плоских сечений Кирхгофа-Лява:

$$\varepsilon(\eta) = \frac{(R-\eta)d\varphi - Rd\varphi}{Rd\varphi} = -\frac{\eta}{R},$$

где ε – относительное удлинение, $R-$ радиус кривизны, η – координата, отсчитываемая по нормали от срединной поверхности.

Распределение нормальных к площадке сечения напряжений:

$\sigma(\eta) = -\dfrac{E\eta}{R}$, показанное на Рис.2, где $E-$ модуль Юнга материала балки.

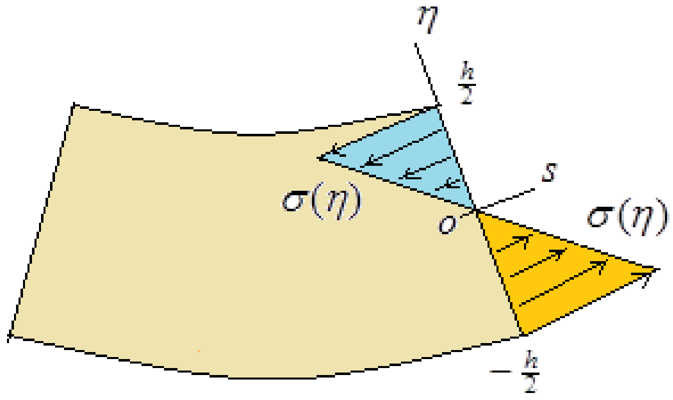

Рис.2

Изгибающий момент:

$$M = 2b\int_0^{\frac{h}{2}} |\sigma|\eta d\eta = 2b\int_0^{\frac{h}{2}} E\frac{\eta^2}{R}d\eta = E\cdot\frac{bh^3}{12}\frac{1}{R} = EJ\frac{1}{R},$$

где $J = bh^3/12 -$ геометрический момент инерции сечения балки прямоугольной формы с шириной b и толщиной h относительно оси вращения, проходящей через точку o перпендикулярно плоскости рисунка (Рис.3).

Величина EJ – жесткость балки на изгиб.

Q – перерезывающая сила.

Итак, $\mathbf{T} = T\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{Q} = Q\mathbf{v}$, где $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v} -$ единичные векторы, касательной и нормали к срединному волокну.

Условия равновесия сил и моментов:

$$d\left(Q\vec{\mathbf{v}}\right) + d\left(T\vec{\boldsymbol{\tau}}\right) + \rho bhds\vec{\mathbf{G}} + \vec{\mathbf{q}}ds = 0$$

$$dM + \overrightarrow{ds}\times Q\vec{\mathbf{v}} + \frac{\overrightarrow{ds}}{2}\times\rho bhds\vec{\mathbf{G}} + \frac{\overrightarrow{ds}}{2}\times ds\vec{\mathbf{q}} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d\left(Q\vec{\mathbf{v}}\right)}{ds}+\frac{d\left(T\vec{\boldsymbol{\tau}}\right)}{ds}+\rho bh\vec{\mathbf{G}}+\vec{\mathbf{q}}=0$$

$$\frac{dM}{ds}+Q=0, \quad M(s)=EJ\,\frac{1}{R(s)}$$

В случае движения балки:

$$\frac{\partial\left(Q\vec{\mathbf{v}}\right)}{\partial s}+\frac{\partial\left(T\vec{\boldsymbol{\tau}}\right)}{\partial s}+\rho bh\vec{\mathbf{G}}+\vec{\mathbf{q}}=\rho bh\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial s}+Q=0, \quad M(s,t)=EJ\,\frac{1}{R(s,t)}$$

Т.к. $\boldsymbol{\tau}=\left(\cos\theta,\sin\theta\right), \mathbf{v}=\left(-\sin\theta,\cos\theta\right)$ и $\delta s=R\delta\theta$,

$$\rho bh\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=EJ\,\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}\sin\theta\right]+\frac{\partial\left(T\cos\theta\right)}{\partial s}, \quad \frac{\partial x}{\partial s}=(1+\varepsilon)\cos\theta, \frac{\partial y}{\partial s}=(1+\varepsilon)\sin\theta$$

$$\rho bh\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-EJ\,\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}\cos\theta\right]+\frac{\partial\left(T\sin\theta\right)}{\partial s}-\rho bhg-m_0 g\delta(s+l-Vt), \quad Q=-EJ\,\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}$$

Рассмотрим малые отклонения балки от положения равновесия, считая её фактически нерастяжимой. Тогда $T=T_0=const$, $x\approx s, \quad \theta\approx\partial y/\partial x$:

$$\rho bh\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-EJ\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+T_0\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\rho bhg-m_0 g\delta(x+l-Vt).$$

Переход к безразмерным переменным:

$$y^*, \quad x^*, \quad t^*$$

$$y=ly^*, \quad x=lx^*, \quad t=\frac{l}{a}t^*,$$

где $l-$ длина половины балки, $\rho bh-$ линейная плотность балки, $a=\sqrt{T_0/\rho bh}-$ характерная скорость.

Тогда с учетом значений $a=\sqrt{T_0/\rho bh}, \quad J=bh^3/12$, получим:

$$\frac{\rho a^2 bh}{l}\frac{\partial^2 y^*}{\partial t^{*2}}=-\frac{Ebh^3}{12l^3}\frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*4}}+\frac{\rho a^2 bh}{l}\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^{*2}}-\rho bhg-m_0 g\delta(lx^*+l-\frac{Vl}{a}t^*).$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial^2 y^*}{\partial t^{*2}} = -q^2 \frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*4}} + \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^{*2}} - f - \mu f \cdot \delta(x^* + 1 - vt^*)$$

$$q^2 = \frac{Eh^2}{12 l^2 \rho a^2}, \quad f = \frac{gl}{a^2}, \quad \mu = \frac{m_0}{\rho bhl}, \quad v = \frac{V}{a}$$

Опустим звездочки для сокращения записи:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -q^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - f - \mu f \cdot \delta(x + 1 - vt)$$

$$t = 0, \quad y = y_0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

$$x = \pm 1, \quad y = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Приложение 8.

Пусть $y(x,t)=y_0(x)+u(x,t)$. Тогда:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-q^2\frac{d^4 y_0}{dx^4}-q^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{d^2 y_0}{dx^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-f-\mu f\cdot\delta(x+1-vt)$$

$$t=0,\quad u=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=0$$

$$x=\pm1,\quad y_0=0,\ u=0,\ \frac{d^2 y_0}{dx^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

$\downarrow$ $\downarrow$

$$-q^2\frac{d^4 y_0}{dx^4}+\frac{d^2 y_0}{dx^2}-f=0$$

$$x=\pm1,\quad y_0=0,\ \frac{d^2 y_0}{dx^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-q^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\mu f\cdot\delta(x+1-vt)$$

$$t=0,\quad u=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=0$$

$$x=\pm1,\quad u=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

Таким образом,

$$y_0(x)=-\frac{q^2 f}{ch\left(q^{-1}\right)}ch\left(\frac{x}{q}\right)+f\,\frac{x^2-1}{2}+q^2 f$$

Решение задачи.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-q^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\mu f\cdot\delta(x+1-vt)$$

$$t=0,\quad u=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad (15)$$

$$x=\pm1,\quad u=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

Метод разделения переменных:

$$u=U(x)T(t),\quad \frac{1}{U}\frac{d^4U}{dx^4}-\frac{1}{Uq^2}\frac{d^2U}{dx^2}=\pm\lambda^2$$

$$x=\pm1,\quad U=0,\quad \frac{d^2U}{dx^2}=0$$

Рассмотрим первый случай:

$$\frac{d^4U}{dx^4}-\frac{1}{q^2}\frac{d^2U}{dx^2}+\lambda^2U=0$$

$$x=\pm1,\quad U=0,\quad \frac{d^2U}{dx^2}=0$$

Решение системы имеет следующий общий вид: $U=e^{px}$.

Характеристическое уравнение: $p^4-\frac{1}{q^2}p^2+\lambda^2=0,\ p^2=\frac{1}{2q^2}\pm\sqrt{\frac{1}{4q^4}-\lambda^2}$.

Пусть $\lambda^2>\frac{1}{4q^4}$. Тогда $p^2=\alpha\pm i\beta$, где $\alpha=\frac{1}{2q^2},\quad \beta(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}$.

Введем угол: $2\varphi=\arctan\frac{\beta}{\alpha}$. $\sin 2\varphi=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, $\cos 2\varphi=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Тогда $p_{1,2}=\lambda(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)$, $p_{3,4}=\lambda(-\cos\varphi\pm i\cos\varphi)$. Проверка $p^2=\lambda^2(\cos 2\varphi\pm i\sin 2\varphi)=\alpha\pm i\beta$.

Введем следующие обозначения: $m=\lambda\cos\varphi$, $n=\lambda\sin\varphi$. Таким образом, общее решение системы имеет следующий вид:

$$U=C_1ch(mx)\sin(nx)+C_2sh(mx)\sin(nx)+C_3ch(mx)\cos(nx)+C_4sh(mx)\cos(nx)$$

Подставим общее решение в граничные условия:

$$x=\pm1,\quad U=0$$

$$\Updownarrow$$

$$C_1chm\sin n+C_2shm\sin n+C_3chm\cos n+C_4shm\cos n=0$$
$$-C_1chm\sin n+C_2shm\sin n+C_3chm\cos n-C_4shm\cos n=0$$

$$\Updownarrow$$

$$C_2 shm \sin n + C_3 chm \cos n = 0$$
$$C_1 chm \sin n + C_4 shm \cos n = 0$$

Вычислим:

$$\frac{dU}{dx} = C_1 msh(mx)\sin(nx) + C_1 nch(mx)\cos(nx) + C_2 mch(mx)\sin(nx) +$$
$$+C_2 nsh(mx)\cos(nx) + C_3 msh(mx)\cos(nx) - C_3 nch(mx)\sin(nx) +$$
$$+C_4 mch(mx)\cos(nx) - C_4 nsh(mx)\sin(nx) = (C_1 m - C_4 n)sh(mx)\sin(nx) +$$
$$+(C_1 n + C_4 m)ch(mx)\cos(nx) + (C_2 m - C_3 n)ch(mx)\sin(nx)$$
$$+(C_2 n + C_3 m)sh(mx)\cos(nx)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dU}{dx} = (C_1 m - C_4 n)sh(mx)\sin(nx) + (C_1 n + C_4 m)ch(mx)\cos(nx) +$$
$$+(C_2 m - C_3 n)ch(mx)\sin(nx) + (C_2 n + C_3 m)sh(mx)\cos(nx)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = (C_1 m - C_4 n)mch(mx)\sin(nx) + (C_1 m - C_4 n)nsh(mx)\cos(nx) +$$
$$+(C_1 n + C_4 m)msh(mx)\cos(nx) - (C_1 n + C_4 m)nch(mx)\sin(nx) +$$
$$+(C_2 m - C_3 n)msh(mx)\sin(nx) + (C_2 m - C_3 n)nch(mx)\cos(nx) +$$
$$+(C_2 n + C_3 m)mch(mx)\cos(nx) - (C_2 n + C_3 m)nsh(mx)\sin(nx)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \left(C_1\left(m^2 - n^2\right) - 2C_4 mn\right)ch(mx)\sin(nx) + \left(2C_1 mn + C_4\left(m^2 - n^2\right)\right)sh(mx)\cos(nx) +$$
$$+\left(C_2\left(m^2 - n^2\right) - 2C_3 mn\right)sh(mx)\sin(nx) + \left(2C_2 mn + C_3\left(m^2 - n^2\right)\right)ch(mx)\cos(nx)$$

Итак, мы можем записать второе граничное условие.

$$x=\pm 1,\quad \frac{d^2U}{dx^2}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(C_1\left(m^2-n^2\right)-2C_4mn\right)chm\sin n+\left(2C_1mn+C_4\left(m^2-n^2\right)\right)shm\cos n+$$
$$+\left(C_2\left(m^2-n^2\right)-2C_3mn\right)shm\sin n+\left(2C_2mn+C_3\left(m^2-n^2\right)\right)chm\cos n=0$$

$$-\left(C_1\left(m^2-n^2\right)-2C_4mn\right)chm\sin n-\left(2C_1mn+C_4\left(m^2-n^2\right)\right)shm\cos n+$$
$$+\left(C_2\left(m^2-n^2\right)-2C_3mn\right)shm\sin n+\left(2C_2mn+C_3\left(m^2-n^2\right)\right)chm\cos n=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(C_2\left(m^2-n^2\right)-2C_3mn\right)shm\sin n+\left(2C_2mn+C_3\left(m^2-n^2\right)\right)chm\cos n=0$$
$$\left(C_1\left(m^2-n^2\right)-2C_4mn\right)chm\sin n+\left(2C_1mn+C_4\left(m^2-n^2\right)\right)shm\cos n=0$$

Таким образом,

$$chm\sin n\cdot C_1+shm\cos n\cdot C_4=0$$

$$\left[\left(m^2-n^2\right)chm\sin n+2mnshm\cos n\right]C_1+\left[\left(m^2-n^2\right)shm\cos n-2mnchm\sin n\right]C_4=0$$

Определитель системы:

$$chm\sin n\left[\left(m^2-n^2\right)shm\cos n-2mnchm\sin n\right]-$$
$$-shm\cos n\left[\left(m^2-n^2\right)chm\sin n+2mnshm\cos n\right]=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(m^2-n^2\right)shmchm\sin n\cos n-2mnch^2m\sin^2 n$$
$$-\left(m^2-n^2\right)shmchm\sin n\cos n-2mnsh^2m\cos^2 n=0$$

$$\Updownarrow$$

$$mnch^2m\sin^2 n+mnsh^2m\cos^2 n=0\ \Leftrightarrow\ mn\left(ch^2m\sin^2 n+sh^2m\cos^2 n\right)=0$$

$$\Updownarrow$$

$m = 0$, или $n = 0$, или $\begin{cases} chm = 0 \\ \sin n = 0 \\ shm = 0 \\ \cos n = 0 \end{cases}$. Как видно последняя система не имеет решения. Поэтому мы получаем, что либо $m = 0$, либо $n = 0$. Все это ведет к тому, что $\lambda = 0$. Таким образом, в этом случае собственных функций нет.

Теперь рассмотрим вторую систему относительно C_2 и C_3.

$$shm\sin n \cdot C_2 + chm\cos n \cdot C_3 = 0$$

$$\left[\left(m^2 - n^2\right)shm\sin n + 2mnchm\cos n\right]\cdot C_2 + \left[\left(m^2 - n^2\right)chm\cos n - 2mnshm\sin n\right]\cdot C_3 = 0$$

Определитель системы:

$$\left(m^2 - n^2\right)shmchm\sin n\cos n - 2mnsh^2m\sin^2 n -$$
$$-\left(m^2 - n^2\right)shmchm\sin n\cos n - 2mnch^2m\cos^2 n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$mnsh^2m\sin^2 n + mnch^2m\cos^2 n = 0 \;\Leftrightarrow\; mn\left(sh^2m\sin^2 n + ch^2m\cos^2 n\right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$m = 0$, или $n = 0$, или $\begin{cases} chm = 0 \\ \sin n = 0 \\ shm = 0 \\ \cos n = 0 \end{cases}$. Аналогично получаем, что $\lambda = 0$. Таким образом, и в этом случае собственных функций нет.

Пусть $\lambda^2 < \frac{1}{4q^4}$. Тогда $p_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2q^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4q^4} - \lambda^2}}$. И общее решение системы принимает следующий вид: $U = C_1 e^{p_1 x} + C_2 e^{p_2 x} + C_3 e^{p_3 x} + C_4 e^{p_4 x}$. Подставим его в первое краевое условие.

$$x = \pm 1, \quad U = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} &C_1 e^{p_1} + C_2 e^{p_2} + C_3 e^{p_3} + C_4 e^{p_4} = 0 \\ &C_1 e^{-p_1} + C_2 e^{-p_2} + C_3 e^{-p_3} + C_4 e^{-p_4} = 0 \end{aligned}$$

Вычислим:

$$\frac{dU}{dx} = C_1 p_1 e^{p_1 x} + C_2 p_2 e^{p_2 x} + C_3 p_3 e^{p_3 x} + C_4 p_4 e^{p_4 x}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = C_1 p_1^2 e^{p_1 x} + C_2 p_2^2 e^{p_2 x} + C_3 p_3^2 e^{p_3 x} + C_4 p_4^2 e^{p_4 x}$$

Получим уравнения из второго краевого условия.

$$x = \pm 1, \quad \frac{d^2U}{dx^2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} &C_1 p_1^2 e^{p_1} + C_2 p_2^2 e^{p_2} + C_3 p_3^2 e^{p_3} + C_4 p_4^2 e^{p_4} = 0 \\ &C_1 p_1^2 e^{-p_1} + C_2 p_2^2 e^{-p_2} + C_3 p_3^2 e^{-p_3} + C_4 p_4^2 e^{-p_4} = 0 \end{aligned}$$

Вычислим определитель системы:

$$\begin{vmatrix} e^{p_1} & e^{p_2} & e^{p_3} & e^{p_4} \\ e^{-p_1} & e^{-p_2} & e^{-p_3} & e^{-p_4} \\ p_1^2 e^{p_1} & p_2^2 e^{p_2} & p_3^2 e^{p_3} & p_4^2 e^{p_4} \\ p_1^2 e^{-p_1} & p_2^2 e^{-p_2} & p_3^2 e^{-p_3} & p_4^2 e^{-p_4} \end{vmatrix} = e^{p_1} \cdot \Delta_1 - e^{p_2} \cdot \Delta_2 + e^{p_3} \cdot \Delta_3 - e^{p_4} \cdot \Delta_4 \text{, где}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} e^{-p_2} & e^{-p_3} & e^{-p_4} \\ p_2^2 e^{p_2} & p_3^2 e^{p_3} & p_4^2 e^{p_4} \\ p_2^2 e^{-p_2} & p_3^2 e^{-p_3} & p_4^2 e^{-p_4} \end{vmatrix} = e^{-p_2}\left(p_3^2 p_4^2 e^{p_3-p_4} - p_3^2 p_4^2 e^{p_4-p_3}\right) - e^{-p_3}\left(p_2^2 p_4^2 e^{p_2-p_4} - p_2^2 p_4^2 e^{p_4-p_2}\right) +$$

$$+ e^{-p_4}\left(p_2^2 p_3^2 e^{p_2-p_3} - p_2^2 p_3^2 e^{-p_2+p_3}\right)$$

$$e^{p_1}\Delta_1 = p_3^2 p_4^2 e^{p_1-p_2+p_3-p_4} - p_3^2 p_4^2 e^{p_1-p_2-p_3+p_4} - p_2^2 p_4^2 e^{p_1+p_2-p_3-p_4} +$$

$$+ p_2^2 p_4^2 e^{p_1-p_2-p_3+p_4} + p_2^2 p_3^2 e^{p_1+p_2-p_3-p_4} - p_2^2 p_3^2 e^{p_1-p_2+p_3-p_4}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-p_1} & e^{-p_3} & e^{-p_4} \\ p_1^2 e^{p_1} & p_3^2 e^{p_3} & p_4^2 e^{p_4} \\ p_1^2 e^{-p_1} & p_3^2 e^{-p_3} & p_4^2 e^{-p_4} \end{vmatrix} = e^{-p_1}\left(p_3^2 p_4^2 e^{p_3-p_4} - p_3^2 p_4^2 e^{-p_3+p_4}\right) - e^{-p_3}\left(p_1^2 p_4^2 e^{p_1-p_4} - p_1^2 p_4^2 e^{-p_1+p_4}\right) +$$

$$+ e^{-p_4}\left(p_1^2 p_3^2 e^{p_1-p_3} - p_1^2 p_3^2 e^{-p_1+p_3}\right)$$

$$-e^{p_2}\Delta_2 = -p_3^2 p_4^2 e^{-p_1+p_2+p_3-p_4} + p_3^2 p_4^2 e^{-p_1+p_2-p_3+p_4} + p_1^2 p_4^2 e^{p_1+p_2-p_3-p_4} -$$

$$- p_1^2 p_4^2 e^{-p_1+p_2-p_3+p_4} - p_1^2 p_3^2 e^{p_1+p_2-p_3-p_4} + p_1^2 p_3^2 e^{-p_1+p_2+p_3-p_4}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} e^{-p_1} & e^{-p_2} & e^{-p_4} \\ p_1^2 e^{p_1} & p_2^2 e^{p_2} & p_4^2 e^{p_4} \\ p_1^2 e^{-p_1} & p_2^2 e^{-p_2} & p_4^2 e^{-p_4} \end{vmatrix} = e^{-p_1}\left(p_2^2 p_4^2 e^{p_2-p_4} - p_2^2 p_4^2 e^{-p_2+p_4}\right) - e^{-p_2}\left(p_1^2 p_4^2 e^{p_1-p_4} - p_1^2 p_4^2 e^{-p_1+p_4}\right) +$$

$$+ e^{-p_4}\left(p_1^2 p_2^2 e^{p_1-p_2} - p_1^2 p_2^2 e^{-p_1+p_2}\right)$$

$$e^{p_3}\Delta_3 = p_2^2 p_4^2 e^{-p_1+p_2+p_3-p_4} - p_2^2 p_4^2 e^{-p_1-p_2+p_3+p_4} - p_1^2 p_4^2 e^{p_1-p_2+p_3-p_4} +$$

$$+ p_1^2 p_4^2 e^{-p_1-p_2+p_3+p_4} + p_1^2 p_2^2 e^{p_1-p_2+p_3-p_4} - p_1^2 p_2^2 e^{-p_1+p_2+p_3-p_4}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} e^{-p_1} & e^{-p_2} & e^{-p_3} \\ p_1^2 e^{p_1} & p_2^2 e^{p_2} & p_3^2 e^{p_3} \\ p_1^2 e^{-p_1} & p_2^2 e^{-p_2} & p_3^2 e^{-p_3} \end{vmatrix} = e^{-p_1}\left(p_2^2 p_3^2 e^{p_2-p_3} - p_2^2 p_3^2 e^{-p_2+p_3}\right) - e^{-p_2}\left(p_1^2 p_3^2 e^{p_1-p_3} - p_1^2 p_3^2 e^{-p_1+p_3}\right) +$$

$$+ e^{-p_3}\left(p_1^2 p_2^2 e^{p_1-p_2} - p_1^2 p_2^2 e^{-p_1+p_2}\right)$$

$$-e^{p_4}\Delta_4 = -p_2^2 p_3^2 e^{-p_1+p_2-p_3+p_4} + p_2^2 p_3^2 e^{-p_1-p_2+p_3+p_4} + p_1^2 p_3^2 e^{p_1-p_2-p_3+p_4} -$$

$$- p_1^2 p_3^2 e^{-p_1-p_2+p_3+p_4} - p_1^2 p_2^2 e^{p_1-p_2-p_3+p_4} + p_1^2 p_2^2 e^{-p_1+p_2-p_3+p_4}$$

Итак,

$$p_3^2 p_4^2 e^{p_1-p_2+p_3-p_4} - p_3^2 p_4^2 e^{p_1-p_2-p_3+p_4} - p_2^2 p_4^2 e^{p_1+p_2-p_3-p_4} + p_2^2 p_4^2 e^{p_1-p_2-p_3+p_4} + p_2^2 p_3^2 e^{p_1+p_2-p_3-p_4} -$$

$$-p_2^2 p_3^2 e^{p_1-p_2+p_3-p_4} - p_3^2 p_4^2 e^{-p_1+p_2+p_3-p_4} + p_3^2 p_4^2 e^{-p_1+p_2-p_3+p_4} + p_1^2 p_4^2 e^{p_1+p_2-p_3-p_4} - p_1^2 p_4^2 e^{-p_1+p_2-p_3+p_4} -$$

$$-p_1^2 p_3^2 e^{p_1+p_2-p_3-p_4} + p_1^2 p_3^2 e^{-p_1+p_2+p_3-p_4} + p_2^2 p_4^2 e^{-p_1+p_2+p_3-p_4} - p_2^2 p_4^2 e^{-p_1-p_2+p_3+p_4} - p_1^2 p_4^2 e^{p_1-p_2+p_3-p_4} +$$

$$+p_1^2 p_4^2 e^{-p_1-p_2+p_3+p_4} + p_1^2 p_2^2 e^{p_1-p_2+p_3-p_4} - p_1^2 p_2^2 e^{-p_1+p_2+p_3-p_4} - p_2^2 p_3^2 e^{-p_1+p_2-p_3+p_4} + p_2^2 p_3^2 e^{-p_1-p_2+p_3+p_4} +$$

$$+p_1^2 p_3^2 e^{p_1-p_2-p_3+p_4} - p_1^2 p_3^2 e^{-p_1-p_2+p_3+p_4} - p_1^2 p_2^2 e^{p_1-p_2-p_3+p_4} + p_1^2 p_2^2 e^{-p_1+p_2-p_3+p_4} = 0$$

$$\left(p_3^2 p_4^2 - p_2^2 p_3^2 - p_1^2 p_4^2 + p_1^2 p_2^2\right) e^{p_1-p_2+p_3-p_4} + \left(-p_3^2 p_4^2 + p_2^2 p_4^2 + p_1^2 {p_3}^2 - p_1^2 p_2^2\right) e^{p_1-p_2-p_3+p_4} +$$

$$+\left(-p_2^2 p_4^2 + p_2^2 p_3^2 + p_1^2 p_4^2 - p_1^2 p_3^2\right) e^{p_1+p_2-p_3-p_4} + \left(-p_3^2 p_4^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_4^2 - p_1^2 p_2^2\right) e^{-p_1+p_2+p_3-p_4} +$$

$$+\left(p_3^2 p_4^2 - p_1^2 p_4^2 - p_2^2 p_3^2 + p_1^2 p_2^2\right) e^{-p_1+p_2-p_3+p_4} + \left(-p_2^2 p_4^2 + p_1^2 p_4^2 + p_2^2 p_3^2 - p_1^2 p_3^2\right) e^{-p_1-p_2+p_3+p_4} = 0$$

Вспомним, что $p_{1,3}^2 = \sqrt{\dfrac{1}{2q^2} + \sqrt{\dfrac{1}{4q^4} - \lambda^2}} = P$, $p_{2,4}^2 = \sqrt{\dfrac{1}{2q^2} - \sqrt{\dfrac{1}{4q^4} - \lambda^2}} = Q$. Тогда

$$(PQ - PQ - PQ + PQ) e^{p_1-p_2+p_3-p_4} + \left(-PQ + Q^2 + P^2 - PQ\right) e^{p_1-p_2-p_3+p_4} +$$

$$+\left(-Q^2 + PQ + PQ - P^2\right) e^{p_1+p_2-p_3-p_4} + \left(-PQ + P^2 + Q^2 - PQ\right) e^{-p_1+p_2+p_3-p_4} +$$

$$+(PQ - PQ - PQ + PQ) e^{-p_1+p_2-p_3+p_4} + \left(-Q^2 + PQ + PQ - P^2\right) e^{-p_1-p_2+p_3+p_4} = 0$$

$$(P-Q)^2 e^{p_1-p_2-p_3+p_4} - (P-Q)^2 e^{p_1+p_2-p_3-p_4} + (P-Q)^2 e^{-p_1+p_2+p_3-p_4} - (P-Q)^2 e^{-p_1-p_2+p_3+p_4} = 0$$

Так как $P = Q \;\Rightarrow\; \lambda^2 = \dfrac{1}{4q^4}$, то

$$\frac{1}{2}\left(e^{p_1-p_2-p_3+p_4} + e^{-(p_1-p_2-p_3+p_4)}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{p_1+p_2-p_3-p_4} + e^{-(p_1+p_2-p_3-p_4)}\right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$ch\left(p_1 - p_2 - p_3 + p_4\right) = ch\left(p_1 + p_2 - p_3 - p_4\right)$$

В силу четности функции $y = ch(x)$, а также монотонности на участках $x \le 0$ и $x \ge 0$ последнее уравнение равносильно следующей совокупности.

$$\left[\begin{array}{l} p_1 - p_2 - p_3 + p_4 = p_1 + p_2 - p_3 - p_4 \\ p_1 - p_2 - p_3 + p_4 = -p_1 - p_2 + p_3 + p_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p_2 = p_4 \\ p_1 = p_3 \end{array}\right.$$

Второе равенство в принципе невозможно. Первое же ведет к $\lambda = 0$. Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи отрицательной правой части и показали, что ни в одном из них нет набора собственных функций. Перейдем к рассмотрению положительной правой части.

$$\frac{d^4U}{dx^4} - \frac{1}{q^2}\frac{d^2U}{dx^2} - \lambda^2 U = 0$$

$$x = \pm 1, \quad U = 0, \quad \frac{d^2U}{dx^2} = 0$$

Характеристическое уравнение системы:

$$p^4 - \frac{1}{q^2}p^2 - \lambda^2 = 0,\; p^2 = \frac{1}{2q^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4q^4} + \lambda^2}\,.$$

Примем следующие обозначения: $p_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2q^2} + \sqrt{\dfrac{1}{4q^4} + \lambda^2}}\,, p_2 = \sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{4q^4} + \lambda^2} - \dfrac{1}{2q^2}}$.

Тогда $p = \pm p_1,\; p = \pm i p_2$.

Общее решение системы будет иметь вид: $U = C_1 e^{p_1 x} + C_2 e^{-p_1 x} + C_3 \sin p_2 x + C_4 \cos p_2 x$.

Первое граничное условие нам дает следующую систему:

$$x = \pm 1, \quad U = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$C_1 e^{p_1} + C_2 e^{-p_1} + C_3 \sin p_2 + C_4 \cos p_2 = 0$$
$$C_1 e^{-p_1} + C_2 e^{p_1} - C_3 \sin p_2 + C_4 \cos p_2 = 0$$

Вычислим:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = C_1 p_1^2 e^{p_1 x} + C_2 p_1^2 e^{-p_1 x} - C_3 p_2^2 \sin p_2 x - C_4 p_2^2 \cos p_2 x$$

$$x = \pm 1, \quad \frac{d^2U}{dx^2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$C_1 p_1^2 e^{p_1} + C_2 p_1^2 e^{-p_1} - C_3 p_2^2 \sin p_2 - C_4 p_2^2 \cos p_2 = 0$$
$$C_1 p_1^2 e^{-p_1} + C_2 p_1^2 e^{p_1} + C_3 p_2^2 \sin p_2 - C_4 p_2^2 \cos p_2 = 0$$

Определитель системы:

$$\begin{vmatrix} e^{p_1} & e^{-p_1} & \sin p_2 & \cos p_2 \\ e^{-p_1} & e^{p_1} & -\sin p_2 & \cos p_2 \\ p_1^2 e^{p_1} & p_1^2 e^{-p_1} & -p_2^2 \sin p_2 & -p_2^2 \cos p_2 \\ p_1^2 e^{-p_1} & p_1^2 e^{p_1} & p_2^2 \sin p_2 & -p_2^2 \cos p_2 \end{vmatrix} = 2\left(p_1^2 + p_2^2\right)\left(e^{2p_1} - e^{-2p_1}\right)\sin p_2 \cos p_2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$p_2 = \pi n$, либо $p_2 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, п.к. $p_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2q^2} + \sqrt{\dfrac{1}{4q^4} + \lambda^2}} > 0$,

Таким образом, найден следующий набор базисных функций:

$$U_n^1(x) = \sin \pi n x$$
$$U_n^2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)x$$

В результате общее решение системы имеет вид: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n^1(t)\cdot U_n^1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n^2(t)\cdot U_n^2(x)$

Рассмотрим первый набор собственных функций: $U_n^1(x)=\sin\pi nx$.

$\delta(x+1-vt)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\pi nx$, где

$$a_n=\int_{-1}^{1}\delta(x+1-vt)\cdot\sin\pi nx\cdot dx=\sin\left[\pi n(vt-1)\right]=(-1)^n\sin(\pi\nu nt)$$

Тогда:

$$\ddot{T}_n^1+(\pi n)^2\left[q^2(\pi n)^2+1\right]T_n^1=\mu f\cdot(-1)^{n+1}\sin(\pi\nu nt)$$
$$t=0,\quad T_n^1=0,\quad \dot{T}_n^1=0$$

Общее решение однородного уравнения представимо в следующей форме.

$$T_n^1=A\sin\left[\pi n\sqrt{q^2(\pi n)^2+1}\right]t+B\cos\left[\pi n\sqrt{q^2(\pi n)^2+1}\right]t$$

Пусть $\sqrt{q^2(\pi n)^2+1}\neq\nu$. Тогда будем искать частное решение в следующем виде $\tilde{T}_n^1=C\sin(\pi\nu nt)$. Тогда:

$$C=\frac{\mu f\cdot(-1)^{n+1}}{(\pi n)^2\left[q^2(\pi n)^2+1-\nu^2\right]},\ B=0,\ A=\frac{\mu f\nu\cdot(-1)^n}{(\pi n)^2\sqrt{q^2(\pi n)^2+1}\left[q^2(\pi n)^2+1-\nu^2\right]}.$$

Пусть: $\sqrt{q^2(\pi n)^2+1}=\nu$. Тогда:

$$\ddot{T}_n^1+(\pi\nu n)^2T_n^1=\mu f\cdot(-1)^{n+1}\sin(\pi\nu nt)$$
$$t=0,\quad T_n^1=0,\ \dot{T}_n^1=0$$

В этом случае частное решение следует искать в следующем виде $\hat{T}_n^1=\left[C_1\sin(\pi\nu nt)+C_2\cos(\pi\nu nt)\right]\cdot t$.

Тогда:

$$\frac{d\hat{T}_n^1}{dt} = C_1 \sin\left(\pi \nu n t\right) + C_1 \pi \nu n \cos\left(\pi \nu n t\right) \cdot t + C_2 \cos\left(\pi \nu n t\right) - C_2 \pi \nu n \sin\left(\pi \nu n t\right) \cdot t$$

$$\frac{d^2\hat{T}_n^1}{dt^2} = 2C_1 \pi \nu n \cos\left(\pi \nu n t\right) - C_1 \left(\pi \nu n\right)^2 \sin\left(\pi \nu n t\right) \cdot t -$$
$$- 2C_2 \pi \nu n \sin\left(\pi \nu n t\right) - C_2 \left(\pi \nu n\right)^2 \cos\left(\pi \nu n t\right) \cdot t$$

Таким образом, подставляя частное решение в уравнение, получим

$$2C_1 \pi \nu n \cos\left(\pi \nu n t\right) - 2C_2 \pi \nu n \sin\left(\pi \nu n t\right) = \mu f \cdot \left(-1\right)^{n+1} \sin\left(\pi \nu n t\right)$$

$$\Downarrow$$

$$C_1 = 0,\ C_2 = \frac{\mu f \cdot \left(-1\right)^n}{2\pi \nu n}$$

$$T_n^1 = A \sin\left[\pi n \sqrt{q^2 \left(\pi n\right)^2 + 1}\right] t + B \cos\left[\pi n \sqrt{q^2 \left(\pi n\right)^2 + 1}\right] t + \frac{\mu f \cdot \left(-1\right)^n}{2\pi \nu n} t \cos\left(\pi \nu n t\right)$$

После подстановки в начальные условия получим:

$$B = 0,\ A = \frac{\mu f \cdot \left(-1\right)^{n+1}}{2\left(\pi n\right)^2 \nu \sqrt{q^2 \left(\pi n\right)^2 + 1}}$$

Решение для второй группы собственных функций находится совершенно аналогично.

Теперь мы можем записать общее решение нашей системы.

$$y\left(x,t\right) = -\frac{q^2 f}{ch\left(q^{-1}\right)} ch\left(\frac{x}{q}\right) + f\,\frac{x^2 - 1}{2} + q^2 f + \sum_{n=1}^{\infty} T_n^1\left(t\right) \cdot \sin \pi n x + \sum_{n=1}^{\infty} T_n^2\left(t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) x,$$

где функции $T_n^1\left(t\right)$ и $T_n^2\left(t\right)$ определяются следующим образом:

$$T_n^1(t)=\frac{\mu f\cdot(-1)^n}{(\pi n)^2\left[q^2(\pi n)^2+1-\nu^2\right]}\cdot\left[\frac{\nu}{\sqrt{q^2(\pi n)^2+1}}\sin\left[\pi n\sqrt{q^2(\pi n)^2+1}\right]t-\sin\pi\nu nt\right]$$ в

случае если $\sqrt{q^2(\pi n)^2+1}\neq\nu$.

$$T_n^1(t)=\frac{\mu f\cdot(-1)^{n+1}}{2\pi\nu n}\left[\frac{1}{\pi n\sqrt{q^2(\pi n)^2+1}}\sin\left[\pi n\sqrt{q^2(\pi n)^2+1}\right]t-\cos(\pi\nu nt)\cdot t\right]$$ в случае

если $\sqrt{q^2(\pi n)^2+1}=\nu$

$$T_n^2(t)=\frac{\mu f\cdot(-1)^n}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2\left[q^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2+1-\nu^2\right]}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\nu}{\sqrt{q^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2+1}}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\left[\pi n\sqrt{q^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2+1}\right]t-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\nu t\right]$$

в случае если $\sqrt{q^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2+1}\neq\nu$.

$$T_n^2(t)=\frac{\mu f\cdot(-1)^{n+1}}{2\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\nu}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\sqrt{q^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2+1}}\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\sqrt{q^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2+1}\right]t-\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\nu t\right)\cdot t\right]$$

в случае если $\sqrt{q^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2+1}=\nu$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gavrilov S. Passage through the critical velocity by a moving load in an elastic waveguide. The nonlinear statement for the problem // Z. Angew. Math. Mech. 2000. Vol. 80. P. S743–S744.

2. Gavrilov S. Nonlinear investigation of the possibility to exceed the critical speed by a load on a string // Acta Mechanica. 2002. Vol. 154. P. 47–60.

3. Gavrilov S.N. Configurational forces in elastic systems with moving loads // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Специальный выпуск “Нелинейные проблемы механики сплошной среды”. 2003. С. 7–14.

4. Гаврилов С.Н., Индейцев Д.А. Об эволюции ловушечной моды колебаний в дискретно-континуальной системе с медленно меняющимися параметрами // Труды XXIII Летней Школы “Актуальные проблемы механики” 2000 / Под ред. Д.А. Индейцева ; ИПМаш РАН. Т. 2. Санкт- Петербург, 2001. С. 80–92.

5. Гаврилов С.Н. Об эффективной массе материальной точки, движущейся по струне на винклеровском основании // ПММ. 2006. Т. 70, № 4. С. 641–649.

6. Гаврилов С.Н., Индейцев Д.А. Об эволюции локализованной моды колебаний в системе “струна на упругом основании – подвижное инерционное включение” // ПММ. 2002. Т. 66, № 5. С. 864–873.

7. B. Lansdorp, H.M.J.R. Soemers, E.J. van der Heide, M. Kruijff, Design of a high-tension elastically deforming space tether deployer, IAC-04-IAA-3.8.2, 2004.

8. A.S. Wijnans, B.T.C. Zandbergen, M. Kruijff, E.J. van der Heide, Bare Electrodynamic Tape Tether Experiment onboard the Delfi-1 University Satellite, 4th International Spacecraft Propulsion Conference (ESA SP-555), Chia Laguna, Sardinia, Italy, 2-9 June 2004.

9. V.A. Chobotov, N. Melamed, W.H. Ailor, W.S. Campbell, Ground assisted rendezvous with geosynchronous satellites for the disposal of space debris by means of Earth-oriented tethers, Acta Astronautica 64 (9-10) (2009) 946–951.

10. M. Kruijff, E.J. van der Heide, Qualification and in-flight demonstration of European tether deployment system on YES2, Acta Astronautica 64 (2009) 882–905.

11. N.N. Smirnov, Yu.A. Demyanov, A.V. Zvyaguin, A.A. Malashin, A.A. Luzhin, Dynamical simulation of tether in orbit deployment, Acta Astronautica 67 (2010) 324–332.

12. Смирнов Н.Н., Звягин А.В., Малашин А.А. Динамические процессы при разворачивании тросовой системы во время полета КА «Фотон М-3». Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Москва, 20-21 января 2011 года. – М.: Издательство Московского университета. 2011. С.454-457

13. A.V. Zvyaguin, Yu.A. Demyanov, B.V. Kuksenko, A.A. Malashin, A.A. Luzhin, N.N. Smirnov, Dynamics of tether systems deployment in low Earth orbits, in: in: Proceedings of the Scientific Conference ‘‘Lomonosovskie Chteniya’’ Mechanics, Moscow University Press, 2007, p. 68.

14. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 320 с. – ISBN 5-9221-0172-2.

15. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 584 с.

16. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. – М.: ГИТТЛ, 1951. – 432 с.

17. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.

18. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Учебное пособие. Т.1-2. Изд. Наука.1970

19. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1953.264 с.

20. Рахматулин Х.А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. // ПММ. 1945. Т. IX. № 6.

21. Рахматулин Х.А. Поперечный удар по гибкой нити телом заданной формы. // ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 1.

22. Х.А. Рахматулин, Ю.А. Демьянов Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – М.: «Наука». 1961

23. Зверев И.Н. Некоторые задачи о распространении волн при ударе. – М.: МГУ, 1949.

24. Павленко А.Л. Некоторые вопросы динамики гибкой растяжимой нити // Газовая и волновая динамика. 1979. Вып. 3. С. 190-199.

25. Рябис А.А. Поперечный удар притупленным телом по гибкой связи при наличии трения. // Вестник МГУ. Сер. «Математика, механика». 1966. №6.

26. Демьянов Ю.А., Демьянова Е.Г., Лобанова С.С. Распространение поперечно-продольных волн в натянутой струне при ударе по ней телом произвольной формы. // МТТ. 2003. №2. С. 26 - 39.

27. Демьянов Ю.А., Малашин. А.А. Вынужденные продольные колебания музыкальных струн, обусловленные их поперечными колебаниями. Газовая и волновая динамика: Сб. ст. – М.: Изд-во МГУ (Сайрес-пресс). 2005. С. 178 – 187.

28. Кристеску Н. О волнах нагрузки и разгрузки в упругой или пластической гибкой нити. // ПММ. 1954. Т. XVIII. Вып. 3.

29. Ленский Э.В. Вынужденные движения поперечной волны в гибкой растяжимой нити. //Механика твердого тела. 1968. № 6.

30. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.

31. Zvyaguin A.V., Panfilov D.I. The motion of the thread with a variable length. Acta Astronautica 97 (2014) pp. 92–98.

32. Гирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. - М.: АН СССР, 1962

33. Гирхгоф Г. Механика. - М.: АН СССР, 1962

34. Сафронов В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. Воронеж: ВГУ, 1983. - 194 с.

35. Панфилов Д.И. Скользящий удар по идеальной растяжимой нити. Сборник докладов международной конференции «Наука как основа возрождения общества и экономики» - Д.: научно-информационный центр «Знание», 2014 – с.10-11

36. Панфилов Д.И. Скользящий удар по идеальной растяжимой нити. Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2014.

37. Панфилов Д.И. Скользящий удар по идеальной растяжимой нити. Труды конференции-конкурса молодых ученых. 8–9 октября 2013 г. – М.: Издательство Московского университета, 2014. – с.179–186

38. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. – М.: Лань, 2012. – 512 с.

39. Рахматулин Х.А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. // ПММ. 1945. Т. IX. № 6.

40. Демьянов Ю.А. Асимптотический метод решения задач распространения волн в нити. // ПММ. 1993. № 4. С. 146 – 149.

41. Звягин А.В., Панфилов Д.И. Динамика нити переменной длины. СПб.: Изд-во «КультИнформПресс», 2014. Сборник научных статей по итогам международной научно-практической конференции. – с.50-56

42. Звягин А.В., Зубков А.Ф., Панфилов Д.И. Скользящий удар по гибкой растяжимой нити. Теория и Эксперимент. СПб.: Изд-во «КультИнформПресс», 2014. Сборник научных статей по итогам международной научно-практической конференции. – с.44-49

43. Звягин А.В., Зубков А.Ф., Панфилов Д.И. Динамический прогиб балки. СПб.: Изд-во «КультИнформПресс», 2014. Сборник научных статей по итогам международной научно-практической конференции. – с.38-44

44. Панфилов Д.И. Движение нити переменной длины. Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2013.

45. Панфилов Д.И. Изгибная жесткость резиновой нити. Теория и эксперимент. Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015» / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2015.

46. Звягин А.В., Зубков А.Ф., Панфилов Д.И. Скользящий удар по гибкой растяжимой нити. Теория и эксперимент. Механика твердого тела. (Принят в печать)

47. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, 1956 – 600 с.